

Raport Badawczy
Research Report

RB/40/2017

**Optymalizacja i symulacja
przejazdu pociągu: analiza
przejazdów optymalnych**

**A. Myśliński, Z. Nahorski,
W. Radziszewska, K. Szulc**

**Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences**



POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Zakładu zgłaszający pracę:
Prof. dr hab. inż. Zbigniew Nahorski

Warszawa 2017

Optymalizacja i symulacja przejazdu pociągu: analiza przejazdów optymalnych

Andrzej Myśliński, Zbigniew Nahorski,
Weronika Radziszewska, Katarzyna Szulc

Spis treści

1	Wprowadzenie	4
2	Uproszczony model pociągu	6
3	Dane do obliczeń numerycznych	13
3.1	Masa pociągu M	13
3.2	Pochylenie toru	15
3.3	Opory ruchu	15
3.4	Siła pociągowa	18
3.5	Wskaźnik jakości J	18
4	Rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego	20
5	Sterowanie odcinkami stałe	22
6	Jazda z maksymalną siłą pociągową	25
7	Warunki konieczne optymalności	28
7.1	Sformułowanie zadania	28
7.2	Warunki konieczne	30
7.3	Wyznaczanie czasów przełączeń z warunków zasady maksimum . . .	36
7.3.1	Wyznaczenie czasów przełączeń z równań sprzężonych	36
7.3.2	Numeryczne wyznaczanie czasów przełączeń	37
8	Zestawienie wzorów dla optymalnych fragmentów	41
8.1	Przyspieszanie	41
8.2	Zerowe sterowanie	42
8.3	Stała prędkość	43
8.4	Hamowanie	44
9	Trajektorie optymalne	45
9.1	Trajektoria najszybsza – przejazd A.	45
9.2	Dodatek zerowego sterowania – przejazd B.	49
9.3	Wybór między przejazdami B i C	51
9.4	Duże zerowe sterowanie – przejazd C	55
9.5	Wybór między przejazdem C a wolniejszymi	57
9.6	Przejazd z fragmentem stałej prędkości – przejazd D	61
9.7	Wybór między przejazdem D a przejazdami DE	63
9.8	Przejazdy pośrednie DE1 i DE2	65
9.9	Przejazd najwolniejszy – przejazd E	69

9.10	Algorytm poszukiwania optymalnego przejazdu	73
10	Obliczanie energii przejazdów dla poszczególnych typów przejazdów	74
10.1	Energia przejazdu dla optymalnych reżymów sterowania	74
10.2	Energia przejazdu na odcinkach drogi	75
A	Załącznik	77
A.1	Rozwiązanie nieliniowego równania ruchu dla zakresu stałej mocy .	77
A.2	Model z uwzględnieniem jazdy po łuku	82
A.3	Równanie zależne od drogi	86
A.4	Dodatkowy stały wiatr.	87
B	Literatura	90

1 Wprowadzenie

Kolej obsługuje sporą część transportu osobowego (w Polsce około 10%) i towarowego (w Polsce ponad 30%), zużywając w tym celu znaczną ilość energii. W odróżnieniu od wielu innych środków transportu, transport kolejowy pozwala na oszczędności energii związane ze sposobem jazdy, ze względu na wydzielone trakcje z bezkolizyjnym ruchem, gdy są zachowane rozkłady jazdy. Oszczędność energii ma nie tylko wymiar ekonomiczny, ale także powoduje zmniejszenie emisji gazów cieplarnianych i innych zanieczyszczeń atmosfery, a więc ma także wymiar ekologiczny.

Pierwsze prace dotyczące optymalizacji profilu prędkości jazdy pojawiły się w Japonii w latach 60-tych ubiegłego wieku [17]. Istotny postęp w analizie tego problemu wprowadziła praca [5]. Jednak zdecydowany rozwój badań dotyczących sterowania jazdą pociągu nastąpił dopiero w XXI w. Wczesne intensywne badania na przełomie wieków prowadzono w Australii [30, 15, 13, 14, 9], ale główny wysyp prac nastąpił dopiero po 2010 r. Część tych prac przedstawiono w wykazie literatury tego opracowania, można je także znaleźć w wykazach literatury artykułów przeglądowych [2, 3, 33]. W Europie powstał w tym czasie projekt [26], w ramach którego jest możliwość wymiany doświadczeń i współpracy w rozwijaniu tej tematyki.

Większość prac kontynuuje metody rozwiązania przedstawione w najwcześniejszych pracach i opiera optymalizację na zasadzie maksimum Pontriagina [29]. Trudności w jej zastosowaniu wynikają z występowania ograniczeń na jeden ze stanów – prędkość – i zależnych od innego stanu – drogi, a także zmienności równania w zależności od drogi, co wynika z różnych oporów zależnych od różnicy wzniesień, zakrętów, czy oporów powietrza, na przykład w tunelach. Stosując zasadę maksimum Pontriagina można stosunkowo łatwo uzyskać ogólną charakterystycję optymalnych fragmentów przejazdów, jednak duży kłopot sprawia wyznaczenie czasów przełączeń między tymi fragmentami. Z tego powodu pojawiły się prace, w których do optymalizacji używa się metod heurystycznych. Innym kierunkiem jest modyfikacja rozkładu jazdy w celu zmniejszenia wydatku energii, a także układanie regionalnych rozkładów jazdy i zarządzanie w takich regionach ruchem pociągów pod kątem oszczędności energii, patrz [33].

W tym opracowaniu zajmujemy się najprostszym zagadnieniem wyznaczania optymalnych profili jazdy. Jednak celem jest opracowanie takich profili dla tras ruchu lokalnego w terenie polodowcowym, charakteryzującym się licznymi zmianami nachylenia trasy. Łącznie z licznymi zmianami ograniczeń na prędkość powoduje to, że kłopotliwe wyznaczanie punktów przełączeń jest w takim przypadku liczne.

Metody rozpatrywane w opracowaniu są oparte na zasadzie maksimum Pontriagina, jednak zaproponowano tu liczne uproszczenia powodujące przyspieszenie obliczeń. Podstawowym z nich jest użycie analitycznych rozwiązań równań ruchu

zamiast przyjętych ogólnie rozwiązań numerycznych. Głównym rozwiązywanym w opracowaniu przypadkiem są liniowe równania ruchu powstałe przez przyjęcie liniowej zależności oporu powietrza od prędkości względnej pociągu. Jednak podano także rozwiązania analityczne równań nieliniowych, które można będzie rozpatrzeć w dalszych badaniach.

Innym pomysłem rozważanym w tym opracowaniu jest podział trasy między przystankami na odcinki o stałych ograniczeniach prędkości oraz stałym równaniu ruchu. Rozwiązania optymalne dla takich odcinków sprowadzają się do kilku typów przejazdów. Sklasyfikowano te typy przejazdów, przedstawiono sposoby wyznaczania w nich chwil przełączeń między fragmentami o stałych wymuszeniach oraz podano algorytm wyboru typu przejazdu przy zadanych początkowych i końcowych czasach przejazdu oraz prędkościach w tych chwilach. Okazało się przy tym, że dla dokładnych wzorów występowały trudności numeryczne w wyznaczaniu rozwiązań układów równań nieliniowych. Opracowano przybliżenia wzorów sprowadzające równania do równań kwadratowych, których rozwiązanie nie nastęrcza trudności, a jednocześnie jest wystarczająco dokładne.

W tym opracowaniu nie rozważono natomiast metod połączenia przejazdów na odcinkach w optymalny przejazd na całej trasie między przystankami, poza ogólnym zarysowaniem możliwych metod postępowania. Rozwiązanie tego zagadnienia będzie tematem dalszych prac.

W opracowaniu nie podano także przykładów numerycznych wyznaczania rozwiązań. Będzie to tematem oddzielnego opracowania.

7 Warunki konieczne optymalności

7.1 Sformułowanie zadania

Niech t oznacza jak poprzednio zmienną czasu w przedziale $[0, T] \subset \mathbb{R}$ zaś $[t_{k-1}, t_k] \subset [0, T]$, $k = 1, 2, \dots, K$, zadany podprzedział taki, że $0 < t_{k-1} < t_k$. Ruch pociągu w przedziale czasu $[t_{k-1}, t_k]$ opisują dwie zmienne stanu: funkcja $s(t)$ charakteryzująca drogę przebytą przez pociąg oraz funkcja prędkości pociągu $v(t)$. Rozważmy zadanie sterowania optymalnego ruchem pociągu w skończonym horyzoncie czasowym $[t_{k-1}, t_k]$ polegające na minimalizacji funkcjonału energii

$$J(h(t)) = \min_u \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(h(t), v(t)) dt, \quad (35)$$

Funkcja $P(h(t), v(t))$ wyraża moc lokomotywy pociągu. Założymy [10, 5], że funkcja ta ma postać

$$P(h(t), v(t)) = E h(t) v(t), \quad (36)$$

czyli jest iloczynem siły pociągowej $u(t)$ oraz prędkości $v(t)$,

$$E = \begin{cases} E^+ > 0 & \text{gdy } h \geq 0 \\ E^- \leq 0 & \text{gdy } h < 0 \end{cases}$$

jest zadaną stałą rzeczywistą. Stała ta jest ujemna lub równa zero, gdy pociąg hamuje, co oznacza, że energia hamowania (zawsze nieujemna) może być dodatnia (rekuperacja energii) lub zerowa.

Minimalizacja zachodzi przy ograniczeniach dynamicznych opisanych układem równań różniczkowych zwyczajnych dla $t \in (t_{k-1}, t_k)$:

$$\frac{ds(t)}{dt} = v(t), \quad (37)$$

oraz (patrz równanie (154))

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{h(t)}{M} + K_{k-1}(v(t)) + R_{k-1}(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}), \quad (38)$$

Funkcja $h(t)$ jest interpretowana [10, 5] jako siła pociągowa. Założymy, że siła pociągowa h jest liniową funkcją sterowania u , tj., ma postać:

$$h(u(t)) = F u(t), \quad F > 0 \text{ jest zadaną stałą rzeczywistą.} \quad (39)$$

przy czym

$$F = \begin{cases} F^+ & \text{gdy } u \geq 0 \\ F^- < F^+ & \text{gdy } u < 0 \end{cases}$$

$$K_{k-1}(v(t)) \stackrel{def}{=} -A_{k-1}v^2(t) + B_{k-1}v(t)$$

[lub $K_{k-1}(v(t)) \stackrel{def}{=} -\frac{p}{M}v(t)$ dla liniowej zależności oporu od prędkości]

$$R_{k-1}(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}) \stackrel{def}{=} C_{k-1} - \frac{1}{M}h(u(t))$$

z warunkami początkowymi i końcowymi

$$v(t_{k-1}) = v_{k-1}, \quad v(t_k) = v_k, \quad s(t_{k-1}) = s_{k-1}, \quad s(t_k) = s_k, \quad (40)$$

przy czym zmienne stanu $(s, v) \in [s_{k-1}, s_k] \times [0, v_{max}^{k-1}] \subset R^2$, gdzie v_{max} , $v_{k-1} = v(t_{k-1})$, $v_k = v(t_k)$, $s_{k-1} = s(t_{k-1})$, $s_k = s(t_k)$ są zadanymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $v_{k-1}, v_k \in [0, v_{max}]$.

Współczynniki $A_{k-1}, B_{k-1}, C_{k-1}$ równania (38) są zdefiniowane wzorem za (156). W szczególnym przypadku liniowego równania stanu i jazdy po prostym torze $A_{k-1} = 0$, $B_{k-1} = -\frac{p}{M}$, a $C_{k-1} = \frac{h}{M} + g \sin(\alpha_{k-1}) - \frac{1}{M}T(\alpha_{k-1}) + \frac{p}{M}w(t)$.

