Raport Badawczy
Research Report

RB/49/2014

Modele opóźnień w systemach ekonomicznych. Własności i zastosowania. Część III. Modele opóźnienia w systemach przepływów

J. Gadomski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Zakładu zgłaszający pracę:
Dr hab. inż. Lech Kruś, prof. PAN

Warszawa 2014

SPIS TREŚCI

Zbieżność wartości średniej rozkładu opóźnienia

Lemat 1[1] (o nierówności: $M(W_t)\sum_{i=0}^{k} w_{ti} \geq \sum_{i=0}^{k} i w_{ti}$)

Założenia

Dany jest rozkład opóźnienia W_t zbudowany na współczynnikach opóźnienia $w_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,\ldots$, mający skończoną wartość średnią rozkładu opóźnienia $M(W_t) = \sum_{i=0}^{\infty} i w_{ti}$.

Teza

Dla każdej wartości indeksu k, $k \geq 0$, $k = 0, 1, 2,\ldots$; zachodzi następująca nierówność:

$$M(W_t)\sum_{i=0}^{k} w_{ti} \geq \sum_{i=0}^{k} i w_{ti} . \tag{D1}$$

Dowód

Przy $k = 0$, nierówność (D1) jest spełniona dla $M(W_t)$ i $w_{t\,0}$ przyjmujących dowolne założone wartości:

$M(W_t) \geq 0$ oraz $w_{t\,0} \geq 0$.

Dowiedzenie prawdziwości nierówności (D1) dla $k > 0$ jest przeprowadzone w następujący sposób. Parametr $M(W_t)$ w nierówności (D1) zostaje zastąpiony jego postacią z definicji:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i w_{ti} \sum_{i=0}^{k} w_{ti} \geq \sum_{i=0}^{k} i w_{ti} ,$$

dzięki czemu uzyskana jest nierówność:

$$\left(\sum_{i=0}^{k} i w_{ti} + \sum_{i=k+1}^{\infty} i w_{ti}\right)\sum_{i=0}^{k} w_{ti} \geq \sum_{i=0}^{k} i w_{ti}$$

lub

$$\sum_{i=0}^{k} i w_{ti} \sum_{i=0}^{k} w_{ti} + \sum_{i=k+1}^{\infty} i w_{ti} \sum_{i=0}^{k} w_{ti} \geq \sum_{i=0}^{k} i w_{ti} ,$$

a następnie po przeniesieniu pierwszej sumy z lewej strony na prawą stronę nierówności uzyskujemy:

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} i w_{ti} \sum_{i=0}^{k} w_{ti} \geq \sum_{i=0}^{k} i w_{ti}\left(1 - \sum_{i=0}^{k} w_{ti}\right),$$

i wreszcie:

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} i w_{ti} \sum_{i=0}^{k} w_{ti} \geq \sum_{i=0}^{k} i w_{ti} \sum_{i=k+1}^{\infty} w_{ti} , \tag{D2}$$

ponieważ:

[1] Autorem dowodu tego lematu jest prof. Przemysław Grzegorzewski z IBS PAN.

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} w_{ti} = 1-\sum_{i=0}^{k} w_{ti}.$$

Nierówność (D2) można zapisać w rozwiniętej postaci[2]:

$[(k+1)w_{t,k+1}+(k+2)w_{t,k+2}+...](w_{t1}+w_{t2}+...+w_{tk})\geq(w_{t,k+1}+w_{t,k+2}+...)(1w_{t1}+2w_{t2}+...kw_{tk}).$

Powyższą nierówność można przedstawić jako zsumowane stronami nierówności, w których występuje indeks j przyjmujący wartości od 1 do nieskończoności:

$$(k+j)w_{t,k+j}(w_{t1}+w_{t2}+...+w_{tk})\geq w_{t,k+j}(1w_{t1}+2w_{t2}+...kw_{tk}),\ j=1, 2,...$$

Po zredukowaniu po obu stronach nierówności dodatniego elementu $w_{t,k+j}$ (w przypadku $w_{t,k+j}=0$ powyższa nierówność jest spełniona), otrzymujemy nierówności:

$$(k+j)(w_{t1}+w_{t2}+...+w_{tk})\geq(1w_{t1}+2w_{t2}+...kw_{tk}).\ j=1, 2,... \qquad \text{(D3)}$$

Dla dowolnego $j>0$, $j = 1, 2,...$; powyższa nierówność jest spełniona, zatem zsumowanie stronami nierówności (D3) względem indeksu j zachowuje nierówność (D2), a więc i (D1), co było do okazania.

Własności wynikowego rozkładu opóźnienia. Zależność między wartościami średnimi rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ i rozkładu wynikowego opóźnienia $M(U_t)$, 1.

Lemat 2.

Założenia: Istnieją rozkłady opóźnienia W_t i opóźnienia wynikowego U_t oraz wartości średnie rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ i wynikowego rozkładu opóźnienia $M(U_t)$.

Teza. W stanie ustalonym wartości średniej rozkładu $M(U_t)$ i średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ są równe: $M(W_t) = M(U_t)$.

Dowód sprowadza się do obliczenia średniego wynikowego opóźnienia w stanie ustalonym na podstawie definicji, wzór (1.10):

$$M(U_t)=\sum_{i=0}^{\infty} iu_{it} = \sum_{i=0}^{\infty} i\frac{v_{ti}x^*}{\sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}x^*}=\sum_{i=0}^{\infty} i\frac{v_{ti}}{\sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}} = \sum_{i=0}^{\infty} iw_{ti} = M(W_t).$$

C.b.d.o.

Indeksy znaczące

Definicja 1. Zbiorem indeksów znaczących $J(W_t)$ rozkładu opóźnienia W_t nazywany jest zbiór wszystkich indeksów $i = 0, 1, 2..$; dla których współczynniki $w_{ti} > 0$.

Komentarz

Zbiór $J(W_t)$ zawiera zawsze element najmniejszy i_d, $i_d \geq 0$ (najmniejsza wartość indeksu), ponieważ z założenia dla wszystkich $i < 0$, $w_{ti} = 0$. W przypadku opóźnienia skończonego w zbiorze $J(W_t)$ istnieje zawsze element największy i_g (największa wartość indeksu niezerowego współczynnika). W przypadku nieskończonego rozkładu opóźnienia, w zbiorze $J(W_t)$ nie istnieje skończony element największy.

Zbiór $J(W_t)$ nie musi zawierać wszystkich indeksów zawierających się pomiędzy wartościami i_d i ∞ (lub pomiędzy wartościami i_d i i_g, w przypadku rozkładu skończonego), ponieważ niektóre indeksy z tego zakresu mogą odpowiadać współczynnikom o zerowych wartościach.

Zbiór $J(W_t)$ składa się tylko z jednego elementu oraz wartości i_d i i_g są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy opóźnienie jest opóźnieniem prostym (zwłoką). W pozostałych przypadkach $i_d \neq i_g$.

Rozpiętość zbioru indeksów

Definicja 2. Rozpiętością $R(V_t)$ struktury opóźnienia lub rozpiętością zbioru indeksów znaczących $J(V_t)$ struktury opóźnienia V_t nazywana jest wartość wyrażenia

$$R(V_t)=i_g(V_t)-i_d(V_t)+1.$$

Komentarz Rozpiętość zbioru indeksów znaczących $J(V_t)$ nie jest tym samym co liczebność tego zbioru; równość tych wielkości zachodzi, jeśli dla wszystkich i, $i_d(V_t)\leq i \leq i_g(V_t)$, $v_{t\,i} \neq 0$ (wszystkie współczynniki o indeksach należących do przedziału $[i_d(V_t), i_g(V_t)]$ mają niezerowe wartości). Szczególnym przypadkiem modelu, w którym rozpiętość i liczebność są sobie równe jest opóźnienie proste, tzn. gdy $i_d(V_t)=i_g(V_t)$. Zatem liczebność zbioru indeksów znaczących $J(V_t)$ jest zawsze nie większa od rozpiętości_zbioru jego indeksów.

Opóźnienie a wzrost

Lemat 3. O istnieniu liczby h_t.

Założenia Dana jest skończona dodatnia suma a_t współczynników opóźnienia $v_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,..$:

$$a_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i}$$

oraz istnieje dodatnia wartość średnia rozkładu $M(W_t)$ rozkładu W_t, $M(W_t)>0$, utworzonego przez znormalizowanie współczynników opóźnienia $v_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,..$:

$$w_{t\,i} = v_{t\,i} / a_t,\ i = 0, 1, 2,...$$

Teza Jeżeli każdy współczynnik $v_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,..$; zostanie przemnożony przez wyrażenie $(1+r)^{-i}$, $r \geq 0$, $i=0, 1, 2,..$; dzięki czemu utworzony zostanie nowy zbiór współczynników:

$$v'_{t\,i} = v_{t\,i}(1+r)^{-i},\ i = 0, 1, 2,..;$$

to spełnione są dwa warunki:

1. sumę

---

[2] Przecinki w subskryptach zostały użyte w celu jednoznacznej separacji dwóch indeksów.

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}' = \sum_{i=0}^{\infty} (1+r)^{-i} v_{ti},$$

można przedstawić w następującej postaci:

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}' = a_t (1+r)^{-h_t} \qquad \text{(D4)}$$

2. liczba h_t występująca w wykładniku po prawej stronie zależności (D4) jest dodatnią liczbą rzeczywistą przyjmującą wartości z przedziałów odpowiednio:

$$i_d(V_t) \leq h_t \leq i_g(V_t), \text{ w przypadku opóźnienia skończonego} \qquad \text{(D5a)}$$

lub

$$i_d(V_t) < h_t < \infty, \text{ w przypadku opóźnienia nieskończonego,} \qquad \text{(D5b)}$$

gdzie $i_d(V_t)$ oraz $i_g(V_t)$ oznaczają odpowiednio najmniejszą i największą wartość indeksów należących do zbioru indeksów znaczących $J(W_t)$.

<u>Dowód</u> Dowiedzenie warunku 1 sprowadza się do pokazania, że przy $r \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}' = \sum_{i=0}^{\infty} (1+r)^{-i} v_{ti} \leq (1+r)^{-1} a_t \leq a_t.$$

Ponieważ lewa strona powyższej nierówności jest z założenia dodatnia, to zawsze można znaleźć taką dodatnią liczbę h_t, która pozwala na przedstawienie liczby niewiększej od a_t jako:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (1+r)^{-i} v_{ti} = a_t (1+r)^{-h_t} \leq a_t,$$

z czego wynika, że:

$$(1+r)^{-h_t} \leq 1,$$

a po zlogarytmowaniu powyższej nierówności:

$$h_t \geq 0.$$

O h_t wiadomo, że równość $h_t = 0$ zachodzi wyłącznie w dwóch przypadkach: gdy model opóźnienia jest opóźnieniem prostym o średniej rozkładu opóźnienia równej zero[3], a więc nie objętym założeniami tego twierdzenia, lub gdy $r = 0$ (w tym przypadku h_t może przyjąć dowolną wartość rzeczywistą, w tym zero). Celowe zatem jest badanie warunku $h_t \geq 1$.

