

Raport Badawczy
Research Report

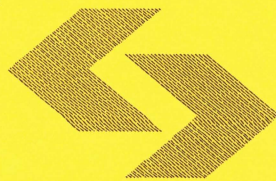
RB/47/2014

**Modele opóźnień w systemach
ekonomicznych.
Własności i zastosowania.
Część I. Wprowadzenie**

J. Gadomski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences



POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Zakładu zgłaszający pracę:
Dr hab. inż. Lech Kruś, prof. PAN

Warszawa 2014

SPIS TREŚCI

WSTĘP

CZĘŚĆ I Wprowadzenie

- Rozdział 1.1 Podstawowe pojęcia
- Rozdział 1.2 Rozkład opóźnienia
- Rozdział 1.3 Wynikowy rozkład opóźnienia
- Rozdział 1.4 Wybrane własności dynamiczne
- Rozdział 1.5 Mierzenie opóźnienia
- Rozdział 1.6 Średnia rozkładu opóźnienia wynikowego $M(U)$ jako miara opóźnienia (1)
- Rozdział 1.7 Średnia rozkładu opóźnienia wynikowego $M(U)$ jako miara opóźnienia (2)
- Rozdział 1.8 Wielomian operatorowy i funkcja tworząca
- Rozdział 1.9 Podstawowe stałe struktury/rozkłady opóźnienia rozłożonego
 - 1.9.1 Skończone struktury/rozkłady opóźnienia
 - 1.9.1.1 Liniowa struktura opóźnienia
 - 1.9.1.2 Model Almon
 - 1.9.2 Niekończone struktury/rozkłady opóźnienia
 - 1.9.2.1 Rozkład Pascala-Solowa
 - 1.9.2.2 Model Tsurumi
 - 1.9.2.3 Model z rozkładem Poissona
 - 1.9.2.4 Model Jørgensena
- Rozdział 1.10 Źródła zmienności struktur opóźnienia
- Podsumowanie Części I

CZĘŚĆ II Złożone struktury modeli opóźnienia rozłożonego

- Rozdział 2.1. Suma modeli opóźnienia rozłożonego
- Rozdział 2.2. Superpozycja modeli opóźnienia rozłożonego
- Rozdział 2.3. Suma modeli opóźnienia rozłożonego wielu zmiennych
- Podsumowanie Części II

CZĘŚĆ III Modele opóźnienia w systemach przepływów

- Rozdział III.1 Sformułowanie problemu
- Rozdział III.2 Modele opóźnienia w systemach przepływów ze stałym rozkładem opóźnienia
- Rozdział III.3 Modele opóźnień w systemach przepływów ze zmiennymi rozkładami opóźnień
 - III.3.1 Model z dwoma parametrami
 - III.3.1.1 Model populacji
 - III.3.1.2 Model zmiennej sprawności procesów inwestowania w Polsce przed 1989 r.
 - III.3.1.3 Model transmisji ceny
 - III.3.1.4 Model kredytu
- Podsumowanie Części III

Dodatek

Bibliografia

Modele opóźnień w systemach ekonomicznych. Własności i zastosowania.

Wstęp

Z doświadczenia wiemy, że pomiędzy przekręceniem pokrętła gorącej wody a ustaleniem się temperatury wody wypływającej z prysznica mija jakiś czas; wiemy też, że czas ten w różnych prysznicach bywa różny, co może być przyczyną niepożądanych doznań. Również wtedy, gdy dowiadujemy się, że cena ropy naftowej szybko rośnie na światowych giełdach, z dużą pewnością możemy oczekiwać, że ceny paliw na krajowym rynku również odpowiednio wzrosną. W obu przypadkach mamy do czynienia ze zjawiskiem nazywanym opóźnieniem.

Ze zjawiskiem opóźnienia mamy do czynienia, gdy reakcja obserwowanego systemu lub jego części na zmianę pewnego czynnika następuje po jakimś czasie. Opóźnienia są nieodłączne od zjawisk dynamicznych, w których przyczyna zmian poprzedza wystąpienie jej następstw. Jednak nie wszystkie zależności przyczynowo-skutkowe są związane z działaniem mechanizmu opóźnienia; często są to zjawiska złożone, w których działają inne mechanizmy, między innymi sprzężenia zwrotne, które powodują, że to samo zjawisko jest zarazem przyczyną i następstwem powiązanych zjawisk.

Modele opóźnienia stanowią ważny element konstrukcyjny modeli dynamicznych, to jest takich, które objaśniają zmiany pewnych zmiennych zależnych (objaśnianych) za pomocą zmian pewnych innych zmiennych, zwanych niezależnymi lub objaśniającymi, które nie zależą od zmiennych zależnych. Często przyjmowane jest założenie, że zmienna zależna reprezentuje kategorię, której zmiany są następstwem zmian wartości zmiennych niezależnych reprezentujących kategorie będące przyczynami tych zmian¹.

