

**Raport Badawczy**  
**Research Report**

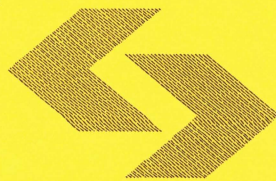
**RB/47/2014**

**Modele opóźnień w systemach  
ekonomicznych.  
Własności i zastosowania.  
Część I. Wprowadzenie**

**J. Gadomski**

**Instytut Badań Systemowych**  
**Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute**  
**Polish Academy of Sciences**



# **POLSKA AKADEMIA NAUK**

## **Instytut Badań Systemowych**

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Zakładu zgłaszający pracę:  
Dr hab. inż. Lech Kruś, prof. PAN

Warszawa 2014

## SPIS TREŚCI

### WSTĘP

#### CZĘŚĆ I Wprowadzenie

- Rozdział 1.1 Podstawowe pojęcia
- Rozdział 1.2 Rozkład opóźnienia
- Rozdział 1.3 Wynikowy rozkład opóźnienia
- Rozdział 1.4 Wybrane własności dynamiczne
- Rozdział 1.5 Mierzenie opóźnienia
- Rozdział 1.6 Średnia rozkładu opóźnienia wynikowego  $M(U)$  jako miara opóźnienia (1)
- Rozdział 1.7 Średnia rozkładu opóźnienia wynikowego  $M(U)$  jako miara opóźnienia (2)
- Rozdział 1.8 Wielomian operatorowy i funkcja tworząca
- Rozdział 1.9 Podstawowe stałe struktury/rozkłady opóźnienia rozłożonego
  - 1.9.1 Skończone struktury/rozkłady opóźnienia
    - 1.9.1.1 Liniowa struktura opóźnienia
    - 1.9.1.2 Model Almon
  - 1.9.2 Niekończone struktury/rozkłady opóźnienia
    - 1.9.2.1 Rozkład Pascala-Solowa
    - 1.9.2.2 Model Tsurumi
    - 1.9.2.3 Model z rozkładem Poissona
    - 1.9.2.4 Model Jorgensena
- Rozdział 1.10 Źródła zmienności struktur opóźnienia
- Podsumowanie Części I

#### CZĘŚĆ II Złożone struktury modeli opóźnienia rozłożonego

- Rozdział 2.1. Suma modeli opóźnienia rozłożonego
- Rozdział 2.2. Superpozycja modeli opóźnienia rozłożonego
- Rozdział 2.3. Suma modeli opóźnienia rozłożonego wielu zmiennych
- Podsumowanie Części II

#### CZĘŚĆ III Modele opóźnienia w systemach przepływów

- Rozdział III.1 Sformułowanie problemu
- Rozdział III.2 Modele opóźnienia w systemach przepływów ze stałym rozkładem opóźnienia
- Rozdział III.3 Modele opóźnień w systemach przepływów ze zmiennymi rozkładami opóźnień
  - III.3.1 Model z dwoma parametrami
    - III.3.1.1 Model populacji
    - III.3.1.2 Model zmiennej sprawności procesów inwestowania w Polsce przed 1989 r.
    - III.3.1.3 Model transmisji ceny
    - III.3.1.4 Model kredytu
- Podsumowanie Części III

Dodatek

Bibliografia

## Modele opóźnień w systemach ekonomicznych. Własności i zastosowania.

### Wstęp

Z doświadczenia wiemy, że pomiędzy przekręceniem pokrętła gorącej wody a ustaleniem się temperatury wody wypływającej z prysznica mija jakiś czas; wiemy też, że czas ten w różnych prysznicach bywa różny, co może być przyczyną niepożądanych doznań. Również wtedy, gdy dowiadujemy się, że cena ropy naftowej szybko rośnie na światowych giełdach, z dużą pewnością możemy oczekiwać, że ceny paliw na krajowym rynku również odpowiednio wzrosną. W obu przypadkach mamy do czynienia ze zjawiskiem nazywanym opóźnieniem.