W przypadku skończonego zbioru znaczących indeksów $J(V_t)$ sumę $\sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}'$ można przedstawić w następujący sposób:

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_{t,i}' = \sum_{i=i_d}^{i=i_g} v_{t,i}' = a_t \sum_{i=i_d}^{i=i_g} w_{ti} (1+r)^{-i} = a\left[w_{t,i_d} (1+r)^{-i_d} + w_{t,i_d+1} (1+r)^{-i_d-1} + .. + w_{t,i_g} (1+r)^{-i_g}\right] \qquad \text{(D6)}$$

[3] Przy $h_t = 0$ byłby to przypadek modelu bez opóźnienia.

Wartość wyrażenia (D6) jest wyznaczona przez iloczyn współczynnika a_t i średniej ważonej (za pomocą wag w_{ti}, $i=i_d(V_t), i_d(V_t)+1,..., i_g(V_t)$) monotonicznie malejących wyrażeń: $(1+r)^{-i_d},...,(1+r)^{-i_g}$. Jeżeli zbiór znaczących indeksów $J(V_t)$ zawiera jeden element, tzn. gdy badany model jest opóźnieniem prostym, to:

$$i_d(V_t)= h_t = i_g,$$

ponieważ jedyny niezerowy współczynnik opóźnienia $v'_{h_t} = v_{h_t}(1+r)^{-h_t}$.

Jeżeli zbiór znaczących indeksów $J(V_t)$ zawiera więcej niż jeden element, tzn. gdy badany model jest opóźnieniem rozłożonym, wartość średnia tych wyrażeń, $(1+r)^{-h_t}$, spełnia nierówność:

$$(1+r)^{-i_d} > (1+r)^{-h_t} > (1+r)^{-i_g},$$

lub

$$i_d(V_t) < v_{h_t} < i_g(V_t).$$

Gdy $i_d(V_t) \to \infty$, tj. w przypadku modelu nieskończonego, powyższa nierówność sprowadza się do postaci;

$$i_d(V_t) < h_t < \infty,$$

która jest zgodna z założeniem. Co było do okazania.

Komentarz Z równości:

$$\sum_{i=0}^{\infty}(1+r)^{-i} v_{ti} = a_t(1+r)^{-h_t}$$

wynika, że:

$$h_t = \frac{\ln\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}\right) - \ln\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}(1+r)^{-i}\right)}{\ln(1+r)} = \ln\left(\frac{\sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}}{\sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}(1+r)^{-i}}\right) / \ln(1+r).$$

Własności wynikowego rozkładu opóźnienia 2. Zależność między wartościami średnimi rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ i rozkładu wynikowego opóźnienia $M(U_t)$.

Twierdzenie 1. O odchyleniu wartości średniej wynikowego rozkładu opóźnienia $M(U_t)$ od wartości średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ przy stałej nieujemnej stopie wzrostu r, $r \geq 0$.

Założenia Rozważany jest model opóźnienia rozłożonego:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti} x_{t-i} = a_t \sum_{i=0}^{\infty} w_{ti} x_{t-i} \quad ,$$

w którym:

1. suma $a_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i}$ ma skończoną wartość
2. współczynniki $w_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,..$; utworzone ze współczynników $v_{t\,i}$, $(i = 0, 1, 2,..)$ w wyniku normalizacji, tworzą rozkład opóźnienia W_t o skończonej dodatniej wartości średniej $M(W_t)$, $M(W_t) > 0$,
3. zmienna niezależna x w całej historii, tzn. od $-\infty$ do okresu t wzrasta ze stałą stopą wzrostu r, $r \geq 0$, a ponadto $x_{t-1} = x_t\,(1 + r)^{-1}$, $x_{t-2} = x_t\,(1 + r)^{-2},...;$
4. zbiór znaczących indeksów $J(V_t)$ zawiera przynajmniej dwa niezerowe elementy.

Teza Przy $r \geq 0$ wartość średnia opóźnienia łącznego $M(U_t)$ jest nie większa od średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$:

$$M(U_t) \leq M(W_t).$$

Dowód.

Na podstawie wzoru (1.8) udziały $u_{t\,i}$ określane są za pomocą następującego wzoru:

$$u_{t\,i} = \frac{v_{ti}\,x_{t-i}}{E(y_t)} = \frac{v_{ti}\,x_t(1+r)^{-i}}{\sum_{j=0}^{\infty} v_{tj}\,x_t(1+r)^{-j}} = \frac{v_{ti}\,(1+r)^{-i}}{\sum_{j=0}^{\infty} v_{tj}\,(1+r)^{-j}},\ i = 0, 1, 2,...$$

Korzystając z Lematu 1 mianownik w powyższym wzorze można zastąpić przez wyrażenie $a_t(1+r)^{-h_t}$, dzięki czemu wzór ten można przedstawić w następującej postaci:

$$u_{t\,i} = w_{ti}\,(1+r)^{h_t - i},\ i = 0, 1, 2,... \qquad \text{(D7)}$$

mając na uwadze, że $w_{t\,i} = v_{t\,i}/a_t$.

Na podstawie wzoru (1.10) oraz na podstawie Lematu 1 wartość średnią wynikowego rozkładu opóźnienia $M(U_t)$ można przedstawić w następującej postaci:

$$M(U_t) = \sum_{i=0}^{\infty} i\,w_{it}(1+r)^{h_t - 1}. \qquad \text{(D8)}$$

Teza zostanie udowodniona, jeśli wykazana zostanie prawdziwość relacji:

$$M(U_t) - M(W_t) \leq 0. \qquad \text{(D9)}$$

Dla uproszczenia wywodu definiowane są różnice $\Delta w_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,..$:

$$\Delta w_{t\,i}, = u_{t\,i} - w_{t\,i},$$

o których wiadomo, na podstawie wzoru (D7), że:

$$\Delta w_{t\,i}, \geq 0, \text{ dla } i \leq b_t,\ \Delta w_{t\,i}, \leq 0, \text{ dla } i > b_t,$$

a ponadto

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Delta\, w_{ti} = 0,$$

ponieważ $\sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i} = 1$ oraz $\sum_{i=0}^{\infty} u_{t\,i} = 1$.

Lewą stronę nierówności (D9) można przedstawić w następującej postaci:

$$M(U_t) - M(W_t) = \sum_{i=0}^{\infty} i\, u_{ti} - \sum_{i=0}^{\infty} i\, w_{ti} = \sum_{i=0}^{\infty} i\, \Delta w_{ti} = \sum_{i \le b_t} i\, \Delta w_{ti} + \sum_{i > b_t} i\, \Delta w_{ti}\,.$$

Ponieważ współczynnik b_t może być liczbą niecałkowitą, wygodniej jest określić pewną naturalną liczbę l, $l = \max\{\, i\,,\ i \le b_t\,\}$, co pozwala na przedstawienie powyższej zależności w postaci:

$$M(U_t) - M(W_t) = \sum_{i=0}^{l} i\, \Delta w_{ti} + \sum_{i=l+1}^{\infty} i\, \Delta\, w_{ti}\,. \qquad \text{(D10)}$$

Rozwinięcie prawej strony (D10) ma postać:

$$M(U_t) - M(W_t) = \sum_{i=0}^{l} i\, \Delta w_{ti} + (l+1)\, \Delta w_{t,\, l+1} + (l+2)\, \Delta\, w_{t,\, l+2} + (l+3)\, \Delta\, w_{t,,\, l+1} + \ldots$$

$$= \sum_{i=0}^{l} i\, \Delta w_{ti} + (\, l\, \Delta\, w_{t,\, l+1} + l\, \Delta\, w_{t,\, l+2} + l\, \Delta\, w_{t,\, l+3} + \ldots) + (\, 1\Delta\, w_{t,\, l+1} + 2\Delta\, w_{t,\, l+2} + 3\Delta\, w_{t,\, l+3} + \ldots).$$

Po prawej stronie powyższego równania dodatnie jest tylko pierwsze wyrażenie (zawierające operator sumowania) ponieważ dla $i \le l$ wszystkie $\Delta w_{t\,i} \ge 0$. Z uwagi na to, że:

$$\sum_{i=0}^{l} i\, \Delta w_{ti} \le l \sum_{i=0}^{l} \Delta w_{ti}\,,$$

różnica $M(U_t) - M(W_t)$ jest nie większa od wyrażenia:

$$M(U_t) - M(W_t) \le (\, l\Delta w_{t,\, 1} + l\Delta\, w_{t,\, 2} + \ldots + l\Delta\, w_{t,\, l}) + (\, l\Delta\, w_{t,\, l+1} + l\Delta\, w_{t,\, l+2} + l\Delta\, w_{t,\, l+3} + \ldots) +$$

$$+ (\, 1\Delta\, w_{t,\, l+1} + 2\Delta\, w_{t,\, l+2} + 3\Delta\, w_{t,\, l+3} + \ldots) = l \sum_{i=0}^{\infty} \Delta\, w_{t,\, i} + \sum_{i=l}^{\infty} i\Delta\, w_{t,\, l+i}\,.$$

Ponieważ $\sum_{i=0}^{\infty} \Delta\, w_{t,\, i} = 0$, oraz dlatego, że dla $i > l$ wszystkie $\Delta w_{t\,i} \le 0$,

$$M(U_t) - M(W_t) \le \sum_{i=l}^{\infty} i\Delta\, w_{t,\, l+i} \le 0\,, \qquad \text{(D11)}$$

z czego wynika, że:

$$M(U_t) \le M(W_t)$$

C.b.d.o.

Komentarz

Ponieważ z nierówności $\sum_{i=l}^{\infty} i\Delta\, w_{t,\, l+i} < 0$ wynika, że mamy do czynienia z nierównością ostrą, w zależności (D11) nierówność nieostra występuje tylko w przypadku opóźnienia prostego lub gdy $r = 0$.

Zależność wartości średniej wynikowego rozkładu opóźnienia $M(U_t)$ od stopy wzrostu

Twierdzenie 2. O zależności średniej rozkładu wynikowego opóźnienia $M(U_t)$ od stopy wzrostu r zmiennej niezależnej.

Założenia Rozważany jest model opóźnienia rozłożonego, którego rozkład wynikowy opóźnienia ma określone wartość średnią i wariancję oraz w którym wartości zmiennej niezależnej wzrastają ze stałą stopą wzrostu r.