Dla zadanych dodatnich liczb rzeczywistych u_{min} oraz u_{max} funkcja sterowania u spełnia ograniczenia nierównościowe:

$$-u_{min} \leq u(t) \leq u_{max}, \quad t \in [t_{k-1}, t_k],$$

co oznacza, że dla $u \in [-u_{min}, 0)$ występuje hamowanie pociągu, zaś dla $u \in [0, u_{max}]$ występuje przyspieszanie pociągu [14]. Jednak dla nieliniowej zależności siły pociągowej od prędkości (31) ustalonej wartości u może odpowiadać inna wartość siły pociągowej $h(t)$. Znając siłę pociągową można wyznaczyć $u(t)$ z zależności

$$u(t) = \frac{h(t)}{h_{max}(v)}$$

Dlatego za sterowanie przyjmiemy dalej siłę pociągową, która podlega ograniczeniom

$$-h_{min} \leq h(t) \leq h_{max}(v)$$

przy czym $h_{max}(v)$ jest zadane wzorem (31).

Przez H_{ad} oznaczymy zbiór sterowań dopuszczalnych:

$$H_{ad} = \{h \in R : g_{1h}(h) \geq 0, g_{2h}(h, v) \geq 0\}, \quad (41)$$

$$g_{1h}(h) = h + h_{min} \geq 0, \quad g_{2h}(h, v) = h_{max}(v) - h \geq 0.$$

Podobnie jak dla sterowania, wprowadzimy zbiory dopuszczalnych wartości dla zmiennych stanu, czyli prędkości i drogi:

$$V_{ad}^{k-1} = \{v \in R : g_{1v}^{k-1}(v) \geq 0, g_{2v}^{k-1}(v) \geq 0\}, \quad (42)$$

$$S_{ad}^{k-1} = \{s \in R : g_{1s}^{k-1}(s) \geq 0, g_{2s}^{k-1}(s) \geq 0\}, \quad (43)$$

przy czym

$$g_{1v}^{k-1}(v) = v, \quad g_{2v}^{k-1}(v) = v_{max}^{k-1} - v, \quad (44)$$

$$g_{1s}^{k-1} = s - s_{k-1}, \quad g_{2s}^{k-1}(x) = s_k - s. \quad (45)$$

Funkcje stanu $v(t)$ oraz $s(t)$ dla $t \in [t_{k-1}, t_k]$ przyjmują wartości nieujemne. Są one ograniczone od góry i od dołu. Dla zadanej liczby rzeczywistej $v_k = v(t_k)$, tj., prędkości v w punkcie końcowym t_k zachodzi $v_k \in V_{ad}^{k-1}$. Podobnie $s_k = s(t_k) \in S_{ad}^{k-1}$. Jednak z równania (37) oraz dodatniości $v(t)$ wynika, że $s(t)$ jest funkcją rosnącą. Oznacza to, że warunki $s(t_{k-1}) = s_{k-1}$ i $s(t_k) = s_k$ zapewniają spełnienie ograniczenia (43), przez co nie będą one dalej uwzględniane.

Zauważmy, że dla zadanej stałej rzeczywistej $a > 0$, ograniczenie górne (42) można zamienić na funkcję kary

$$k(v) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } v(t) \leq v_{max}^{k-1}, \\ \frac{a}{2}(v(t) - v_{max}^{k-1})^2 & \text{jeżeli } v(t) > v_{max}^{k-1}, \end{cases}$$

dotaną do wskaźnika jakości (35). Dzięki temu otrzymujemy nowy wskaźnik jakości

$$J(h(t)) = \min_h \int_{t_{k-1}}^{t_k} (Eh(t)v(t) + k(v))dt. \quad (46)$$

Zadanie (35)-(45) jest zadaniem sterowania optymalnego z ustalonym warunkiem końcowym dla obu zmiennych oraz z ograniczeniami na sterowanie oraz na stan. Poza ograniczeniem $g_{2h}(h, v)$ pozostałe ograniczenia są rozłączne, a z natury problemu wynika, że niektóre z nich, jak na przykład ograniczenia dolne w (42), (43) dla sterowania optymalnego są spełnione, gdyż postój pociągu ($v(t) = 0$) nie może być fragmentem optymalnego przejazdu.

7.2 Warunki konieczne

Do sformułowania warunków koniecznych optymalności dla tego zadania wykorzystamy zasadę maksimum Pontriagina [12]. W tym celu zdefiniujemy hamiltonian \tilde{H} dla zadania sterowania (35)-(38) bez ograniczeń na stan i sterowanie:

$$\tilde{H}^{k-1}(s, v, h, \lambda_0, \eta, \lambda, t) = -\lambda_0 Eh(t)v(t) + \eta s(t) \quad (47)$$

$$+ \lambda \left[\frac{1}{M} h(t) + K_{k-1}(v(t)) + R_{k-1}(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}) \right]. \quad (48)$$

Funkcje $\eta(t)$ oraz $\lambda(t)$ są zmiennymi sprzężonymi odpowiadającymi równaniom stanu (37) i (38), zaś $\lambda_0 \geq 0$ jest stałą liczbową. Będziemy zakładać, że $\lambda_0 > 0$ oraz bez straty ogólności przyjmiemy, że $\lambda_0 = 1$ i ją dalej pominiemy [12], czyli hamiltonian będzie równy

$$H^{k-1}(s, v, h, \eta, \lambda, t) = \tilde{H}^{k-1}(s, v, h, 1, \eta, \lambda, t)$$

Przypadek $\lambda_0 = 0$ jest przypadkiem szczególnym i właściwie oznacza, że rozwiązanie optymalne nie zależy od funkcji celu $J(h)$. Taki przypadek może wystąpić przy bardzo skomplikowanych ograniczeniach, które w rezultacie decydują o rozwiązaniu optymalnym.

Wprowadzając mnożniki Lagrange'a $\mu_i, \nu_i, i = 1, 2$, odpowiednio dla ograniczeń (41) oraz (42), zdefiniujemy uogólniony hamiltonian (lagrangian) L dla zadania sterowania optymalnego (35)-(44) z ograniczeniami na sterowanie, prędkość i drogę:

$$L^{k-1}(s, v, h, \eta, \lambda, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, t) = H^{k-1}(s, v, h, \eta, \lambda, t) + \mu_1 g_{1h}(h) + \mu_2 g_{2h}(h, v) + \nu_1 g_{1v}^{k-1}(v) + \nu_2 g_{2v}^{k-1}(v) \quad (49)$$

Jeżeli pozbedziemy się ograniczeń na prędkość przez wprowadzenie funkcji kary $k(v)$ i wykorzystamy wskaźnik jakości w postaci (46), to wtedy uogólniony hamiltonian będzie miał postać:

$$H_1^{k-1}(s, v, h, \eta, \lambda, t) = -Eh(t)v(t) - k(v) + \eta s(t) + \lambda \left[\frac{1}{M} h(t) + K_{k-1}(v(t)) + R_{k-1} \right], \quad (50)$$

Zasada maksimum. Z zasady maksimum Pontriagina [12, 22] wynika, że optymalna funkcja sterowania $h^*(t) \in H_{ad}$ spełnia następujące warunki konieczne

$$h^*(t) = \operatorname{argmax}_{h \in H_{ad}} H^{k-1}(s^*(t), v^*(t), h, \eta, \lambda, t) \quad (51)$$

dla optymalnej trajektorii prędkości $v^*(t) \in V_{ad}^{k-1}$ i drogi $s^*(t)$. Przy założeniu różniczkowalności funkcji optymalna funkcja sterowania h^* spełnia warunek stacjonarności lagrangianu

$$\frac{\partial L^{k-1}(s, v, h, \lambda, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, t)}{\partial h} = \frac{\partial H^{k-1}(s, v, h, \eta, \lambda, t)}{\partial h} + \mu_1 \frac{\partial g_1}{\partial h} + \mu_2 \frac{\partial g_2}{\partial h} = 0, \quad (52)$$

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = - \frac{\partial L^{k-1}(s, v, h, \lambda, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, t)}{\partial s}, \quad (53)$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = - \frac{\partial L^{k-1}(s, v, h, \lambda, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, t)}{\partial v}. \quad (54)$$

Ponieważ funkcja h (a wobec tego i $P(h, v)$) nie jest różniczkowalna w punkcie $t = 0$, pierwsze równanie obowiązuje dla $t \neq 0$, czyli zarazem $h \neq 0$. Równania (52)-(54) uzupełniają warunki komplementarności i znaków mnożników Lagrange'a [12, 22]:

$$\mu_1 \geq 0 \quad \text{oraz} \quad \mu_1 g_{1h}(h) = 0, \quad (55)$$

$$\mu_2 \geq 0 \quad \text{oraz} \quad \mu_2 g_{2h}(h, v) = 0. \quad (56)$$

Podobnie

$$\nu_1 \geq 0, \quad \nu_1 g_{1v}^{k-1}(v) = 0, \quad (57)$$

$$\nu_2 \geq 0, \quad \nu_2 g_{2v}^{k-1}(v) = 0, \quad (58)$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{dL^{k-1}(t)}{dt}, \quad (59)$$

przy czym ta ostatnia równość jest spełniona dla trajektorii optymalnej. Warunki transwersalności mają postać:

$$\eta(t_k^-) = \psi, \quad \lambda(t_k^-) = \delta_0 \frac{\partial g_{2h}((h(t_k), v_k))}{\partial v} + \sum_{i=1}^2 \delta_i \frac{\partial g_{iv}^{k-1}(v_k)}{\partial v} + \gamma, \quad (60)$$

$$\psi, \gamma - \text{liczby rzeczywiste} \quad (61)$$

$$\delta_0 g_{2h}(h(t_k), v_k) = 0, \quad \delta_0 \geq 0; \quad \delta_i g_{iv}^{k-1}(v_k) = 0, \quad \delta_i \geq 0, \quad i = 1, 2 \quad (62)$$

Z (41)-(43) wynika, że pochodne funkcji ograniczeń $g_{ih}, g_{iv}, i = 1, 2$ są równe

$$\frac{\partial g_{1h}}{\partial h} = 1, \quad \frac{\partial g_{2h}}{\partial h} = -1, \quad (63)$$

$$\frac{\partial g_{1v}^{k-1}(t_k)}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial g_{2v}^{k-1}(t_k)}{\partial v} = -1. \quad (64)$$

Prócz tego

$$\frac{\partial g_{2h}}{\partial v} = \frac{dh_{\max}(v)}{dv} \quad (65)$$

Ponadto z (38), (36), (39), (47), (49) oraz (63), (64) otrzymujemy wartości pochodnych lagrangianu

$$\frac{\partial H^{k-1}(s, v, h, \eta, \lambda, t)}{\partial h} = -\frac{\partial P(h, v)}{\partial h} + \frac{\lambda}{M} \frac{\partial h}{\partial h} = -Ev(t) + \frac{\lambda(t)}{M}, \quad (66)$$

$$\frac{\partial L^{k-1}(s, v, h, \lambda, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, t)}{\partial h} = -Ev(t) + \frac{\lambda(t)}{M} + \mu_1 - \mu_2, \quad (67)$$

$$\frac{\partial L^{k-1}(s, v, h, \lambda, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, t)}{\partial s} = \eta(t), \quad (68)$$

$$\frac{\partial L^{k-1}(s, v, h, \lambda, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, t)}{\partial v} = -\frac{\partial P(h, v)}{\partial v} + \lambda(t) \frac{\partial K_{k-1}(v(t))}{\partial v} + \mu_2 \frac{dh_{\max}(v)}{dv} + \quad (69)$$

$$\nu_1 - \nu_2 = -Eh(t) + \lambda(t)(-2A_{k-1}v(t) + B_{k-1}) + \mu_2 \frac{dh_{\max}(v)}{dv} + \nu_1 - \nu_2.$$

[lub $= -Ev(t) - \frac{p}{M}\lambda(t) + \mu_2 \frac{dh_{\max}(v)}{dv} + \nu_1 - \nu_2$ dla liniowej zależności oporu od prędkości]

przy czym równania (66) i (67) zachodzą dla $h \neq 0$. Zatem z zasady Pontriagina wynika system równań określających warunki konieczny optymalności dla zadania sterowania optymalnego (35)-(45) w przedziale czasu $t \in [t_{k-1}, t_k]$ w postaci:

$$-Ev(t) + \frac{\lambda(t)}{M} + \mu_1 - \mu_2 = 0, \quad (70)$$

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = -\eta(t), \quad (71)$$

$$\eta(t_k) = \psi = \eta_k, \quad (72)$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = Eh(t) - \lambda(t)(-2A_{k-1}v(t) + B_{k-1}) - \mu_2 \frac{dh_{\max}(v)}{dv} - \nu_1 + \nu_2, \quad (73)$$

$$\lambda(t_k) = \delta_0 \frac{dh_{\max}(v)}{dv} + \delta_1 - \delta_2 + \gamma = \lambda_k. \quad (74)$$

[lub $\frac{d\lambda(t)}{dt} = Eh(t) + \frac{p}{M}\lambda(t) - \mu_2 \frac{dh_{\max}(v)}{dv} - \nu_1 + \nu_2$ dla liniowej zależności oporu od prędkości]

przy czym (70) zachodzi dla $h \neq 0$. Ponadto spełnione są warunki komplementarności (55)-(59).

