Raport Badawczy

Research Report

RB/47/2014

Modele opóźnień w systemach ekonomicznych. Własności i zastosowania. Część I. Wprowadzenie

J. Gadomski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Zakładu zgłaszający pracę:
Dr hab. inż. Lech Kruś, prof. PAN

Warszawa 2014

SPIS TREŚCI

Modele opóźnień w systemach ekonomicznych. Własności i zastosowania.

Wstęp

Z doświadczenia wiemy, że pomiędzy przekręceniem pokrętła gorącej wody a ustaleniem się temperatury wody wypływającej z prysznica mija jakiś czas; wiemy też, że czas ten w różnych prysznicach bywa różny, co może być przyczyną niepożądanych doznań. Również wtedy, gdy dowiadujemy się, że cena ropy naftowej szybko rośnie na światowych giełdach, z dużą pewnością możemy oczekiwać, że ceny paliw na krajowym rynku również odpowiednio wzrosną. W obu przypadkach mamy do czynienia ze zjawiskiem nazywanym opóźnieniem.

Ze zjawiskiem opóźnienia mamy do czynienia, gdy reakcja obserwowanego systemu lub jego części na zmianę pewnego czynnika następuje po jakimś czasie. Opóźnienia są nieodłączne od zjawisk dynamicznych, w których przyczyna zmian poprzedza wystąpienie jej następstw. Jednak nie wszystkie zależności przyczynowo-skutkowe są związane z działaniem mechanizmu opóźnienia; często są to zjawiska złożone, w których działają inne mechanizmy, między innymi sprzężenia zwrotne, które powodują, że to samo zjawisko jest zarazem przyczyną i następstwem powiązanych zjawisk.

Modele opóźnienia stanowią ważny element konstrukcyjny modeli dynamicznych, to jest takich, które objaśniają zmiany pewnych zmiennych zależnych (objaśnianych) za pomocą zmian pewnych innych zmiennych, zwanymi niezależnymi lub objaśniającymi, które nie zależą od zmiennych zależnych. Często przyjmowane jest założenie, że zmienna zależna reprezentuje kategorię, której zmiany są następstwem zmian wartości zmiennych niezależnych reprezentujących kategorie będące przyczynami tych zmian[1].

Hendry et al. (1984), strona 1057, przyczyn zjawiska opóźnienia dopatrują się w takich kosztach dostosowania, jak: koszty transakcyjne, badawcze, optymalizacji oraz gdy podmioty powoli reagują na zmiany w otoczeniu w następstwie bezwładności, utrwalonych przyzwyczajeń, zwłoki w dostrzeganiu/rozpoznaniu zmian. Według tej opinii powolność reakcji wiąże się również z niepewnością oraz niedoskonałością rynków. Do wymienionych czynników można dodać opóźnienie informacji, na których podstawie są analizowane i podejmowane decyzje.

Modele opóźnienia są tworzone dla potrzeb różnych dziedzin nauki i różnych zastosowań. Na gruncie ekonomii zależnościami klasycznymi mającymi postać modelu opóźnienia są między innymi: wpływ nakładów inwestycyjnych na zasób kapitału, transmisja ceny, tj. opóźnienie zmiany ceny krajowej importowanego surowca względem zmiany ceny tego surowca na rynkach międzynarodowych, opóźnienie sprzedaży względem zmiany ceny - lub w skali makroekonomicznej - reakcja popytu konsumpcyjnego na zmianę dochodu dyspozycyjnego, czy wreszcie reakcja gospodarki na zmianę stopy procentowej.

[1] W przypadku modeli stochastycznych trudno mówić o zależnościach przyczynowo-skutkowych.

Celem modelu opóźnienia jest opisanie zależności zmiennej zależnej od zmiennych niezależnych. W wielu przypadkach celem tym jest również oszacowanie, o ile okresów zmiany zmiennej zależnej są opóźnione w stosunku do zmiany zmiennej niezależnej i w jakim stopniu zmiany te są rozłożone, bądź skupione w czasie.

W analizie opóźnień wyodrębnić można dwie podstawowe grupy zagadnień. Grupa pierwsza, to analiza mechanizmów, które decydują o właściwościach badanego opóźnienia. Grupa druga, szczególnie ważna w badaniach empirycznych, to zagadnienia związane z estymacją modeli opóźnień.

W historii badań zaangażowanie w rozwiązywanie problemów z obu tych grup było nierównomierne. W pierwszym okresie uwaga badaczy była skupiona głównie na analizie konstrukcji i własności różnych modeli opóźnienia. Były to przede wszystkim prace: Fishera (1937), Koycka (1954), Solowa (1960), Almon (1965), Griliches (1967). Równolegle prowadzone były prace poświęcone drugiej grupie zagadnień.

W drugim okresie, który - jak się wydaje - trwa nadal, dominują prace poświęcone zagadnieniom należącym do grupy drugiej. Do najwybitniejszych prac tego nurtu należy zaliczyć przede wszystkim następujące: Griliches (1967), Maddala (1977), Dhrymes (1981). Wpłynęły na to następujące czynniki: rozwiązano znaczną część podstawowych problemów grupy pierwszej oraz dostrzeżono wagę i złożoność problemów estymacji. Za cezurę można uznać pojawienie się artykułu Almon (1965) i Jorgensena (1966), w których zaproponowano odpowiednio tak zwane modele wielomianowy i ilorazowy. Modele te z jednej strony charakteryzują się dużą elastycznością w tym sensie, że nie wymagają od stosujących modele opóźnienia zaangażowania a zarazem zwalniają od problemów należących do grupy pierwszej.