Teza Wartość średnia rozkładu wynikowego opóźnienia $M(U_t)$ jest malejącą funkcją stopy wzrostu r zmiennej niezależnej.

Dowód Dowiedzenie tego twierdzenia opiera się na badaniu pochodnej:

$$\frac{dM(U_t)}{dr}=\frac{d}{dr}\left[\frac{\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{i}\,\mathrm{v}_{t\mathrm{i}}\, x_t (1+r)^{-i}}{\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{v}_{t\mathrm{i}}\, x_t (1+r)^{-i}}\right]=\frac{d}{dr}\left[\frac{\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{i}\,\mathrm{v}_{t\mathrm{i}} (1+r)^{-i}}{\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{v}_{t\mathrm{i}} (1+r)^{-i}}\right]. \tag{D12}$$

Mając na uwadze, że współczynniki rozkładu opóźnienia W_t nie zależą od stopy wzrostu r zmiennej niezależnej, przez różniczkowanie można uzyskać zależność:

$$\frac{dM(U_t)}{dr}=\frac{\sum_{i=1}^{\infty} -\mathrm{i}^2 \mathrm{v}_{t\mathrm{i}} (1+r)^{-i} \frac{1}{1+r} \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{v}_{t\mathrm{i}} (1+r)^{-i} - \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{i}\,\mathrm{v}_{t\mathrm{i}} (1+r)^{-i} \sum_{i=1}^{\infty} (-\mathrm{i}) \mathrm{v}_{t\mathrm{i}} (1+r)^{-i} \frac{1}{1+r}}{\left[\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{v}_{t\mathrm{i}} (1+r)^{-i}\right]^2}$$

$$=\frac{1}{1+r}\,\frac{\left[\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{i}\,\mathrm{v}_{t\mathrm{i}} (1+r)^{-i}\right]^2 - \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{v}_{t\mathrm{i}} (1+r)^{-i} \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{i}^2 \mathrm{v}_{t\mathrm{i}} (1+r)^{-i} -}{\left[\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{i}\,\mathrm{v}_{t\mathrm{i}} (1+r)^{-i}\right]^2}=\frac{1}{1+r}\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{i}\,\mathrm{u}_{t\mathrm{i}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{i}^2 \mathrm{u}_{t\mathrm{i}}\right]$$

Ponieważ:

$$D^2(U_t)=\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{i}^2 \mathrm{u}_{t\mathrm{i}} - M^2(U_t)$$

oraz

$$m(U_t)=\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{i}\,\mathrm{v}_{t\mathrm{i}} (1+r)^{-i}}{\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{v}_{t\mathrm{i}} (1+r)^{-i}},$$

zatem

$$\frac{dm(U_t)}{dr}=-\frac{D^2(U_t)}{1+r}. \tag{D13}$$

Z zależności (D13) wynika, że wartość średniej wynikowego rozkładu opóźnienia $M(U_l)$ maleje wraz ze wzrostem stopy wzrostu r. C.b.d.o.

Rozkład graniczny a stopa wzrostu

Twierdzenie 3. O zbieżności rozkładu opóźnienia wynikowego do rozkładu jednopunktowego, gdy stopa wzrostu r zmiennej niezależnej rośnie do nieskończoności.

Założenia Rozważany jest model opóźnienia rozłożonego, o określonych podstawowych parametrach rozkładu opóźnienia, w którym wartości zmiennej niezależnej wzrastają ze stałą stopą wzrostu r.

Teza Gdy stopa wzrostu r zmiennej niezależnej x rośnie do nieskończoności, rozkład opóźnienia wynikowego dąży do rozkładu jednopunktowego (opóźnienia prostego) o wartości średniej rozkładu opóźnienia wynikowego równej najmniejszej wartości indeksu znaczącego i_d, a wariancja rozkładu opóźnienia wynikowego dąży do zera.

Dowód Rozważany jest model opóźnienia:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti} x_{t-i} = v_{t,i_d} x_{t-i_d} + v_{t,i_d+1} x_{t-i_d+1} + \ldots,$$

który można przedstawić w następującej postaci:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti} x_{t-i} = \sum_{i=i_d}^{\infty} v_{ti} x_{t-i_d} (1+r)^{-(i-i_d)} = x_{t-i_d} \sum_{i=i_d}^{\infty} v_{ti} (1+r)^{-(i-i_d)},$$

ponieważ:

$$x_{t-i} = x_{t-i_d} (1+r)^{-(i-i_d)}, \; i = i_d, i_d+1, i_d+2, \ldots .$$

Wartość zmiennej zależnej spełnia nierówność:

$$v_{t i_d} x_{t-i_d} \le y_t = x_{t-i_d} \sum_{i=i_d}^{\infty} v_{ti} (1+r)^{-(i-i_d)} = x_{t-i_d} v_{t i_d} + x_{t-i_d} \sum_{i=i_d+1}^{\infty} v_{ti} (1+r)^{-(i-i_d)} .$$

Z uwagi na to, że wszystkie wartości współczynników opóźnienia v_{ti}, $0 \le v_{ti} \le 1$, $i = 0, 1, 2, \ldots$;:

$$v_{t i_d} x_{t-i_d} + x_{t-i_d} \sum_{i=i_d+1}^{\infty} v_{ti} (1+r)^{-(i-i_d)} \le x_{t-i_d} v_{t i_d} + x_{t-i_d} \sum_{i=1}^{\infty} (1+r)^{-i},$$

i ostatecznie:

$$v_{t i_d} x_{t-i_d} \le y_t \le x_{t-i_d} \left(v_{t i_d} + \frac{1}{r} \right), \tag{D14}$$

ponieważ:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1+r)^{-i} = \frac{1}{r} .$$

Przechodząc do granicy przy r dążącym do nieskończoności, prawa strona nierówności (D14) dąży do opóźnienia prostego:

$$v_{t\,i_d}\, x_{t-i_d}$$

o wartości średniej rozkładu wynikowego opóźnienia równym parametrowi i_d i zerowej wariancji.

C.b.d.o.

Twierdzenie 4. O zależności wartości średniej $M(W_t)$ rozkładu modelu opóźnienia W_t w okresie t, (model dostosowania adaptacyjnego ze zmiennym współczynnikiem dostosowania λ_t), wzór (1.77), od wartości średniej $M(W_{t-1})$ rozkładu opóźnienia W_{t-1} w okresie t-1.

Założenia. Niech wartości współczynników dostosowania λ_{t-i}, $i=0, 1, 2, \dots$; należą do przedziału $[0, 1]$.

Teza Wartość średniej $M(W_t)$ rozkładu modelu opóźnienia W_t w okresie t zależy od wartości średniej $M(W_{t-1})$ rozkładu modelu opóźnienia W_{t-1} w okresie t-1 zgodnie z następującym wzorem:

$$M(W_t) = (1-\lambda_t)\frac{a_{t-1}}{\lambda_t + (1-\lambda_t)a_{t-1}}\left[M(W_{t-1}) + 1\right].$$

Dowód

Punktem wyjścia niniejszego dowodu jest przekształcenie wzoru (1.75) do postaci:

$$\begin{aligned} a_t M(W_t) &= 1\cdot\lambda_{t-1}(1-\lambda_t) + 2\cdot\lambda_{t-2}(1-\lambda_t)(1-\lambda_{t-1}) + 3\cdot\lambda_{t-3}(1-\lambda_t)(1-\lambda_{t-1})(1-\lambda_{t-2}) + \dots \\ &= \lambda_{t-1}(1-\lambda_t) + (1-\lambda_t)\left[\lambda_{t-2}(1-\lambda_{t-1}) + \lambda_{t-3}(1-\lambda_{t-1})(1-\lambda_{t-2}) + \dots\right] + \\ &+ (1-\lambda_t)\left[1\cdot\lambda_{t-2}(1-\lambda_{t-1}) + 2\cdot\lambda_{t-3}(1-\lambda_{t-1})(1-\lambda_{t-2}) + \dots\right] \end{aligned}$$

Pierwszy nawias kwadratowy od strony lewej w powyższym równaniu jest równy:

$$\left[\lambda_{t-2}(1-\lambda_{t-1}) + \lambda_{t-3}(1-\lambda_{t-1})(1-\lambda_{t-2}) + \dots\right] = a_{t-1} - \lambda_{t-1},$$

podczas gdy drugi od lewej nawias kwadratowy jest równy:

$$\left[1\cdot\lambda_{t-2}(1-\lambda_{t-1}) + 2\cdot\lambda_{t-3}(1-\lambda_{t-1})(1-\lambda_{t-2}) + \dots\right] = M(W_{t-1}).$$

Po podstawieniu i uporządkowaniu uzyskiwana jest badana zależność.

Twierdzenie 5. O zależności wartości średniej $M(W_t)$ modelu opóźnienia rozłożonego z rozkładem opóźnienia W_t, $W_t = W_t^{(1)} + W_t^{(2)} + \dots + W_t^{(n)}$, otrzymanego przez sumowanie skończonej liczby n modeli opóźnienia rozłożonego o skończonych wartościach średnich składowych rozkładów opóźnienia $M(W_t^{(1)}), M(W_t^{(2)}), \dots, M(W_t^{(n)})$.

Założenia Istnieją rozkłady opóźnienia $W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, \dots, W_t^{(n)}$ modeli będących składnikami sumy o skończonych wartościach średnich rozkładów opóźnienia $M(W_t^{(1)}), M(W_t^{(2)}), \dots, M(W_t^{(n)})$.

Teza Wartość średnia $M(W_t^{[n]})$ rozkładu $W_t^{[n]}$ powstałego z superpozycji n modeli opóźnienia rozłożonego jest sumą wartości średnich $M(W_t^{(i)})$, $i = 1, 2, .., n$; rozkładów opóźnienia modeli będących elementami superpozycji:

$$M(W_t^{[n]}) = M(W_t^{(1)}) + M(W_t^{(2)}) + \ldots + M(W_t^{(n)}).$$

Dowód zależności powyższej zależności jest oparty na wzorze opisującym funkcję pochodną iloczynu n funkcji, który po prostych przekształceniach prowadzi do potwierdzenia tezy:

$$\frac{dW_t^{[n]}(1)}{d\theta} = \frac{d\left[W_t^{(1)}(\theta)\cdot\ldots\cdot W_t^{(n)}(\theta)\right]}{d\theta}\Bigg|_{\theta=1}$$

$$= \left\{\prod_{i=1}^{n} W_t^{(i)}(\theta)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{dW_t^{(i)}(\theta)}{d\theta}\frac{1}{W_t^{(i)}(\theta)}\right]\right\}\Bigg|_{\theta=1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{dW_t^{(i)}(1)}{d\theta} = \sum_{i=1}^{n} M(W_t^{(i)}) = M(W_t).$$

Twierdzenie 6. O zależności wariancji $D^2(W_t)$ modelu opóźnienia rozłożonego z rozkładem opóźnienia W_t, $W_t = W_t^{(1)} + W_t^{(2)} + \ldots + W_t^{(n)}$, otrzymanego przez sumowanie skończonej liczby n modeli opóźnienia rozłożonego o skończonych wartościach wariancji składowych rozkładów opóźnienia $D^2(W_t^{(1)}), D^2(W_t^{(2)}), \ldots, D^2(W_t^{(n)})$.

