

**Raport Badawczy**  
**Research Report**

**RB/40/2017**

**Optymalizacja i symulacja  
przejazdu pociągu: analiza  
przejazdów optymalnych**

**A. Myśliński, Z. Nahorski,  
W. Radziszewska, K. Szulc**

**Instytut Badań Systemowych**  
**Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute**  
**Polish Academy of Sciences**



# **POLSKA AKADEMIA NAUK**

## **Instytut Badań Systemowych**

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Zakładu zgłaszający pracę:  
Prof. dr hab. inż. Zbigniew Nahorski

Warszawa 2017

# Optymalizacja i symulacja przejazdu pociągu: analiza przejazdów optymalnych

Andrzej Myśliński, Zbigniew Nahorski,  
Weronika Radziszewska, Katarzyna Szulc

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Uproszczony model pociągu</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Dane do obliczeń numerycznych</b>	<b>13</b>
3.1	Masa pociągu $M$ . . . . .	13
3.2	Pochylenie toru . . . . .	15
3.3	Opory ruchu . . . . .	15
3.4	Siła pociągowa . . . . .	18
3.5	Wskaźnik jakości $J$ . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego</b>	<b>20</b>
<b>5</b>	<b>Sterowanie odcinkami stałe</b>	<b>22</b>
<b>6</b>	<b>Jazda z maksymalną siłą pociągową</b>	<b>25</b>
<b>7</b>	<b>Warunki konieczne optymalności</b>	<b>28</b>
7.1	Sformułowanie zadania . . . . .	28
7.2	Warunki konieczne . . . . .	30
7.3	Wyznaczanie czasów przełączeń z warunków zasady maksimum . . .	36
7.3.1	Wyznaczenie czasów przełączeń z równań sprzężonych . . . .	36
7.3.2	Numeryczne wyznaczanie czasów przełączeń . . . . .	37
<b>8</b>	<b>Zestawienie wzorów dla optymalnych fragmentów</b>	<b>41</b>
8.1	Przyspieszanie . . . . .	41
8.2	Zerowe sterowanie . . . . .	42
8.3	Stała prędkość . . . . .	43
8.4	Hamowanie . . . . .	44
<b>9</b>	<b>Trajektorie optymalne</b>	<b>45</b>
9.1	Trajektoria najszybsza – przejazd A. . . . .	45
9.2	Dodatek zerowego sterowania – przejazd B. . . . .	49
9.3	Wybór między przejazdami B i C . . . . .	51
9.4	Duże zerowe sterowanie – przejazd C . . . . .	55
9.5	Wybór między przejazdem C a wolniejszymi . . . . .	57
9.6	Przejazd z fragmentem stałej prędkości – przejazd D . . . . .	61
9.7	Wybór między przejazdem D a przejazdami DE . . . . .	63
9.8	Przejazdy pośrednie DE1 i DE2 . . . . .	65
9.9	Przejazd najwolniejszy – przejazd E . . . . .	69

9.10	Algorytm poszukiwania optymalnego przejazdu . . . . .	73
<b>10</b>	<b>Obliczanie energii przejazdów dla poszczególnych typów przejazdów</b>	<b>74</b>
10.1	Energia przejazdu dla optymalnych reżymów sterowania . . . . .	74
10.2	Energia przejazdu na odcinkach drogi . . . . .	75
<b>A</b>	<b>Załącznik</b>	<b>77</b>
A.1	Rozwiązanie nieliniowego równania ruchu dla zakresu stałej mocy .	77
A.2	Model z uwzględnieniem jazdy po łuku . . . . .	82
A.3	Równanie zależne od drogi . . . . .	86
A.4	Dodatkowy stały wiatr. . . . .	87
<b>B</b>	<b>Literatura</b>	<b>90</b>

# 1 Wprowadzenie

Kolej obsługuje sporą część transportu osobowego (w Polsce około 10%) i towarowego (w Polsce ponad 30%), zużywając w tym celu znaczną ilość energii. W odróżnieniu od wielu innych środków transportu, transport kolejowy pozwala na oszczędności energii związane ze sposobem jazdy, ze względu na wydzielone trakcje z bezkolizyjnym ruchem, gdy są zachowane rozkłady jazdy. Oszczędność energii ma nie tylko wymiar ekonomiczny, ale także powoduje zmniejszenie emisji gazów cieplarnianych i innych zanieczyszczeń atmosfery, a więc ma także wymiar ekologiczny.

Pierwsze prace dotyczące optymalizacji profilu prędkości jazdy pojawiły się w Japonii w latach 60-tych ubiegłego wieku [17]. Istotny postęp w analizie tego problemu wprowadziła praca [5]. Jednak zdecydowany rozwój badań dotyczących sterowania jazdą pociągu nastąpił dopiero w XXI w. Wczesne intensywne badania na przełomie wieków prowadzono w Australii [30, 15, 13, 14, 9], ale główny wysyp prac nastąpił dopiero po 2010 r. Część tych prac przedstawiono w wykazie literatury tego opracowania, można je także znaleźć w wykazach literatury artykułów przeglądowych [2, 3, 33]. W Europie powstał w tym czasie projekt [26], w ramach którego jest możliwość wymiany doświadczeń i współpracy w rozwijaniu tej tematyki.

Większość prac kontynuuje metody rozwiązania przedstawione w najwcześniejszych pracach i opiera optymalizację na zasadzie maksimum Pontriagina [29]. Trudności w jej zastosowaniu wynikają z występowania ograniczeń na jeden ze stanów – prędkość – i zależnych od innego stanu – drogi, a także zmienności równania w zależności od drogi, co wynika z różnych oporów zależnych od różnicy wzniesień, zakrętów, czy oporów powietrza, na przykład w tunelach. Stosując zasadę maksimum Pontriagina można stosunkowo łatwo uzyskać ogólną charakterystycję optymalnych fragmentów przejazdów, jednak duży kłopot sprawia wyznaczenie czasów przełączeń między tymi fragmentami. Z tego powodu pojawiły się prace, w których do optymalizacji używa się metod heurystycznych. Innym kierunkiem jest modyfikacja rozkładu jazdy w celu zmniejszenia wydatku energii, a także układanie regionalnych rozkładów jazdy i zarządzanie w takich regionach ruchem pociągów pod kątem oszczędności energii, patrz [33].