Wielką syntezę osiągnięć na polu badania modeli opóźnienia stanowi książka Dhrymesa (1981). Mimo, że od jej pierwszego wydania minęło ponad trzydzieści lat, jest ona wciąż fundamentalnym źródłem wiedzy o modelach opóźnień. Stanowi zarazem wzorzec, do którego należy się odnieść decydując się na pisanie o modelach opóźnień. Autorowi tej pracy wydaje się, że ma tu coś nowego do zaproponowania.

Celem tej pracy jest zaprezentowanie analizy modeli opóźnień, której niektóre wątki stanowią nawiązanie do przedstawionego powyżej okresu pierwszego, jak również korzystającej z rozwiązań zaproponowanych w badaniach późniejszych. Są to następujące grupy problemów.

Pierwsza grupa wiąże się z doborem miernika opóźnienia. Podejmowane tu zagadnienie jest następstwem powszechnego przyjmowania w literaturze przedmiotu jako miernika opóźnienia wartości średniej rozkładu opóźnienia, co w wielu wypadkach może być powodem nieporozumień i błędów interpretacji. Ma to znaczenie zwłaszcza wtedy, gdy celem analizy jest określenie opóźnienia zmiennej zależnej względem zmiennej niezależnej, a nie wyłącznie mechanizm opóźnienia.

Druga grupa zagadnień podjętych w tej pracy jest związana z analizą własności podklasy modeli opóźnienia opisujących zjawiska związane z przepływami. Do tej podklasy zaliczyć można takie modele jak: model kształtowania się kapitału pod wpływem inwestycji i deprecjacji kapitału, model kształtowania się stanu depozytów w systemie bankowym pod wpływem strumieni wpłat oraz wypłat, model kształtowania się poziomu zadłużenia z tytułu kredytu udzielonego przez system bankowy pod wpływem strumienia spłat wcześniej zaciągniętych kredytów oraz strumienia nowoudzielonych kredytów. Do tej podklasy można również zaliczyć model demograficzny, w którym liczba ludności jest kształtowana przez strumienie urodzeń oraz zgonów. Wspólną cechą wymienionych tu modeli jest to, że występują w nich kategorie zasobów oraz strumieni zasilających (wpływających) oraz wyczerpujących te zasoby. W zjawiskach opisywanych za pomocą tych modeli często istotnymi wielkościami są średni czas, jaki jednostki strumienia wyczerpującego zasób przebywały w zasobie oraz średni okres przebywania jednostki w tym zasobie. Wielkości te, poza wyjątkami, nie są równe.

Trzecia grupa problemów wiąże się z analizą własności modeli opóźnienia, w których mechanizm opóźnienia ulega zmianie. Problematyka ta nie jest nowa, np. Tinsley (1967), Pesando (1972), Otto (1985), Gadomski (1986), Dahl, Kulaksizoglu (2005); jej umiarkowany rozwój wynika – jak się wydaje – z dwóch przyczyn. Pierwsza, to niedostatek informacji, powodujący konieczność wyboru modeli uproszczonych, ze stałymi współczynnikami, przysparzającymi mniejsze trudności przy estymacji parametrów. Przyczyna druga, wiąże się z podejściem pragmatycznym, polegającym na daleko idącym – w stosunku do wiedzy o badanym zjawisku – upraszczaniu i w związku z tym na pominięciu analizy mechanizmów opóźnienia. Jest to również wynik osłabienia „czujności badawczej” w następstwie pojawienia się modeli wielomianowego Almon (1965) i ilorazowego Jorgensena (1966) – ich elastyczność często prowadzi do uzyskania zadowalającego wyniku: wszystko to, czego nie udaje się - z jakiegoś powodu - wtłoczyć w część deterministyczną modelu, przypisane zostaje czynnikowi losowemu.

W pracy problematyka estymacji modeli opóźnienia rozłożonego jest całkowicie pominięta, osobom zainteresowanym z czystym sumieniem można polecić prace klasyczne: Griliches (1967), Dhrymes (1981), Hendry et al. (1984). W prezentowanych dalej rozważaniach struktura opóźnienia będzie z założenia dana lub aproksymowana w zadowalający sposób.

Praca składa się z następujących części. W Części I sformułowany jest uogólniony model opóźnienia rozłożonego. Uogólnienie polega na uwzględnieniu, że na zmienną zależną mają wpływ nie tylko zmienna niezależna i zmienna losowa, ale również podlegający zmianom mechanizm opóźnienia, który jest dany przez strukturę i/lub rozkład opóźnienia i mnożnik długookresowy. Zaproponowana będzie nowa kategoria nazwana wynikowym rozkładem opóźnienia. W tej samej Części I omawiane są również podstawowe pojęcia charakteryzujące rozkład opóźnienia, (jeśli istnieje): wartość średnia, wariancja i mediana rozkładu opóźnienia. W dalszej części wprowadzone są pojęcia funkcji tworzącej i operatora wielomianowego jako przydatnych narzędzi analizy modeli opóźnienia.