Założenia Istnieją rozkłady opóźnienia $W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, \ldots, W_t^{(n)}$ modeli będących składnikami sumy o skończonych wariancjach składowych rozkładów opóźnienia $D^2(W_t^{(1)}), D^2(W_t^{(2)}), \ldots, D^2(W_t^{(n)})$.

Teza: Między wariancją $D^2(W_t)$ rozkładu W_t, będącego wynikiem sumowania n modeli opóźnienia rozłożonego, a średnią ważoną wariancji składowych rozkładów opóźnienia $D^2(W_t^{(j)})$, $j = 1, 2, ..$; zachodzi następująca relacja:

$$D^2(W_t) \geq \sum_{j=1}^{n}\frac{a_t^{(j)}}{a_t} D^2(W_t^{(j)}). \tag{2.8}$$

W przeprowadzeniu dowodu wykorzystane będą następujące zależności:

$$D^2(W_t) = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 w_{ti} - \left(\sum_{i=0}^{\infty} i w_{ti}\right)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \sum_{j=1}^{n}\frac{a_t^{(j)}}{a_t} w_{ti}^{(j)} - \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{a_t^{(j)}}{a_t} M(W_t^{(j)})\right)^2,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^2 \sum_{j=0}^{n}\frac{a_t^{(j)}}{a_t} w_{ti}^{(j)} = \sum_{j=0}^{n}\frac{a_t^{(j)}}{a_t}\sum_{i=0}^{\infty} i^2 w_{ti}^{(j)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{a_t^{(j)}}{a_t}\left[D^2(W_t^{(j)}) + M^2(W_t^{(j)})\right],$$

oraz

$$D^2(W_t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} \left[D^2(W_t^{(j)}) + M^2(W_t^{(j)}) \right] - \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} M(W_t^{(j)}) \right)^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} D^2(W_t^{(j)}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} M^2(W_t^{(j)}) - \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} M(W_t^{(j)}) \right)^2 .$$

Dowód prawdziwości powyższej nierówności polega na pokazaniu, że różnica między ostatnimi dwoma składnikami powyższej zależności jest nieujemna, lub równoważnie:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} M^2(W_t^{(j)}) \geq \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} M(W_t^{(j)}) \right]^2 .$$

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza wynika, że dla dowolnych skończonych ciągów liczb rzeczywistych a_j i b_j, $j=1,...,n;$ prawdziwa jest relacja[4]:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2 \geq \left(\sum_{j=1}^{n} c_j b_j \right)^2 .$$

Przyjmując oznaczenia:

$c_j = \sqrt{\frac{a_t^{(j)}}{a_t} M(W_t^{(j)})}$ i $b_j = \sqrt{\frac{a_t^{(j)}}{a_t}}$; $j= 1, 2,.., n$; oraz podstawiając do powyższej nierówności uzyskujemy:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} M^2(W_t^{(j)}) \sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} \geq \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} M(W_t^{(j)}) \right]^2 .$$

Ponieważ z założenia

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} = 1$$

zatem

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} M^2(W_t^{(j)}) \geq \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} M(W_t^{(j)}) \right]^2 ,$$

Z czego bezpośrednio wynika zależność:

$$D^2(W_t) \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} D^2(W_t^{(j)})$$

c.b.d.o.

[4] Bronsztajn I. N., Siemiendiajew, K. A., Musiol G., Mühlig H.: *Nowoczesne kompendium matematyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004, strona 34.

Twierdzenie 7. **Wariancja rozkładu opóźnienia modelu opóźnienia powstałego z sumy dwóch modeli opóźnienia.**

Założenia Dwa modele opóźnienia mają rozkłady opóźnienia odpowiednio $W_t^{(1)}$ i $W_t^{(2)}$, oraz skończone wariancje $D^2\left(W_t^{(1)}\right)$ i $D^2\left(W_t^{(2)}\right)$.

Teza Między wariancją rozkładu opóźnienia $D^2\left(W_t\right)$ modelu opóźnienia powstałego z sumy dwóch modeli opóźnienia z rozkładami opóźnienia równymi odpowiednio $D^2\left(W_t^{(1)}\right)$ i $D^2\left(W_t^{(2)}\right)$ zachodzi następujący związek:

$$D^2(W_t) = D^2\left(\frac{a_t^{(1)}}{a_t}W_t^{(1)} + \frac{a_t^{(2)}}{a_t}W_t^{(2)}\right)$$
$$= \frac{a_t^{(1)}}{a_t}D^2(W_t^{(1)}) + \frac{a_t^{(2)}}{a_t}D^2(W_t^{(2)}) + \frac{a_t^{(1)}a_t^{(2)}}{a_t^2}\left[M(W_t^{(1)}) - M(W_t^{(2)})\right]^2.$$

Dowiedzenie prawdziwości powyższej zależności opiera się na wykorzystaniu wzorów z Części I, Rozdziału 1.9 o numerach od (1.59) do (1.62).

$$D^2\left(\frac{a_t^{(1)}}{a_t}W_t^{(1)} + \frac{a_t^{(2)}}{a_t}W_t^{(2)}\right) =$$
$$= \frac{d^2}{d\theta^2}\left[\frac{a_t^{(1)}}{a_t}W_t^{(1)}(1) + \frac{a_t^{(2)}}{a_t}W_t^{(2)}(1)\right] + \frac{d}{d\theta}\left[\frac{a_t^{(1)}}{a_t}W_t^{(1)}(1) + \frac{a_t^{(2)}}{a_t}W_t^{(2)}(1)\right] -$$
$$-\left\{\frac{d}{d\theta}\left[\frac{a_t^{(1)}}{a_t}W_t^{(1)}(1) + \frac{a_t^{(2)}}{a_t}W_t^{(2)}(1)\right]\right\}^2.$$

Po zróżniczkowaniu i uwzględnieniu (1.62) otrzymujemy wzór:

$$D^2\left(W_t\right) =$$
$$= \frac{a_t^{(1)}}{a_t}\frac{d^2W_t^{(1)}(1)}{d\theta^2} + \frac{a_t^{(2)}}{a_t}\frac{d^2W_t^{(2)}(1)}{d\theta^2} + \frac{a_t^{(1)}}{a_t}M(W_t^{(1)}) + \frac{a_t^{(2)}}{a_t}M(W_t^{(2)}) -$$
$$-\left[\frac{a_t^{(1)}}{a_t}M(W_t^{(1)}) + \frac{a_t^{(2)}}{a_t}M(W_t^{(2)})\right]^2.$$

Dodając i odejmując od powyższego równania wyrażenie:

$$\frac{a_t^{(1)}}{a_t}M^2(W_t^{(1)}) + \frac{a_t^{(2)}}{a_t}M^2(W_t^{(2)})$$

oraz porządkując wyrazy uzyskujemy:

$$D^2(W_t)=$$

$$=\frac{a_t^{(1)}}{a_t}\frac{d^2W_t^{(1)}(1)}{d\theta^2}+\frac{a_t^{(1)}}{a_t}M(W_t^{(1)})-\frac{a_t^{(1)}}{a_t}M^2(W_t^{(1)})+$$

$$+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}\frac{d^2W_t^{(2)}(1)}{d\theta^2}+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}M(W_t^{(2)})-\frac{a_t^{(2)}}{a_t}M^2(W_t^{(2)})+$$

$$-\left[\frac{a_t^{(1)}}{a_t}M(W_t^{(1)})+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}M(W_t^{(2)})\right]^2+\frac{a_t^{(1)}}{a_t}M^2(W_t^{(1)})+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}M^2(W_t^{(2)})$$

$$=\frac{a_t^{(1)}}{a_t}D^2\left(W_t^{(1)}\right)+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}D^2\left(W_t^{(2)}\right)+\frac{a_t^{(1)}}{a_t}M^2(W_t^{(1)})+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}M^2(W_t^{(2)})+$$

$$-\left(\frac{a_t^{(1)}}{a_t}\right)^2M^2(W_t^{(1)})-\left(\frac{a_t^{(2)}}{a_t}\right)^2M^2(W_t^{(2)})-2\frac{a_t^{(1)}a_t^{(2)}}{a_t^2}M(W_t^{(1)})M(W_t^{(2)})$$

$$=\frac{a_t^{(1)}}{a_t}D^2\left(W_t^{(1)}\right)+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}D^2\left(W_t^{(2)}\right)+$$

$$+\frac{a_t^{(1)}}{a_t}M^2(W_t^{(1)})\left(1-\frac{a_t^{(1)}}{a_t}\right)+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}M^2(W_t^{(2)})\left(1-\frac{a_t^{(2)}}{a_t}\right)-2\frac{a_t^{(1)}a_t^{(2)}}{a_t^2}M(W_t^{(1)})M(W_t^{(2)}).$$

Ponieważ:

$$\frac{a_t^{(1)}}{a_t}+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}=1,$$

zatem:

$$D^2(W_t)=$$

$$=\frac{a_t^{(1)}}{a_t}D^2\left(W_t^{(1)}\right)+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}D^2\left(W_t^{(2)}\right)+$$

$$+\frac{a_t^{(1)}a_t^{(2)}}{a_t^2}M^2(W_t^{(1)})+\frac{a_t^{(1)}a_t^{(2)}}{a_t^2}M^2(W_t^{(2)})-2\frac{a_t^{(1)}a_t^{(2)}}{a_t^2}M(W_t^{(1)})M(W_t^{(2)}),$$

$$D^2(W_t)=\frac{a_t^{(1)}}{a_t}D^2\left(W_t^{(1)}\right)+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}D^2\left(W_t^{(2)}\right)+\frac{a_t^{(1)}a_t^{(2)}}{a_t^2}\left[M(W_t^{(1)})-M(W_t^{(2)})\right]^2.$$

c.b.d.o

Wartość średnia rozkładu opóźnienia powstałego z superpozycji modeli opóźnienia

$$M(W_t^{[n]})=M(W_t^{(1)})+M(W_t^{(2)})+\ldots+M(W_t^{(n)})$$

Wyprowadzenie powyższej zależności wykorzystuje wzór (1.61) oraz formułę na pochodną iloczynu:

$$\frac{dW_t^{[n]}(1)}{d\theta}=\frac{d\left[W_t^{(1)}(\theta)\cdot\ldots\cdot W_t^{(n)}(\theta)\right]}{d\theta}_{|\theta=1}$$

$$=\left\{\prod_{i=1}^{n}W_t^{(i)}(\theta)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{dW_t^{(i)}(\theta)}{d\theta}\frac{1}{W_t^{(i)}(\theta)}\right]\right\}_{|\theta=1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{dW_t^{(i)}(1)}{d\theta}=\sum_{i=1}^{n}M(W_t^{(i)})=M(W_t).$$

Twierdzenie 8. **Wariancja rozkładu opóźnienia modelu opóźnienia powstałego z superpozycji *n* modeli opóźnienia.**

Założenia Istnieją rozkłady opóźnienia $W_t^{(1)},W_t^{(2)},\ldots,W_t^{(n)}$ modeli opóźnienia będących elementami superpozycji mającymi skończone wariancje rozkładów opóźnienia $D^2(W_t^{(1)}),D^2(W_t^{(2)}),\ldots,D^2(W_t^{(n)})$.