W tym opracowaniu zajmujemy się najprostszym zagadnieniem wyznaczania optymalnych profili jazdy. Jednak celem jest opracowanie takich profili dla tras ruchu lokalnego w terenie polodowcowym, charakteryzującym się licznymi zmianami nachylenia trasy. Łącznie z licznymi zmianami ograniczeń na prędkość powoduje to, że kłopotliwe wyznaczanie punktów przełączeń jest w takim przypadku liczne.

Metody rozpatrywane w opracowaniu są oparte na zasadzie maksimum Pontriagina, jednak zaproponowano tu liczne uproszczenia powodujące przyspieszenie obliczeń. Podstawowym z nich jest użycie analitycznych rozwiązań równań ruchu

zamiast przyjętych ogólnie rozwiązań numerycznych. Głównym rozwiązywanym w opracowaniu przypadkiem są liniowe równania ruchu powstałe przez przyjęcie liniowej zależności oporu powietrza od prędkości względnej pociągu. Jednak podano także rozwiązania analityczne równań nieliniowych, które można będzie rozpatrzeć w dalszych badaniach.

Innym pomysłem rozważanym w tym opracowaniu jest podział trasy między przystankami na odcinki o stałych ograniczeniach prędkości oraz stałym równaniu ruchu. Rozwiązania optymalne dla takich odcinków sprowadzają się do kilku typów przejazdów. Sklasyfikowano te typy przejazdów, przedstawiono sposoby wyznaczania w nich chwil przełączeń między fragmentami o stałych wymuszeniach oraz podano algorytm wyboru typu przejazdu przy zadanych początkowych i końcowych czasach przejazdu oraz prędkościach w tych chwilach. Okazało się przy tym, że dla dokładnych wzorów występowały trudności numeryczne w wyznaczaniu rozwiązań układów równań nieliniowych. Opracowano przybliżenia wzorów sprowadzające równania do równań kwadratowych, których rozwiązanie nie nastęcza trudności, a jednocześnie jest wystarczająco dokładne.

W tym opracowaniu nie rozważono natomiast metod połączenia przejazdów na odcinkach w optymalny przejazd na całej trasie między przystankami, poza ogólnym zarysowaniem możliwych metod postępowania. Rozwiązanie tego zagadnienia będzie tematem dalszych prac.

W opracowaniu nie podano także przykładów numerycznych wyznaczania rozwiązań. Będzie to tematem oddzielnego opracowania.

## 4 Rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego

Rozwiązanie równania (1) zaczniemy od rozpatrzenia pododcinków zilustrowanych na rys. 2. Przyjmijmy, jak poprzednio, że w punkcie  $s_{k-1}$  pociąg znajduje się w chwili  $t_{k-1}$  z prędkością  $v_{k-1}$ . Wyznaczamy wobec tego rozwiązanie analityczne następującego równania zwyczajnego, w którym przyjęto  $h(t)$  zamiast  $f(u(t))$ :

$$M\dot{v} + pv = h(t) + gM \sin \alpha_{k-1} - \mu_T gM \cos \alpha_{k-1} + pw(t) \quad (20)$$

na przedziale  $(t_{k-1}, t_k)$ , z warunkiem początkowym  $v(t_{k-1}) = v_{k-1}$ . Ponieważ z konstrukcji pododcinków  $\alpha_{k-1}$  jest stałe na każdym pododcinku, to wyrażenie  $gM \sin \alpha_{k-1} - \mu_T gM \cos \alpha_{k-1}$  jest wielkością stałą.

Rozwiązujemy równanie jednorodne:

$$M\dot{v} = -pv \Leftrightarrow \frac{\dot{v}}{v} = -\frac{p}{M} \Leftrightarrow \ln v = -\frac{p}{M}t + C \Leftrightarrow v(t) = Ce^{-\frac{p}{M}t} \quad (21)$$

Uzmienniamy stałą  $C = C(t)$ . Wówczas zachodzi

$$v = C(t)e^{-\frac{p}{M}t}, \quad \dot{v} = C'(t)e^{-\frac{p}{M}t} - \frac{p}{M}C(t)e^{-\frac{p}{M}t} \quad (22)$$

Wstawiając  $\dot{v}$  do równania (20) otrzymujemy

$$\begin{aligned} MC'(t)e^{-\frac{p}{M}t} - pC(t)e^{-\frac{p}{M}t} + pC(t)e^{-\frac{p}{M}t} = \\ = h(t) + gM \sin \alpha_{k-1} - \mu_T gM \cos \alpha_{k-1} + pw(t) \\ MC'(t)e^{-\frac{p}{M}t} = h(t) + gM \sin \alpha_{k-1} - \mu_T gM \cos \alpha_{k-1} + pw(t) \end{aligned}$$

Stąd

$$C'(t) = \left[ \frac{1}{M}h(t) + g \sin \alpha_{k-1} - \mu_T g \cos \alpha_{k-1} + \frac{p}{M}w(t) \right] e^{\frac{p}{M}t}$$

zatem

$$C(t) = \frac{1}{M} \int_{t_{k-1}}^t [h(\tau) + pw(\tau)] e^{\frac{p}{M}\tau} d\tau + g(\sin \alpha_{k-1} - \mu_T \cos \alpha_{k-1}) \cdot \frac{M}{p} e^{\frac{p}{M}t} + D$$

Skoro  $v(t) = C(t)e^{-\frac{p}{M}t}$ , to

$$v(t) = \frac{1}{M} e^{-\frac{p}{M}t} \int_{t_{k-1}}^t [h(\tau) + pw(\tau)] e^{\frac{p}{M}\tau} d\tau + \frac{Mg}{p} (\sin \alpha_{k-1} - \mu_T \cos \alpha_{k-1}) + D e^{-\frac{p}{M}t} \quad (23)$$



co po przekształceniu można zapisać jako

$$v(t) = \frac{1}{M} e^{-\frac{p}{M}t} \int_{t_{k-1}}^t (h(\tau) + pw(\tau)) e^{\frac{p}{M}\tau} d\tau + \frac{Mg}{p} (\sin \alpha_{k-1} - \mu_T \cos \alpha_{k-1}) + D e^{-\frac{p}{M}t} \quad (24)$$

Nieznana stałą  $D$  wyznaczmy z warunku początkowego  $v(t_{k-1}) = v_{k-1}$ .

$$v_{k-1} = \frac{Mg}{p} (\sin \alpha_{k-1} - \mu_T \cos \alpha_{k-1}) + D e^{-\frac{p}{M}t_{k-1}}$$

$$D = \left[ -\frac{Mg}{p} (\sin \alpha_{k-1} - \mu_T \cos \alpha_{k-1}) + v_{k-1} \right] e^{\frac{p}{M}t_{k-1}}$$