Hendry et al. (1984), strona 1057, przyczyn zjawiska opóźnienia dopatrują się w takich kosztach dostosowania, jak: koszty transakcyjne, badawcze, optymalizacji oraz gdy podmioty powoli reagują na zmiany w otoczeniu w następstwie bezwładności, utrwalonych przyzwyczajeń, zwłoki w dostrzeganiu/rozpoznananiu zmian. Według tej opinii powolność reakcji wiąże się również z niepewnością oraz niedoskonałością rynków. Do wymienionych czynników można dodać opóźnienie informacji, na których podstawie są analizowane i podejmowane decyzje.

Modele opóźnienia są tworzone dla potrzeb różnych dziedzin nauki i różnych zastosowań. Na gruncie ekonomii zależnościami klasycznymi mającymi postać modelu opóźnienia są między innymi: wpływ nakładów inwestycyjnych na zasób kapitału, transmisja ceny, tj. opóźnienie zmiany ceny krajowej importowanego surowca względem zmiany ceny tego surowca na rynkach międzynarodowych, opóźnienie sprzedaży względem zmiany ceny - lub w skali makroekonomicznej - reakcja popytu konsumpcyjnego na zmianę dochodu dyspozycyjnego, czy wreszcie reakcja gospodarki na zmianę stopy procentowej.

¹ W przypadku modeli stochastycznych trudno mówić o zależnościach przyczynowo-skutkowych.

Celem modelu opóźnienia jest opisanie zależności zmiennej zależnej od zmiennych niezależnych. W wielu przypadkach celem tym jest również oszacowanie, o ile okresów zmiany zmiennej zależnej są opóźnione w stosunku do zmiany zmiennej niezależnej i w jakim stopniu zmiany te są rozłożone, bądź skupione w czasie.

W analizie opóźnień wyodrębnić można dwie podstawowe grupy zagadnień. Grupa pierwsza, to analiza mechanizmów, które decydują o właściwościach badanego opóźnienia. Grupa druga, szczególnie ważna w badaniach empirycznych, to zagadnienia związane z estymacją modeli opóźnień.

W historii badań zaangażowanie w rozwiązywanie problemów z obu tych grup było nierównomierne. W pierwszym okresie uwaga badaczy była skupiona głównie na analizie konstrukcji i własności różnych modeli opóźnienia. Były to przede wszystkim prace: Fishera (1937), Koycka (1954), Solowa (1960), Almon (1965), Griliches (1967). Równolegle prowadzone były prace poświęcone drugiej grupie zagadnień.

W drugim okresie, który - jak się wydaje - trwa nadal, dominują prace poświęcone zagadnieniom należącym do grupy drugiej. Do najwybitniejszych prac tego nurtu należy zaliczyć przede wszystkim następujące: Griliches (1967), Maddala (1977), Dhrymes (1981). Wpłynęły na to następujące czynniki: rozwiązano znaczną część podstawowych problemów grupy pierwszej oraz dostrzeżono wagę i złożoność problemów estymacji. Za cezurę można uznać pojawienie się artykułu Almon (1965) i Jorgensena (1966), w których zaproponowano odpowiednio tak zwane modele wielomianowy i ilorazowy. Modele te z jednej strony charakteryzują się dużą elastycznością w tym sensie, że nie wymagają od stosujących modele opóźnienia zaangażowania a zarazem zwalniają od problemów należących do grupy pierwszej.

Wielką syntezę osiągnąć na polu badania modeli opóźnienia stanowi książka Dhrymesa (1981). Mimo, że od jej pierwszego wydania minęło ponad trzydzieści lat, jest ona wciąż fundamentalnym źródłem wiedzy o modelach opóźnień. Stanowi zarazem wzorzec, do którego należy się odnieść decydując się na pisanie o modelach opóźnień. Autorowi tej pracy wydaje się, że ma tu coś nowego do zaproponowania.

Celem tej pracy jest zaprezentowanie analizy modeli opóźnień, której niektóre wątki stanowią nawiązanie do przedstawionego powyżej okresu pierwszego, jak również korzystającej z rozwiązań zaproponowanych w badaniach późniejszych. Są to następujące grupy problemów.

Pierwsza grupa wiąże się z doбором miernika opóźnienia. Podejmowane tu zagadnienie jest następstwem powszechnego przyjmowania w literaturze przedmiotu jako miernika opóźnienia wartości średniej rozkładu opóźnienia, co w wielu wypadkach może być powodem nieporozumień i błędów interpretacji. Ma to znaczenie zwłaszcza wtedy, gdy celem analizy jest określenie opóźnienia zmiennej zależnej względem zmiennej niezależnej, a nie wyłącznie mechanizm opóźnienia.

Druga grupa zagadnień podjętych w tej pracy jest związana z analizą własności podklasy modeli opóźnienia opisujących zjawiska związane z przepływami. Do tej podklasy zaliczyć można takie modele jak: model kształtowania się kapitału pod wpływem inwestycji i deprecjacji kapitału, model kształtowania się stanu depozytów w systemie bankowym pod wpływem strumieni wpłat oraz wypłat, model kształtowania się poziomu zadłużenia z tytułu kredytu udzielonego przez system bankowy pod wpływem strumienia spłat wcześniej zaciągniętych kredytów oraz strumienia nowoudzielonych kredytów. Do tej podklasy można również zaliczyć model demograficzny, w którym liczba ludności jest kształtowana przez strumienie urodzeń oraz zgonów. Wspólną cechą wymienionych tu modeli jest to, że występują w nich kategorie zasobów oraz strumieni zasilających (wpływających) oraz wyczerpujących te zasoby. W zjawiskach opisywanych za pomocą tych modeli często istotnymi wielkościami są średni czas, jaki jednostki strumienia wyczerpującego zasób przebywały w zasobie oraz średni okres przebywania jednostki w tym zasobie. Wielkości te, poza wyjątkami, nie są równe.