Wyznaczenie sterowania optymalnego h^* wymaga rozwiązania równań stanu (37)-(40), równań sprzężonych (71)-(74) oraz równania (70). Najczęściej robi się to przy użyciu metod numerycznych. W pracy wykorzystane zostaną analityczne wzory do wyznaczania zmiennych stanu i zmiennych sprzężonych.

Rozwiązanie równań stanu oraz równań sprzężonych

Rozwiązanie $v(t)$ równania stanu (38) w przedziale $[t_{k-1}, t_k]$ z warunkiem początkowym $v(t_{k-1}) = v_{k-1}$ jest opisane szczegółowo powyżej. Analityczna postać rozwiązania jest zadana wzorami (25) oraz (156), odpowiednio dla przypadków, gdy prawa strona tego równania jest liniową albo kwadratową funkcją prędkości. Gdy funkcja prędkości $v(t)$ jest już znana w przedziale $[t_{k-1}, t_k]$, to rozwiązanie $s(t)$ równania stanu (37) w tym przedziale jest równe

$$s(t) = \int_{t_{k-1}}^t v(\tau) d\tau.$$

Ponieważ równanie sprzężone (73) z warunkiem końcowym (74) jest liniowe względem funkcji $\lambda(t)$, można podać jego analityczne rozwiązanie. Dla równania stanu z kwadratową funkcją prędkości wygląda ono następująco

$$\lambda(t) = \lambda_k e^{B_{k-1}(t_k-t)} e^{-2A_{k-1} \int_t^{t_k} v(\tau) d\tau} - \int_t^{t_k} \left(Eh - \mu_2 \frac{dh_{\max}(v)}{dv} - \nu_1 + \nu_2 \right) e^{B_{k-1}(\tau-t)} e^{-2A_{k-1} \int_t^\tau v(s) ds} d\tau, \quad (75)$$

a w przypadku równania stanu liniowo zależnego od prędkości

$$\lambda(t) = \lambda_k e^{-\frac{p}{M}(t_k-t)} - \int_t^{t_k} \left(Eh - \mu_2 \frac{dh_{\max}(v)}{dv} - \nu_1 + \nu_2 \right) e^{-\frac{p}{M}(\tau-t)} d\tau. \quad (76)$$

Podamy też przydatne późniejsz rozwiązanie dla stałego sterowania u^0

$$\lambda(t) = \lambda_k e^{-\frac{p}{M}(t_k-t)} - \frac{ME}{p} h^0 (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_k-t)}) + \int_t^{t_k} \left(\mu_2 \frac{dh_{\max}(v)}{dv} + \nu_1 - \nu_2 \right) e^{-\frac{p}{M}(\tau-t)} d\tau. \quad (77)$$

Rozważmy jeszcze przypadek funkcjonału jakości (46) z funkcją kary $k(v)$ zależną od prędkości. Wówczas otrzymujemy równanie sprzężone postaci

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\lambda(t)(2A_{k-1}v(t) + B_{k-1}) + Eh(t) + a(v(t) - v_{\max}^{k-1}) - \mu_2 \frac{dh_{\max}(v)}{dv}, \quad (78)$$

którego rozwiązanie jest następujące

$$\begin{aligned} \lambda(t) = & \lambda_k e^{B_{k-1}(t_k-t)} e^{-2A_{k-1} \int_t^{t_k} v(\tau) d\tau} - \\ & - \int_t^{t_k} \left(Eh(t) - \mu_2 \frac{dh_{\max}(v)}{dv} + a(v(t) - v_{\max}^{k-1}) \right) e^{B_{k-1}(\tau-t)} e^{-2A_{k-1} \int_t^{\tau} v(s) ds} d\tau. \end{aligned} \quad (79)$$

W przypadku liniowego równania stanu rozwiązanie to jest równe:

$$\lambda(t) = \lambda_k e^{-\frac{p}{M}(t_k-t)} - \int_t^{t_k} \left(Eh(t) - \mu_2 \frac{dh_{\max}(v)}{dv} + a(v(t) - v_{\max}^{k-1}) \right) e^{-\frac{p}{M}(\tau-t)} d\tau. \quad (80)$$

Rozwiązanie równania sprzężonego (71) z warunkiem końcowym (72) jest analogicznie równe

$$\eta(t) = \eta_k e^{-(t_k-t)} \quad (81)$$

Optymalne strategie prędkości

Do wyznaczenia sterowania optymalnego h^* w pracy wykorzystamy specyficzną postać zadania sterowania optymalnego (35)-(45), tj. liniową zależność od sterowania u zarówno funkcjonału energii (35) jak i równań stanu (37) - (38) oraz ograniczeń (41)-(45), kostkową postać ograniczeń oraz zauważone wcześniej konieczne spełnienie ograniczeń od dołu na zmienną stanu v oraz od dołu i od góry na zmienną stanu s w rozwiązaniu optymalnym, co implikuje, że $\zeta_1 = \zeta_2 = \nu_1 = 0$. Przypadek gdy $s \leq 0$ lub $v \leq 0$ oznacza bowiem (poza $t = t_0$), że pociąg nie porusza się do przodu, co nie może być fragmentem trajektorii optymalnej. Podobnie spełnienie ograniczeń górnych w (41)-(45) jest typowym przypadkiem na wielu odcinkach trasy. Zatem przypadek $\nu_2 = 0$ będzie praktycznie podstawowym typem rozwiązania.

W literaturze [40, 7, 23, 14, 10, 5] opisano optymalne ze względu na zużycie energii strategie sterowania i doboru prędkości pociągu. Ruch pociągu w przedziale czasu $[t_{k-1}, t_k]$ na odcinku drogi pomiędzy stacjami lub zadanymi punktami charakterystycznymi jest dzielony na kilka faz. Najczęściej są to fazy:

1. przyspieszenia (ang. power phase), gdy pociąg rozpędza się od aktualnej prędkości do zadanej wyższej, a optymalne sterowanie $h^* = h_{max}$;
2. poruszania się ze stałą prędkością pomiędzy zadanymi punktami (ang. speed-holding); na długim odcinku toru prędkość ta wynika z ilorazu długości drogi i zadanego czasu na jej przebycie lub nałożonych ograniczeń, a na krótkim z nałożonych ograniczeń: w obu przypadkach $h^* = -M(K_{k-1}(v(t)) + R_{k-1}(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1})) \in (0, h_{max}]$;
3. bezwładności (ang. coasting), gdy pociąg porusza się z niezerową prędkością a siła trakcyjna $h^* = 0$,
4. hamowania (ang. breaking) gdy prędkość pociągu jest redukowna od zadanej prędkości do zera; często faza ta dzielona jest na dwie: hamowanie wstępne, gdy prędkość jest stopniowo redukowna do mniejszej wartości, a $h^* \in [-h_{min}, 0)$, oraz hamowanie właściwe, gdy prędkość jest redukowna do zera, zaś $h^* = -h_{min}$.

W przypadku gdy na trasie pociągu znajdują się wzniesienia, spadki, zakręty, tunele, wykopy, ruch pociągu dzieli się na odpowiednio większą liczbę faz. Dla każdej z takich faz są też zadane odpowiednie funkcje ograniczeń $g_{2v}(v)$ oraz $g_{2s}(s)$. Oczywiście nie wszystkie fazy muszą występować na każdym odcinku drogi. Także ich kolejność może być różna.

Zapiszmy hamiltonian (47) w nieco przekształconej postaci

$$H^{k-1} = \frac{1}{M}[\lambda(t) - EMv(t)]h(t)$$

Ponieważ sterowanie optymalne maksymalizuje hamiltonian, więc rozpatrując zarówno dodatnie, jak i ujemne wartości sterowania uzyskujemy następujące warunki

$$h^*(t) = \begin{cases} h_{max} & \text{gdy } \lambda > ME^+v, \\ h^+ \in [0, h_{max}] & \text{gdy } \lambda = ME^+v, \\ 0 & \text{gdy } -E^-Mv < \lambda < ME^+v, \\ h^- \in [-h_{min}, 0] & \text{gdy } \lambda = -E^-Mv, \\ -h_{min} & \text{gdy } \lambda < -E^-Mv. \end{cases} \quad (82)$$

Powyższe warunki obejmują, jako szczególny przypadek, sytuację braku rekuperacji przy hamowaniu, gdy $E^- = 0$. Wtedy powyższe warunki sprowadzają się do

podanych w pracy [14], czyli do

$$h^*(t) = \begin{cases} h_{max} & \text{gdy } \lambda > MEv, \\ h_{d1} \in [0, h_{max}] & \text{gdy } \lambda = MEv, \\ 0 & \text{gdy } 0 < \lambda < MEv, \\ h_{d2} \in [-u_{min}, 0] & \text{gdy } \lambda = 0, \\ -h_{min} & \text{gdy } \lambda < 0. \end{cases} \quad (83)$$

Zauważmy, że we wszystkich fazach otrzymujemy szczególnie proste rozwiązania równań ruchu, ze stałym sterowaniem.

7.3 Wyznaczanie czasów przełączeń z warunków zasady maksimum

7.3.1 Wyznaczenie czasów przełączeń z równań sprzężonych

Implementacja sterowania optymalnego (82) wymaga znajomości czasów przełączeń $\{\tau_i\}$ między różnymi wartościami sterowania optymalnego h^* . Dla pociągu poruszającego się po torze płaskim bez ograniczeń prędkości i z zerowymi warunkami brzegowymi, implemetacja poszczególnych faz strategii optymalnej oznacza sterowanie optymalne w postaci:

$$h^*(t) = \begin{cases} h_{max} & \text{dla } t_{k-1} \leq t \leq \tau_1, \\ h_{d1} \in [0, h_{max}] & \text{dla } \tau_1 < t \leq \tau_2, \\ 0 & \text{dla } \tau_2 < t \leq \tau_3, \\ h_{d2} \in [-h_{min}, 0] & \text{dla } \tau_3 < t \leq \tau_4, \\ -h_{min} & \text{dla } \tau_4 < t \leq t_k. \end{cases} \quad (84)$$

Znając sekwencję momentów przełączeń $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$ można określić dokładnie strukturę sterowania optymalnego w każdej chwili czasu. Przy podziale trasy na odcinki sekwencja sterowań będzie na ogół inna.