Zatem prędkość w przedziale  $(t_{k-1}, t_k)$  wyraża się wzorem

$$v(t) = \frac{1}{M} e^{-\frac{p}{M}t} \int_{t_{k-1}}^t (h(\tau) + pw(\tau)) e^{\frac{p}{M}\tau} d\tau + \frac{Mg}{p} (\sin \alpha_{k-1} - \mu_T \cos \alpha_{k-1}) (1 - e^{-\frac{p}{M}(t-t_{k-1})}) + v_{k-1} e^{-\frac{p}{M}(t-t_{k-1})} \quad (25)$$

## A Załącznik

### A.1 Rozwiązanie nieliniowego równania ruchu dla zakresu stałej mocy

Mnożąc obie strony przez  $v$  otrzymujemy

$$v(t) \frac{dv(t)}{dt} = \frac{\zeta}{M} - \frac{p}{M} v^2(t) + R_{k-1} v(t) \quad (133)$$

Podstawiając nową zmienną

$$w(t) = v(t) e^{\frac{p}{M}t}$$

a następnie

$$\tau = \frac{p}{M}t$$

doprowadzamy do równania

$$w(\tau) \frac{dw(\tau)}{d\tau} = \frac{\zeta}{p} e^{2\tau} + w(\tau) \frac{M R_{k-1}}{p} e^{\tau} \quad (134)$$

Jest to pewna forma równania Abela drugiego rodzaju, którą można sprowadzić do równania liniowego ze zmiennymi współczynnikami po podstawieniach

$$\tau = \ln \xi \quad w = u\xi$$

Mamy bowiem

$$\frac{dw}{d\tau} = \frac{d(u\xi)}{d\tau} = \frac{du}{d\tau} \xi + u \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{du}{d\tau} \xi + u \frac{d\xi}{du} \frac{du}{d\tau} = \frac{du}{d\tau} \left( \xi + u \frac{d\xi}{du} \right)$$

Ponieważ jednak

$$\frac{d\tau}{du} = \frac{d\tau}{d\xi} \frac{d\xi}{du} = \frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{du}$$

więc

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{\frac{d\tau}{du}} = \frac{\xi}{\frac{d\xi}{du}}$$

W rezultacie, po podstawieniu do (134) otrzymujemy

$$u\xi \frac{\xi}{\frac{d\xi}{du}} \left( \xi + u \frac{d\xi}{du} \right) = \frac{1}{p} \left( \zeta + u M R_{k-1} \right) \xi^2$$

skąd dochodzimy do końcowego równania liniowego

$$\left( -u^2 + u \frac{M R_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p} \right) \frac{d\xi}{du} = u\xi \quad (135)$$

Ponieważ jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, więc rozwiązanie uzyskamy obliczając poniższe całki

$$\int \frac{d\xi}{\xi} = \int \frac{udu}{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}$$

Całka po lewej stronie jest równa

$$\int \frac{d\xi}{\xi} = \ln \xi$$

Trudniejszą całkę po prawej stronie możemy sprowadzić do sumy dwóch całek

$$\int \frac{udu}{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}} = -\frac{1}{2} \int \frac{(-2u + \frac{MR_{k-1}}{p})du}{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}} + \frac{MR_{k-1}}{2p} \int \frac{du}{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}$$

Pierwszą całkę po prawej stronie łatwo obliczymy po podstawieniu nowej zmiennej równej mianownikowi wyrażenia podcałkowego uzyskując

$$-\frac{1}{2} \int \frac{(-2u + \frac{MR_{k-1}}{p})du}{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}} = -\frac{1}{2} \ln(-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p})$$

Aby obliczyć drugą całkę po prawej stronie obliczymy wyznacznik mianownika

$$\Delta = \frac{M^2 R_{k-1}^2}{p^2} + 4 \frac{\zeta}{p} = \frac{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}{p^2} > 0$$

Po rozkładzie na ułamki proste dochodzimy do rozwiązania

$$\int \frac{du}{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}} = \frac{p}{\sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}} \ln \frac{2pu - MR_{k-1} + \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{2pu - MR_{k-1} - \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}$$

W rezultacie pierwotna całka po prawej stronie jest równa

$$\ln \left( C \sqrt{\frac{2pu - MR_{k-1} + \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{2pu - MR_{k-1} - \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}} \sqrt{\frac{MR_{k-1}}{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}} \right) / \sqrt{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}$$

gdzie  $C$  jest stałą całkowania, skąd otrzymujemy końcowe rozwiązanie ogólne

$$\xi = C \sqrt{\frac{2pu - MR_{k-1} + \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{2pu - MR_{k-1} - \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}} \sqrt{\frac{MR_{k-1}}{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}} / \sqrt{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}} \quad (136)$$

które daje nam zależność  $\xi(u)$ . Do wyznaczenia stałej  $C$  jest potrzebny dodatkowy warunek. Uzyskamy go z warunku początkowego początkowego równania. Otóż śledząc kolejne podstawienia dostajemy

$$w(t_{\nu_1}) = v(t_{\nu_1})e^{\frac{p}{M}t_{\nu_1}} \quad \tau_{\nu_1} = \frac{p}{M}t_{\nu_1}$$

skąd dostajemy

$$\xi_{\nu_1} = e^{\tau_{\nu_1}} = e^{\frac{p}{M}t_{\nu_1}} \quad u_{\nu_1} = \frac{w(t_{\nu_1})}{e^{\tau_{\nu_1}}} = v(t_{\nu_1})$$

Podstawiając te wielkości do rozwiązania (136) dochodzimy do zależności

$$e^{\frac{p}{M}t_{\nu_1}} = C \frac{\sqrt{\frac{2pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1} + \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{2pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1} - \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}} \frac{MR_{k-1}}{\sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}}}{\sqrt{-v^2(t_{\nu_1}) + v(t_{\nu_1}) \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}}$$

z której wyznaczamy  $C$

$$C = \frac{\sqrt{-v^2(t_{\nu_1}) + v(t_{\nu_1}) \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}}{\sqrt{\frac{2pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1} + \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{2pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1} - \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}} \frac{MR_{k-1}}{\sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}}} e^{\frac{p}{M}t_{\nu_1}}$$