Ze zjawiskiem opóźnienia mamy do czynienia, gdy reakcja obserwowanego systemu lub jego części na zmianę pewnego czynnika następuje po jakimś czasie. Opóźnienia są nieodłączne od zjawisk dynamicznych, w których przyczyna zmian poprzedza wystąpienie jej następstw. Jednak nie wszystkie zależności przyczynowo-skutkowe są związane z działaniem mechanizmu opóźnienia; często są to zjawiska złożone, w których działają inne mechanizmy, między innymi sprzężenia zwrotne, które powodują, że to samo zjawisko jest zarazem przyczyną i następstwem powiązanych zjawisk.

Modele opóźnienia stanowią ważny element konstrukcyjny modeli dynamicznych, to jest takich, które objaśniają zmiany pewnych zmiennych zależnych (objaśnianych) za pomocą zmian pewnych innych zmiennych, zwanych niezależnymi lub objaśniającymi, które nie zależą od zmiennych zależnych. Często przyjmowane jest założenie, że zmienna zależna reprezentuje kategorię, której zmiany są następstwem zmian wartości zmiennych niezależnych reprezentujących kategorie będące przyczynami tych zmian<sup>1</sup>.

Hendry et al. (1984), strona 1057, przyczyn zjawiska opóźnienia dopatrują się w takich kosztach dostosowania, jak: koszty transakcyjne, badawcze, optymalizacji oraz gdy podmioty powoli reagują na zmiany w otoczeniu w następstwie bezwładności, utrwalonych przyzwyczajzeń, zwłoki w dostrzeganiu/rozpoznaniu zmian. Według tej opinii powolność reakcji wiąże się również z niepewnością oraz niedoskonałością rynków. Do wymienionych czynników można dodać opóźnienie informacji, na których podstawie są analizowane i podejmowane decyzje.

Modele opóźnienia są tworzone dla potrzeb różnych dziedzin nauki i różnych zastosowań. Na gruncie ekonomii zależnościami klasycznymi mającymi postać modelu opóźnienia są między innymi: wpływ nakładów inwestycyjnych na zasób kapitału, transmisja ceny, tj. opóźnienie zmiany ceny krajowej importowanego surowca względem zmiany ceny tego surowca na rynkach międzynarodowych, opóźnienie sprzedaży względem zmiany ceny - lub w skali makroekonomicznej - reakcja popytu konsumpcyjnego na zmianę dochodu dyspozycyjnego, czy wreszcie reakcja gospodarki na zmianę stopy procentowej.

---

<sup>1</sup> W przypadku modeli stochastycznych trudno mówić o zależnościach przyczynowo-skutkowych.



Celem modelu opóźnienia jest opisanie zależności zmiennej zależnej od zmiennych niezależnych. W wielu przypadkach celem tym jest również oszacowanie, o ile okresów zmiany zmiennej zależnej są opóźnione w stosunku do zmiany zmiennej niezależnej i w jakim stopniu zmiany te są rozłożone, bądź skupione w czasie.

W analizie opóźnień wyodrębnić można dwie podstawowe grupy zagadnień. Grupa pierwsza, to analiza mechanizmów, które decydują o właściwościach badanego opóźnienia. Grupa druga, szczególnie ważna w badaniach empirycznych, to zagadnienia związane z estymacją modeli opóźnień.

W historii badań zaangażowanie w rozwiązywanie problemów z obu tych grup było nierównomierne. W pierwszym okresie uwaga badaczy była skupiona głównie na analizie konstrukcji i własności różnych modeli opóźnienia. Były to przede wszystkim prace: Fishera (1937), Koycka (1954), Solowa (1960), Almon (1965), Griliches (1967). Równolegle prowadzone były prace poświęcone drugiej grupie zagadnień.

W drugim okresie, który - jak się wydaje - trwa nadal, dominują prace poświęcone zagadnieniom należącym do grupy drugiej. Do najwybitniejszych prac tego nurtu należy zaliczyć przede wszystkim następujące: Griliches (1967), Maddala (1977), Dhrymes (1981). Wpłynęły na to następujące czynniki: rozwiązano znaczną część podstawowych problemów grupy pierwszej oraz dostrzeżono wagę i złożoność problemów estymacji. Za cezurę można uznać pojawienie się artykułu Almon (1965) i Jorgensena (1966), w których zaproponowano odpowiednio tak zwane modele wielomianowy i ilorazowy. Modele te z jednej strony charakteryzują się dużą elastycznością w tym sensie, że nie wymagają od stosujących modele opóźnienia zaangażowania a zarazem zwalniają od problemów należących do grupy pierwszej.