Trzecia grupa problemów wiąże się z analizą własności modeli opóźnienia, w których mechanizm opóźnienia ulega zmianie. Problematyka ta nie jest nowa, np. Tinsley (1967), Pesando (1972), Otto (1985), Gadomski (1986), Dahl, Kulaksizoglu (2005); jej umiarkowany rozwój wynika – jak się wydaje – z dwóch przyczyn. Pierwsza, to niedostatek informacji, powodujący konieczność wyboru modeli uproszczonych, ze stałymi współczynnikami, przysparzającymi mniejsze trudności przy estymacji parametrów. Przyczyna druga, wiąże się z podejściem pragmatycznym, polegającym na daleko idącym – w stosunku do wiedzy o badanym zjawisku – upraszczaniu i w związku z tym na pominięciu analizy mechanizmów opóźnienia. Jest to również wynik osłabienia „czujności badawczej” w następstwie pojawienia się modeli wielomianowego Almon (1965) i ilorazowego Jorgensena (1966) – ich elastyczność często prowadzi do uzyskania zadowalającego wyniku: wszystko to, czego nie udaje się - z jakiegoś powodu - wtłoczyć w część deterministyczną modelu, przypisane zostaje czynnikowi losowemu.

W pracy problematyka estymacji modeli opóźnienia rozłożonego jest całkowicie pominięta, osobom zainteresowanym z czystym sumieniem można polecić prace klasyczne: Griliches (1967), Dhrymes (1981), Hendry et al. (1984). W prezentowanych dalej rozważaniach struktura opóźnienia będzie z założenia dana lub aproksymowana w zadowalający sposób.

Praca składa się z następujących części. W Części I sformułowany jest uogólniony model opóźnienia rozłożonego. Uogólnienie polega na uwzględnieniu, że na zmienną zależną mają wpływ nie tylko zmienna niezależna i zmienna losowa, ale również podlegający zmianom mechanizm opóźnienia, który jest dany przez strukturę i/lub rozkład opóźnienia i mnożnik długookresowy. Zaproponowana będzie nowa kategoria nazwana wynikowym rozkładem opóźnienia. W tej samej Części I omawiane są również podstawowe pojęcia charakteryzujące rozkład opóźnienia, (jeśli istnieje): wartość średnia, wariancja i

mediana rozkładu opóźnienia. W dalszej części wprowadzone są pojęcia funkcji tworzącej i operatora wielomianowego jako przydatnych narzędzi analizy modeli opóźnienia.

Część II zawiera omówienie podstawowych własności modeli złożonych modeli opóźnienia. Badana jest suma modeli opóźnienia rozłożonego, która jest również modelem opóźnienia rozłożonego, ze strukturą opóźnienia będącą sumą składowych struktur opóźnienia, z rozkładem opóźnienia będącym średnią ważoną składowych rozkładów opóźnienia. Współczynnikami wagowymi tej średniej są udziały mnożników długookresowych modeli składowych w wartości mnożnika długookresowego modelu-sumy. Te same współczynniki wagowe uczestniczą w wyznaczeniu wartości średniej rozkładu opóźnienia sumy modeli opóźnienia; jest ona równa średniej ważonej wartości średnich składowych rozkładów opóźnienia. Wariancja rozkładu opóźnienia modelu będącego sumą modeli opóźnienia rozłożonego jest nie mniejsza od średniej ważonej (za pomocą tych samych współczynników wagowych) wariancji rozkładów opóźnienia modeli składowych. W przypadku superpozycji, tj. połączenia szeregowego modeli opóźnienia rozłożonego, która zachowuje własności modelu opóźnienia rozłożonego, struktura opóźnienia superpozycji modeli opóźnienia rozłożonego jest splotem struktur opóźnienia modeli składowych, mnożnik długookresowy całości jest iloczynem mnożników długookresowych modeli wchodzących w skład superpozycji, wartość średnia rozkładu superpozycji modeli jest sumą wartości średnich rozkładów opóźnienia modeli składowych oraz wariancja rozkładu opóźnienia superpozycji modeli opóźnienia jest równa sumie wariancji rozkładów opóźnienia modeli składowych.

W Części III omawiane są podstawowe, spotykane w literaturze modele opóźnienia rozłożonego ze stałym rozkładem opóźnienia, ich interpretacja oraz przykłady ich zastosowań. Modele te znajdują zastosowanie wtedy, gdy nie ma podstaw do przyjęcia założenia, że mechanizm opóźnienia ulega zmianie.