W pracach [12, 22] czasy przełączeń wyznacza się w oparciu o rozwiązanie numeryczne zadania sterowania optymalnego bez ograniczeń na stan i sterowanie. W pracach [14] oraz [16] czasy przełączeń wyznaczono, odpowiednio, wykorzystując sformułowany warunek analityczny w postaci równania całkowego albo pomocnicze zadanie programowania matematycznego. Standardowa metoda wyznaczania czasów przełączeń polega na wyborze czasu $\bar{\tau}$ i rozwiązania równania stanu w przedziale $[\bar{\tau}, t_k]$, tak aby wyznaczyć funkcję prędkości spełniającą zadane warunki początkowe i końcowe. Następnie rozwiązywane jest równanie stanu i wyznaczana wartość zmiennej stanu w chwili $\bar{\tau}$. Jeśli spełniony jest warunek stacjonarności (70) to $\bar{\tau}$ jest szukaną chwilą. Jeśli nie jest spełniony, to obliczenia są kontynuowane ze zmodyfikowaną wartością $\bar{\tau}$.

W tej pracy skorzystamy z analitycznych rozwiązań (25) i (156) równań stanu lub rozwiązań (70)-(75) równań sprzężonych oraz ich ciągłości w punktach przełączenia sterowania.

$$v(\tau_i^-) = v(\tau_i^+) \text{ lub } \lambda(\tau_i^-) = \lambda(\tau_i^+), \text{ dla } i = 1, \dots, 4. \quad (85)$$

7.3.2 Numeryczne wyznaczanie czasów przełączeń

Rozważmy wyznaczanie przełączenia τ_1 . Założymy, że w przedziale $(a, b) \subset [t_{k-1}, t_k]$ ma nastąpić w chwili τ_1 przełączenie sterowania z h_{max} na $h_{d1} \in (0, h_{max})$. Prędkość $v(\tau_1^-)$ wyznaczona dla $h = h_{max}$ określona jest wzorami (25) lub (156). Rozważmy pierwszy z nich tj,

$$v(\tau_1) = \frac{1}{p} [h_{max}(\tau_1) + Mg(\sin \alpha_{k-1} - \mu_T \cos \alpha_{k-1})] (1 - e^{-\frac{p}{M}(\tau_1 - t_{k-1})}) + v_{k-1} e^{-\frac{p}{M}(\tau_1 - t_{k-1})} \quad (86)$$

Korzystając z (76) wyznaczmy stan sprzężony w punkcie τ_1 :

$$\begin{aligned} \lambda(\tau_1) &= \lambda_k e^{-\frac{p}{M}(t_k - \tau_1)} - \int_{\tau_1}^{t_k} (E h_{d1}) e^{-\frac{p}{M}(\bar{\tau} - \tau_1)} d\bar{\tau} = \\ &= \lambda(\tau_1) = \lambda_k e^{-\frac{p}{M}(t_k - \tau_1)} - \frac{M E h_{d1}}{p} (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_k - \tau_1)}). \end{aligned} \quad (87)$$

Jeśli w punkcie τ_1 jest spełniony warunek optymalności (70) to moment przełączenia τ_1 jest wyznaczony poprawnie. Jeśli nie, to należy powtórzyć obliczenia.

Znając możliwe sterowania optymalne, przydatna byłaby znajomość momentów przełączeń między nimi. Poniżej zajmiemy się właśnie tym problemem. Rozważmy chwilę t_k i odpowiadającą jej prędkość v_k nie leżącą na ograniczeniu oraz wcześniejszy ruch pociągu. Zgodnie z wcześniej wyprowadzonymi warunkami, istnieje przed tym punktem fragment drogi, na którym przyłożono jedno ze sterowań występujących w (82), nazwijmy je h_1^{k-1} . Tak długo, jak długo jest spełniony odpowiedni warunek z (82), sterowanie to jest optymalne, chyba że zostanie naruszone ograniczenie na prędkość pociągu, czego na razie nie rozpatrujemy. Łatwo zauważyć, że przełączenie jest w zasadzie związane z warunkiem

$$\lambda(t) = E M v(t) \quad (88)$$

Wystąpienie tego warunku, gdy nie był on wcześniej spełniony, kończy fragment trajektorii związany ze sterowaniami h_{max} , 0 i h_{min} , przy czym dla sterowania $h = 0$ może to być albo dla dodatnich sterowań, gdy $E = E^+$, albo dla ujemnych, gdy $E = E^-$. Jeżeli natomiast warunek równościowy jest spełniony na rozpatrywanym fragmencie, to koniec tego fragmentu wiąże się z chwilą, gdy przestaje on obowiązywać.

Jeżeli teraz rozważymy chwilę $t < t_k$ należącą do rozpatrywanego fragmentu, to zgodnie z (77) zachodzi

$$\lambda(t) = \lambda_k e^{-\frac{p}{M}(t_k-t)} - \frac{ME}{p} h_1^{k-1} (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_k-t)})$$

Jeżeli przyjmiemy podstawienie

$$e^{-\frac{p}{M}(t_k-t)} = z \quad (89)$$

to możemy to równanie zapisać prościej

$$\lambda(t) = \lambda_k z - \frac{ME}{p} h_1^{k-1} (1 - z)$$

Z kolei dla prędkości na tym fragmencie obowiązuje następująca zależność

$$v_k = \frac{1}{p} (h_1^{k-1} + MR_{k-1}) (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_k-t)}) + v(t) e^{-\frac{p}{M}(t_k-t)}$$

a po uwzględnieniu podstawienia (89)

$$v_k = \frac{1}{p} (h_1^{k-1} + MR_{k-1}) (1 - z) + v(t) z$$

skąd mamy

$$v(t) = \frac{1}{z} [v_k - \frac{1}{p} (h_1^{k-1} + MR_{k-1}) (1 - z)]$$

Warunek (88) będzie więc spełniony, gdy

$$\lambda_k z - \frac{ME}{p} h_1^{k-1} (1 - z) = \frac{EM}{z} [v_k - \frac{1}{p} (h_1^{k-1} + MR_{k-1}) (1 - z)]$$

Po uporządkowaniu prowadzi to do równania

$$\frac{p\lambda_k}{ME} z^2 + h_1^{k-1} (1 - z)^2 + MR_{k-1} (1 - z) - pv_k = 0 \quad (90)$$

Jeżeli istnieje rozwiązanie tego równania, to na to, aby było ono rozwiązaniem zadania, powinno zachodzić $0 < z < 1$ i to raczej bliżej 0. Zauważmy, że dla $z = 0$ otrzymujemy równanie $h_1^{k-1} + MR_{k-1} - pv_k = 0$. Jest to równanie ruchu pociągu przy stałej prędkości v_k . Na zasadzie ciągłości można więc przypuszczać, że istnieje rozwiązanie niezbyt odległe od 0 spełniające równanie ruchu o zmiennej prędkości. Takich rozwiązań może być więcej niż jedno. Oprócz możliwych dwóch rozwiązań równania kwadratowego należy bowiem rozważyć dwie wartości parametru E , a mianowicie E^+ i E^- .

Długość fragmentu jest ograniczona chwilą uzyskaną z (89) jako

$$t = t_k + \frac{M}{p} \ln z$$

Ponieważ $z < 1$, więc logarytm jest ujemny i $t < t_k$. Jeżeli tak otrzymane t jest nie większe od t_{k-1} , to mamy rozwiązanie zadania dla całego odcinka $[t_{k-1}, t_k]$.

Natomiast jeżeli tak wyznaczony fragment jest krótszy od odcinka, to sytuacja się powtarza i możemy poszukiwać następnego fragmentu kończącego się kolejnym warunkiem $\lambda = MEv$. Jednak z powyższych wzorów wynika, że wewnątrz tak wyznaczonego fragmentu $\lambda \neq MEv$. Optymalny przejazd odcinka bez ograniczenia prędkości składa się więc z fragmentów z pełnym dopuszczalnym wysterowaniem silnika h_{\max} , bez sterowania $h = 0$ i z pełnym hamowaniem $-h_{\min}$. Może to być właśnie sekwencja $h_{\max}, 0, -h_{\min}$, ale również dowolna jej dwu- lub jednoelementowa część. Natomiast z faktu, że rozwiązania równania (90) są rozłączne, wynika, że w rozwiązaniu optymalnym nie ma fragmentu odpowiadającego warunkowi $\lambda = MEv$.

Jeżeli natomiast trajektoria przekracza granicę odcinka, to zmienia się wartość R_{k-1} na R_{k-2} , co powoduje zmianę równania opisującego prędkość $v(t)$. Jeżeli punkt przełączenia nie występuje na granicy tych odcinków, to ze względu na ciągłość prędkości, warunki (82) lub (83) pozostają, przynajmniej przez pewien czas, niezmienione (czyli typ sterowania pozostaje ten sam). Nowy punkt przełączenia można wtedy wyznaczyć z odpowiednio zmienionego równania (90).

Sytuacja się zmienia, gdy fragment trajektorii prędkości przekracza ograniczenie, w naszym przypadku praktycznie ograniczenia górne v_{\max}^{k-1} . Wtedy mnożnik Lagrange'a ν_2 przestaje być zerowy i zmienna sprzężona $\lambda(t)$ wyraża się wzorem, patrz (77),

$$\lambda(t) = \lambda_k e^{-\frac{p}{M}(t_k-t)} - \frac{ME}{p} h^0 (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_k-t)}) - \int_t^{t_k} \nu_2 e^{-\frac{p}{M}(\tau-t)} d\tau$$

przy czym h^0 jest jednoznacznie wyznaczone przez prędkość v_{\max}^{k-1} . Ponieważ prędkość jest teraz stała, to warunek (88) wygląda następująco

$$\lambda(t) = EMv_{\max}^{k-1}$$

skąd dostajemy równanie względem ν_2

$$EMv_{\max}^{k-1} = \lambda_k e^{-\frac{p}{M}(t_k-t)} - \frac{ME}{p} h^0 (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_k-t)}) - \int_t^{t_k} \nu_2 e^{-\frac{p}{M}(\tau-t)} d\tau$$

Jest to równanie całkowe Volterry pierwszego rodzaju. Jego rozwiązanie istnieje, chociaż wyznaczenie go analitycznie może być kłopotliwe, a nawet niemożliwe. Przyjęcie mnożnika $\nu_2(t)$ równego rozwiązaniu tego równania powoduje, że warunek

(88) jest spełniony tożsamościowo, niezależnie od t . Jest to więc jedyny przypadek, kiedy równanie (88), rozdzielające inne przypadki, może być spełnione na odcinku – tak długo, jak długo prędkość $v(t) = v_{\max}^{k-1}$ – a nie tylko punktowo.

Korzystając z powyższych obserwacji można by było rekurencyjnie wyznaczyć punkty przełączenia zaczynając od t_K . Kłopot polega tylko na tym, że do obliczeń jest potrzebna wartość końcowa λ_K , która nie jest znana. Można by ją było prawdopodobnie ustalić przez rekurencyjne obliczenia. Dalej przedyskutujemy jednak także alternatywne podejście, zgodne z postępowaniem zarysowanym na początku opracowania.

Znacznie bardziej skomplikowana jest sytuacja, gdy opory ruchu zależą nieliniowo od prędkości. Rozwiązanie równania sprzężonego zależy wówczas od prędkości (75) i nawet przy braku ograniczenia na prędkość oraz stałym sterowaniu zależność ta jest skomplikowana

$$\lambda(t) = \lambda_k e^{B_{k-1}(t_k-t)} e^{-2A_{k-1} \int_t^{t_k} v(\tau) d\tau} - E h_1^{k-1} \int_t^{t_k} e^{B_{k-1}(\tau-t)} e^{-2A_{k-1} \int_t^\tau v(s) ds} d\tau, \quad (91)$$

Wyrażenia dla prędkości przy stałym sterowaniu da się, co prawda, wyznaczyć ze wzorów (149) lub (156), jednak są one dosyć skomplikowane. Jeżeli w pierwszym z nich dokonamy oznaczeń

$$\sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} = \Gamma, \quad e^{2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}(t_k-t)} = z(t)$$

to możemy wyznaczyć prędkość przy stałym sterowaniu (wchodzi ono w skład stałej C_{k-1}) jako

$$v(t) = \Gamma \frac{(v_k + \Gamma)z(t) + v_k - \Gamma}{(v_k + \Gamma)z(t) - (v_k - \Gamma)}$$

To wyrażenie należy teraz wstawić do zależności (91) (zauważmy, że w tym przypadku $B_{k-1} = 0$), a następnie rozwiązać równanie $\lambda(t) = EMv(t)$ względem t . Jest to możliwe tylko za pomocą metod numerycznych.