Część II zawiera omówienie podstawowych własności modeli złożonych modeli opóźnienia. Badana jest suma modeli opóźnienia rozłożonego, która jest również modelem opóźnienia rozłożonego, ze strukturą opóźnienia będącą sumą składowych struktur opóźnienia, z rozkładem opóźnienia będącym średnią ważoną składowych rozkładów opóźnienia. Współczynnikami wagowymi tej średniej są udziały mnożników długookresowych modeli składowych w wartości mnożnika długookresowego modelu-sumy. Te same współczynniki wagowe uczestniczą w wyznaczeniu wartości średniej rozkładu opóźnienia sumy modeli opóźnienia; jest ona równa średniej ważonej wartości średnich składowych rozkładów opóźnienia. Wariancja rozkładu opóźnienia modelu będącego sumą modeli opóźnienia rozłożonego jest nie mniejsza od średniej ważonej (za pomocą tych samych współczynników wagowych) wariancji rozkładów opóźnienia modeli składowych. W przypadku superpozycji, tj. połączenia szeregowego modeli opóźnienia rozłożonego, która zachowuje własności modelu opóźnienia rozłożonego, struktura opóźnienia superpozycji modeli opóźnienia rozłożonego jest splotem struktur opóźnienia modeli składowych, mnożnik długookresowy całości jest iloczynem mnożników długookresowych modeli wchodzących w skład superpozycji, wartość średnia rozkładu superpozycji modeli jest sumą wartości średnich rozkładów opóźnienia modeli składowych oraz wariancja rozkładu opóźnienia superpozycji modeli opóźnienia jest równa sumie wariancji rozkładów opóźnienia modeli składowych.

W Części III omawiane są podstawowe, spotykane w literaturze modele opóźnienia rozłożonego ze stałym rozkładem opóźnienia, ich interpretacja oraz przykłady ich zastosowań. Modele te znajdują zastosowanie wtedy, gdy nie ma podstaw do przyjęcia założenia, że mechanizm opóźnienia ulega zmianie.

Wśród modeli ze stałym mechanizmem opóźnienia ważną rolę w modelowaniu ekonomicznym odgrywają modele oparte na hipotezach oczekiwań adaptacyjnych i dostosowania częściowego. Wśród modeli należących do tej kategorii szczególne znaczenie mają te, które opisują systemy, w których zachodzą związki pomiędzy natężeniami strumieni a wielkościami zasobów, przez które strumienie te przepływają. W modelach opóźnień opisujących przepływy wyróżnić można dwie grupy modeli. Są to modele typu: strumień - strumień oraz modele typu zasób – strumień. Typ pierwszy opisuje zależność natężenia strumienia wypływającego od natężenia strumienia wpływającego. W przypadku drugiego typu opisywany jest wpływ strumienia wpływającego na poziom zasobu. Modele przepływów znajdują wiele zastosowań, między innymi w opisie: kształtowania się kapitału pod wpływem inwestycji, depozytów i kredytów w systemie bankowym, w modelach demograficznych.

Część III jest poświęcona również analizie modeli opóźnienia, w których zmianie ulega sam mechanizm opóźnienia. Następstwem tego są pewne szczególne własności tych modeli. W rozdziale tym analizowane są modele wpływu zapasów na tempo zmian cen, transmisji cen, zmian kształtowania się poziomu depozytów i kredytów pod wpływem zmian preferencji klientów bankowych.

Ta książka jest adresowana głównie do ekonomistów, ale też do przedstawicieli innych nauk społecznych zainteresowanych modelowaniem. Modelowanie nie może obyć się bez matematyki, więc i w tej pracy jest nieunikniona. Aby nie zniechęcić czytelników, których nie interesują wywody matematyczne, dużą część dowodów i przekształceń zamieszczono w Dodatku.

W przygotowaniu tej książki nieocenioną pomoc uzyskałem od wielu pracowników Instytutu badań Systemowych PAN. Szczególną wdzięczność chciałbym wyrazić panom profesorowi Przemysławowi Grzegorzewskiemu i doktorowi Piotrowi Nowakowi; nieuniknione błędy są wyłącznie moim dziełem.

1.5 Mierzenie opóźnienia

Znajomość współczynników modelu opóźnienia stanowi punkt wyjścia do sformułowania odpowiedzi na pytanie o wielkość opóźnienia zmiennej zależnej względem zmiennej niezależnej. Podstawowym elementem potrzebnym do udzielenia odpowiedzi jest wybór miary opóźnienia.

Określenie wielkości opóźnienia jest łatwe w szczególnym przypadku modelu opóźnienia prostego, w którym opóźnienie zmiennej zależnej względem zmiennej niezależnej jest równe wartości indeksu jedynego niezerowego współczynnika opóźnienia, zarazem wartości średniej oraz medianie rozkładu opóźnienia. Opóźnienie w takim wypadku jest doskonale skupione (zerowa wariancja rozkładu opóźnienia jest oczywistym następstwem faktu, że rozkład opóźnienia modelu opóźnienia prostego jest jednopunktowy). Ponadto, w modelu opóźnienia prostego rozkład opóźnienia wynikowego jest identyczny z rozkładem opóźnienia, zatem wszystkie odpowiednie parametry obu rozkładów są sobie równe.