Po podstawieniu  $C$  do równania (136) dostajemy rozwiązanie szczególne naszego równania

$$\xi = \frac{\sqrt{\frac{2pu - MR_{k-1} + \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{2pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1} + \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}} \frac{MR_{k-1}}{\sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}}}{\sqrt{\frac{2pu - MR_{k-1} - \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}{2pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1} - \sqrt{M^2 R_{k-1}^2 + 4p\zeta}}}} \bigg/ \sqrt{\frac{-u^2 + u \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}{-v^2(t_{\nu_1}) + v(t_{\nu_1}) \frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}} e^{\frac{p}{M}t_{\nu_1}} \quad (137)$$

Aby powrócić do początkowych zmiennych, z zależności

$$\tau = \ln \xi(u)$$

powinniśmy wyznaczyć funkcję odwrotną  $u(\tau)$ , co następnie pozwoliłoby znaleźć

$$w(\tau) = u(\tau)\xi(\tau) = u(\tau)e^{\tau}$$

aby dojść do końcowego wzoru

$$v(t) = w\left(\frac{p}{M}t\right)e^{-\frac{p}{M}t} = u\left(\frac{p}{M}t\right)$$

Jednak kłopot polega na wyznaczeniu funkcji odwrotnej  $u(\xi)$ , potrzebnej do uzyskania  $u(\tau)$ . Do tego celu przyjmijmy pewną aproksymację. Otóż zauważmy, że po rozważeniu zakresu wartości parametrów możemy przyjąć

$$1 + \frac{4p\zeta}{M^2 R_{k-1}^2} \approx 1$$

Wtedy zależność  $\xi(u)$  we wzorze (137) upraszcza się do

$$\xi = \sqrt{\frac{\frac{u}{v(t_{\nu_1})}(-v^2(t_{\nu_1}) + v(t_{\nu_1})\frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p})}{\frac{pu - MR_{k-1}}{pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1}}(-u^2 + u\frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p})}} e^{\frac{p}{M}t_{\nu_1}}$$

co doprowadza do równania

$$\xi^2 = \frac{u \frac{-v^2(t_{\nu_1}) + v(t_{\nu_1})\frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p}}{v(t_{\nu_1})}}{\frac{(pu - MR_{k-1})(-u^2 + u\frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p})}{pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1}}} e^{2\frac{p}{M}t_{\nu_1}}$$

czyli po przekształceniach do

$$pu^3 - 2MR_{k-1}u^2 + \left(\frac{M^2 R_{k-1}^2}{p} + P - \zeta\right)u + \frac{MR_{k-1}\zeta}{p} = 0$$

gdzie

$$P = \frac{(pv(t_{\nu_1}) - MR_{k-1})(-v^2(t_{\nu_1}) + v(t_{\nu_1})\frac{MR_{k-1}}{p} + \frac{\zeta}{p})}{v(t_{\nu_1})} e^{-2\frac{p}{M}(t - t_{\nu_1})}$$

Jest to równanie algebraiczne trzeciego stopnia, które w zasadzie można rozwiązać analitycznie.

Po standardowych podstawieniach sprowadzamy je do równania kanonicznego

$$u^3 - \frac{1}{p}\left(\frac{M^2 R_{k-1}^2}{3p} + \zeta - P\right)u^2 + \frac{MR_{k-1}}{3p^2}\left(\frac{2M^2 R_{k-1}^2}{9p} + \zeta + 2P\right) = 0$$

i obliczamy wyróżnik

$$\Delta = -\frac{1}{27p^3}\left(\frac{M^2 R_{k-1}^2}{3p} + \zeta - P\right)^3 + \frac{M^2 R_{k-1}^2}{12p^4}\left(\frac{2M^2 R_{k-1}^2}{9p} + \zeta + 2P\right)^2$$

Typ rozwiązania i odpowiednie wzory na pierwiastki zależą od znaku wyróżnika. Jednak nie wygląda na to, aby można było łatwo ustalić ten znak. Dla dodatniego znaku jedyne rozwiązanie rzeczywiste wyraża się wzorem

$$u = \sqrt[3]{-\frac{MR_{k-1}}{6p^2}\left(\frac{2M^2 R_{k-1}^2}{9p} + \zeta + 2P\right) + \sqrt{\Delta}} + \sqrt{\Delta} +$$

$$-\sqrt[3]{\frac{MR_{k-1}}{6p^2}\left(\frac{2M^2R_{k-1}^2}{9p} + \zeta + 2P\right)} + \sqrt{\Delta}$$

i na to, aby było ono dodatnie, musiałyby zachodzić  $\frac{2M^2R_{k-1}^2}{9p} + \zeta + 2P < 0$ . Natomiast dla ujemnego wyróżnika dostajemy trzy pierwiastki rzeczywiste, z których trzeba wybrać pierwiastek dodatni. Jeżeli jest tylko jeden pierwiastek, to jest to rozwiązanie naszego zadania. Jeżeli pierwiastków dodatnich jest więcej, to potrzeba dodatkowe kryterium wyboru rozwiązania właściwego. Te trzy pierwiastki wyrażają się wzorami

$$u_1 = 2\sqrt{\frac{1}{3p}\left(\frac{M^2R_{k-1}^2}{3p} + \zeta - P\right)} \cos \frac{\phi}{3}$$

$$u_2 = 2\sqrt{\frac{1}{3p}\left(\frac{M^2R_{k-1}^2}{3p} + \zeta - P\right)} \cos \frac{\phi + 2\pi}{3}$$

$$u_3 = 2\sqrt{\frac{1}{3p}\left(\frac{M^2R_{k-1}^2}{3p} + \zeta - P\right)} \cos \frac{\phi + 4\pi}{3}$$

gdzie

$$\cos \phi = \frac{-\frac{MR_{k-1}}{2p}\left(\frac{2M^2R_{k-1}^2}{9p} + \zeta + 2P\right)}{\sqrt{\frac{1}{3p}\left(\frac{M^2R_{k-1}^2}{3p} + \zeta - P\right)^3}}$$

Jak widać, zależność  $u$ , czyli  $w$  od czasu  $t$  jest skomplikowana. Od czasu  $t$  zależy wykładniczo wartość  $P$ , która z kolei wchodzi bardzo nieliniowo do końcowego rozwiązania, niezależnie od tego, które z rozwiązań jest właściwe.