W drugim przypadku wyrażenia są jeszcze bardziej skomplikowane. Wprowadźmy następujące oznaczenia (dla uproszczenia są one częściowo takie same, jak poprzednio, chociaż mają inne znaczenia)

$$\frac{B_{k-1}}{A_{k-1}} = \Gamma, \quad 1 + \sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1}C_{k-1}}{B_{k-1}^2}} = \Pi, \quad e^{-B_{k-1}\sqrt{\Pi}(t_k-t)} = z(t)$$

Wtedy prędkość wyraża się wzorem

$$v(t) = \frac{1}{\Gamma} \left(\frac{\Pi}{2} + \frac{2v_k - \Gamma(1 + \Pi)}{2\Gamma z(t) - \frac{1-z(t)}{\Pi} (2v_k - \Gamma(1 + \Pi))} \right)$$

W celu wyznaczenia t spełniającego równanie $\lambda(t) = EMv(t)$ należy postąpić tak, jak opisano wyżej.

Można przypuszczać, że także w tych przypadkach rozwiązania są izolowane, chociaż dla ścisłości wymagałoby to przeprowadzenia dowodu.

8 Zestawienie wzorów dla optymalnych fragmentów

We wcześniejszych rozważaniach wyznaczyliśmy kilka charakterystycznych typów fragmentów optymalnych rozwiązań. Teraz wyznaczymy rozwiązania dla poszczególnych fragmentów: wzory na prędkości i drogi dla równania zależnego liniowo od prędkości. Będą to wzorce rozwiązań i dlatego wszystkie fragmenty będą się zaczynały w punkcie $p_s = (t_s, s_s, v_s)$ i kończyły w $p_f = (t_f, s_f, v_f)$. Podstawowy wzór, z którego będziemy korzystać, to (26), który zapiszemy w postaci

$$v(t) = \frac{1}{p}(h + MR_{k-1})(1 - e^{-\frac{p}{M}(t-t_s)}) + v_s e^{-\frac{p}{M}(t-t_s)} \quad (92)$$

8.1 Przyspieszanie

Na tym fragmencie następuje rozpędzanie pociągu z punktu p_s do punktu p_f z pełnymysterowaniem u_{\max} . Ze wzoru (92) otrzymujemy

$$v_f = \frac{1}{p}(h + MR_{k-1})(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_f-t_s)}) + v_s e^{-\frac{p}{M}(t_f-t_s)}$$

Po podstawieniu $e^{-\frac{p}{M}(t_f-t_s)} = z$ rozwiązujemy powyższe równanie względem z otrzymując

$$z = \frac{pv_f - (h_{\max} + MR_{k-1})}{pv_s - (h_{\max} + MR_{k-1})}$$

Stąd otrzymujemy wzór na *czas* potrzebny na przebycie rozważanego fragmentu

$$\Delta^P t_s^f = t_f - t_s = \frac{M}{p} \ln \frac{pv_s - (h_{\max} + MR_{k-1})}{pv_f - (h_{\max} + MR_{k-1})}$$

Długość przebytej drogi otrzymamy całkując wzór na prędkość

$$\begin{aligned} \Delta^P s_s^f &= s_f - s_s = \int_{t_s}^{t_f} v(t) dt = \\ &= \frac{1}{p}(h_{\max} + MR_{k-1})[t_f - t_s - \frac{M}{p}(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_f-t_s)})] + \frac{Mv_s}{p}(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_f-t_s)}) \end{aligned}$$

Zauważmy, że ponieważ wartość $\frac{p}{M}$ jest bardzo mała, to z dobrą dokładnością możemy zamiast funkcji eksponencjalnej przyjąć kilka pierwszych członów rozwinięcia w szereg Taylora. Przyjmiemy więc

$$\frac{M}{p}(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_f - t_s)}) \approx \frac{M}{p}(1 - 1 + \frac{p}{M}(t_f - t_s) - \frac{p^2}{2M^2}(t_f - t_s)^2) = t_f - t_s - \frac{p}{2M}(t_f - t_s)^2$$

skąd w przybliżeniu droga jest równa

$$\begin{aligned} \Delta^P s_s^f &\approx \frac{1}{2M}(h_{\max} + MR_{k-1})(t_f - t_s)^2 + v_s[t_f - t_s - \frac{p}{2M}(t_f - t_s)^2] = \\ &= v_s(t_f - t_s) - \frac{pv_s - h_{\max} - MR_{k-1}}{2M}(t_f - t_s)^2 \end{aligned}$$

Podobnie można przybliżyć wzór na czas przebycia tego fragmentu. Po przekształceniu otrzymujemy

$$\Delta^P t_s^f = \frac{M}{p} \left(\ln \left(1 - \frac{pv_s}{h_{\max} + MR_{k-1}} \right) - \ln \left(1 - \frac{pv_f}{h_{\max} + MR_{k-1}} \right) \right)$$

Ponieważ oba wyrażenia odejmowane od jedynek są mniejsze od 1, to skorzystamy z rozwinięcia prawdziwego dla $|x| < 1$

$$\ln(1 + x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \dots$$

Przyjmując dwa pierwsze człony tego rozwinięcia dostajemy

$$\begin{aligned} \Delta^P t_s^f &\approx \frac{M}{p} \left(\frac{p(v_f - v_s)}{h_{\max} + MR_{k-1}} + \frac{p^2}{2} \frac{v_f^2 - v_s^2}{(h_{\max} + MR_{k-1})^2} \right) = \\ &= \frac{M(v_f - v_s)}{h_{\max} + MR_{k-1}} \left(1 + \frac{p(v_f + v_s)}{2(h_{\max} + MR_{k-1})} \right) \end{aligned} \quad (93)$$

przy czym już pierwszy człon rozwinięcia daje na ogół dostatecznie dobre przybliżenie.

8.2 Zerowe sterowanie

W tym przypadku wzory są takie same, jak powyżej, z tym, że sterowanie jest zerowe. Mamy więc wzór na prędkość na końcu fragmentu

$$v_f = \frac{M}{p} R_{k-1} (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_f - t_s)}) + v_s e^{-\frac{p}{M}(t_f - t_s)}$$

na czas przejazdu

$$\Delta^Z t_s^f = t_f - t_s = \frac{M}{p} \ln \frac{pv_s - MR_{k-1}}{pv_f - MR_{k-1}}$$

oraz na długość przebytej drogi

$$\Delta^Z s_s^f = s_f - s_s = \frac{M}{p} R_{k-1} (t_f - t_s) + \frac{M}{p} (v_s - \frac{M}{p} R_{k-1}) (1 - e^{-\frac{p}{M}(t_f - t_s)})$$

Po aproksymacji eksponentu otrzymamy zaś

$$\Delta^Z s_s^f \approx v_s (t_f - t_s) - \frac{pv_s - MR_{k-1}}{2M} (t_f - t_s)^2$$

8.3 Stała prędkość

Taki przypadek może wystąpić na przykład wtedy, gdy pociąg osiągnie prędkość maksymalną i przez pewien czas porusza się z tą prędkością. W tym przypadku wzór na (stałą) prędkość ma postać

$$v = \frac{1}{p} (h + MR_{k-1})$$

gdzie $v = v_s = v_f$. Sterowanie (stałe) wyraża się wzorem

$$u = pv - MR_{k-1}$$

i jest w zasadzie dodatnie, chyba że pociąg jedzie z górki i jest potrzebne dodatkowe hamowanie, aby nie przekroczył dopuszczalnej prędkości.

W tym przypadku musimy założyć albo czas przejazdu, albo drogę. Jeżeli założymy, że są ustalone wartości czasów t_s i t_f , to przebyta droga wyraża się wzorem

$$\Delta^S s_s^f = \frac{1}{p} (h + MR_{k-1}) (t_f - t_s)$$

a znając stałą prędkość v_s

$$\Delta^S s_s^f = v_s (t_f - t_s)$$

I oczywiście znając drogę czas przejazdu jest równy

$$\Delta^S t_s^f = \frac{p \Delta^S s_s^f}{h + MR_{k-1}} = \frac{\Delta^S s_s^f}{v_s}$$

8.4 Hamowanie

Przy pełnym hamowaniu z (92), przy oznaczeniu z jak powyżej, zachodzi

$$v_f = v_s z - \frac{1}{p}(h_{\min} - MR_{k-1})(1 - z)$$

skąd otrzymujemy

$$z = \frac{pv_f + h_{\min} - MR_{k-1}}{pv_s + h_{\min} - MR_{k-1}}$$

a następnie

$$\Delta^H t_s^f = t_f - t_s = \frac{M}{p} \ln \frac{pv_s + h_{\min} - MR_{k-1}}{pv_f + h_{\min} - MR_{k-1}}$$

Drogę hamowania możemy policzyć całkując bezpośrednio równanie prędkości (92). Będzie ona zależała od prędkości początkowej v_s i czasu przejazdu $\Delta^H t_s^f$, podobnie jak dla fragmentu przyspieszania. Ponieważ hamowanie występuje w zasadzie na końcu odcinka, wygodniejsze może być uzależnienie drogi od końcowego czasu t_f . W tym celu zapiszemy równanie prędkości jako

$$v_f = \frac{1}{p}(-h_{\min} + MR_{k-1})(1 - e^{-\frac{p}{M}(t_f-t)}) + v(t)e^{-\frac{p}{M}(t_f-t)}$$

Można stąd wyznaczyć $v(t)$

$$v(t) = v_f e^{\frac{p}{M}(t_f-t)} + \frac{1}{p}(h_{\min} - MR_{k-1})(e^{\frac{p}{M}(t_f-t)} - 1)$$

Po scałkowaniu otrzymujemy drogę przejazdu

$$\begin{aligned} \Delta^H s_s^f &= s_f - s_s = \\ &= \frac{M}{p^2}(pv_f + h_{\min} - MR_{k-1})(e^{\frac{p}{M}(t_f-t_s)} - 1) - \frac{1}{p}(h_{\min} - MR_{k-1})(t_f - t_s) \end{aligned}$$

Po aproksymacji funkcji eksponencjalnej otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Delta^H s_s^f &\approx \frac{1}{2M}(h_{\min} - MR_{k-1})(t_f - t_s)^2 + v_f(t_f - t_s) + \frac{pv_f}{2M}(t_f - t_s)^2 = \\ &= v_f(t_f - t_s) + \frac{pv_f + h_{\min} - MR_{k-1}}{2M}(t_f - t_s)^2 \end{aligned}$$

A Załącznik

A.1 Rozwiązanie nieliniowego równania ruchu dla zakresu stałej mocy

Mnożąc obie strony przez v otrzymujemy

$$v(t) \frac{dv(t)}{dt} = \frac{\zeta}{M} - \frac{p}{M} v^2(t) + R_{k-1} v(t) \quad (133)$$

Podstawiając nową zmienną

$$w(t) = v(t) e^{\frac{p}{M} t}$$

a następnie

$$\tau = \frac{p}{M} t$$

doprowadzamy do równania

$$w(\tau) \frac{dw(\tau)}{d\tau} = \frac{\zeta}{p} e^{2\tau} + w(\tau) \frac{M R_{k-1}}{p} e^{\tau} \quad (134)$$

Jest to pewna forma równania Abela drugiego rodzaju, którą można sprowadzić do równania liniowego ze zmiennymi współczynnikami po podstawieniach

$$\tau = \ln \xi \quad w = u\xi$$

Mamy bowiem

$$\frac{dw}{d\tau} = \frac{d(u\xi)}{d\tau} = \frac{du}{d\tau} \xi + u \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{du}{d\tau} \xi + u \frac{d\xi}{du} \frac{du}{d\tau} = \frac{du}{d\tau} \left(\xi + u \frac{d\xi}{du} \right)$$