W przypadku skończonego modelu opóźnienia rozłożonego problem staje się bardziej złożony; wiadomo, że opóźnienie jest nie mniejsze od wartości i_d oraz nie przekracza wartości i_g, jednak zmiany wartości zmiennej zależnej w reakcji na zmianę wartości zmiennej niezależnej są rozłożone w czasie. W przypadku modelu nieskończonego problem jest bardziej złożony, ponieważ wielkość opóźnienia może przyjmować wartości z przedziału $[i_d, \infty]$.

W literaturze przedmiotu, niemającą konkurencji miarą opóźnienia jest wartość średnia rozkładu opóźnienia. Jest ona często nazywana wprost, na przykład Kenkel (1974), Intriligator (1978), średnim lub przeciętnym opóźnieniem (mean lag, average lag). Kolejną teoretycznie uzasadnioną miarą jest mediana rozkładu opóźnienia[8], Hendry, Pagan, Sargan (1984), która jest szczególnym przypadkiem jeszcze innej miary opóźnienia - liczby okresów, jaka jest niezbędna dla realizacji ustalonej części całkowitego efektu (mediana liczba okresów potrzebna do uzyskania 50% całkowitego efektu). Ta ostatnia miara jest stosowana najczęściej, jak się wydaje, w badaniach wpływu nakładów na reklamę na sprzedaż, Clark (1976), Frances, Vroomen (2003), Frances, Vroomen (2006).

Analizując własności średniej $M(W_t)$ i mediany $\eta(W_t)$ rozkładu opóźnienia jako miar opóźnienia należy mieć na uwadze również ich niedostatki jako miary uniwersalnej lub miary wielkości opóźnienia zmian zmiennej zależnej względem zmian zmiennej niezależnej. Mierniki te opisują mechanizm opóźnienia, lecz nie muszą być (i często nie są) zadowalającą miarą opóźnienia zmian zmiennej zależnej względem zmiany zmiennej niezależnej.

O rozkładzie opóźnienia W_t można mówić jedynie wtedy, gdy suma (1.2) jest zbieżna. Postulat, by mnożnik długookresowy, suma (1.2), miał skończoną wartość, nie jest formalnie niezbędny czy konieczny

---

[8] Ponieważ jest to miernik:

a. obliczeniowo niewygodny,
b. jego wartość informacyjna bardzo zależy od symetrii rozkładu,
c. przyjmuje tylko wartości całkowite.

z punktu widzenia interpretacji ekonomicznej. Jego spełnienie daje korzyści wynikające z formalnego uproszczenia umożliwiającego zastosowanie znanych metod analizy matematycznej.

Może się zdarzyć, jak to ukazał Przykład 1.2, że danej strukturze opóźnienia nie odpowiada rozkład opóźnienia, zatem nie można określić również średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$. Mimo, że zmienna zależna przyjmuje skończone wartości i jest kształtowana przez przeszłe wartości zmiennej niezależnej.

Na wartości zmiennej zależnej wpływ ma nie tylko mechanizm opóźnienia, ale również wartości zmiennej niezależnej; zmienna ta może przecież zmieniać się w różnorodny sposób: rosnąć, maleć, podlegać wahaniom okresowym. Dlatego celowe wydaje się stosowanie jako miary opóźnienia zdefiniowanej wyżej średniej rozkładu opóźnienia wynikowego $M(U_t)$, wzór (1.19), która uwzględnia łączny wpływ, jaki na kształtowanie się zmiennej zależnej mają dwa mechanizmy: opóźnienia oraz kształtowania wartości zmiennej niezależnej.

Rozważając problem określania wielkości opóźnienia warto zwrócić uwagę na to, że pytanie dotyczy jednego z dwóch niejednakowych przypadków:

1. określenia przeciętnej ilości[9] okresów, o jaką dany mechanizm opóźnienia opóźnia zmienną zależną względem zmiennej niezależnej bez względu na kształtowanie się jej wartości
2. określenia przeciętnego czasu trwania zmian wartości zmiennej zależnej w reakcji na zmianę wartości zmiennej niezależnej przy danym mechanizmie opóźnienia i kształtowaniu się zmiennej niezależnej.

W ogólnym przypadku próba odpowiedzi na pytanie o wielkość opóźnienia powinna być poprzedzona ustaleniem, który z powyższych przypadków jest przedmiotem analizy.

W pierwszym przypadku pytanie dotyczy właściwości mechanizmu opóźnienia. Odpowiedź na to pytanie powinna opierać się na mierniku opóźnienia niezwiązanym z wartościami zmiennej niezależnej; takimi miernikami są średnia rozkładu opóźnienia oraz mediana rozkładu opóźnienia.

W drugim przypadku pytanie dotyczy właściwości łącznego działania mechanizmów opóźnienia i kształtowania się wartości zmiennej niezależnej. Odpowiedź na pytanie o czas trwania zmian wartości zmiennej zależnej w reakcji na zmianę wartości zmiennej niezależnej wymaga posłużenia się miernikiem opierającym się na rozkładzie wynikowym opóźnienia, a więc wartością średnią rozkładu wynikowego opóźnienia lub medianą rozkładu wynikowego opóźnienia.