Wśród modeli ze stałym mechanizmem opóźnienia ważną rolę w modelowaniu ekonomicznym odgrywają modele oparte na hipotezach oczekiwań adaptacyjnych i dostosowania częściowego. Wśród modeli należących do tej kategorii szczególne znaczenie mają te, które opisują systemy, w których zachodzą związki pomiędzy natężeniami strumieni a wielkościami zasobów, przez które strumienie te przepływają. W modelach opóźnień opisujących przepływy wyróżnić można dwie grupy modeli. Są to modele typu: strumień - strumień oraz modele typu zasób – strumień. Typ pierwszy opisuje zależność natężenia strumienia wypływającego od natężenia strumienia wpływającego. W przypadku drugiego typu opisywany jest wpływ strumienia wpływającego na poziom zasobu. Modele przepływów znajdują wiele zastosowań, między innymi w opisie: kształtowania się kapitału pod wpływem inwestycji, depozytów i kredytów w systemie bankowym, w modelach demograficznych.

Część III jest poświęcona również analizie modeli opóźnienia, w których zmianie ulega sam mechanizm opóźnienia. Następstwem tego są pewne szczególne własności tych modeli. W rozdziale tym analizowane są modele wpływu zapasów na tempo zmian cen, transmisji cen, zmian kształtowania się poziomu depozytów i kredytów pod wpływem zmian preferencji klientów bankowych.

Ta książka jest adresowana głównie do ekonomistów, ale też do przedstawicieli innych nauk społecznych zainteresowanych modelowaniem. Modelowanie nie może obyć się bez matematyki, więc i w tej pracy jest nieunikniona. Aby nie zniechęcić czytelników, których nie interesują wywody matematyczne, dużą część dowodów i przekształceń zamieszczono w Dodatku.

W przygotowaniu tej książki nieocenioną pomoc uzyskałem od wielu pracowników Instytutu badań Systemowych PAN. Szczególną wdzięczność chciałbym wyrazić panom profesorowi Przemysławowi Grzegorzewskiemu i doktorowi Piotrowi Nowakowi; nieuniknione błędy są wyłącznie moim dziełem.

1.9 Podstawowe stałe struktury/rozkłady opóźnienia rozłożonego

W tym rozdziale omówione zostaną podstawowe, spotykane w literaturze ekonomicznej stałe struktury/rozkłady opóźnienia rozłożonego w podziale na skończone i nieskończone. Wyczerpujący przegląd rozkładów statystycznych¹⁴ można znaleźć na przykład w książce Johnson N. L., Kotz S., Kemp A. W. (1992)¹⁵.

1.9.1 Skończone struktury/rozkłady opóźnienia

1.9.1.1 Liniowa struktura opóźnienia

W liniowej strukturze opóźnienia rzędu n jej współczynniki są liniową funkcją numeru indeksu:

$$v_i = \begin{cases} 0 & , i < 0; \\ v_0 + \frac{v_n - v_0}{n} i, & i = 0, 1, 2, \dots, n; \\ 0 & , i > n; \end{cases} \quad (1.63)$$

gdzie v_0 i v_n stałe współczynniki oznaczające odpowiednio współczynnik pierwszy (o indeksie 0) i n -ty spełniające warunki:

$$v_0 \geq 0, \quad v_n > 0,$$

zapewniające nieujemność współczynników i zachowanie rzędu opóźnienia.

Mnożnik długookresowy liniowej struktury opóźnienia wyraża się wzorem:

$$a = (n+1) \frac{v_0 + v_n}{2}.$$

Monotoniczny rozkład opóźnienia

Najczęściej spotykaną liniową strukturą opóźnienia jest struktura odpowiadająca monotonicznemu rozkładowi opóźnienia, tj. taka, w której współczynniki struktury opóźnienia:

$$v_0 = v_1 = \dots = v_n,$$

a więc współczynniki rozkładu opóźnienia są opisane w następujący sposób:

$$w_i = \frac{1}{n+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Nietrudno zauważyć, że w modelu opóźnienia z monotonicznym rozkładem opóźnienia, zmienna pomocnicza y' jest zwykłą średnią arytmetyczną $n+1$ wartości zmiennej niezależnej $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-n}$.

Wartość średnia i wariancja rozkładu monotonicznego mają odpowiednio następujące wartości:

¹⁴ Ponieważ każdy rozkład prawdopodobieństwa jednej zmiennej losowej może być rozkładem opóźnienia.

¹⁵ Johnson N. L., Kotz S., Kemp A. W.; *Univariate Discrete Distributions*, III wydanie, John Wiley & Sons, INC. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore; 1992.

$$M(W) = \frac{n}{2},$$

$$D^2(W) = \frac{n(n+2)}{12} = M(W) \frac{(n+2)}{6}.$$

W modelu opóźnień z wagami równomiernymi współczynniki $R(j\omega, n)$ i $\psi(j\omega, n)$ przyjmują następujące wartości:

$$R(j\omega, n) = \frac{1}{n+1} \sqrt{\frac{1 - \cos[(n+1) \cdot j\omega]}{1 - \cos(j\omega)}},$$

$$\psi(j\omega, n) = \frac{nj\omega}{2}.$$

Rozkład opóźnienia Fishera

Rozkład ten, Fisher (1937), jest odmianą liniowego rozkładu opóźnienia, w którym współczynniki maleją, przyjmując największą wartość dla indeksu $i=0$, najmniejszą niezerową dla $i=n$, oraz zerowe dla $i=n+1, n+2, \dots$. Celem Fishera było opracowanie prostego modelu, w którym waga przypisana obserwacji malałaby wraz z wiekiem tej obserwacji.