Ponieważ jednak

$$\frac{d\tau}{du} = \frac{d\tau}{d\xi} \frac{d\xi}{du} = \frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{du}$$

więc

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{\frac{d\tau}{du}} = \frac{\xi}{\frac{d\xi}{du}}$$

W rezultacie, po podstawieniu do (134) otrzymujemy

$$u\xi \frac{\xi}{\frac{d\xi}{du}} \left(\xi + u \frac{d\xi}{du} \right) = \frac{1}{p} (\zeta + u M R_{k-1}) \xi^2$$

skąd dochodzimy do końcowego równania liniowego

$$\left(-u^2 + u \frac{M R_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p} \right) \frac{d\xi}{du} = u\xi \quad (135)$$

Ponieważ jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, więc rozwiązanie uzyskamy obliczając poniższe całki

$$\int \frac{d\xi}{\xi} = \int \frac{udu}{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}$$

Całka po lewej stronie jest równa

$$\int \frac{d\xi}{\xi} = \ln \xi$$

Trudniejszą całkę po prawej stronie możemy sprowadzić do sumy dwóch całek

$$\int \frac{udu}{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}} = -\frac{1}{2} \int \frac{(-2u + \frac{MR_{k-1}}{p})du}{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}} + \frac{MR_{k-1}}{2p} \int \frac{du}{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}$$

Pierwszą całkę po prawej stronie łatwo obliczymy po podstawieniu nowej zmiennej równej mianownikowi wyrażenia podcałkowego uzyskując

$$-\frac{1}{2} \int \frac{(-2u + \frac{MR_{k-1}}{p})du}{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}} = -\frac{1}{2} \ln(-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p})$$

Aby obliczyć drugą całkę po prawej stronie obliczymy wyznacznik mianownika

$$\Delta = \frac{M^2 R_{k-1}^2}{p^2} + 4 \frac{\zeta}{p} = \frac{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}{p^2} > 0$$

Po rozkładzie na ułamki proste dochodzimy do rozwiązania

$$\int \frac{du}{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}} = \frac{p}{\sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}} \ln \frac{2pu - MR_{k-1} + \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{2pu - MR_{k-1} - \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}$$

W rezultacie pierwotna całka po prawej stronie jest równa

$$\ln \left(C \sqrt{\frac{2pu - MR_{k-1} + \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{2pu - MR_{k-1} - \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}} \sqrt{\frac{MR_{k-1}}{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}} \right) / \sqrt{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}$$

gdzie C jest stałą całkowania, skąd otrzymujemy końcowe rozwiązanie ogólne

$$\xi = C \sqrt{\frac{2pu - MR_{k-1} + \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{2pu - MR_{k-1} - \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}} \sqrt{\frac{MR_{k-1}}{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}} / \sqrt{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}} \quad (136)$$

które dają nam zależność $\xi(u)$. Do wyznaczenia stałej C jest potrzebny dodatkowy warunek. Uzyskamy go z warunku początkowego początkowego równania. Otóż śledząc kolejne podstawienia dostajemy

$$w(t_{\nu_1}) = v(t_{\nu_1})e^{\frac{p}{M}t_{\nu_1}} \quad \tau_{\nu_1} = \frac{p}{M}t_{\nu_1}$$

skąd dostajemy

$$\xi_{\nu_1} = e^{\tau_{\nu_1}} = e^{\frac{p}{M}t_{\nu_1}} \quad u_{\nu_1} = \frac{w(t_{\nu_1})}{e^{\tau_{\nu_1}}} = v(t_{\nu_1})$$

Podstawiając te wielkości do rozwiązania (136) dochodzimy do zależności

$$e^{\frac{p}{M}t_{\nu_1}} = C \frac{\sqrt{\frac{2pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1} + \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{2pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1} - \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}} \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}}{\sqrt{-v^2(t_{\nu_1}) + v(t_{\nu_1}) \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}}$$

z której wyznaczamy C

$$C = \frac{\sqrt{-v^2(t_{\nu_1}) + v(t_{\nu_1}) \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}}{\sqrt{\frac{2pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1} + \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{2pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1} - \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}} \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}} e^{\frac{p}{M}t_{\nu_1}}$$

Po podstawieniu C do równania (136) dostajemy rozwiązanie szczególne naszego równania

$$\xi = \sqrt{\frac{\frac{2pu - MR_{k-1} + \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{2pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1} + \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}} \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{\frac{2pu - MR_{k-1} - \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{2pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1} - \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}} \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}} \sqrt{\frac{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}{-v^2(t_{\nu_1}) + v(t_{\nu_1}) \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}} e^{\frac{p}{M}t_{\nu_1}} \quad (137)$$

Aby powrócić do początkowych zmiennych, z zależności

$$\tau = \ln \xi(u)$$

powinniśmy wyznaczyć funkcję odwrotną $u(\tau)$, co następnie pozwoliłoby znaleźć

$$w(\tau) = u(\tau)\xi(\tau) = u(\tau)e^{\tau}$$

aby dojść do końcowego wzoru

$$v(t) = w\left(\frac{p}{M}t\right)e^{-\frac{p}{M}t} = u\left(\frac{p}{M}t\right)$$

Jednak kłopot polega na wyznaczeniu funkcji odwrotnej $u(\xi)$, potrzebnej do uzyskania $u(\tau)$. Do tego celu przyjmijmy pewną aproksymację. Otóż zauważmy, że po rozważeniu zakresu wartości parametrów możemy przyjąć

$$1 + \frac{4p\zeta}{M^2 R_{k-1}^2} \approx 1$$

Wtedy zależność $\xi(u)$ we wzorze (137) upraszcza się do

$$\xi = \sqrt{\frac{\frac{u}{v(t_{\nu_1})}(-v^2(t_{\nu_1}) + v(t_{\nu_1})\frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p})}{\frac{pv - MR_{k-1}}{pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1}}(-u^2 + u\frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p})}} e^{\frac{p}{M}t_{\nu_1}}$$

co doprowadza do równania

$$\xi^2 = \frac{u \frac{-v^2(t_{\nu_1}) + v(t_{\nu_1})\frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}{v(t_{\nu_1})}}{\frac{(pv - MR_{k-1})(-u^2 + u\frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p})}{pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1}}} e^{2\frac{p}{M}t_{\nu_1}}$$

czyli po przekształceniach do

$$pu^3 - 2MR_{k-1}u^2 + \left(\frac{M^2 R_{k-1}^2}{p} + P - \zeta\right)u + \frac{MR_{k-1}\zeta}{p} = 0$$

gdzie

$$P = \frac{(pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1})(-v^2(t_{\nu_1}) + v(t_{\nu_1})\frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p})}{v(t_{\nu_1})} e^{-2\frac{p}{M}(t-t_{\nu_1})}$$

Jest to równanie algebraiczne trzeciego stopnia, które w zasadzie można rozwiązać analitycznie.

Po standardowych podstawieniach sprowadzamy je do równania kanonicznego

$$u^3 - \frac{1}{p}\left(\frac{M^2 R_{k-1}^2}{3p} + \zeta - P\right)u^2 + \frac{MR_{k-1}}{3p^2}\left(\frac{2M^2 R_{k-1}^2}{9p} + \zeta + 2P\right) = 0$$

i obliczamy wyróżnik

$$\Delta = -\frac{1}{27p^3}\left(\frac{M^2 R_{k-1}^2}{3p} + \zeta - P\right)^3 + \frac{M^2 R_{k-1}^2}{12p^4}\left(\frac{2M^2 R_{k-1}^2}{9p} + \zeta + 2P\right)^2$$

Typ rozwiązania i odpowiednie wzory na pierwiastki zależą od znaku wyróżnika. Jednak nie wygląda na to, aby można było łatwo ustalić ten znak. Dla dodatniego znaku jedyne rozwiązanie rzeczywiste wyraża się wzorem

$$u = \sqrt[3]{-\frac{MR_{k-1}}{6p^2}\left(\frac{2M^2 R_{k-1}^2}{9p} + \zeta + 2P\right) + \sqrt{\Delta}} + \sqrt{\Delta}$$

$$-\sqrt[3]{\frac{MR_{k-1}}{6p^2}\left(\frac{2M^2R_{k-1}^2}{9p} + \zeta + 2P\right)} + \sqrt{\Delta}$$

i na to, aby było ono dodatnie, musiałyby zachodzić $\frac{2M^2R_{k-1}^2}{9p} + \zeta + 2P < 0$. Natomiast dla ujemnego wyróżnika dostajemy trzy pierwiastki rzeczywiste, z których trzeba wybrać pierwiastek dodatni. Jeżeli jest tylko jeden pierwiastek, to jest to rozwiązanie naszego zadania. Jeżeli pierwiastków dodatnich jest więcej, to potrzeba dodatkowe kryterium wyboru rozwiązania właściwego. Te trzy pierwiastki wyrażają się wzorami

$$u_1 = 2\sqrt{\frac{1}{3p}\left(\frac{M^2R_{k-1}^2}{3p} + \zeta - P\right)} \cos \frac{\phi}{3}$$

$$u_2 = 2\sqrt{\frac{1}{3p}\left(\frac{M^2R_{k-1}^2}{3p} + \zeta - P\right)} \cos \frac{\phi + 2\pi}{3}$$

$$u_3 = 2\sqrt{\frac{1}{3p}\left(\frac{M^2R_{k-1}^2}{3p} + \zeta - P\right)} \cos \frac{\phi + 4\pi}{3}$$

gdzie

$$\cos \phi = \frac{-\frac{MR_{k-1}}{2p}\left(\frac{2M^2R_{k-1}^2}{9p} + \zeta + 2P\right)}{\sqrt{\frac{1}{3p}\left(\frac{M^2R_{k-1}^2}{3p} + \zeta - P\right)^3}}$$

Jak widać, zależność u , czyli w od czasu t jest skomplikowana. Od czasu t zależy wykładniczo wartość P , która z kolei wchodzi bardzo nieliniowo do końcowego rozwiązania, niezależnie od tego, które z rozwiązań jest właściwe.

A.2 Model z uwzględnieniem jazdy po łuku

Dla przypomnienia, równania ruchu dla zakresu stałej mocy ma następującą postać

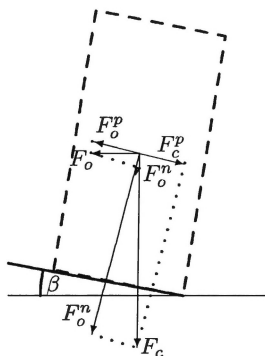
$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{\zeta}{M} \frac{1}{v(t)} - \frac{p}{M} v(t) + R_{k-1} \quad (138)$$

z warunkiem początkowym

$$v(t_{\nu_1}) = v_{\nu_1}$$

Równanie to teoretycznie można rozwiązać analitycznie. Jednak prowadzi to do bardzo skomplikowanych wzorów. Ich wyprowadzenie przedstawiono w załączniku.

Powróćmy teraz do modelu (1), jednak przyjmiemy w wyprowadzeniu oporów częściowo inne założenia. Otóż przyjmiemy, że zależność oporu od prędkości jest kwadratowa, natomiast założymy, że nie ma wiatru. Dodatkowo, rozpatrzmy opory przy jeździe pociągu po łuku toru. Zacniemy od wyprowadzenia tej zależności.



Rysunek 22: Siły w jeździe po łuku.