Najprostszym testem przydatności średniej rozkładu wynikowego $M(U_t)$ jako miary opóźnienia jest sprawdzenie, ile ono wynosi w modelu opóźnienia prostego (1.6). W opóźnieniu prostym jedyny niezerowy (i równy dokładnie jeden) udział $u_{t\,l}$ przypada na indeks równy liczbie okresów, o jaką jest w okresie t opóźniona zmienna zależna względem zmiennej niezależnej. Zatem w przypadku opóźnienia prostego średnia rozkładu opóźnienia wynikowego jest równa średniej rozkładu opóźnienia. W modelu

---

[9] Ponieważ wielkości te nie muszą być całkowite.

opóźnienia prostego wariancja rozkładu wynikowego jest równa zero (podobnie jak wariancja rozkładu opóźnienia), opóźnienie jest doskonale skupione (przypadek rozkładu jednopunktowego).

Dla uchwycenia innych różnic pomiędzy średnią rozkładu opóźnienia i średnią rozkładu wynikowego opóźnienia zwróćmy uwagę na to, że $M(U_t)$ ujmuje wpływ zarówno mechanizmu opóźnienia jak i zmian wartości zmiennej niezależnej. Gdy zmienną niezależną charakteryzuje brak dynamiki, wartości średniego opóźnienia wynikowego i średniej rozkładu opóźnienia są sobie równe. Potwierdza to przedstawiony poniżej Lemat1.

Lemat 1. W stanie ustalonym wartości średniego opóźnienia wynikowego $M(U_t)$ i średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ są równe: $M(W_t) = M(U_t)$.

Dowód sprowadza się do obliczenia średniego wynikowego opóźnienia w stanie ustalonym na podstawie definicji, wzór (1.10):

$$M(U_t) = \sum_{i=0}^{\infty} i u_{t\,i} = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{v_{t\,i} x^*}{\sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i} x^*} = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{v_{ti}}{\sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i}} = \sum_{i=0}^{\infty} i\, w_{t\,i} = M(W_t).$$

C.b.d.o.

Dla klarowności interpretacji różnice pomiędzy średnią rozkładu wynikowego opóźnienia $M(U_t)$ a średnią rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ zostaną poniżej przeanalizowane na modelach opóźnień ze stałymi współczynnikami.

Rozpoczniemy od już omawianego w Przykładzie 1.2 modelu, w którym suma (1.2) jest nieskończona, a mimo to model nie traci sensu ekonomicznego. Przykład ten ukazuje skrajny sposób, w jaki na wartość zmiennej zależnej mogą wpływać dwa niezależne czynniki: mechanizm opóźnienia oraz mechanizm kształtujący wartości zmiennej niezależnej. Analizując następny przykład nie zapominamy jednak, że problem rozbieżności sumy (1.2) może wystąpić, przy przyjętych ogólnych założeniach, wyłącznie w przypadku modeli nieskończonych.

Przykład 1.3

Niech wszystkie współczynniki będą stałe i równe jeden, $v_{t\,i} = 1$; $i = 0, 1, 2, \ldots$; zmienna x w okresie t ma skończoną wartość x_t, którą osiągnęła w wyniku wzrostu ze stałą stopą r, $r>0$, natomiast wartości zmiennej niezależnej w poprzedzających okresach tworzą ciąg geometryczny o kolejnych wyrazach:

$$x_{t-1} = x_t(1+r)^{-1}, x_{t-2} = x_t(1+r)^{-2}, \ldots$$

Mimo, że w omawianym przypadku suma wszystkich współczynników jest nieograniczona:

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i = \sum_{i=0}^{\infty} 1 = \infty,$$

to zmienna zależna y przyjmuje skończone wartości:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} 1 \cdot x_{t-i} = \sum_{i=0}^{\infty} 1 \cdot x_t (1+r)^{-i} = x_t \sum_{i=0}^{\infty} (1+r)^{-i} = x_t (1+r)/r .$$

Ilustracją tego przypadku jest model wykorzystany między innymi w: Klein (1950), Tinbergen (1959), Solow (2000), w którym zasób kapitału K_t pod koniec okresu t jest wynikiem powiększenia kapitału K_{t-1} z końca poprzedniego okresu o inwestycje netto I_t poniesione w okresie t:

$$K_t = K_{t-1} + I_t. \tag{1.31}$$

Ponieważ zasada kształtowania K jest taka sama we wszystkich okresach:

$$K_{t-i} = K_{t-i-1} + I_{t-i},\ i = 0,\ 1,\ 2, \ldots ;$$

przez kolejne podstawianie uzyskujemy zależność:

$$K_t = \sum_{i=0}^{\infty} I_t \, , \tag{1.32}$$

z której wynika, że kapitał jest wynikiem skumulowania inwestycji netto poczynionych w całej historii.

Równanie (1.32) jest modelem opóźnienia, w którym wszystkie współczynniki struktury opóźnienia są równe, $v_i = 1$, $i = 0, 1, 2, ..$; i dlatego odpowiadająca im suma (1.2) jest rozbieżna. Jednak kapitał określony w równaniu (1.32) ma skończoną wartość implikującą zbieżność szeregu $\sum_{i=0}^{\infty} I_t$.