## A.2 Model z uwzględnieniem jazdy po łuku

Dla przypomnienia, równania ruchu dla zakresu stałej mocy ma następującą postać

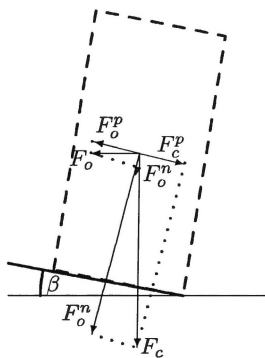
$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{\zeta}{M} \frac{1}{v(t)} - \frac{p}{M} v(t) + R_{k-1} \quad (138)$$

z warunkiem początkowym

$$v(t_{\nu_1}) = v_{\nu_1}$$

Równanie to teoretycznie można rozwiązać analitycznie. Jednak prowadzi to do bardzo skomplikowanych wzorów. Ich wyprowadzenie przedstawiono w załączniku.

Powróćmy teraz do modelu (1), jednak przyjmiemy w wyprowadzeniu oporów częściowo inne założenia. Otóż przyjmiemy, że zależność oporu od prędkości jest kwadratowa, natomiast założymy, że nie ma wiatru. Dodatkowo, rozpatrzmy opory przy jeździe pociągu po łuku toru. Zacniemy od wyprowadzenia tej zależności.



Rysunek 22: Siły w jeździe po łuku.

Obliczymy na początek siły działające na pociąg jadący po łuku. Przyjmiemy, że pociąg jest jedną bryłą, co jest pewnym przybliżeniem, szczególnie dla składów wielowagonowych. Siła powodująca skręt pociągu jest tu wynikiem reakcji kół z torami, przez co na tor działa siła (siła odśrodkowa) równa  $F_o = M a_o$ , gdzie  $a_o = v^2/R$  jest przyspieszeniem dośrodkowym,  $v$  jest prędkością pociągu, a  $R$  promieniem skrętu. Jednak tory są często budowane na zakrętach z nachyleniem w kierunku skrętu. Powoduje to, że siła odśrodkowa nie jest równoległa do płaszczyzny torów, gdyż jest pozioma – równoległa do płaszczyzny ziemi, patrz rys. 22. Po rozłożeniu tej siły na składową równoległą do poziomemu torów  $F_o^p$  i składową

prostopadła do płaszczyzny torów  $F_o^n$  otrzymamy zależności

$$F_o^p = F_o \cos \beta \quad F_o^n = F_o \sin \beta$$

Jednak na skutek pochylenia torów, pionową siłą ciężkości  $F_c = Mg$  możemy rozłożyć także na dwie składowe działające w tych samych kierunkach, co składowe siły odśrodkowej

$$F_c^p = F_c \sin \beta \quad F_c^n = F_c \cos \beta$$

Ponieważ składowe równoległe do poziomemu torów mają przeciwne zwroty, końcowe wypadkowe składowe, po wstawieniu wzorów na siłę odśrodkową i siłę ciężkości, wyglądają następująco

$$F_p = F_o^p - F_c^p = Mg\left(\frac{v^2}{gR} \cos \beta - \sin \beta\right) \quad F^n = F_o^n + F_c^n = Mg\left(\frac{v^2}{gR} \sin \beta + \cos \beta\right) \quad (139)$$

Po pomnożeniu przez współczynnik tarcia związany z ruchem po łuku  $\mu_R$  otrzymamy związaną z tym ruchem siłę tarcia

$$T_R = \mu_R F_p = \mu_R Mg\left(\frac{v^2}{gR} \cos \beta - \sin \beta\right) \quad (140)$$

Siła prostopadła do płaszczyzny torów jest zaś związana z siłą tarcia tocznego

$$T_T = \mu_T Mg\left(\frac{v^2}{gR} \sin \beta + \cos \beta\right) \quad (141)$$

które będzie jeszcze zależało od nachylenia torów w kierunku jazdy (będzie pomnożone przez  $\cos \alpha$ ).

W rezultacie równanie ruchu pociągu (po zaniechaniu wiatru) będzie wyglądało następująco

$$\begin{aligned} M \frac{dv(t)}{dt} = \\ = -pv^2(t) + h(t) + gM \sin \alpha - \mu_T Mg\left(\frac{v^2}{gR} \sin \beta + \cos \beta\right) \cos \alpha - \mu_R Mg\left(\frac{v^2}{gR} \cos \beta - \sin \beta\right) \end{aligned} \quad (142)$$

Równanie to można zapisać następująco

$$\frac{dv(t)}{dt} = -Av^2(t) + C \quad (143)$$

gdzie

$$A = \frac{p}{M} + \frac{\mu_T \sin \beta \cos \alpha + \mu_R \cos \beta}{R}$$



i

$$C = \frac{h(t)}{M} + g \sin \alpha - \mu_T g \cos \beta \cos \alpha + \mu_R g \sin \beta$$

Jest to równanie różniczkowe Riccatiego.

Jeżeli w podziale trasy przejazdu na odcinki uwzględnimy łuki założymy, jak poprzednio, że sterowanie  $u$  jest na każdym odcinku stałe, to na każdym odcinku parametry  $A$  i  $C$  są stałe. Można w takim przypadku łatwo zauważyć, że ma ono wtedy rozwiązanie szczególne stałe na odcinku

$$v^0(t) = \sqrt{\frac{C}{A}} \quad (144)$$

Istnieje wzór pozwalający wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania Riccatiego, gdy jest znane jego rozwiązanie szczególne, patrz np. [28]. Jeżeli zapiszemy powyższy typ równania w sposób ogólniejszy

$$\frac{dv(t)}{dt} = f_2(t)v^2(t) + f_1(t)v(t) + f_0(t) \quad (145)$$

i znamy pewne rozwiązanie szczególne tego równania  $v^0(t) = \phi(t)$ , to wzór na równanie ogólne ma postać

$$v(t) = v^0(t) + \frac{\Phi(t)}{D - \int \Phi(t)f_2(t)dt} \quad (146)$$

$$\Phi(t) = e^{\int [2f_2(t)v^0(t) + f_1(t)]dt}$$

gdzie  $D$  jest dowolną stałą. W naszym przypadku współczynniki  $f_i$  oraz rozwiązanie szczególne  $v^0(t)$  są stałe i przyjmują wartości

$$f_2(t) = -A \quad f_1(t) = 0 \quad f_0(t) = C \quad v^0(t) = \sqrt{\frac{C}{A}}$$

wobec czego

$$\Phi(t) = e^{-\int 2A\sqrt{\frac{C}{A}}dt} = e^{-2\sqrt{AC}t}$$

i rozwiązanie ogólne równania (143) przyjmuje następującą postać

$$v(t) = \sqrt{\frac{C}{A}} + \frac{e^{-2\sqrt{AC}t}}{D - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{C}}e^{-2\sqrt{AC}t}} \quad (147)$$