Wielką syntezę osiągnąć na polu badania modeli opóźnienia stanowi książka Dhrymesa (1981). Mimo, że od jej pierwszego wydania minęło ponad trzydzieści lat, jest ona wciąż fundamentalnym źródłem wiedzy o modelach opóźnień. Stanowi zarazem wzorzec, do którego należy się odnieść decydując się na pisanie o modelach opóźnień. Autorowi tej pracy wydaje się, że ma tu coś nowego do zaproponowania.

Celem tej pracy jest zaprezentowanie analizy modeli opóźnień, której niektóre wątki stanowią nawiązanie do przedstawionego powyżej okresu pierwszego, jak również korzystającej z rozwiązań zaproponowanych w badaniach późniejszych. Są to następujące grupy problemów.

Pierwsza grupa wiąże się z doбором miernika opóźnienia. Podejmowane tu zagadnienie jest następstwem powszechnego przyjmowania w literaturze przedmiotu jako miernika opóźnienia wartości średniej rozkładu opóźnienia, co w wielu wypadkach może być powodem nieporozumień i błędów interpretacji. Ma to znaczenie zwłaszcza wtedy, gdy celem analizy jest określenie opóźnienia zmiennej zależnej względem zmiennej niezależnej, a nie wyłącznie mechanizm opóźnienia.

Druga grupa zagadnień podjętych w tej pracy jest związana z analizą własności podklasy modeli opóźnienia opisujących zjawiska związane z przepływami. Do tej podklasy zaliczyć można takie modele jak: model kształtowania się kapitału pod wpływem inwestycji i deprecjacji kapitału, model kształtowania się stanu depozytów w systemie bankowym pod wpływem strumieni wpłat oraz wypłat, model kształtowania się poziomu zadłużenia z tytułu kredytu udzielonego przez system bankowy pod wpływem strumienia spłat wcześniej zaciągniętych kredytów oraz strumienia nowoudzielonych kredytów. Do tej podklasy można również zaliczyć model demograficzny, w którym liczba ludności jest kształtowana przez strumienie urodzeń oraz zgonów. Wspólną cechą wymienionych tu modeli jest to, że występują w nich kategorie zasobów oraz strumieni zasilających (wpływających) oraz wyczerpujących te zasoby. W zjawiskach opisywanych za pomocą tych modeli często istotnymi wielkościami są średni czas, jaki jednostki strumienia wyczerpującego zasób przebywały w zasobie oraz średni okres przebywania jednostki w tym zasobie. Wielkości te, poza wyjątkami, nie są równe.

Trzecia grupa problemów wiąże się z analizą własności modeli opóźnienia, w których mechanizm opóźnienia ulega zmianie. Problematyka ta nie jest nowa, np. Tinsley (1967), Pesando (1972), Otto (1985), Gadomski (1986), Dahl, Kulaksizoglu (2005); jej umiarkowany rozwój wynika – jak się wydaje – z dwóch przyczyn. Pierwsza, to niedostatek informacji, powodujący konieczność wyboru modeli uproszczonych, ze stałymi współczynnikami, przysparzającymi mniejsze trudności przy estymacji parametrów. Przyczyna druga, wiąże się z podejściem pragmatycznym, polegającym na daleko idącym – w stosunku do wiedzy o badanym zjawisku – upraszczaniu i w związku z tym na pominięciu analizy mechanizmów opóźnienia. Jest to również wynik osłabienia „czujności badawczej” w następstwie pojawienia się modeli wielomianowego Almon (1965) i ilorazowego Jorgensena (1966) – ich elastyczność często prowadzi do uzyskania zadowalającego wyniku: wszystko to, czego nie udaje się - z jakiegoś powodu - wtłoczyć w część deterministyczną modelu, przypisane zostaje czynnikowi losowemu.

W pracy problematyka estymacji modeli opóźnienia rozłożonego jest całkowicie pominięta, osobom zainteresowanym z czystym sumieniem można polecić prace klasyczne: Griliches (1967), Dhrymes (1981), Hendry et al. (1984). W prezentowanych dalej rozważaniach struktura opóźnienia będzie z założenia dana lub aproksymowana w zadowalający sposób.