W strukturze opóźnienia Fishera:

$$v_i = \begin{cases} 0 & , i < 0; \\ v_0 \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) & , i = 0, 1, 2, \dots, n; \\ 0 & , i \geq n+1. \end{cases} \quad (1.64)$$

Podstawowe parametry rozkładu Fishera są następujące:

$$M(W) = \frac{n}{3},$$

$$D^2(W) = \frac{n(n+3)}{18} = M(W) \frac{(n+3)}{6}.$$

$$R(j\omega, n) = \frac{1}{(n+1)(n+2) \cos^2\left(\frac{j\omega}{2}\right)} \cdot \sqrt{\{(n+1) \cos(j\omega) + \cos[(n+1) \cdot j\omega] - (n+2)\}^2 + \{\sin[(n+1) \cdot j\omega] - (n+1) \sin(j\omega)\}^2},$$

oraz

$$\psi(j\omega, n) = \arctg \left\{ \frac{(n+1) \sin(j\omega) - \sin[(n+1)j\omega]}{(n+2) - (n+1) \cos(j\omega) - \cos[(n+1)j\omega]} \right\}.$$

1.9.1.2 Model Almon

Struktura opóźnienia w modelu Almon rzędu n , Almon (1965), ma duże znaczenie w badaniach empirycznych ze względu na łatwość estymacji współczynników oraz elastyczność wyrażającą się dużym zróżnicowaniem kształtu wykresu współczynników struktury opóźnienia. Współczynniki struktury opóźnienia w modelu Almon rzędu n przedstawia poniższa formuła:

$$v_i = \begin{cases} 0, & i < 0; \\ \delta_0 + \delta_1 i + \delta_2 i^2 + \dots + \delta_l i^l, & i = 0, 1, 2, \dots, n; \\ 0, & i \geq n+1. \end{cases} \quad (1.65)$$

gdzie liczba naturalna l , $l < n$, oznacza stopień wielomianu. Wartości średnia i wariancja rozkładu opóźnienia opartego na strukturze opóźnienia (1.65) zależą od stałych współczynników $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_l$, których wartości są estymowane dla różnych wartości l .

Istotną własnością tego modelu jest możliwość przedstawiania go w postaci wygodnej w estymacji:

$$y_t = \delta_0 \left(\sum_{i=0}^l x_{t-i} \right) + \delta_1 \left(\sum_{i=1}^l i x_{t-i} \right) + \delta_2 \left(\sum_{i=1}^l i^2 x_{t-i} \right) + \dots + \delta_l \left(\sum_{i=1}^l i^l x_{t-i} \right) + \varepsilon_t.$$

Jak wskazano powyżej, każdy model opóźnienia rozłożonego można przedstawić jako sumę modeli opóźnienia tej samej zmiennej niezależnej o jednopunktowych strukturach opóźnienia. Przykładem złożenia modeli opóźnienia jest model rzędu n (n nieparzysta liczba naturalna, $n > 1$) ze strukturą opóźnienia mającą kształt odwróconej litery V, DeLeeuw (1962), której współczynniki są opisane za pomocą poniższego wzoru:

$$v_i = \begin{cases} 0, & i < 0; \\ i\delta, & i \leq \frac{n+1}{2}; \\ (n+1-i)\delta, & \frac{n+1}{2} \leq i \leq n+1; \\ 0, & i \geq n+1; \end{cases} \quad (1.67)$$

gdzie współczynnik δ jest skończoną liczbą dodatnią.

Podstawowe parametry rozkładu opóźnienia modelu DeLeeuwa są następujące:

$$M(W) = \frac{n+1}{2},$$

$$D^2(W) = \frac{(n-1)(n+3)}{24},$$

$$R(j\omega, n) = 4 \frac{\sin^2 \left[\frac{1}{4}(n+1) \cdot j\omega \right]}{(n+1)^4 \cos^2 \left(\frac{j\omega}{2} \right)}$$

$$\cdot \left\{ (n+1)^2 \cos \left[\frac{1}{2}(n+1) \cdot j\omega \right] + 4 \frac{\sin^2 \left[\frac{1}{4}(n+1) \cdot j\omega \right] \sin^2 \left[\frac{1}{2}(n+1) \cdot j\omega \right]}{\cos^2 \left(\frac{j\omega}{2} \right)} \right\}$$

oraz

$$\psi(j\omega, n) = \frac{1}{2}(n+1)j\omega.$$

Nietrudno zauważyć, na podstawie wzoru (1.67), że dla indeksów $0, 1, \dots, (n+1)/2$, współczynniki struktury opóźnienia mogą być opisane za pomocą liniowej struktury opóźnienia (1.63) z dodatnim współczynnikiem kierunkowym, a dla indeksów $1+(n+1)/2, \dots, (n+1)$, również za pomocą liniowej struktury opóźnienia, ale z ujemnym współczynnikiem kierunkowym.