W kategoriach ekonomicznych zbieżność tę można uzasadnić na dwa sposoby. Pierwszy wiąże się z faktem, iż rozwój gospodarczy nie ma nieskończonej historii, a niezerowe inwestycje są ponoszone dopiero od pewnego - gorzej lub lepiej - sprecyzowanego okresu początkowego. W takim wariancie mamy do czynienia z modelem skończonym, który jest zawsze zbieżny przy ograniczonych wartościach współczynników i zmiennej niezależnej.

Sposób drugi, niewymagający założenia o skończoności horyzontu historycznego, opiera się na założeniu, że w całym okresie, w którym czas przyjmował wartości od $-\infty$ do t, inwestycje wzrastały z przeciętną stopą wzrostu r, $r > 0$. W tym wariancie zbieżność szeregu, którego wyrazami są elementy ciągu geometrycznego, jest zapewniona przez zbieżność tego ciągu przy dodatniej wartości przeciętnej stopy wzrostu r. Założenie to pozwala na odtworzenie uśrednionych wartości minionych nakładów inwestycyjnych:

$$I_{t-1} = I_t (1+r)^{-1},\ I_{t-2} = I_t (1+r)^{-2}, \ldots,\ I_{t-i} = I_t (1+r)^{-i}, \ldots;\ i = 0,\ 1,\ 2, \ldots :$$

oraz, po podstawieniu odpowiednich wyrazów do sumy (1.27), na przedstawienie kapitału K_t za pomocą następującego równania

$$K_t = I_t \sum_{i=0}^{\infty} (1+r)^{-i} = I_t (1+r)/r.$$

Obliczając na podstawie wzoru (1.8) udziały $u_{t\,i}$:

$$u_{t\,i} = \frac{I_t\,(1+r)^{-i}}{I_t\frac{1+r}{r}} = \frac{r\,(1+r)^{-i}}{1+r} = r\,(1+r)^{-(i+1)},\ i = 0,\ 1,\ 2,\ldots;,$$

można obliczyć, zgodnie ze wzorem (1.10), średnie wynikowe opóźnienie:

$$M(U_t) = \sum_{i=0}^{\infty} i\,u_{i\,t} = \sum_{i=0}^{\infty} i\,\frac{r}{1+r}(1+r)^{-i} = \frac{r}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty} i\,(1+r)^{-i} = \frac{1}{r}.$$

W omawianym przykładzie wartość średnia wynikowego rozkładu opóźnienia jest funkcją przeciętnej stopy wzrostu inwestycji: im niższa wartość tej stopy, tym wyższa wartość tej średniej.

Przyjmując, że przeciętna w całej historii stopa wzrostu inwestycji r wyniosła 5% rocznie, uzyskujemy wartość wynikowego opóźnienia równą 20 lat. Wielkość tę można interpretować (będzie o tym mowa dalej podczas omawiania modeli przepływów) jako przeciętny wiek jednostek wchodzących w skład skumulowanego kapitału. Korzystając z własności ciągu geometrycznego nietrudno obliczyć, że pod koniec okresu t 64% jednostek zainstalowanego kapitału ma mniej niż 21 lat, natomiast pozostałe 36% składa się z jednostek w wieku zawierającym się w przedziale pomiędzy 21 latami i nieskończonością.

W przedstawionym wyżej Przykładzie 1.3 zbieżność sumy w wyrażeniu (1.1) nie wynikała ze zbieżności sumy (1.2) lecz ze skończonej wielkości historycznie poniesionych nakładów inwestycyjnych. W przykładzie tym nie istnieje rozkład opóźnienia, zatem nie jest również określona średnia rozkładu opóźnienia $M(W_t)$, można natomiast określić średnią rozkładu opóźnienia wynikowego $M(U_t)$. O tym, jaki jest przeciętny wiek jednostki kapitału decyduje w Przykładzie 1.3 nie mechanizm opóźnienia, lecz wyłącznie mechanizm kształtowania się zmiennej niezależnej.

Przejdziemy teraz do analizy modelu opóźnienia, w którym istnieją obie wielkości średnie: średnia rozkładu opóźnienia wynikowego i średnia rozkładu opóźnienia.

Przykład 1.4

Niech wartości współczynników opóźnienia tworzą malejący ciąg geometryczny:

$$v_i = (\,1 - \lambda\,)^i,\ 0 \le \lambda < 1,\ i = 0,\ 1,\ 2,\ldots;$$

którego suma (1.2) (mnożnik długookresowy) ma skończoną wartość i wynosi:

$$a_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i = 1\,/\,\lambda;$$

znormalizowane współczynniki w_i, $i = 0, 1, 2,..$; mają postać:

$$w_i = \lambda\,(\,1 - \lambda\,)^i,\ i = 0,\ 1,\ 2,\ldots;$$

a średnia rozkładu opóźnienia $M(W)$ wynosi:

$$M(W) = (\,1 - \lambda\,)\,/\,\lambda. \tag{1.33}$$

Analityczne wyznaczenie wartości średniej rozkładu opóźnienia wynikowego wymaga dodatkowych założeń o kształtowaniu się zmiennej niezależnej. Niech, podobnie jak w Przykładzie 1.3, zmienna niezależna wzrasta z określonym stałym tempem wzrostu r:

$$x_t = x_t,\ x_{t-1} = x_t(1+r)^{-1},\ x_{t-2} = x_t(1+r)^{-2},\ldots$$

tym razem jednak nie precyzując z góry przedziału zmienności stopy r.