Praca składa się z następujących części. W Części I sformułowany jest uogólniony model opóźnienia rozłożonego. Uogólnienie polega na uwzględnieniu, że na zmienną zależną mają wpływ nie tylko zmienna niezależna i zmienna losowa, ale również podlegający zmianom mechanizm opóźnienia, który jest dany przez strukturę i/lub rozkład opóźnienia i mnożnik długookresowy. Zaproponowana będzie nowa kategoria nazwana wynikowym rozkładem opóźnienia. W tej samej Części I omawiane są również podstawowe pojęcia charakteryzujące rozkład opóźnienia, (jeśli istnieje): wartość średnia, wariancja i

mediana rozkładu opóźnienia. W dalszej części wprowadzone są pojęcia funkcji tworzącej i operatora wielomianowego jako przydatnych narzędzi analizy modeli opóźnienia.

Część II zawiera omówienie podstawowych własności modeli złożonych modeli opóźnienia. Badana jest suma modeli opóźnienia rozłożonego, która jest również modelem opóźnienia rozłożonego, ze strukturą opóźnienia będącą sumą składowych struktur opóźnienia, z rozkładem opóźnienia będącym średnią ważoną składowych rozkładów opóźnienia. Współczynnikami wagowymi tej średniej są udziały mnożników długookresowych modeli składowych w wartości mnożnika długookresowego modelu-sumy. Te same współczynniki wagowe uczestniczą w wyznaczeniu wartości średniej rozkładu opóźnienia sumy modeli opóźnienia; jest ona równa średniej ważonej wartości średnich składowych rozkładów opóźnienia. Wariancja rozkładu opóźnienia modelu będącego sumą modeli opóźnienia rozłożonego jest nie mniejsza od średniej ważonej (za pomocą tych samych współczynników wagowych) wariancji rozkładów opóźnienia modeli składowych. W przypadku superpozycji, tj. połączenia szeregowego modeli opóźnienia rozłożonego, która zachowuje własności modelu opóźnienia rozłożonego, struktura opóźnienia superpozycji modeli opóźnienia rozłożonego jest splotem struktur opóźnienia modeli składowych, mnożnik długookresowy całości jest iloczynem mnożników długookresowych modeli wchodzących w skład superpozycji, wartość średnia rozkładu superpozycji modeli jest sumą wartości średnich rozkładów opóźnienia modeli składowych oraz wariancja rozkładu opóźnienia superpozycji modeli opóźnienia jest równa sumie wariancji rozkładów opóźnienia modeli składowych.

W Części III omawiane są podstawowe, spotykane w literaturze modele opóźnienia rozłożonego ze stałym rozkładem opóźnienia, ich interpretacja oraz przykłady ich zastosowań. Modele te znajdują zastosowanie wtedy, gdy nie ma podstaw do przyjęcia założenia, że mechanizm opóźnienia ulega zmianie.

Wśród modeli ze stałym mechanizmem opóźnienia ważną rolę w modelowaniu ekonomicznym odgrywają modele oparte na hipotezach oczekiwań adaptacyjnych i dostosowania częściowego. Wśród modeli należących do tej kategorii szczególne znaczenie mają te, które opisują systemy, w których zachodzą związki pomiędzy natężeniami strumieni a wielkościami zasobów, przez które strumienie te przepływają. W modelach opóźnień opisujących przepływy wyróżnić można dwie grupy modeli. Są to modele typu: strumień - strumień oraz modele typu zasób – strumień. Typ pierwszy opisuje zależność natężenia strumienia wypływającego od natężenia strumienia wpływającego. W przypadku drugiego typu opisywany jest wpływ strumienia wpływającego na poziom zasobu. Modele przepływów znajdują wiele zastosowań, między innymi w opisie: kształtowania się kapitału pod wpływem inwestycji, depozytów i kredytów w systemie bankowym, w modelach demograficznych.

Część III jest poświęcona również analizie modeli opóźnienia, w których zmianie ulega sam mechanizm opóźnienia. Następstwem tego są pewne szczególne własności tych modeli. W rozdziale tym analizowane są modele wpływu zapasów na tempo zmian cen, transmisji cen, zmian kształtowania się poziomu depozytów i kredytów pod wpływem zmian preferencji klientów bankowych.