Model DeLeeuwa pokazuje, że pewne rozkłady opóźnienia można uzyskać przez odpowiednie połączenie innych rozkładów. Wiele modeli opóźnienia ma rozkłady, które są wynikiem złożenia różnych rozkładów opóźnienia operacjami sumowania oraz superpozycji. Operacje te są omawiane w Rozdziale II.

1.9.2 Nieskończone struktury opóźnienia

1.9.2.1 Rozkład Pascala-Solowa

Współczynniki rozkładu Pascala-Solowa, Solow (1960), są opisane wzorem:

$$w_i = \begin{cases} 0, & i < 0; \\ \binom{m-1+i}{i} \lambda^m (1-\lambda)^i, & i \geq 0; \end{cases} \quad (1.68)$$

gdzie m , liczba naturalna, oznacza tzw. stopień rozkładu Pascala (nazywany czasem rzędem, lecz termin ten wydaje się niefortunny ze względu na kolizję z pojęciem rzędu opóźnienia skończonego).

Wartości średnia i wariancja rozkładu Pascala wynoszą odpowiednio:

$$M(W) = m \frac{1-\lambda}{\lambda},$$

$$D^2(W) = m \frac{1-\lambda}{\lambda^2} = \frac{M(W)}{\lambda}.$$

W rozkładzie Pascala-Solowa współczynniki $R(j\omega, m)$ i $\psi(j\omega, m)$ przyjmują następujące wartości:

$$R(j\omega, m) = \lambda^m \sqrt{[1 - 2(1-\lambda) \cos(j\omega) + (1-\lambda)^2]^m},$$

$$\psi(j\omega, m) = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^m \binom{m}{i} (-1)^i (1-\lambda)^i \sin(i \cdot j\omega)}{1 + \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} (-1)^i (1-\lambda)^i \cos(i \cdot j\omega)} \right\}.$$

Szczególnym przypadkiem rozkładu Pascala-Solowa jest rozkład stopnia $m=1$, noszący nazwę rozkładu geometrycznego, znany w literaturze ekonomicznej z modelu Koycka, Koyck (1954), modelu oczekiwań adaptacyjnych, Cagan (1956), czy modelu dostosowania cząstkowego, Nerlove (1958). Model opóźnienia z rozkładem geometrycznym został wykorzystany w Przykładach 1.3 i 1.4.

Dla $m=1$ powyższe wzory upraszczają się:

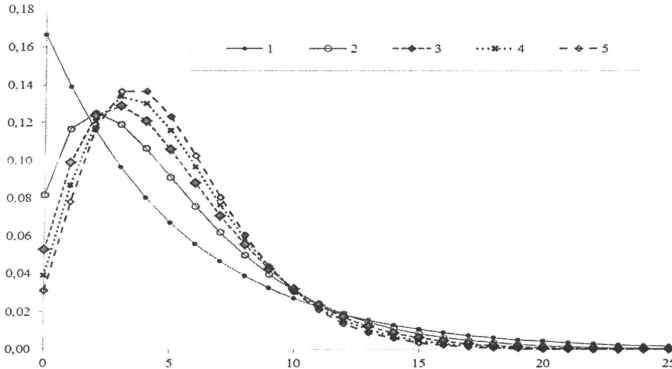
$$M(W) = \frac{1-\lambda}{\lambda},$$

$$D^2(W) = \frac{1-\lambda}{\lambda^2} = \frac{M(W)}{\lambda},$$

$$R(j\omega, 1) = \frac{\lambda}{\sqrt{[1-2(1-\lambda)\cos(j\omega) + (1-\lambda)^2]}},$$

$$\psi(j\omega, 1) = \operatorname{arctg} \left[\frac{(1-\lambda)\sin(j\omega)}{1-(1-\lambda)\cos(j\omega)} \right].$$

Wykresy współczynników rozkładu Pascala-Solowa przy różnych wartościach stopnia m zostały przedstawione na rys. 1.4.



rys. 1.4. Rozkłady Pascala-Solowa o tej samej wartości średniej równej $M(W) = 5$ przy wartościach parametru m równych odpowiednio: 1, 2, 3, 4, 5.

Model dostosowania cząstkowego, Nerlove (1958), opisuje zachowanie podejmujących decyzję o wielkości zmiennej zależnej y_t na podstawie porównania z ustaloną na okres t wielkością pożądaną x_t tej zmiennej zgodnie ze wzorem:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda \cdot (x_t - y_{t-1}) + \varepsilon_t,$$

gdzie λ to współczynnik, $\lambda \in [0, 1]$, nazywany współczynnikiem dostosowania (*adjustment coefficient*). Nietrudno zauważyć, że dla $\lambda = 0$ zmienna y_t przyjmuje wartość z poprzedzającego okresu bez względu na wartość pożądaną tej zmiennej, a dla $\lambda = 1$ nie ma opóźnienia w dostosowaniu zmiennej y_t do jej wartości pożądaney x_t . Dla pozostałych wartości parametru λ z przedziału $[0, 1]$ rozwiązanie powyższego równania ma następującą postać:

$$y_t = \lambda \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \lambda)^i x_{t-i} + \left[\varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} (1 - \lambda)^i \varepsilon_{t-i} \right],$$

a więc modelu opóźnienia rozłożonego z geometrycznym (Pascala-Solowa stopnia $m=1$) rozkładem opóźnienia. Istotną własnością tego modelu jest stała, $\alpha=1$, wartość mnożnika długookresowego.