Obliczymy na początek siły działające na pociąg jadący po łuku. Przyjmiemy, że pociąg jest jedną bryłą, co jest pewnym przybliżeniem, szczególnie dla składów wielowagonowych. Siła powodująca skręt pociągu jest tu wynikiem reakcji kół z torami, przez co na tor działa siła (siła odśrodkowa) równa $F_o = Ma_o$, gdzie $a_o = v^2/R$ jest przyspieszeniem dośrodkowym, v jest prędkością pociągu, a R promieniem skrętu. Jednak tory są często budowane na zakrętach z nachyleniem w kierunku skrętu. Powoduje to, że siła odśrodkowa nie jest równoległa do płaszczyzny torów, gdyż jest pozioma – równoległa do płaszczyzny ziemi, patrz rys. 22. Po rozłożeniu tej siły na składową równoległą do poziomemu torów F_o^p i składową

prostopadła do płaszczyzny torów F_o^n otrzymamy zależności

$$F_o^p = F_o \cos \beta \quad F_o^n = F_o \sin \beta$$

Jednak na skutek pochylenia torów, pionową siłą ciężkości $F_c = Mg$ możemy rozłożyć także na dwie składowe działające w tych samych kierunkach, co składowe siły odśrodkowej

$$F_c^p = F_c \sin \beta \quad F_c^n = F_c \cos \beta$$

Ponieważ składowe równoległe do poziomemu torów mają przeciwne zwroty, końcowe wypadkowe składowe, po wstawieniu wzorów na siłę odśrodkową i siłę ciężkości, wyglądają następująco

$$F_p = F_o^p - F_c^p = Mg \left(\frac{v^2}{gR} \cos \beta - \sin \beta \right) \quad F^n = F_o^n + F_c^n = Mg \left(\frac{v^2}{gR} \sin \beta + \cos \beta \right) \quad (139)$$

Po pomnożeniu przez współczynnik tarcia związany z ruchem po łuku μ_R otrzymamy związaną z tym ruchem siłę tarcia

$$T_R = \mu_R F_p = \mu_R Mg \left(\frac{v^2}{gR} \cos \beta - \sin \beta \right) \quad (140)$$

Siła prostopadła do płaszczyzny torów jest zaś związana z siłą tarcia tocznego

$$T_T = \mu_T Mg \left(\frac{v^2}{gR} \sin \beta + \cos \beta \right) \quad (141)$$

które będzie jeszcze zależało od nachylenia torów w kierunku jazdy (będzie pomnożone przez $\cos \alpha$).

W rezultacie równanie ruchu pociągu (po zaniechaniu wiatru) będzie wyglądało następująco

$$\begin{aligned} M \frac{dv(t)}{dt} = \\ = -pv^2(t) + h(t) + gM \sin \alpha - \mu_T Mg \left(\frac{v^2}{gR} \sin \beta + \cos \beta \right) \cos \alpha - \mu_R Mg \left(\frac{v^2}{gR} \cos \beta - \sin \beta \right) \end{aligned} \quad (142)$$

Równanie to można zapisać następująco

$$\frac{dv(t)}{dt} = -Av^2(t) + C \quad (143)$$

gdzie

$$A = \frac{p}{M} + \frac{\mu_T \sin \beta \cos \alpha + \mu_R \cos \beta}{R}$$

i

$$C = \frac{h(t)}{M} + g \sin \alpha - \mu_T g \cos \beta \cos \alpha + \mu_R g \sin \beta$$

Jest to równanie różniczkowe Riccatiego.

Jeżeli w podziale trasy przejazdu na odcinki uwzględnimy łuki założymy, jak poprzednio, że sterowanie u jest na każdym odcinku stałe, to na każdym odcinku parametry A i C są stałe. Można w takim przypadku łatwo zauważyć, że ma ono wtedy rozwiązanie szczególne stałe na odcinku

$$v^0(t) = \sqrt{\frac{C}{A}} \quad (144)$$

Istnieje wzór pozwalający wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania Riccatiego, gdy jest znane jego rozwiązanie szczególne, patrz np. [28]. Jeżeli zapiszemy powyższy typ równania w sposób ogólniejszy

$$\frac{dv(t)}{dt} = f_2(t)v^2(t) + f_1(t)v(t) + f_0(t) \quad (145)$$

i znamy pewne rozwiązanie szczególne tego równania $v^0(t) = \phi(t)$, to wzór na równanie ogólne ma postać

$$v(t) = v^0(t) + \frac{\Phi(t)}{D - \int \Phi(t)f_2(t)dt} \quad (146)$$

$$\Phi(t) = e^{\int [2f_2(t)v^0(t) + f_1(t)]dt}$$

gdzie D jest dowolną stałą. W naszym przypadku współczynniki f_i oraz rozwiązanie szczególne $v^0(t)$ są stałe i przyjmują wartości

$$f_2(t) = -A \quad f_1(t) = 0 \quad f_0(t) = C \quad v^0(t) = \sqrt{\frac{C}{A}}$$

wobec czego

$$\Phi(t) = e^{-\int 2A\sqrt{\frac{C}{A}}dt} = e^{-2\sqrt{AC}t}$$

i rozwiązanie ogólne równania (143) przyjmuje następującą postać

$$v(t) = \sqrt{\frac{C}{A}} + \frac{e^{-2\sqrt{AC}t}}{D - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{C}}e^{-2\sqrt{AC}t}} \quad (147)$$

Na odcinku $k-1$ stałą D wyznaczymy z warunku początkowego $v(t_{k-1}) = v_{k-1}$. Dla podkreślenia, że rozpatrujemy rozwiązanie na tym odcinku, wszystkim stałym dodamy wskaźnik $k-1$. Tak więc mamy

$$v_{k-1} = \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} + \frac{e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}t_{k-1}}}{D - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_{k-1}}{C_{k-1}}}e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}t_{k-1}}}$$

skąd

$$D = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_{k-1}}{C_{k-1}}} + \frac{1}{v_{k-1} - \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}}} \right) e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}t_{k-1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_{k-1}}{C_{k-1}}} \frac{v_{k-1} + \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}}}{v_{k-1} - \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}}} e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}t_{k-1}}$$

Po podstawieniu wyznaczonej stałej do rozwiązania ogólnego, otrzymamy rozwiązanie szczególne spełniające warunek początkowy

$$v^{k-1}(t) = \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} \left(1 + \frac{2e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}(t-t_{k-1})}}{\frac{v_{k-1} + \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}}}{v_{k-1} - \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}}} - e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}(t-t_{k-1})}} \right) \quad (148)$$

co można też zapisać w bardziej symetrycznej formie

$$v^{k-1}(t) = \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} \frac{v_{k-1} + \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} + (v_{k-1} - \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}})e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}(t-t_{k-1})}}{v_{k-1} + \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} - (v_{k-1} - \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}})e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}(t-t_{k-1})}} \quad (149)$$

Ze wzrostem czasu rozwiązanie zbiega do rozwiązania szczególnego stałego (144). Jeżeli ta zbieżność jest szybka, to rozwiązanie takie jest dosyć wygodne w praktycznej implementacji, gdyż po prostu można podać maszyniście, jaką prędkość ma utrzymywać na danym odcinku i ewentualnie po jakim czasie przejściowym.

Na końcu przedziału, dla $t = t_k$, zachodzi

$$v_k = \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} \frac{v_{k-1} + \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} + (v_{k-1} - \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}})e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}(t_k-t_{k-1})}}{v_{k-1} + \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} - (v_{k-1} - \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}})e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}(t_k-t_{k-1})}} \quad (150)$$

W powyższych wzorach

$$A_{k-1} = \frac{p}{M} + \frac{\mu_T \sin \beta_{k-1} \cos \alpha_{k-1} + \mu_R \cos \beta_{k-1}}{R_{k-1}}$$

$$C_{k-1} = h_{k-1} + g \sin \alpha_{k-1} - \mu_T g \cos \beta_{k-1} \cos \alpha_{k-1} + \mu_R g \sin \beta_{k-1}$$

Jeżeli odcinek jest prosty, to $R_{k-1} = \infty$ i $\beta = 0$. Wtedy wzory na współczynniki A_{k-1} i C_{k-1} przyjmują postać

$$A_{k-1} = \frac{p}{M} \quad C_{k-1} = h_{k-1} + g \sin \alpha_{k-1} - \mu_T g \cos \alpha_{k-1}$$

Jak widać, wprowadzenie zależności oporów od kwadratu prędkości znacznie komplikuje rozwiązanie od strony technicznej, gdyż prowadzi do bardziej skomplikowanych wzorów. Niemniej jednak idea sprowadzenia całego zadania do nieliniowej optymalizacji statycznej, w której należy wyznaczyć wartości h_{k-1} i $\Delta_{k-1} = t_k - t_{k-1}$ dla $k = 1, \dots, K$, pozostaje aktualna.

A.3 Równanie zależne od drogi

Pochodną prędkości po czasie możemy łatwo zamienić na pochodną od drogi s korzystając z zależności

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{dv(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv(s)}{ds} v(s)$$

Zamieniając zmienne w równaniu (143) i podstawiając powyżej wyprowadzoną zależność otrzymujemy

$$v(s) \frac{dv(s)}{ds} = -Av^2(s) + C \quad (151)$$

Równanie to możemy zapisać następująco

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2(s)}{ds} = -Av^2(s) + C$$

skąd po podstawieniu $v^2(s) = z(s)$ otrzymujemy równanie liniowe

$$\frac{1}{2} \frac{dz(s)}{ds} = -Az(s) + C$$

Równanie to ma rozwiązanie ogólne

$$z(s) = De^{-2As} + \frac{C}{A}$$

Z warunku początkowego $z(s_{k-1}) = v_{k-1}^2$ uzyskujemy

$$D = e^{2As_{k-1}} (v_{k-1}^2 - \frac{C}{A})$$

oraz rozwiązanie szczególne spełniające ten warunek

$$z^{k-1}(s) = v_{k-1}^2 e^{-2A_{k-1}(s-s_{k-1})} + \frac{C_{k-1}}{A_{k-1}} (1 - e^{-2A_{k-1}(s-s_{k-1})})$$

a po uwzględnieniu podstawienia

$$v^{k-1}(s) = \sqrt{v_{k-1}^2 e^{-2A_{k-1}(s-s_{k-1})} + \frac{C_{k-1}}{A_{k-1}} (1 - e^{-2A_{k-1}(s-s_{k-1})})} \quad (152)$$

Na końcu odcinka równanie to przyjmuje wartość

$$v^{k-1}(s_k) = \sqrt{v_{k-1}^2 e^{-2A_{k-1}(s_k - s_{k-1})} + \frac{C_{k-1}}{A_{k-1}} (1 - e^{-2A_{k-1}(s_k - s_{k-1})})}$$

Może trochę nieoczekiwanie, równania te mają trochę prostszą formę niż w poprzednim punkcie, a nieliniowość typu funkcji wymiernej jest zamieniona na nieliniowość typu pierwiastkowego.

A.4 Dodatkowy stały wiatr.

Przy wyprowadzeniu w poprzednim punkcie przyjęto jednak, że nie ma wiatru, co jest sporym uproszczeniem. Podstawowe rozumowanie można jednak rozszerzyć na przypadek, gdy wieje stały wiatr z prędkością w . Podobnie jak w równaniu liniowym, przyjmiemy, że kierunki ruchu pociągu i wiatru mają ten sam zwrot, wobec czego równanie ruchu pociągu przyjmuje postać

$$M \frac{dv(t)}{dt} = -p(v-w)^2(t) + h(t) + gM \sin \alpha - \mu_T M g \left(\frac{v^2}{gR} \sin \beta + \cos \beta \right) \cos \alpha - \mu_R M g \left(\frac{v^2}{gR} \cos \beta - \sin \beta \right) \quad (153)$$

Po rozwinięciu wyrazu kwadratowego uzyskamy teraz równanie

$$\frac{dv(t)}{dt} = -Av^2(t) + Bv(t) + C \quad (154)$$

gdzie

$$A = \frac{p}{M} + \frac{\mu_T \sin \beta \cos \alpha + \mu_R \cos \beta}{R}$$

$$B = \frac{2pw}{M}$$

$$C = \frac{h(t)}{M} + g \sin \alpha - \mu_T g \cos \beta \cos \alpha + \mu_R g \sin \beta - \frac{pw^2}{M}$$

Współczynnik A jest tu dokładnie taki sam, jak poprzednio, natomiast w C pojawił się dodatkowy (ostatni) składnik. Pozostawimy jednak tę samą literę, aby nie mnożyć oznaczeń.