Teza Wariancja $D^2(W_t^{[n]})$ rozkładu powstałego z superpozycji n modeli opóźnienia rozłożonego jest sumą wariancji $D^2(W_t^{(i)})$, $i = 1, 2, .., n$; modeli będących elementami superpozycji:

$$D^2(W_t^{[n]})=D^2(W_t^{(1)})+D^2(W_t^{(2)})+\ldots+D^2(W_t^{(n)}).$$

Dowód powyższej zależności jest oparty na wzorze (1.61) z wykorzystaniem formuły na pochodną iloczynu zmiennych oraz wzoru na drugą pochodną iloczynu zmiennych:

$$\frac{d^2W_t^{[n]}(\theta)}{d\theta^2}=\frac{d^2\left[W_t^{(1)}(\theta)\cdot\ldots\cdot W_t^{(n)}(\theta)\right]}{d\theta^2}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}W_t^{(i)}(\theta)\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{d^2W_t^{(i)}(\theta)}{d\theta^2}\frac{1}{W_t^{(i)}(\theta)}+\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{dW_t^{(i)}(\theta)}{d\theta}\frac{1}{W_t^{(i)}(\theta)}\right]^2-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dW_t^{(i)}(\theta)}{d\theta}\frac{1}{W_t^{(i)}(\theta)}\right]^2\right\}$$

$$\frac{d^2W_t^{[n]}(1)}{d\theta^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d^2W_t^{(i)}(1)}{d\theta^2}+\left[\sum_{i=1}^{n}M\left(W_t^{(i)}\right)\right]^2-\sum_{i=1}^{n}M^2\left(W_t^{(i)}\right)$$

Uwzględnienie tych zależności prowadzi do postaci:

$$D^2(W_t^{[n]})=\sum_{i=1}^{n}\frac{d^2W_t^{(i)}(1)}{d\theta^2}+\sum_{i=1}^{n}M\left(W_t^{(i)}\right)-\sum_{i=1}^{n}M^2\left(W_t^{(i)}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d^2W_t^{(i)}(1)}{d\theta^2}+M\left(W_t^{(i)}\right)-M^2\left(W_t^{(i)}\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}D^2(W_t^{(i)}),$$

c.b.d.o.

Składnik losowy w modelu będącym sumą modeli opóźnienia rozłożonego

Z sumą modeli opóźnienia rozłożonego mamy do czynienia, gdy zmienna zależna y_t jest sumą n zmiennych zależnych $y_t^{(j)}$, $j= 1, 2,..,n$; względem tej samej zmiennej niezależnej x_t (wzór 2.17):

$$y_t = y_t^{(1)} + y_t^{(2)} + ... + y_t^{(n)}; \quad n < \infty \tag{D15}$$

przy czym

$$y_t^{(1)} = \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}^{(1)} x_{t-i} + e_t^{(1)},\ y_t^{(2)} = \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}^{(2)} x_{t-i} + e_t^{(2)}, \cdots, y_t^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}^{(n)} x_{t-i} + e_t^{(n)}, \quad n < \infty; \tag{D16}$$

(gdzie n jest skończoną liczbą naturalną) będących zmiennymi określanymi za pomocą wzoru (1.1), gdzie składniki losowe $e_t^{(j)}$, $j= 1, 2, .. , n$; są niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach oczekiwanych równych zero i stałych wariancjach:

$$E(\varepsilon_t^{(j)}) = 0,\ D^2(\varepsilon_t^{(j)}) = \left(\sigma^{(j)}\right)^2 < \infty, j= 1, 2, .. , n.$$

Zależność (D15) można zapisać w postaci:

$$y_t = y_t^{(1)} + y_t^{(2)} + ... + y_t^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}^{(j)} x_{t-i} + \sum_{j=1}^{n} e_t^{(j)} = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} v_{ti}^{(j)} \right) x_{t-i} + e_t = \sum_{i=0}^{n} v_{ti} x_{t-i} + e_t;$$

gdzie:

$$e_t = \sum_{j=1}^{n} e_t^{(j)} \text{ oraz } v_{ti} = \sum_{j=1}^{\infty} v_{ti}^{(j)}.$$

Z powyższych założeń wynika, że:

$$E(e_t) = 0 \text{ oraz } D^2(e_t) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sigma^{(j)}\right)^2. \tag{D17}$$

Składnik losowy w modelu utworzonym przez superpozycję modeli opóźnienia rozłożonego

Z superpozycją modeli opóźnienia rozłożonego mamy do czynienia, gdy zmienna zależna $y_t^{[n]}$ jest opisana za pomocą modelu opóźnienia rozłożonego względem pewnej zmiennej niezależnej $y_t^{[n-1]}$, która jest z kolei zmienną zależną modelu opóźnienia rozłożonego względem innej zmiennej niezależnej $y_t^{[n-2]}$, itd.:

$$\begin{aligned} y_t^{[n]} &= \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}^{(n)} y_{t-i}^{[n-1]} + \varepsilon_t^{(n)} &&= V_t^{(n)}(L) y_{t-i}^{[n-1]} + \varepsilon_t^{(n)}, \\ y_t^{[n-1]} &= \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}^{(n-1)} y_{t-i}^{[n-2]} + \varepsilon_t^{(n-1)} &&= V_t^{(n-1)}(L) y_{t-i}^{[n-2]} + \varepsilon_t^{(n-1)}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_t^{[1]} &= \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}^{(1)} x_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)} &&= V_t^{(1)}(L) x_t + \varepsilon_t^{(1)}. \end{aligned} \tag{D18}$$

gdzie x_t oznacza zmienną niezależną w modelu opóźnienia rozłożonego o numerze 1. O składnikach losowych w (D18) zakłada się, że:

$$E(\varepsilon_t^{(j)}) = 0,\ D^2(\varepsilon_t^{(j)}) = \left(\sigma^{(j)}\right)^2 < \infty,\ D^2(\varepsilon_t^{(j)}\varepsilon_{t-k}^{(j)}) = 0,\ k = 1,2,..\ ; j = 1,\ 2, ..\ , n.$$

Posługując się zapisem operatorowym, zależności (D18) można przedstawić, na podstawie wzoru (D15), w postaci:

$$\begin{aligned} y_t^{[1]} &= V_t^{(1)}(L)x_t \quad + \varepsilon_t^{(1)}; \\ y_t^{[2]} &= V_t^{(2)}(L)y_t^{[1]} + \varepsilon_t^{(2)}; \\ y_t^{[3]} &= V_t^{(3)}(L)y_t^{[2]} + \varepsilon_t^{(3)}; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_t^{[n]} &= V_t^{(n)}(L)y_t^{[n-1]} + \varepsilon_t^{(n)}. \end{aligned} \tag{D19}$$

lub

$$\begin{aligned} y_t^{[1]} &= a_t^{(1)}W_t^{(1)}(L)x_t \quad + \varepsilon_t^{(1)}; \\ y_t^{[2]} &= a_t^{(2)}W_t^{(2)}(L)y_t^{[1]} + \varepsilon_t^{(2)}; \\ y_t^{[3]} &= a_t^{(3)}W_t^{(3)}(L)y_t^{[2]} + \varepsilon_t^{(3)}; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_t^{[n]} &= a_t^{(n)}W_t^{(n)}(L)y_t^{[n-1]} + \varepsilon_t^{(n)}. \end{aligned}$$

(przy założeniu, że istnieją rozkłady opóźnienia) gdzie $V_t^{(j)}(L),\ j = 1,\ 2,..,\ n$; operatory wielomianowe zbudowane na współczynnikach struktur opóźnienia $V_t^{(j)}$, $V_t^{(j)} = \{v_0^{(j)}, v_1^{(j)}, ...\}$; $W_t^{(j)}(L),\ j=1,\ 2,..,\ n$; operatory wielomianowe zbudowane na współczynnikach rozkładów opóźnienia $W_t^{(j)}, W_t^{(j)} = \{w_0^{(j)}, w_1^{(j)}, ...\}$; oraz $a_t^{(j)}$, $j=1,\ 2,..,\ n$; mnożniki długookresowe składowych modeli opóźnienia rozłożonego:

$$a_t^{(j)} = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i}^{(j)},\ j=1,\ 2,..,\ n. \tag{D20}$$

Przez kolejne podstawianie zależności (D19) uzyskuje się:

$$\begin{aligned} y_t^{[1]} &= V_t^{(1)}(L)x_t + \varepsilon_t^{(1)}; \\ y_t^{[2]} &= V_t^{(2)}(L)V_t^{(1)}(L)x_t + V_t^{(2)}(L)\varepsilon_t^{(1)} + \varepsilon_t^{(2)}; \\ y_t^{[3]} &= V_t^{(3)}(L)V_t^{(2)}(L)V_t^{(1)}(L)x_t + V_t^{(3)}(L)V_t^{(2)}(L)\varepsilon_t^{(1)} + V_t^{(3)}(L)\varepsilon_t^{(2)} + \varepsilon_t^{(3)}; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_t^{[n]} &= V_t^{(n)}(L)\cdot..\cdot V_t^{(1)}(L)x_t \ + \\ &+ V_t^{(n)}(L)\cdot...\cdot V_t^{(2)}(L)\varepsilon_t^{(1)} + V_t^{(n)}(L)\cdot..\cdot V_t^{(3)}(L)\varepsilon_t^{(2)} + ... + V_t^{(n)}\varepsilon_t^{(n-1)} + \varepsilon_t^{(n)}. \end{aligned} \tag{D21}$$