Ta książka jest adresowana głównie do ekonomistów, ale też do przedstawicieli innych nauk społecznych zainteresowanych modelowaniem. Modelowanie nie może obyć się bez matematyki, więc i w tej pracy jest nieunikniona. Aby nie zniechęcić czytelników, których nie interesują wywody matematyczne, dużą część dowodów i przekształceń zamieszczono w Dodatku.

W przygotowaniu tej książki nieocenioną pomoc uzyskałem od wielu pracowników Instytutu badań Systemowych PAN. Szczególną wdzięczność chciałbym wyrazić panom profesorowi Przemysławowi Grzegorzewskiemu i doktorowi Piotrowi Nowakowi; nieuniknione błędy są wyłącznie moim dziełem.



1.6 Średnia wynikowego rozkładu opóźnienia  $M(U_i)$  jako miara opóźnienia (1)

Analiza własności średniej rozkładu opóźnienia wynikowego rozpoczęta zostanie od zbadania ogólnej zależności rozkładu opóźnienia wynikowego od stopy wzrostu zmiennej niezależnej.

Zgodnie z zależnością (1.8), dla rozkładu opóźnienia  $W_i$  oraz stałej stopy wzrostu  $r$ , współczynniki udziału, tzn. współczynniki rozkładu opóźnienia wynikowego  $u_{ti}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ ; są określone za pomocą następującego wzoru:

$$u_{ti} = \frac{v_{ti} x_{t-i}}{\sum_{j=0}^{\infty} v_{tj} x_{t-j}} = \frac{v_{ti} x_t (1+r)^{-i}}{\sum_{j=0}^{\infty} v_{tj} x_t (1+r)^{-j}} = \frac{v_{ti} (1+r)^{-i}}{\sum_{j=0}^{\infty} v_{tj} (1+r)^{-j}} = \frac{w_{ti} (1+r)^{-i}}{\sum_{j=0}^{\infty} w_{tj} (1+r)^{-j}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.40)$$

z którego wynika, zgodnie z Lematem 1, że przy stopie wzrostu równej zero współczynniki udziału  $u_{ti}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ ; są równe współczynnikom rozkładu opóźnienia  $W_i$ .

Poniżej przedstawione zostały twierdzenia, których dowody zamieszczono w Dodatku 1.

**Twierdzenie 1.** O odchyleniu średniego łącznego opóźnienia  $M(U_i)$  od wartości średniej rozkładu opóźnienia  $M(W_i)$  przy stałej nieujemnej stopie wzrostu  $r$  zmiennej niezależnej.

**Założenia** Istnieją rozkład opóźnienia  $W_i$  i jego podstawowe parametry  $M(W_i)$  i  $D^2(W_i)$ .

**Teza** Przy nieujemnej stopie wzrostu zmiennej niezależnej  $r$ ,  $r \geq 0$ , średnia opóźnienia wynikowego  $M(U_i)$  jest nie większa od średniej rozkładu opóźnienia  $M(W_i)$ :

$$M(U_i) \leq M(W_i).$$

Z Twierdzenia 1 wynika, że odchylenie wartości średniej wynikowego rozkładu opóźnienia  $M(U_i)$  od wartości średniej rozkładu opóźnienia  $M(W_i)$  jest funkcją wartości stopy wzrostu  $r$  zmiennej niezależnej. Tę samą tezę w nieco inny sposób można dowieść za pomocą twierdzenia o pochodnej  $M(U_i)$ .

**Twierdzenie 2.** O zależności wartości średniej wynikowego rozkładu opóźnienia  $M(U_i)$  od stałej nieujemnej stopy wzrostu  $r$  zmiennej niezależnej.

**Założenia** Istnieją rozkład opóźnienia  $W_i$  i jego podstawowe parametry  $M(W_i)$  i  $D^2(W_i)$ .

**Teza** Wartość średnia rozkładu opóźnienia wynikowego  $M(U_i)$  jest malejącą funkcją stopy wzrostu  $r$  zmiennej niezależnej.

#### Komentarz

Twierdzenie 1 i Twierdzenie 2 zostały dowiedzione dla dowolnych rozkładów opóźnień oraz dodatnich wartości stałej stopy wzrostu oraz skończonych wartości zmiennej niezależnej.