Na odcinku  $k-1$  stałą  $D$  wyznaczymy z warunku początkowego  $v(t_{k-1}) = v_{k-1}$ . Dla podkreślenia, że rozpatrujemy rozwiązanie na tym odcinku, wszystkim stałym dodamy wskaźnik  $k-1$ . Tak więc mamy

$$v_{k-1} = \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} + \frac{e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}t_{k-1}}}{D - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_{k-1}}{C_{k-1}}}e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}t_{k-1}}}$$

skąd

$$D = \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_{k-1}}{C_{k-1}}} + \frac{1}{v_{k-1} - \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}}} \right) e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}t_{k-1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_{k-1}}{C_{k-1}}} \frac{v_{k-1} + \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}}}{v_{k-1} - \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}}} e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}t_{k-1}}$$

Po podstawieniu wyznaczonej stałej do rozwiązania ogólnego, otrzymamy rozwiązanie szczególne spełniające warunek początkowy

$$v^{k-1}(t) = \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} \left( 1 + \frac{2e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}(t-t_{k-1})}}{\frac{v_{k-1} + \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}}}{v_{k-1} - \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}}} - e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}(t-t_{k-1})}} \right) \quad (148)$$

co można też zapisać w bardziej symetrycznej formie

$$v^{k-1}(t) = \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} \frac{v_{k-1} + \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} + (v_{k-1} - \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}})e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}(t-t_{k-1})}}{v_{k-1} + \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} - (v_{k-1} - \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}})e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}(t-t_{k-1})}} \quad (149)$$

Ze wzrostem czasu rozwiązanie zbiega do rozwiązania szczególnego stałego (144). Jeżeli ta zbieżność jest szybka, to rozwiązanie takie jest dosyć wygodne w praktycznej implementacji, gdyż po prostu można podać maszyniście, jaką prędkość ma utrzymywać na danym odcinku i ewentualnie po jakim czasie przejściowym.

Na końcu przedziału, dla  $t = t_k$ , zachodzi

$$v_k = \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} \frac{v_{k-1} + \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} + (v_{k-1} - \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}})e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}(t_k-t_{k-1})}}{v_{k-1} + \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}} - (v_{k-1} - \sqrt{\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}}})e^{-2\sqrt{A_{k-1}C_{k-1}}(t_k-t_{k-1})}} \quad (150)$$

W powyższych wzorach

$$A_{k-1} = \frac{p}{M} + \frac{\mu_T \sin \beta_{k-1} \cos \alpha_{k-1} + \mu_R \cos \beta_{k-1}}{R_{k-1}}$$

$$C_{k-1} = h_{k-1} + g \sin \alpha_{k-1} - \mu_T g \cos \beta_{k-1} \cos \alpha_{k-1} + \mu_R g \sin \beta_{k-1}$$

Jeżeli odcinek jest prosty, to  $R_{k-1} = \infty$  i  $\beta = 0$ . Wtedy wzory na współczynniki  $A_{k-1}$  i  $C_{k-1}$  przyjmują postać

$$A_{k-1} = \frac{p}{M} \quad C_{k-1} = h_{k-1} + g \sin \alpha_{k-1} - \mu_T g \cos \alpha_{k-1}$$

Jak widać, wprowadzenie zależności oporów od kwadratu prędkości znacznie komplikuje rozwiązanie od strony technicznej, gdyż prowadzi do bardziej skomplikowanych wzorów. Niemniej jednak idea sprowadzenia całego zadania do nieliniowej optymalizacji statycznej, w której należy wyznaczyć wartości  $h_{k-1}$  i  $\Delta_{k-1} = t_k - t_{k-1}$  dla  $k = 1, \dots, K$ , pozostaje aktualna.

### A.3 Równanie zależne od drogi

Pochodną prędkości po czasie możemy łatwo zamienić na pochodną od drogi  $s$  korzystając z zależności

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{dv(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv(s)}{ds} v(s)$$

Zamieniając zmienne w równaniu (143) i podstawiając powyżej wyprowadzoną zależność otrzymujemy

$$v(s) \frac{dv(s)}{ds} = -Av^2(s) + C \quad (151)$$

Równanie to możemy zapisać następująco

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2(s)}{ds} = -Av^2(s) + C$$

skąd po podstawieniu  $v^2(s) = z(s)$  otrzymujemy równanie liniowe

$$\frac{1}{2} \frac{dz(s)}{ds} = -Az(s) + C$$

Równanie to ma rozwiązanie ogólne

$$z(s) = De^{-2As} + \frac{C}{A}$$

Z warunku początkowego  $z(s_{k-1}) = v_{k-1}^2$  uzyskujemy

$$D = e^{2As_{k-1}} \left( v_{k-1}^2 - \frac{C}{A} \right)$$

oraz rozwiązanie szczególne spełniające ten warunek

$$z^{k-1}(s) = v_{k-1}^2 e^{-2A_{k-1}(s-s_{k-1})} + \frac{C_{k-1}}{A_{k-1}} (1 - e^{-2A_{k-1}(s-s_{k-1})})$$

a po uwzględnieniu podstawienia

$$v^{k-1}(s) = \sqrt{v_{k-1}^2 e^{-2A_{k-1}(s-s_{k-1})} + \frac{C_{k-1}}{A_{k-1}} (1 - e^{-2A_{k-1}(s-s_{k-1})})} \quad (152)$$

Na końcu odcinka równanie to przyjmuje wartość

$$v^{k-1}(s_k) = \sqrt{v_{k-1}^2 e^{-2A_{k-1}(s_k - s_{k-1})} + \frac{C_{k-1}}{A_{k-1}} (1 - e^{-2A_{k-1}(s_k - s_{k-1})})}$$

Może trochę nieoczekiwanie, równania te mają trochę prostszą formę niż w poprzednim punkcie, a nieliniowość typu funkcji wymiernej jest zamieniona na nieliniowość typu pierwiastkowego.