Oznaczając iloczyny operatorów wielomianowych i mnożników długookresowych odpowiednio przez:

$$W_t^{[k]}(L) = W_t^{(k)}(L)\cdot ...\cdot W_t^{(1)}(L) = \prod_{j=1}^{k} W_t^{(j)}(L)\,;\ k = 1,\ 2,\ ...\ , n; \tag{D22}$$

oraz

$$a_t^{[k]} = a_t^{(k)}\cdot ...\cdot a_t^{(1)} = \prod_{j=1}^{k} a_t^{(j)}\,;\ k = 1,\ 2,\ ...,\ n; \tag{D23}$$

zależność zmiennej zależnej $y_t^{[n]}$ względem zmiennej niezależnej x_t, wzór (D21), można zapisać w zwięzłej postaci:

$$y_t^{(n)} = a_t^{[n]}W_t^{[n]}(L)x_t + \frac{a_t^{[n]}W_t^{[n]}(L)}{a_t^{[1]}W_t^{[1]}(L)}e_t^{(1)} + \frac{a_t^{[n]}W_t^{[n]}(L)}{a_t^{[2]}W_t^{[2]}(L)}e_t^{(2)} + \ldots + \frac{a_t^{[n]}W_t^{[n]}(L)}{a_t^{[n-1]}W_t^{[n-1]}(L)}e_t^{(n-1)} + e_t^{(n)}$$

lub (D24)

$$y_t^{(n)} = a_t^{[n]}W_t^{[n]}(L)x_t + \sum_{j=1}^{n}\frac{a_t^{[n]}W_t^{[n]}(L)}{a_t^{[j]}W_t^{[j]}(L)}e_t^{(j)}.$$

Oznaczając przez $e_t^{[n]}$:

$$e_t^{[n]} = \sum_{j=1}^{n}\frac{a_t^{[n]}W_t^{[n]}(L)}{a_t^{[j]}W_t^{[j]}(L)}e_t^{(j)} \tag{D25}$$

zależność (D.24) można przedstawić w uproszczonej postaci:

$$y_t^{(n)} = a_t^{[n]}W_t^{[n]}(L)x_t + e_t^{[n]}. \tag{D26}$$

z której wynika, że superpozycja modeli opóźnienia rozłożonego jest również modelem opóźnienia rozłożonego, mnożnik długookresowy superpozycji modeli opóźnienia rozłożonego jest równy iloczynowi mnożników długookresowych składowych modeli opóźnienia rozłożonego, a rozkład opóźnienia jest zbudowany na współczynnikach uzyskanych z iloczynu operatorów wielomianowych zbudowanych na współczynnikach składowych rozkładów opóźnienia.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$W_t^{\{j\}}(L) = \frac{W_t^{[n]}(L)}{W_t^{[j]}(L)},\ j=1, 2,\ldots, n; \tag{D27}$$

oraz

$$a_t^{\{j\}} = \frac{a_t^{[n]}(L)}{a_t^{[j]}(L)},\qquad j=1, 2,\ldots, n. \tag{D28}$$

Nietrudno zauważyć, że $W_t^{\{j\}}(L)$ jest iloczynem operatorów wielomianowych $W_t^{(i)}(L)$ o numerach, $i=j+1, j+2, \ldots, n$; zbudowanych na rozkładach opóźnienia $W_t^{(j)}$, $j=1, 2, \ldots, n$; oraz że $a_t^{\{j\}}$ jest iloczynem mnożników długookresowych modeli opóźnienia $a_t^{(i)}$ o numerach $i=j+1, j+2, \ldots, n$.

Jak pokazano w Części II, iloczynowi operatorów wielomianowych $W_t^{\{j\}}(L)$ zbudowanych na rozkładach opóźnienia zawsze jednoznacznie odpowiada pewien rozkład opóźnienia $W_t^{\{j\}}$. W związku z tym zależność (D26) można przedstawić w następującej postaci:

Bibliografia

1. Agarwal Vertica, Paelink Jean H. P., Reinert Kenneth A., Stough Roger R. (2008): Trade Liberalization and Income Inequality in India: a Poisson Distributed Lag Analysis, Applied Econometrics and International Development, Euro-American Assoc. of Economic Dev. Studies, Vol. 8-2.
2. Almon S. (1965): "The Distributed Lag Between Capital Appropriations and Expenditures", *Econometrica*, 33.
3. Alston Julian M., James S. Jennifer, Andersen Mattew A., Pardey Philip G. (2010): Models of Research and Productivity, w: *Persistence Pays*, Natural Resource Management and Policy, Volume 34, 2010, str. 271-311.
4. Amman Hans M., Kendrick David A., Rust John (red.): *Handbook of Computational Economics,* Vol.1, North-Holland, Elsevier, Amsterdam, Lousanne, New York, 1996. Str. 42.
5. Balke, N.S., Brown, S.P.A. and Yücel, M.K. (1998). Crude Oil and Gasoline Prices: An Asymmetric Relationship?, Federal Reserve Bank of Dallas, Economic Review, First Quarter, pp. 2-11
6. Baltagi Badi H. (2011): *Econometrics*, Springer Texts in Business and Economics, Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
7. Baranyi József (2010), Modelling and parameter estimation of bacterial growth with distributed lag time, rozprawa doktorska, Doctoral School of Informatics, University of Szeged, Hungary.
8. Bronsztejn I. N., Siemiendiajew, K. A., Musiol G., Muhlig H. (2004): *Nowoczesne kompendium matematyki*, PWN.
9. Cagan P., "The Monetary dynamics of Hyper Inflations", w Friedmann, (red.): Studies in the Quantity Theory of Money", University of Chicago Press, 1956.
10. Clark Darral G. (1976): Econometric Measurement of the Duration of Advertising Effects on Sales, Journal of Marketing Research, Vol. 13, No. 4, Nov., 1976.
11. Dahl Christian M., Kulaksizoglu Tamer (2006): Nonlinear Modeling of Changing Lag Structure in U.S. Housing Construction, rozdział 15, w: *Contributions to Economic Analysis*, Vol. 276, 2006.
12. DeLeeuw Frank (1962), The Demand for Capital Goods by Manufacturers: A Study of Quarterly Time Series, *Econometrica.*
13. Dhrymes Phoebus J. (1981): Distributed Lags. Problems of Estimation and Formulation, 2nd edition. North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford.
14. Dhrymes, Phoebus J. (2013): Mathematics for econometrics, DE Lag Operators, Rozdz. 6, str.171, Springer, New York.
15. Fichtenholz G. M. (1963): *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom III, PWN, Warszawa.

16. Fisher, Irving. (1937): Note on a Short-Cut Method for Calculating Distributed Lags, *International Statistical Institute Bulletin*, str. 323-327.
17. Forrester Jay W. (1961), *Industrial dynamics*. Cambridge, Mass., M.I.T. Press.
18. Forrester Jay W., Legasto Augusto A., Jr., Lyneis James M. (red) (1980): *System dynamics*, Amsterdam; New York, Elsevier/North-Holland.
19. Frances Philip H., Vroomen Björn (2003), Estimating Duration Intervals, Erasmus Research Institute of Management (ERIM), Rotterdam school of Management, *ERIM Report Series: Research in Management*, April 2003.
20. Frances Philip H., Vroomen Björn (2006), Estimating Confidence Bounds for Advertising Effect Duration Intervals, *Journal of Advertising*, Vol. 35, 2/2006.
21. Frick Hans (1986): A Note on a Dynamic Adjustment Equation for a Poisson istributed Lag Model, *Empirical Economics*, Vol. 11, str. 65-67, 1986.
22. Hassouneh I., von Cramon-Taubadel S., Serra T., Gil J. M. (2012), Recent Developments in the Econometric Analysis of Price Transmission, Workink paper No. 2, Transparency of Food Pricing TRANSFOP, Seventh Framework Programme, Grant Agreement No. KBBE-265601-4- TRANSOP, January, 2012.
23. Friedrich D. (1982): A Dynamic Adjustment Equation for a Poisson Distributed lag, *Empirical Economics*, Vol. 7, strony 239-249, Springer.
24. Gadomski Jan (2013): On Some Properties of the Composite Distributed Lag Models, Operations Research and Decisions, 3/2013.
25. Gadomski Jan (2002), A Dynamic Approach to Modeling of the Banking Sector, in: MODEST 2002: *Transition and Transformation; Problems and Models*, Owsinski J. (ed), The Interfaces Institute.
26. Gadomski Jan (2003), "An Outline of the Model of the Banking Sector in the Closed Economy"(in Polish), Acta Universitatis Lodziensis, Folia Oeconomica 166, 2003.
27. Gadomski Jan (2009): Dynamics of Loans in the Polish Banking System, CONTROL AND CYBERNETICS, Wolumin: 38 Numer: 3 Strony: 893 – 911.
28. Gadomski Jan (1986): Modele opóźnienia rozłożonego ze zmiennymi współczynnikami opóźnienia, Prace IBS PAN, Polska Akademia Nauk, Instytut Badań Systemowych, Warszawa.
29. Gadomski J., Klukowski Leszek (1985): Wpływ zapasów na opóźnienia cen, *Ekonomia* Nr 47,wyd.: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa. ISSN 0137-3056
30. Gadomski Jan, Klukowski Leszek (1988): Właściwości opóźnień rozłożonych o parametrach zmiennych w czasie, *Ekonomia*, Nr 52, wyd.: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, strony 145-162, Warszawa 1988, ISSN 0137-3056

31. Goodwin Barry K., Harper Daniel C. (2000): Price Transmission, Threshold Behavior, And Asymmetric Adjustment in the U.S. Pork Sector, *Journal of Agricultural and Applied Economics,* Volume 32, No 03, December 2000.
32. Griliches Zvi (1967): Distributed Lags, A Survey, *Econometrica*, No 35, January.
33. Gutenbaum J. (red.), Inkielman M. (red.), Babarowski J., Gadomski J., Woroniecka I., (1998): *Symulacyjny model gospodarki Polski*, Seria Badania Systemowe, tom 20, Polska Akademia Nauk, Instytut Badań Systemowych, Warszawa
34. Hassouneh Islam, von Cramon-Taubadel Stephan, Serra Teresa, Gil José M. (2012): Recent Developments in the Econometric Analysis of Price Transmission, Working Paper No. 2, Transparency of Food Pricing TRANSFOP, January 2012, Seventh Framework Programme, Grant Agreement No. KBBE-265601-4-TRANSFOP.