Uwzględnienie ostatniego założenia pozwala na wyznaczenie wartości zmiennej zależnej jako sumy postępu geometrycznego:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i \cdot x_{t-i} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(1-\lambda)^i \cdot x_t(1+r)^{-i} = \lambda\, x_t \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1-\lambda}{1+r}\right)^i = \lambda\, x_t \frac{1+r}{\lambda+r} \tag{1.34}$$

oraz udziałów $u_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,..;$ (na podstawie wzoru (1.8)):

$$u_{t\,i} = \frac{v_i\, x_{t-i}}{E(y_t)} = \frac{\lambda\, x_t \left(\frac{1-\lambda}{1+r}\right)^i}{\lambda\, x_t \frac{1+r}{\lambda+r}} = \frac{\lambda+r}{1+r}\left(\frac{1-\lambda}{1+r}\right)^i, \tag{1.35}$$

na których podstawie po nieskomplikowanych przekształceniach uzyskujemy wartość średnią wynikowego opóźnienia $M(U_t)$:

$$M(U_t) = \frac{1-\lambda}{\lambda+r}. \tag{1.36}$$

Mianownik parametru $M(U_t)$, wzór (1.36), różni się od mianownika parametru $M(W)$, wzór (1.33), o wartość współczynnika r. Warunkiem, aby zmienna zależna y_t miała skończoną i dodatnią wartość jest zbieżność sumy,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1-\lambda}{1+r}\right)^i,$$

która zachodzi, gdy r spełnia warunek: $-r < \lambda < 2+r$.

Z przedstawionego wyżej wywodu wynika, że dla zapewnienia zbieżności powyższej sumy stopa wzrostu wartości zmiennej niezależnej nie musi być dodatnia, jednak musi być większa od wartości współczynnika λ ze znakiem ujemnym ($r > \lambda$).

Ze wzorów (1.33) i (1.36) wynika ponadto, że w omawianym przykładzie udziały u_i, $i = 0, 1, 2,..;$ a co za tym idzie, również średnia wynikowego rozkładu opóźnienia $M(U_t)$, nie zależą od czasu. Jest to rezultat tego, że zmianie nie ulega stopa wzrostu wartości zmiennej niezależnej. Jednak w ogólnym przypadku parametry rozkładu wynikowego opóźnienia są zmienne.

Różnica pomiędzy wartościami $M(W)$, wzór (1.33), i $M(U_t)$, wzór (1.36), jest skutkiem tego, że pierwsza wielkość nie zależy od kształtowania się zmiennej niezależnej i określa opóźnienie wynikające z działania mechanizmu opóźnienia, natomiast druga wielkość uwzględnia łączny efekt działania mechanizmu opóźnienia, jak i kształtowania się zmiennej niezależnej. Ponieważ w rozpatrywanym przykładzie wartości zmiennej niezależnej wzrastają, znacznie większą wagę w kształtowaniu wartości zmiennej zależnej mają wyższe, najpóźniejsze wartości zmiennej zależnej, których wkład - w tym przykładzie - jest ważony za pomocą współczynników opóźnienia o wyższych wartościach. Zmniejsza to w efekcie udział wcześniejszych wartości zmiennej niezależnej w kształtowaniu wartości zmiennej zależnej.

Porównanie uzyskanych wartości $M(W)$ i $M(U_t)$ prowadzi do wniosku, że przy $r = 0$, $M(W)=M(U_t)$. Wynik ten w omawianym przykładzie nie jest efektem szczególnego doboru współczynników opóźnienia, lecz ma charakter ogólniejszy - jest zgodny z Lematem 1, z którego wynika, że w stanie ustalonym średnia wynikowego rozkładu opóźnienia i średnia rozkładu opóźnienia są sobie równe.

W sensie formalnym analizowany tu model można uznać za ogólniejszy od modelu z Przykładu 1.3, który można interpretować jako jego szczególny przypadek przy wartości parametru $\lambda = 0$.

Ekonomiczną ilustracją może być model kształtowania się kapitału pod wpływem ponoszonych nakładów inwestycyjnych oraz uwzględnionego *explicitè* procesu deprecjacji kapitału. Przy założeniu stałej wartości współczynnika deprecjacji d i mechanizmu deprecjacji kapitału, w którym wielkość deprecjacji jest proporcjonalna do wielkości kapitału, równanie kapitału przyjmuje następującą postać:

$$K_t = K_{t-1} - d\,K_{t-1} + I'_t = (1 - d)\,K_{t-1} + I'_t. \qquad (1.37)$$

Współczynnik deprecjacji d określa w okresie t wielkość $d\,K_{t-1}$, tzn. tę część kapitału K_{t-1}, która w tym okresie ubywa z zasobu tego kapitału. Zmienna I'_t oznacza wielkość inwestycji brutto, której związek z inwestycjami netto I_t z Przykładu 1.1 opisuje zależność:

$$I_t = I'_t - d\,K_{t-1}.$$

Załóżmy, że zależność (1.37) obowiązuje we wszystkich okresach poprzedzających okres t:

$$K_{t-i} = (1 - d)\,K_{t-i-1} + I'_t, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1.38)$$