## A.4 Dodatkowy stały wiatr.

Przy wyprowadzeniu w poprzednim punkcie przyjęto jednak, że nie ma wiatru, co jest sporym uproszczeniem. Podstawowe rozumowanie można jednak rozszerzyć na przypadek, gdy wieje stały wiatr z prędkością  $w$ . Podobnie jak w równaniu liniowym, przyjmiemy, że kierunki ruchu pociągu i wiatru mają ten sam zwrot, wobec czego równanie ruchu pociągu przyjmuje postać

$$M \frac{dv(t)}{dt} = -p(v-w)^2(t) + h(t) + gM \sin \alpha - \mu_T M g \left( \frac{v^2}{gR} \sin \beta + \cos \beta \right) \cos \alpha - \mu_R M g \left( \frac{v^2}{gR} \cos \beta - \sin \beta \right) \quad (153)$$

Po rozwinięciu wyrazu kwadratowego uzyskamy teraz równanie

$$\frac{dv(t)}{dt} = -Av^2(t) + Bv(t) + C \quad (154)$$

gdzie

$$A = \frac{p}{M} + \frac{\mu_T \sin \beta \cos \alpha + \mu_R \cos \beta}{R}$$

$$B = \frac{2pw}{M}$$

$$C = \frac{h(t)}{M} + g \sin \alpha - \mu_T g \cos \beta \cos \alpha + \mu_R g \sin \beta - \frac{pw^2}{M}$$

Współczynnik  $A$  jest tu dokładnie taki sam, jak poprzednio, natomiast w  $C$  pojawił się dodatkowy (ostatni) składnik. Pozostawimy jednak tę samą literę, aby nie mnożyć oznaczeń.

Podobnie jak poprzednio, równanie (154) ma rozwiązanie szczególne stałe, które spełnia równanie kwadratowe

$$-Av^2(t) + Bv(t) + C = 0$$

Z dwóch możliwych rozwiązań tego równania

$$\frac{B}{2A} \left(1 - \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}}\right) \quad \frac{B}{2A} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}}\right)$$

wyberzemy dodatnie (po prawej stronie), czyli nasze rozwiązanie szczególne wyraża się wzorem

$$v^0(t) = \frac{B}{2A} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}}\right) \quad (155)$$

We wzorze (146) przyjmujemy teraz wielkości

$$f_2(t) = -A \quad f_1(t) = B \quad f_0(t) = C \quad v^0(t) = \frac{B}{2A} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}}\right)$$

i otrzymujemy

$$\Phi(t) = e^{-B \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}} t}$$

oraz rozwiązanie ogólne

$$v(t) = \frac{B}{2A} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}}\right) + \frac{e^{-B \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}} t}}{D - \frac{A}{B \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}}} e^{-B \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}} t}}$$

Podstawiając warunek początkowy  $v_{k-1}$  dla  $T_{k-1}$  obliczamy stałą  $D$

$$D = \frac{A}{B} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}}} + \frac{1}{\frac{A}{B} v_{k-1} - \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}}\right)} \right) e^{-B \sqrt{1 + 4 \frac{AC}{B^2}} t_{k-1}}$$

Po podstawieniu tak wyliczonej stałej do rozwiązania ogólnego otrzymujemy rozwiązanie szczególne spełniające warunek początkowy  $v(t_{k-1}) = v_{k-1}$

$$\begin{aligned} v^{k-1}(t) = & \frac{B_{k-1}}{A_{k-1}} \left( \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1} C_{k-1}}{B_{k-1}^2}}}{2} + \right. \\ & \left. + \frac{e^{-B_{k-1} \sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1} C_{k-1}}{B_{k-1}^2}} (t - t_{k-1})}}{\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} v_{k-1} - \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1} C_{k-1}}{B_{k-1}^2}}\right)} + \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1} C_{k-1}}{B_{k-1}^2}}} \left(1 - e^{-B_{k-1} \sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1} C_{k-1}}{B_{k-1}^2}} (t - t_{k-1})}\right) \right) \end{aligned} \quad (156)$$

przy czym

$$A_{k-1} = \frac{p}{M} + \frac{\mu_T \sin \beta_{k-1} \cos \alpha_{k-1} + \mu_R \cos \beta_{k-1}}{R_{k-1}}$$

$$B_{k-1} = \frac{2pw}{M}$$

$$C_{k-1} = \frac{h(t)}{M} + g \sin \alpha_{k-1} - \mu_T g \cos \beta_{k-1} \cos \alpha_{k-1} + \mu_R g \sin \beta_{k-1} - \frac{pw^2}{M}$$

Jeżeli  $w = 0$ , to rozwiązanie to sprowadza się do rozwiązania (148).

Na końcu odcinka prędkość jest równa

$$v_k = \frac{B_{k-1}}{A_{k-1}} \left( \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1} C_{k-1}}{B_{k-1}^2}}}{2} + \right. \\ \left. + \frac{e^{-B_{k-1} \sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1} C_{k-1}}{B_{k-1}^2}} \Delta_{k-1}}}{\frac{1}{\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} v_{k-1} - \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1} C_{k-1}}{B_{k-1}^2}})} + \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1} C_{k-1}}{B_{k-1}^2}}} (1 - e^{-B_{k-1} \sqrt{1 + 4 \frac{A_{k-1} C_{k-1}}{B_{k-1}^2}} \Delta_{k-1}})} \right) \quad (157)$$

## B Literatura

### Literatura

- [1] A.R. Albrecht, P.G. Howlett, P.J. Pudney, X. Vu, Energy-efficient train control: From local convexity to global optimization and uniqueness, *Automatica*, 49:3072 – 3078, 2013.
- [2] A.R. Albrecht, P.G. Howlett, P.J. Pudney, X. Vu, P. Zhou: The key principles of optimal train control - Part 1: Formulation of the model, strategies of optimal type, evolutionary lines, location of optimal switching points. *Transportation Research Part B*, 94:482–508, 2016.
- [3] A.R. Albrecht, P.G. Howlett, P.J. Pudney, X. Vu, P. Zhou: The key principles of optimal train control - Part 2: Existence of an optimal strategy, the local energy minimization principle, uniqueness, computational techniques. *Transportation Research Part B*, 94:509–538, 2016.
- [4] T. Albrecht, S. Oettich, A new integrated approach to dynamic schedule synchronization and energy-saving train control. W: J. Allan, R.J. Hill, C.A. Brebbia, G. Scutto, S. Sone (Eds.) *Computers in Railways VIII*, WIT Press, Ashurst Lodge, UK, 847-856, 2002.
- [5] I.A. Asnis, A.V. Dmitruk, N.P. Osmolovskii, Solution of the problem of the energetically optimal control of the motion of a train by the maximum principle. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 25(6):37–44, 1985.
- [6] I.A. Asnis, A.V. Dmitruk, N.P. Osmolovskii, Applications of realtime speed control in rail-bound public transportation systems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 25(6):37–44, 1987.
- [7] M.H. Bigharaz, A. Afshar, A. Suratgar, F. Safaei, Simultaneous optimization of energy consumption and train performances in electric railway systems, *Prepr. 19th World Congress, IFAC, Cape Town, South Africa, 6270–6275, August 24–29, 2014*
- [8] R. Burak–Romanowski, K. Woźniak, Energetyczne aspekty modernizacji linii kolejowych, *Technical Transactions on Electrical Engineering*, 108(13):13–29, 2011.
- [9] R. Franke, P. Terwiesch, M. Meyer, An algorithm for the optimal control of the driving of trains. *Proc. 39th IEEE Conf. Decision and Control, Sydney, Australia, 2123–2127, 2000.*