W przypadku ujemnych stóp wzrostu zmiennej niezależnej zależność odwrotna nie zawsze jest spełniona. Dla skończonych rozkładów opóźnienia  $W_t$  istnienie wynikowego rozkładu opóźnienia  $U_t$  jest zapewnione dla skończonej wartości największego znaczącego indeksu  $i_g$ . Dzięki temu przy ujemnej stopie wzrostu zmiennej niezależnej zachodzi relacja:

$$M(U_t) \geq M(W_t).$$

W przypadku rozkładów nieskończonych relacja ta może nie zachodzić. Jak pokazuje Przykład 1.4 i ilustrujący go rys.1, skończone wartości zmiennej niezależnej nie zawsze są warunkiem wystarczającym istnienia rozkładu wynikowego opóźnienia oraz jego podstawowych parametrów. Dla określonych wartości ujemnych<sup>11</sup> stóp wzrostu ( $-\lambda \leq r < 0$ ) zmienna niezależna przyjmuje (w granicy) wartości nieograniczone, a mimo to istnieje rozkład wynikowy opóźnienia. Gdy stopa wzrostu przyjmuje ujemne wartości z przedziału  $-\lambda > r$ , rozkład wynikowy rozkładu opóźnienia nie istnieje.

Opisana w Twierdzeniach 1 i 2 własność nie występuje w przypadku opóźnienia prostego, w którym wariancja wynikowego rozkładu opóźnienia, podobnie jak wariancja rozkładu opóźnienia, ma wartość zero (rozkład jednopunktowy).

Z powyższych rozważań można wyprowadzić następujący wniosek: wtedy, gdy celem badania jest ustalenie opóźnienia zmiennej zależnej względem zmiennej niezależnej, za miernik opóźnienia powinna być przyjmowana wartość średnia rozkładu opóźnienia wynikowego; wykorzystanie do tego celu wartości średniej rozkładu opóźnienia pociąga za sobą powstanie błędu, którego wielkość zależy od dynamiki zmiennej niezależnej.

Twierdzenie 3. Twierdzenie o zależności rozkładu wynikowego opóźnienia od stopy wzrostu zmiennej niezależnej

Założenia Rozważany jest model opóźnienia rozłożonego, w którym są określone podstawowe parametry rozkładu opóźnienia i w którym wartości zmiennej niezależnej wzrastają ze stałą stopą wzrostu  $r$ .

Teza Gdy stopa wzrostu  $r$  zmiennej niezależnej  $x$  rośnie do nieskończoności, rozkład opóźnienia wynikowego dąży do rozkładu jednopunktowego (opóźnienia prostego) o wartości średniej rozkładu opóźnienia wynikowego równej najmniejszej wartości indeksu znaczącego  $i_d$ , a wariancja rozkładu opóźnienia wynikowego dąży do zera.

#### Komentarz

---

<sup>11</sup> Oznacza to spadek wartości zmiennej niezależnej od wartości nieskończonej w „zamierzczłej przeszłości” do skończonej wartości  $x_t$  w okresie  $t$  ze stałą stopą spadku  $r$ .

Dowodzona w Twierdzeniu 3 zbieżność rozkładu wynikowego opóźnienia do rozkładu jednopunktowego jest powolna. Wraz ze wzrostem wartości stopy wzrostu  $r$ , wartość średnia rozkładu opóźnienia wynikowego maleje monotonicznie do wartości  $i_d$ .

Spadkowi wartości średniej rozkładu opóźnienia wynikowego nie musi towarzyszyć monotoniczny spadek wartości wariancji rozkładu opóźnienia wynikowego. Jak wynika z Przykładu 1.4 przedstawionego w punkcie 1.5, można znaleźć takie rozkłady opóźnienia, dla których zwiększenie stopy wzrostu w pewnym przedziale wartości powoduje wzrost wariancji rozkładu wynikowego. Wpływa z tego wniosek, że przedział wartości stopy wzrostu, dla której zjawisko to daje się zaobserwować, jest ograniczony; dla każdego rozkładu opóźnienia tego rodzaju można znaleźć taką wielkość stopy wzrostu, od której dalszy jej wzrost powoduje spadek wariancji rozkładu opóźnienia wynikowego.