1. Hendry, D. F., Pagan A. R., Sargan J.D.: *Handbook of Econometrics*, Rozdział 18, Dynamic Specification, w:Vol. II, Griliches Z., Intriligator M. D. (red.). Elsevier Science Publishers BV, 1984.
2. Holzer Jerzy Z., Kędelski Mieczysław, Paradysz Jan: *Demografia*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, 2006.
3. Holzer Jerzy Z. (1994), Demografia, wyd. IV poprawione, PWE, str. 336, Warszawa.
4. Inkielman M. (1995): *Symulacyjne metody analizy sterowanych wielozbiornikowych systemów wodnych*, Polska Akademia Nauk, Instytut Badań Systemowych, Seria: Badania systemowe, t. 19. Warszawa.
5. Intriligator M. D. (1978): Econometric Models, Techniques and Applications, North_Holland Publishing Company, Amsterdam, Oxford.
6. Johnson Norman L., Kotz Samuel, Kemp Adrienne W. (2008); *Univariate Discrete Distributions*, III wydanie, John Wiley&Sons, INC. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore.
7. Jorgensen, D. W. (1966): „Rational Distributed Lag Function", *Econometrica*, 34.
8. Kelm Robert (2005): Ekonometryczny model cen i popytu na pieniądz w Polsce: perspektywa średniookresowa 1995-2003, *Ekonomista* nr 4/2005, str. 449-481.
9. Kenkel, J. L. (1974): *Dynamic Linear Economic Models*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, London, Paris.
10. Kim Hyeyoung, Ward Ronald W. (2013): Price Transmission Across the U.S. Food Distribution System, *Food Policy*, 41, str. 226-236.
11. Kim Minjoo (2011): "Three Essays In semi-Parametric Modelling of Time-varying Distribution", rozprawa doktorska, Leeds University, CASIF Leeds University Business School, czerwiec 2011.

12. Klein L. R. (1950): Economic Fluctuation in the United States, 1921-1941. The Cowles Commission Monograph No.11, New York, John Wiley & Sons, Inc.
13. Koyck, L. M. (1954): *Distributed Lags and Investment Analysis*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
14. Leszkiewicz-Kędzior K., Welfe A. (2014): Asymmetric Price Adjustments in the Fuel Market, Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics, CEJEME Nr 2, wol. 6, strony 105-127 (2014).
15. Maddala G. S. (1977): Econometrics, McGraw-Hill Book Company, New York.
16. Manera Matteo, Frey Giliola (2005): Econometric Models of Asymetric Price Transmission, Nota di Lavoro, Fondazione Eni Enrico Mattei, No 100.2005, Leibnitz Information Centre for Economics.
17. Meyer Jochen, von Cramon-Taubadel Stephan (2004): Asymmetric Price Transmission: A Survey, Journal of Agricultural Economics, Volume 55, Issue 3, pages 581–611, November 2004
18. Morishima M., Murata Y., Nosse T., Saito M. (1972): A Dynamic analysis of the American economy, 1902-1952, w: *The Working of Econometric Models*, Cambridge University Press, New York.
19. Nerlove M. (1958): *Distributed Lags and Demand Analysis For agricultural and Other Commodities*, U. S. Department of Agriculture, Washington D. C.
20. Nowak Piotr, Gadomski Jan (2014), Deterministic properties of serially connected distributed lag models, Operation Research and Decisions. Vol. 23, No 3. Wroclaw.
21. Okólski Marek: *Demografia. Podstawowe pojęcia, procesy i teorie w encyklopedycznym zarysie*. Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR, WNE UW, Warszawa 2004.
22. Otto Wojciech (1985): Wahania długości opóźnień inwestycyjnych. Próba pomiaru i wyjaśnienia, rozprawa doktorska, Wydział Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Warszawski.
23. Pesando, J. S. (1972): Seasonal Variability in Distributed Lag Models, Journal of the American Statistical Association, June.
24. Pindyck Robert S., Rubinfeld Daniel L. (1998): *Econometric Models and Econometric Forecasts*, wyd. IV, McGraw-Hill International Editions, Economic series, Boston, Burr Ridge, Dubuque, Madison, New York, San Francisco, St. Luis.
25. Schmidt P. (1974): An Argument for the usefulness of the gamma Distributed Lag Model, International Economic Review, February.
26. Solow R. M. (1960): On a Family of Lag Distributions, *Econometrica*, April.
27. Tinbergen J. (1959): On the Theory of Trend Movements, w: *Jan Tinbergen Selected Papers*, Amsterdam.
28. Tinsley P. A. (1967): An Application of Variable weight Distributed Lags, *Journal of American Statistical Association*, Vol. 62, No. 320, str. 1277-1289.

29. Ullah Aman, Raj Baldev (1980): A Polynomial distributed Lag Model with Stochastic Coefficients and Priors, *Empirical Economics*, Vol. 5, 1980, str. 219-232.
30. Warchalski, Tomasz (2004): Modele rozłożonego opóźnienia uwzględniające dynamikę realizacji zmiennej objaśniającej, *Przegląd Statystyczny* nr 51/2004, str. 23-29.
31. Welfe Aleksander (2003): *Ekonometria, Metody i ich zastosowanie*, wydanie III zmienione, PWE 2003.
32. Welfe Władysław: Stylized, Empirical Model of Economic Growth, Acta universitatis lodziensis, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2005.

[redacted]

1. Agarwal Vertica, Paelink Jean H. P., Reinert Kenneth A., Stough Roger R. (2008): Trade Liberalization and Income Inequality in India: a Poisson Distributed Lag Analysis, Applied Econometrics and International Development, Euro-American Assoc. of Economic Dev. Studies, Vol. 8-2.
2. Almon S. (1965): "The Distributed Lag Between Capital Appropriations and Expenditures", *Econometrica*, 33.
3. Alston Julian M., James S. Jennifer, Andersen Mattew A., Pardey Philip G. (2010): Models of Research and Productivity, w: *Persistence Pays*, Natural Resource Management and Policy, Volume 34, 2010, str. 271-311.
4. Baltagi Badi H. (2011): *Econometrics*, Springer Texts in Business and Economics, Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
5. Baranyi József (2010), Modelling and parameter estimation of bacterial growth with distributed lag time, rozprawa doktorska, Doctoral School of Informatics, University of Szeged, Hungary.
6. Bronsztejn I. N., Siemiendiajew, K. A., Musiol G., Muhlig H. (2004): *Nowoczesne kompendium matematyki*, PWN.
7. Cagan P., "The Monetary dynamics of Hyper Inflations", w Friedmann, (red.): Studies in the Quantity Theory of Money", University of Chicago Press, 1956.
8. Clark Darral G. (1976): Econometric Measurement of the Duration of Advertising Effects on Sales, Journal of Marketing Research, Vol. 13, No. 4, Nov., 1976.
9. Dahl Christian M., Kulaksizoglu Tamer (2006): Nonlinear Modeling of Changing Lag Structure in U.S. Housing Construction, rozdział 15, w: *Contributions to Economic Analysis*, Vol. 276, 2006.

10. DeLeeuw Frank (1962), The Demand for Capital Goods by Manufacturers: A Study of Quarterly Time Series, *Econometrica*.
11. Dhrymes Phoebus J. (1981): Distributed Lags. Problems of Estimation and Formulation, 2nd edition. North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford.
12. Dhrymes, Phoebus J. (2013): Mathematics for econometrics, DE Lag Operators, Rozdz. 6, str.171, Springer, New York.
13. Fichtenholz G. M. (1963): *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom III, PWN, Warszawa.
14. Fisher, Irving. (1937): Note on a Short-Cut Method for Calculating Distributed Lags, *International Statistical Institute Bulletin*, str. 323-327.
15. Frances Philip H., Vroomen Björn (2003), Estimating Duration Intervals, Erasmus Research Institute of Management (ERIM), Rotterdam school of Management, *ERIM Report Series: Research in Management*, April 2003.
16. Frances Philip H., Vroomen Björn (2006), Estimating Confidence Bounds for Advertising Effect Duration Intervals, *Journal of Advertising*, Vol. 35, 2/2006.
17. Frick Hans (1986): A Note on a Dynamic Adjustment Equation for a Poisson istributed Lag Model, *Empirical Economics*, Vol. 11, str. 65-67, 1986.
18. Friedrich D. (1982): A Dynamic Adjustment Equation for a Poisson Distributed lag, *Empirical Economics*, Vol. 7, strony 239-249, Springer.
19. Gadomski Jan (2013): On Some Properties of the Composite Distributed Lag Models, Operations Research and Decisions, 3/2013.
20. Gadomski Jan (1986): Modele opóźnienia rozłożonego ze zmiennymi współczynnikami opóźnienia, Prace IBS PAN, Polska Akademia Nauk, Instytut Badań Systemowych, Warszawa.
21. Gadomski Jan (2009): Dynamics of Loans in the Polish Banking System, Control And Cybernetics, Wolumin: 38, Numer: 3, Strony: 893 – 911.
22. Gadomski J., Klukowski Leszek (1985): Wpływ zapasów na opóźnienia cen, *Ekonomia* Nr 47,wyd.: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa. ISSN 0137-3056
23. Gadomski Jan, Klukowski Leszek (1988): Właściwości opóźnień rozłożonych o parametrach zmiennych w czasie, *Ekonomia*, Nr 52, wyd.: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, strony 145-162, Warszawa 1988, ISSN 0137-3056
24. Goodwin Barry K., Harper Daniel C. (2000): Price Transmission, Threshold Behavior, And Asymmetric Adjustment in the U.S. Pork Sector, *Journal of Agricultural and Applied Economics,* Volume 32, No 03, December 2000.
25. Griliches Zvi (1967): Distributed Lags, A Survey, *Econometrica*, No 35, January.