Model oczekiwań adaptacyjnych, Cagan (1956), opisuje proces prostego przewidywania, w którym oczekiwana w okresie t wartość y_t zmiennej x_t jest ustalana przy uwzględnieniu odchylenia w okresie $t-1$ wartości zmiennej x_{t-1} od jej przewidywanej w okresie $t-2$ wartości y_{t-1} :

$$y_t - y_{t-1} = \lambda \cdot (x_{t-1} - y_{t-1}) + \varepsilon_t.$$

Model oczekiwań adaptacyjnych jest również modelem opóźnienia rozłożonego z geometrycznym rozkładem opóźnienia przesuniętym w prawo o jednostkę. Oznacza to złożenie, co pełniej zostanie omówione w Rozdziale II, dwóch modeli opóźnienia: z rozkładem geometrycznym i jednopunktowym (prostym) opóźnieniem o jeden okres.

1.9.2.2 Model Tsurumi

W artykule Tsurumi (1971) autor zaproponował użycie struktury opóźnienia opartej na zmodyfikowanym ciągłym rozkładzie gamma:

$$v_i = \begin{cases} 0 & , & i < 0; \\ \delta (i+1)^{m-1} e^{-\lambda i} & , & i \geq 0, \end{cases} \quad (1.69)$$

gdzie: m – stopień rozkładu, λ - stała, $0 < \lambda < 1$, δ – dodatnia stała, przy czym:

$$\delta = \left[\sum_{i=0}^{\infty} (i+1)^{m-1} e^{-\lambda i} \right]^{-1}.$$

Parametry zmodyfikowanego jak w (1.52) rozkładu gamma są opisane dla konkretnych wartości współczynników m i λ .

Wykres struktury opóźnienia, której współczynniki są opisane za pomocą zależności (1.69) jest podobny do rozkładu Pascala-Solowa. Rozkład gamma zastosowali m. in. Schmidt (1974), Alston *et al.* (2010), Baranyi (2010).

1.9.2.3 Model z rozkładem Poissona

W niektórych analizach spotykane są modele opóźnienia rozłożonego z rozkładem Poissona, jak np.: Friedrich (1982), Frick (1986), Agarwal V, Paelink J. H. P., Reinert K. A., Stough R. R. (2008).

Wartości średnia i wariancja rozkładu Poissona wynoszą odpowiednio:

$$M(W) = \lambda,$$

$$D^2(W) = \lambda.$$

W rozkładzie Poissona współczynniki $R(j\omega, \lambda)$ i $\psi(j\omega, \lambda)$ przyjmują następujące wartości:

$$R(j\omega, \lambda) = \sqrt{e^{-2\lambda[1-\cos(j\omega)]}},$$

$$\psi(j\omega, \lambda) = \lambda \sin(j\omega).$$

1.9.2.4 Model Jorgensena

Model Jorgensena, Jorgensen (1966), jest wśród nieskończonych modeli opóźnienia tym, czym model Almon wśród modeli skończonych i znajduje zastosowanie w badaniach empirycznych, gdy rozkład opóźnienia nie jest znany. Model ten ma następującą postać:

$$y_t = V(L)x_t + e_t = \frac{A(L)}{B(L)}x_t + e_t, \quad (1.70)$$

gdzie:

L - operator przesunięcia,

$V(L)$ - operatory wielomianowe względem operatora przesunięcia L

$A(L), B(L)$ - operatory wielomianowe skończonego stopnia względem operatora przesunięcia L ,

takie, że:

$$V(L) = \frac{A(L)}{B(L)};$$

e_t - składnik losowy.

Zależność (1.70) jest postacią zredukowaną modelu:

$$B(L)y_t = A(L)x_t + \varepsilon_t,$$

przy czym

$$e_t = \frac{1}{B(L)}\varepsilon_t,$$

gdzie ε_t to nieskorelowany składnik losowy o zerowej wartości oczekiwanej, stałej i ograniczonej wariancji. Powyższy wzór wyjaśnia autoregresję składnika losowego ε_t w przypadku, gdy $B(L) \neq I$.

Model Jorgensena jest szczególnym przypadkiem często stosowanego modelu ekonometrycznego ADL (*Autoregressive Distributed Lag*) z jedną zmienną objaśniającą i bez wyrazu wolnego, Hendry, Pagan, Sargan (1984), o postaci:

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \dots + \beta_{m_1} y_{t-m_1} + \alpha_0 x_t + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \dots + \alpha_{m_2} x_{t-m_2} + \varepsilon_t,$$

lub

$$y_t = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_{m_1} L^{m_1}}{1 - (\beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_{m_2} L^{m_2})} x_t + \frac{1}{1 - (\beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_{m_2} L^{m_2})} \varepsilon_t,$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_1}$ i $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m_2}$ współczynniki, oraz m_1 i m_2 stopnie operatorów wielomianowych odpowiednio $A(L)$ i $B(L)$.