- [10] P. Gkortzas, Study on optimal train movement for minimum energy consumption, MSc Thesis, Mälardalen University, Sweden, 2013. (<http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:mdh:diva-21234>)
- [11] H. Górecki, S. Fuksa, A. Korytowski, W. Mitkowski, Sterowanie optymalne w systemach liniowych z kwadratowym wskaźnikiem jakości, PWN, Warszawa, 1983.
- [12] R.F. Hartl, S.P. Sethi, R.G. Vickson, A Survey of the Maximum Principles for Optimal Control Problems with State Constraints, *SIAM Review*, 37(2):181-218, 1995.
- [13] P. Howlett, Optimal strategies for the control of a train. *Automatica*, 32(4):519 – 532, 1996.
- [14] P. Howlett, The optimal control of a train, *Annals of Operations Research*, 98:65-87, 2000.
- [15] P.G. Howlett, P.J. Pudney, *Energy-Efficient Train Control*. Springer, 1995.
- [16] P.G. Howlett, P.J. Pudney, X. Vu, Local energy minimization in optimal train control, *Automatica*, 45:2692-2698, 2009.
- [17] K. Ichikawa, Application of optimization theory for bounded state variable problems to the operation of train, *Bull. Japan Soc. Math. and Engng*, 11(47):857-865, 1968.
- [18] E. Khmelnitsky, On an optimal control problem of train operation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45:1257–1266, 2000.
- [19] P. Kulinowski, *Obliczenia trakcyjne*, AGH, Kraków.
- [20] L. Lipiński, M. Miszewski, Wyznaczanie charakterystyk trakcyjnych pojazdów kolejowych z asynchronicznymi napędami trakcyjnymi, *Zeszyty Problenowe – Maszyny Elektryczne* Nr 1(94):67-74, 2012.
- [21] R. Liu, I.M. Golovitcher, Energy-efficient operation of rail vehicles. *Transportation Research Part A*, 37:917-932, 2003.
- [22] H. Maurer, Tutorial on control and state constrained optimal control problems, Part 2 : Mixed Control-State Constraints, Imperial College, 2011.
- [23] M. Miyatake, H. Ko, Optimization of train speed profile for minimum energy consumption, *IEEJ Transactions on Electrical and Electronic Engineering*, *IEEJ Trans.*, 5:263–269, 2010.



- [24] T. Montrone, Energy Consumption Minimization in Railway Systems. Dottorato di Ricerca in Matematica - XXVIII Ciclo, Dipartimento di Matematica e Fisica 'Ennio de Giorgi', Università del Salento, 2017.
- [25] H. Novak, M. Vašak, V. Lešiči, Hierarchical energy management of multi-train railway transport system with energy storages, IEEE International Conference on Intelligent Rail Transportation (ICIRT), 23-25 Aug. 2016, Birnigham, UK, 130–138, 2016.
- [26] ONTIME Consortium. Optimal networks for train integration management across europe. <http://www.ontime-project.eu/home.aspx>, 2017. Dostęp w grudniu 2017.
- [27] PKP Cargo, Katalog wagonów, Warszawa, 2013.
- [28] A.D. Polyinin, V.F. Zaitsev, Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, CRC Press, Boca Raton, 1995.
- [29] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mischenko. The mathematical theory of optimal processes. Interscience Publishers, John Wiley & Sons, Inc, New York, London, 1962.
- [30] P. Pudney and P. Howlett. Optimal driving strategies for a train journey with speed limits. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 36:38–49, 1994.
- [31] B.P. Rochard, F. Schmid, A review of methods to measure and calculate train resistances, *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers, Part F, Journal of Rail Rapid Transit*, 214(4):185–199, 2000.
- [32] G.M. Scheepmaker, R.M.P. Goverde, The interplay between energy-efficient train control and scheduled running time supplements. *J. Rail Transport Planning & Management*, 5:225-239, 2015.
- [33] G.M. Scheepmaker, R.M.P. Goverde, L.G. Kroon: Review of energy-efficient train control and time tabling. *European Journal of Operation Research*, 257:355-376, 2017.
- [34] Y. Song, W. Song, A novel dual speed-curve optimization based approach for energy-saving operation of a high-speed trains. *IEEE Trans. Intelligent Transportation Systems*, 17(6):1564-1575, 2016.
- [35] S. Su, T. Tang, X. Li, Z. Gao, A subway train timetable optimization approach based on energy-efficient operation strategy. *IEEE Trans. Intelligent Transportation Systems*, 14(2):883-693, 2013.

- [36] S. Su, T. Tang, X. Li, Z. Gao, Optimization of multitrain operations in a subway system. *IEEE Trans. Intelligent Transportation Systems*, 15(2):673-684, 2014.
- [37] J. Vittek, P. Butko, B. Ftorek, P. Makys, L. Gorel, Energy near optimal control strategies for industrial and traction drives with a.c. motors, *Mathematical Problems with Engineering*, Vol. 2017, article id 1857186, 2017.
- [38] P. Wang, R.M. Goverde. Multiple-phase train trajectory optimization with signalling and operational constraints. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 69:255–275, 2016.
- [39] Y. Wang, B. Ning, F. Cao, B. De Schutter, and T.J.J. van den Boom, A survey on optimal trajectory planning for train operations, *Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Intelligent Rail Transportation (ICIRT 2011)*, Beijing, China, 589–594, July 2011.
- [40] M. Wnuk, Wyznaczenie jazdy optymalnej pociągu na odcinku z ograniczeniem prędkości, *Technika Transportu Szybowego*, 4:54-59, 2012.
- [41] H. Ye, R. Liu, A multiphase optimal control method for multi-train control and scheduling on railway lines, *Transportation Research Part B*, 93:377–393, 2016.