26. Gutenbaum J. (red.), Inkielman M. (red.), Babarowski J., Gadomski J., Woroniecka I., (1998): *Symulacyjny model gospodarki Polski*, Seria Badania Systemowe, tom 20, Polska Akademia Nauk, Instytut Badań Systemowych, Warszawa
27. Hendry, D. F., Pagan A. R., Sargan J.D.: *Handbook of Econometrics*, Rozdział 18, Dynamic Specification, w:Vol. II, Griliches Z., Intriligator M. D. (red.). Elsevier Science Publishers BV, 1984.
28. Holzer Jerzy Z. (1994), Demografia, wyd. IV poprawione, PWE, str. 336, Warszawa.
29. Intriligator M. D. (1978): Econometric Models, Techniques and Applications, North_Holland Publishing Company, Amsterdam, Oxford.
30. Johnson Norman L., Kotz Samuel, Kemp Adrienne W. (2008); *Univariate Discrete Distributions*, III wydanie, John Wiley&Sons, INC. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore.
31. Kelm Robert (2005): Ekonometryczny model cen i popytu na pieniądz w Polsce: perspektywa średniookresowa 1995-2003, *Ekonomista* nr 4/2005, str. 449-481.
32. Kelm Robert (2001): Restrykcje w modelach z rozkładami opóźnień, *Przegląd statystyczny*, tom 48 nr 3-4/2001, str. 131-150.
33. Kenkel, J. L. (1974): *Dynamic Linear Economic Models*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, London, Paris.
34. Kim Hyeyoung, Ward Ronald W. (2013): Price Transmission Across the U.S. Food Distribution System, *Food Policy*, 41, str. 226-236.
35. Klein L. R. (1950): Economic Fluctuation in the United States, 1921-1941. The Cowles Commission Monograph No.11, New York, John Wiley & Sons, Inc.
36. Koyck, L. M. (1954): *Distributed Lags and Investment Analysis*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
37. Maddala G. S. (1977): Econometrics, McGraw-Hill Book Company, New York.
38. Manera Matteo, Frey Giliola (2005): Econometric Models of Asymetric Price Transmission, Nota di Lavoro, Fondazione Eni Enrico Mattei, No 100.2005, Leibnitz Information Centre for Economics.
39. Meyer Jochen, von Cramon-Taubadel Stephan (2004): Asymmetric Price Transmission: A Survey, Journal of Agricultural Economics, Volume 55, Issue 3, pages 581–611, November 2004
40. Nerlove M. (1958): *Distributed Lags and Demand Analysis For agricultural and Other Commodities*, U. S. Department of Agriculture, Washington D. C.

41. Nowak Piotr, Gadomski Jan (2013), Deterministic properties of superposition of the distributed lag models, Operations Research and Decisions, 3/2013.
42. Otto Wojciech (1985): Wahania długości opóźnień inwestycyjnych. Próba pomiaru i wyjaśnienia, rozprawa doktorska, Wydział Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Warszawski.
43. Pesando, J. S. (1972): Seasonal Variability in Distributed Lag Models, Journal of the American Statistical Association, June.
44. Pindyck R. S., Rubinfeld D. L. (1998): *Econometric Models and Econometric Forecasts*, Forth Edition, Irwin/McGraw-Hill, Boston Massachusetts.
45. Schmidt P. (1974): An Argument for the usefulness of the gamma Distributed Lag Model, International Economic Review, February.
46. Solow R. M. (1960): On a Family of Lag Distributions, *Econometrica*, April.
47. Tinbergen J. (1959): On the Theory of Trend Movements, w: *Jan Tinbergen Selected Papers*, Amsterdam.
48. Tinsley P. A. (1967): An Application of Variable weight Distributed Lags, *Journal of American Statistical Association*, Vol. 62, No. 320, str. 1277-1289.
49. Ullah Aman, Raj Baldev (1980): A Polynomial distributed Lag Model with Stochastic Coefficients and Priors, *Empirical Economics*, Vol. 5, 1980, str. 219-232.
50. Warchalski, Tomasz (2004): Modele rozłożonego opóźnienia uwzględniające dynamikę realizacji zmiennej objaśniającej, *Przegląd Statystyczny* nr 51/2004, str. 23-29.
51. Welfe Aleksander, Kelm Robert (1997): Zastosowanie modelu racjonalnych oczekiwań do opisu kształtowania się płac przeciętnych w Polsce 02.1991-04.1995, Przegląd Statystyczny nr 44/1997, str. 241-257.

Gadomski Jan, Klukowski Leszek: Właściwości opóźnień rozłożonych o parametrach zmiennych w czasie, Ekonomia, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa, 1988, ISSN 0137-3056, zeszyt 52.

Gadomski Jan (2002), A Dynamic Approach to Modeling of the Banking Sector, in: MODEST 2002: *Transition and Transformation; Problems and Models*, Owsinski J. (ed), The Interfaces Institute.

Gadomski Jan (2003), "An Outline of the Model of the Banking Sector in the Closed Economy"(in Polish), Acta Universitatis Lodziensis, Folia Oeconomica 166, 2003.

Gadomski Jan (2009): Dynamics of Loans in the Polish Banking System, CONTROL AND CYBERNETICS, Wolumin: 38 Numer: 3 Strony: 893 – 911.

$$
\begin{aligned}
e^{[n]} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{[n]} W_t^{[n]}(L)}{a_t^{[j]} W_t^{[j]}(L)} e_t^{(j)} = \\
&= a_t^{\{1\}} \left(w_{t\,0}^{\{1\}} e_t^{(1)} + w_{t\,1}^{\{1\}} e_{t-1}^{(1)} + \ldots. + \right) + \\
&+ a_t^{\{2\}} \left(w_{t\,0}^{\{2\}} e_t^{(2)} + w_{t\,1}^{\{2\}} e_{t-1}^{(2)} + \ldots. + \right) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ a_t^{\{n-1\}} \left(w_{t\,0}^{\{n-1\}} e_t^{(n-1)} + w_{t\,1}^{\{n-1\}} e_{t-1}^{(n-1)} + \ldots. + \right) + \\
&+ e_t^{(n)}.
\end{aligned}
\tag{D29}
$$

Ponieważ z założenia:

$$E(\varepsilon_t^{(j)}) = 0,\ D^2(\varepsilon_t^{(j)}) = \left(\sigma^{(j)}\right)^2 < \infty,\ D^2(\varepsilon_t^{(j)} \varepsilon_{t-k}^{(j)}) = 0,\ k = 1,2,..\ ; j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

wartość oczekiwana składnika losowego $e_t^{[n]}$, wzór (D29), jest równa:

$$E(e_t^{[n]}) = 0,$$

co bezpośrednio wynika z założenia, a wariancja składnika losowego $e_t^{[n]}$, wzór (D17), jest równa:

$$D^2(e^{[n]}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{\infty} a_t^{\{j\}} w_t^{\{j\}} D^2(e_{t-i}^{(n)}) = \sum_{j=1}^{n} a_t^{\{j\}} (\sigma^{(j)})^2 .$$

C.b.d.o.

Rozpiętość struktur złożonych modeli opóźnienia rozłożonego

Rozpiętość struktury sumy skończonych modeli opóźnienia

Z sumą skończonych modeli opóźnienia rozłożonego mamy do czynienia, gdy zmienna zależna y_t jest sumą skończonej liczby zmiennych zależnych $y_t^{(j)}$, $j = 1,\ 2,\ ..\ ,n;$ opisanych za pomocą skończonych modeli opóźnienia rozłożonego względem tej samej zmiennej niezależnej x_t:

$$y_t = y_t^{(1)} + y_t^{(2)} + \ldots + y_t^{(n)} = y_t^{(1)} = \sum_{i=i_d(V_t)}^{i_g(V_t)} v_{t\,i} x_{t-i} + e_t;\quad n < \infty \tag{D30}$$

gdzie:

$$y_t^{(1)} = \sum_{i=i_d(V_t^{(1)})}^{i_g(V_t^{(1)})} v_{t\,i}^{(1)} x_{t-i} + e_t^{(1)},\ y_t^{(2)} = \sum_{i=i_d(V_t^{(2)})}^{i_g(V_t^{(2)})} v_{t\,i}^{(2)} x_{t-i} + e_t^{(2)}, \cdots,\ y_t^{(n)} = \sum_{i=i_d(V_t^{(n)})}^{i_g(V_t^{(n)})} v_{t\,i}^{(n)} x_{t-i} + e_t^{(n)},\ n < \infty; \tag{D31}$$

oraz[/5]

$$v_{t\,i} = \sum_{j=0}^{n} v_{t\,i}^{(j)};\ e_t = \sum_{j=0}^{n} e_t^{(j)}.$$

Granice zbioru indeksów znaczących $J(V_t)$ są określone za pomocą następujących wzorów:

$$i_d(V_t) = \min\{ i_d(V_t^{(j)});\ j = 1,2,..,n \}$$

[/5] Dla uproszczenia zapisu w dalszej części składniki losowe zostaną opuszczone.

$$i_g(V_t) = \max\{i_g(V_t^{(j)});\ j = 1,2,..,n\} \tag{D31}$$

Rozpiętość struktury opóźnienia $R(V_t)$ wyraża się wzorem:

$$R(V_t) = \max\{i_g(V_t^{(j)});\ j = 1,2,..,n\} - \min\{i_d(V_t^{(j)}) + 1;\ j = 1,2,...,n\}. \tag{D32}$$

<u>Rozpiętość struktury superpozycji skończonych modeli opóźnienia</u>

Z superpozycją modeli opóźnienia rozłożonego mamy do czynienia, gdy zmienna zależna $y_t^{[n]}$ jest opisana za pomocą modelu skończonego opóźnienia rozłożonego względem pewnej zmiennej niezależnej $y_t^{[n-1]}$, która jest z kolei zmienną zależną modelu opóźnienia rozłożonego względem innej zmiennej niezależnej $y_t^{[n-2]}$, itd.:

$$y_t^{(n)} = \sum_{i=i_d\left(V_t^{(n)}\right)}^{i_g\left(V_t^{(n)}\right)} v_{ti}^{(n)} y_{t-i}^{(n-1)},\ y_t^{(n-1)} = \sum_{i=i_d\left(V_t^{(n-1)}\right)}^{i_g\left(V_t^{(n-1)}\right)} v_{ti}^{(n-1)} y_{t-i}^{(n-2)}, \ldots, y_t^{(1)} = \sum_{i=i_d\left(V_t^{(1)}\right)}^{i_g\left(V_t^{(1)}\right)} v_{ti}^{(1)} x_{t-i} \tag{D33}$$

Posługując się zapisem operatorowym zależności (2.25) można przedstawić, na podstawie wzoru (2.10), w postaci:

$$y_t^{(n)} = V_t^{(n)}(L) y_t^{(n-1)},\ y_t^{(n-1)} = V_t^{(n-1)}(L) y_t^{(n-2)}, .., y_t^{(1)} = V_t^{(1)}(L) x_t \tag{D34}$$

Granice przedziału indeksów znaczących rozkładu utworzonego w następstwie superpozycji skończonych modeli opóźnienia rozłożonego są określone następującym wzorem:

$$i_d\left(V_t^{[n]}\right) = \sum_{j=1}^{n} i_d\left(V_t^{(j)}\right)$$

$$i_g\left(V_t^{[n]}\right) = \sum_{j=1}^{n} i_g\left(V_t^{(j)}\right)$$

a rozpiętość struktury $R(V_t^{[n]})$ wynosi:

$$R(V_t^{[n]}) = i_g\left(V_t^{[n]}\right) - i_d\left(V_t^{[n]}\right) + 1 = \sum_{j=1}^{n} i_g\left(V_t^{(j)}\right) - \sum_{j=1}^{n} i_d\left(V_t^{(j)}\right) + 1.$$