W badaniach ekonometrycznych ważnym przykładem zastosowania modelu Jorgensena jest model korekty błędem (*Error Correction Model*) opisujący mechanizm, w którym o zmianie wartości zmiennej zależnej decyduje nie tylko, jak to ma miejsce w omówionym wyżej modelu dostosowania adaptacyjnego, odchylenie od wartości zmiennej niezależnej, lecz również wartość bieżącego odchylenia wartości zmiennej zależnej od jej poziomu w równowadze długookresowej. Model wyjściowy ma następującą postać:

$$y_t = \gamma + \alpha_1 y_{t-1} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \varepsilon_t,$$

lub, po prostych przekształceniach:

$$\begin{aligned} y_t - y_{t-1} &= \beta_0 (x_t - x_{t-1}) + (\beta_0 + \beta_1) x_{t-1} + \gamma + (\alpha_1 - 1) y_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \beta_0 (x_t - x_{t-1}) + (1 - \alpha_1) \left[\left(\frac{\beta_0 + \beta_1}{1 - \alpha_1} x_{t-1} + \frac{\gamma}{1 - \alpha_1} \right) - y_{t-1} \right] + \varepsilon_t, \end{aligned}$$

przy czym w stanie równowagi długookresowej (w stanie ustalonym), gdy dla wszystkich t , $x_t = x^*$, zachodzi zależność:

$$y^* = \frac{\beta_0 + \beta_1}{1 - \alpha_1} x^* + \frac{\gamma}{1 - \alpha_1}.$$

Przykładem wykorzystania modelu korekty błędem jest badanie wykonane przez Philipa Hansa Frances'a i Bjorna Vroomen'a, Frances Philip H., Vroomen Björn (2006), służące określeniu

opóźnienia między nakładami na reklamę, a sprzedażą. (W pracy tej miarą wielkości opóźnienia jest mediana rozkładu opóźnienia).

Warto zwrócić uwagę na model ADL z n zmiennymi objaśniającymi, $n > 1$, $x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(n)}$, o postaci:

$$y_t = \gamma + \frac{\alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)}L + \dots + \alpha_{n_1}^{(1)}L^{n_1}}{1 - (\beta_1L + \beta_2L^2 + \dots + \beta_{n_0}L^{n_0})} x_t^{(1)} + \frac{\alpha_0^{(2)} + \alpha_1^{(2)}L + \dots + \alpha_{n_2}^{(2)}L^{n_2}}{1 - (\beta_1L + \beta_2L^2 + \dots + \beta_{n_0}L^{n_0})} x_t^{(2)} + \dots + \frac{\alpha_0^{(n)} + \alpha_1^{(n)}L + \dots + \alpha_{n_n}^{(n)}L^{n_n}}{1 - (\beta_1L + \beta_2L^2 + \dots + \beta_{n_0}L^{n_0})} x_t^{(n)} + \frac{1}{1 - (\beta_1L + \beta_2L^2 + \dots + \beta_{n_0}L^{n_0})} \varepsilon_t,$$

gdzie:

$\alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_{n_1}^{(1)}$; $\alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_{n_2}^{(2)}$; ... , $\alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_{n_n}^{(n)}$; współczynniki operatorów wielomianowych $A^{(1)}(L), A^{(2)}(L), \dots, A^{(n)}(L)$, stojących odpowiednio przy zmiennych objaśniających $x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(n)}$, przy czym:

$$A^{(i)}(L) = \alpha_0^{(i)} + \alpha_1^{(i)}L + \dots + \alpha_{n_i}^{(i)}L^{n_i};$$

n_0 - stopień operatora wielomianowego $B(L)$:

$$B(L) = 1 - (\beta_1L + \beta_2L^2 + \dots + \beta_{n_0}L^{n_0});$$

n_1, n_2, \dots, n_n - stopnie operatorów wielomianowych $A^{(1)}(L), A^{(2)}(L), \dots, A^{(n)}(L)$ stojących odpowiednio przy zmiennych objaśniających $x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(n)}$; $n_1, n_2, \dots, n_n < \infty$;

γ - wyraz wolny.

Powyższy wzór można zapisać w innej postaci:

$$y_t = \gamma + V^{(1)}(L)x_t^{(1)} + V^{(2)}(L)x_t^{(2)} + \dots + V^{(n)}(L)x_t^{(n)} + \frac{1}{B(L)} \varepsilon_t,$$

gdzie

$$V^{(i)}(L) = \frac{A^{(i)}(L)}{B(L)}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Nietrudno zauważyć, że przedstawiony powyżej model ADL z n zmiennymi niezależnymi jest w istocie sumą n modeli opóźnienia rozłożonego n różnych zmiennych niezależnych $x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(n)}$, wyrazu wolnego.