Podobnie jak poprzednio, równanie (154) ma rozwiązanie szczególne stałe, które spełnia równanie kwadratowe

$$-Av^2(t) + Bv(t) + C = 0$$

Z dwóch możliwych rozwiązań tego równania

$$\frac{B}{2A} \left(1 - \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}}\right) \quad \frac{B}{2A} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}}\right)$$

wyberzemy dodatnie (po prawej stronie), czyli nasze rozwiązanie szczególne wyraża się wzorem

$$v^0(t) = \frac{B}{2A} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}}\right) \quad (155)$$

We wzorze (146) przyjmujemy teraz wielkości

$$f_2(t) = -A \quad f_1(t) = B \quad f_0(t) = C \quad v^0(t) = \frac{B}{2A} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}}\right)$$

i otrzymujemy

$$\Phi(t) = e^{-B\sqrt{1+4\frac{AC}{B^2}}t}$$

oraz rozwiązanie ogólne

$$v(t) = \frac{B}{2A} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}}\right) + \frac{e^{-B\sqrt{1+4\frac{AC}{B^2}}t}}{D - \frac{A}{B\sqrt{1+4\frac{AC}{B^2}}}e^{-B\sqrt{1+4\frac{AC}{B^2}}t}}$$

Podstawiając warunek początkowy v_{k-1} dla T_{k-1} obliczamy stałą D

$$D = \frac{A}{B} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}}} + \frac{1}{\frac{A}{B}v_{k-1} - \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}}\right)} \right) e^{-B\sqrt{1+4\frac{AC}{B^2}}t_{k-1}}$$

Po podstawieniu tak wyliczonej stałej do rozwiązania ogólnego otrzymujemy rozwiązanie szczególne spełniające warunek początkowy $v(t_{k-1}) = v_{k-1}$

$$\begin{aligned} v^{k-1}(t) = & \frac{B_{k-1}}{A_{k-1}} \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1}C_{k-1}}{B_{k-1}^2}}}{2} + \right. \\ & \left. + \frac{e^{-B_{k-1}\sqrt{1+4\frac{A_{k-1}C_{k-1}}{B_{k-1}^2}}(t-t_{k-1})}}{\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}v_{k-1} - \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1}C_{k-1}}{B_{k-1}^2}}\right)} + \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1}C_{k-1}}{B_{k-1}^2}}} \left(1 - e^{-B_{k-1}\sqrt{1+4\frac{A_{k-1}C_{k-1}}{B_{k-1}^2}}(t-t_{k-1})}\right) \right) \end{aligned} \quad (156)$$

przy czym

$$A_{k-1} = \frac{p}{M} + \frac{\mu_T \sin \beta_{k-1} \cos \alpha_{k-1} + \mu_R \cos \beta_{k-1}}{R_{k-1}}$$

$$B_{k-1} = \frac{2pw}{M}$$

$$C_{k-1} = \frac{h(t)}{M} + g \sin \alpha_{k-1} - \mu_T g \cos \beta_{k-1} \cos \alpha_{k-1} + \mu_R g \sin \beta_{k-1} - \frac{pw^2}{M}$$

Jeżeli $w = 0$, to rozwiązanie to sprowadza się do rozwiązania (148).

Na końcu odcinka prędkość jest równa

$$v_k = \frac{B_{k-1}}{A_{k-1}} \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1} C_{k-1}}{B_{k-1}^2}}}{2} + \right. \\ \left. + \frac{e^{-B_{k-1} \sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1} C_{k-1}}{B_{k-1}^2}} \Delta_{k-1}}}{\frac{1}{\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} v_{k-1} - \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1} C_{k-1}}{B_{k-1}^2}})} + \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1} C_{k-1}}{B_{k-1}^2}}} (1 - e^{-B_{k-1} \sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1} C_{k-1}}{B_{k-1}^2}} \Delta_{k-1}})} \right) \quad (157)$$

B Literatura

Literatura

- [1] A.R. Albrecht, P.G. Howlett, P.J. Pudney, X. Vu, Energy-efficient train control: From local convexity to global optimization and uniqueness, *Automatica*, 49:3072 – 3078, 2013.
- [2] A.R. Albrecht, P.G. Howlett, P.J. Pudney, X. Vu, P. Zhou: The key principles of optimal train control - Part 1: Formulation of the model, strategies of optimal type, evolutionary lines, location of optimal switching points. *Transportation Research Part B*, 94:482–508, 2016.
- [3] A.R. Albrecht, P.G. Howlett, P.J. Pudney, X. Vu, P. Zhou: The key principles of optimal train control - Part 2: Existence of an optimal strategy, the local energy minimization principle, uniqueness, computational techniques. *Transportation Research Part B*, 94:509–538, 2016.
- [4] T. Albrecht, S. Oettich, A new integrated approach to dynamic schedule synchronization and energy-saving train control. W: J. Allan, R.J. Hill, C.A. Brebbia, G. Scutto, S. Sone (Eds.) *Computers in Railways VIII*, WIT Press, Ashurst Lodge, UK, 847-856, 2002.
- [5] I.A. Asnis, A.V. Dmitruk, N.P. Osmolovskii, Solution of the problem of the energetically optimal control of the motion of a train by the maximum principle. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 25(6):37–44, 1985.
- [6] I.A. Asnis, A.V. Dmitruk, N.P. Osmolovskii, Applications of realtime speed control in rail-bound public transportation systems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 25(6):37–44, 1987.
- [7] M.H. Bigharaz, A. Afshar, A. Suratgar, F. Safaei, Simultaneous optimization of energy consumption and train performances in electric railway systems, *Prepr. 19th World Congress, IFAC, Cape Town, South Africa, 6270–6275, August 24–29, 2014*
- [8] R. Burak–Romanowski, K. Woźniak, Energetyczne aspekty modernizacji linii kolejowych, *Technical Transactions on Electrical Engineering*, 108(13):13–29, 2011.
- [9] R. Franke, P. Terwiesch, M. Meyer, An algorithm for the optimal control of the driving of trains. *Proc. 39th IEEE Conf. Decision and Control, Sydney, Australia, 2123–2127, 2000.*

- [10] P. Gkortzas, Study on optimal train movement for minimum energy consumption, MSc Thesis, Mälardalen University, Sweden, 2013. (<http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:mdh:diva-21234>)
- [11] H. Górecki, S. Fuksa, A. Korytowski, W. Mitkowski, Sterowanie optymalne w systemach liniowych z kwadratowym wskaźnikiem jakości, PWN, Warszawa, 1983.
- [12] R.F. Hartl, S.P. Sethi, R.G. Vickson, A Survey of the Maximum Principles for Optimal Control Problems with State Constraints, *SIAM Review*, 37(2):181-218, 1995.
- [13] P. Howlett, Optimal strategies for the control of a train. *Automatica*, 32(4):519 – 532, 1996.
- [14] P. Howlett, The optimal control of a train, *Annals of Operations Research*, 98:65-87, 2000.
- [15] P.G. Howlett, P.J. Pudney, *Energy-Efficient Train Control*. Springer, 1995.
- [16] P.G. Howlett, P.J. Pudney, X. Vu, Local energy minimization in optimal train control, *Automatica*, 45:2692-2698, 2009.
- [17] K. Ichikawa, Application of optimization theory for bounded state variable problems to the operation of train, *Bull. Japan Soc. Math. and Engng*, 11(47):857-865, 1968.
- [18] E. Khmelnitsky, On an optimal control problem of train operation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45:1257–1266, 2000.
- [19] P. Kulinowski, *Obliczenia trakcyjne*, AGH, Kraków.
- [20] L. Lipiński, M. Miszewski, Wyznaczanie charakterystyk trakcyjnych pojazdów kolejowych z asynchronicznymi napędami trakcyjnymi, *Zeszyty Problenowe – Maszyny Elektryczne* Nr 1(94):67-74, 2012.
- [21] R. Liu, I.M. Golovitcher, Energy-efficient operation of rail vehicles. *Transportation Research Part A*, 37:917-932, 2003.
- [22] H. Maurer, Tutorial on control and state constrained optimal control problems, Part 2 : Mixed Control-State Constraints, Imperial College, 2011.
- [23] M. Miyatake, H. Ko, Optimization of train speed profile for minimum energy consumption, *IEEJ Transactions on Electrical and Electronic Engineering*, *IEEJ Trans.*, 5:263–269, 2010.

- [24] T. Montrone, Energy Consumption Minimization in Railway Systems. Dottorato di Ricerca in Matematica - XXVIII Ciclo, Dipartimento di Matematica e Fisica 'Ennio de Giorgi', Università del Salento, 2017.
- [25] H. Novak, M. Vašak, V. Lešiči, Hierarchical energy management of multi-train railway transport system with energy storages, IEEE International Conference on Intelligent Rail Transportation (ICIRT), 23-25 Aug. 2016, Birnigham, UK, 130–138, 2016.
- [26] ONTIME Consortium. Optimal networks for train integration management across europe. <http://www.ontime-project.eu/home.aspx>, 2017. Dostęp w grudniu 2017.
- [27] PKP Cargo, Katalog wagonów, Warszawa, 2013.
- [28] A.D. Polyinin, V.F. Zaitsev, Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, CRC Press, Boca Raton, 1995.
- [29] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mischenko. The mathematical theory of optimal processes. Interscience Publishers, John Wiley & Sons, Inc, New York, London, 1962.
- [30] P. Pudney and P. Howlett. Optimal driving strategies for a train journey with speed limits. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 36:38–49, 1994.
- [31] B.P. Rochard, F. Schmid, A review of methods to measure and calculate train resistances, *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers, Part F, Journal of Rail Rapid Transit*, 214(4):185–199, 2000.
- [32] G.M. Scheepmaker, R.M.P. Goverde, The interplay between energy-efficient train control and scheduled running time supplements. *J. Rail Transport Planning & Management*, 5:225-239, 2015.
- [33] G.M. Scheepmaker, R.M.P. Goverde, L.G. Kroon: Review of energy-efficient train control and time tabling. *European Journal of Operation Research*, 257:355-376, 2017.
- [34] Y. Song, W. Song, A novel dual speed-curve optimization based approach for energy-saving operation of a high-speed trains. *IEEE Trans. Intelligent Transportation Systems*, 17(6):1564-1575, 2016.
- [35] S. Su, T. Tang, X. Li, Z. Gao, A subway train timetable optimization approach based on energy-efficient operation strategy. *IEEE Trans. Intelligent Transportation Systems*, 14(2):883-693, 2013.

- [36] S. Su, T. Tang, X. Li, Z. Gao, Optimization of multitrain operations in a subway system. *IEEE Trans. Intelligent Transportation Systems*, 15(2):673-684, 2014.
- [37] J. Vittek, P. Butko, B. Ftorek, P. Makys, L. Gorel, Energy near optimal control strategies for industrial and traction drives with a.c. motors, *Mathematical Problems with Engineering*, Vol. 2017, article id 1857186, 2017.
- [38] P. Wang, R.M. Goverde. Multiple-phase train trajectory optimization with signalling and operational constraints. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 69:255–275, 2016.
- [39] Y. Wang, B. Ning, F. Cao, B. De Schutter, and T.J.J. van den Boom, A survey on optimal trajectory planning for train operations, *Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Intelligent Rail Transportation (ICIRT 2011)*, Beijing, China, 589–594, July 2011.
- [40] M. Wnuk, Wyznaczenie jazdy optymalnej pociągu na odcinku z ograniczeniem prędkości, *Technika Transportu Szybowego*, 4:54-59, 2012.
- [41] H. Ye, R. Liu, A multiphase optimal control method for multi-train control and scheduling on railway lines, *Transportation Research Part B*, 93:377–393, 2016.