Zastępując w równaniu (1.38) odpowiednio zmienną K_{t-1} przez K_{t-2}, K_{t-2} przez K_{t-3}, itd., określane dla kolejnych i otrzymujemy następującą postać zależności (1.37):

$$K_t = I_t + (1 - d)^1 I'_{t-1} + (1 - d)^2 I'_{t-2} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} (1-d)^i I'_{t-i}. \qquad (1.39)$$

Równanie (1.39) można interpretować jako model opóźnienia, w którym inwestycje są zmienną niezależną, współczynniki opóźnienia v_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$; są wyrażone za pomocą wzoru:

$$v_i = (1-d)^i,\ i = 0, 1, 2, \ldots$$

mnożnik długookresowy jest równy $1/d$, a znormalizowane współczynniki są opisane za pomocą następującego wzoru:

$$w_i = d(1-d)^i,\ i = 0, 1, 2, \ldots$$

Analizując przypadek dodatnich wartości stopy wzrostu inwestycji r nietrudno zauważyć, że średnia rozkładu opóźnienia $M(W)$ jest większa od wartości średniej wynikowego rozkładu opóźnienia $M(U_t)$. Przyjmując, podobnie jak w Przykładzie 1.3, że stopa wzrostu $r = 5\%$ oraz współczynnik $d = 0{,}075$, uzyskujemy:

$$M(W) = 12\tfrac{1}{3} \text{ oraz } M(U_t)_{r=5\%} = 7{,}4.$$

Różnica pomiędzy $M(W)$ oraz $M(U_t)$ jest znacząca: zwiększenie stopy wzrostu od zera (w stanie ustalonym) do pięciu punktów procentowych obniża średnie opóźnienie o *40%*.

Parametry $M(W)$ i $M(U_t)$ mają skończone wartości tak długo, jak długo spełniony jest warunek $-d \leq r$. Jeśliby założyć, że inwestycje historyczne nie rosły, lecz spadały w tempie *2,5%* rocznie, wówczas

$$M(W) = 12\tfrac{1}{3} \text{ oraz } M(U_t)_{r=-2,5\%} = 18\tfrac{1}{2}.$$

W powyższym przykładzie różnica pomiędzy $M(W)$ i $M(U_t)$ jest dodatnia przy inwestycjach rosnących oraz malejąca przy inwestycjach spadających. Wykres zależności pomiędzy wartością średnią wynikowego rozkładu opóźnienia $M(U_t)$ a stopą wzrostu r w analizowanym przykładzie przedstawiono na rys. 1.1. Omawiana własność nie wynika z doboru konkretnego modelu opóźnienia, lecz ma charakter ogólniejszy. Mówi o tym przedstawione dalej Twierdzenie 1, którego dowód jest zamieszczony w Dodatku 1.

Równie ważną rzeczą jest wpływ stopy wzrostu na wariancję wynikowego rozkładu opóźnienia. Korzystając ze wzorów (1.20) i (1.24) po nieskomplikowanych przekształceniach można uzyskać dla rozważanego przykładu następujący wzór:

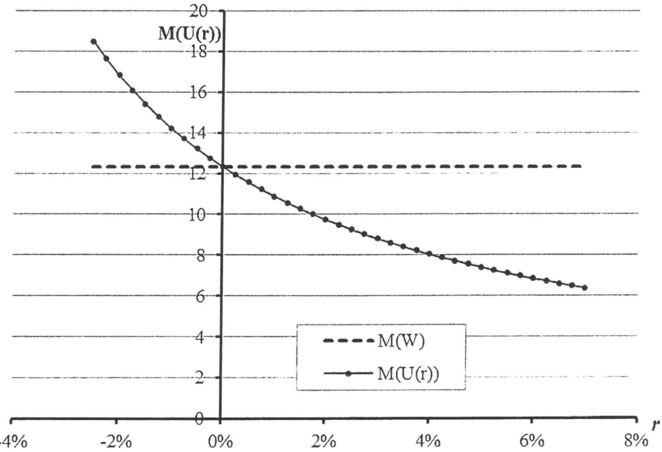
$$D^2(U) = \frac{(1+r)(1-d)}{(d+r)^2},$$

objaśniający zależność wariancji wynikowego rozkładu opóźnienia od stopy wzrostu zmiennej niezależnej.

Z powyższego wzoru wynika, że przy zerowej stopie wzrostu wariancja rozkładu opóźnienia i wariancja rozkładu wynikowego opóźnienia są równe, a ponadto wraz ze wzrostem stopy r, wariancja rozkładu wynikowego opóźnienia maleje.

Przyjmując, że współczynnik $d = 0{,}075$ a stopa wzrostu $r = 5\%$ uzyskujemy:

$$D^2(W)_{r=5\%} = 164{,}4;\ D(W)_{r=5\%} = 12{,}8 \text{ oraz } D^2(U)_{r=5\%} = 62{,}2,\ D(U)_{r=5\%} = 7{,}9.$$



rys. 1.1 Przykład 1.4. Zależność średniego łącznego opóźnienia $M(U(r))$ od stopy wzrostu r przy założonej wartości średniej rozkładu opóźnienia $M(W)$ równej $12\frac{1}{3}$.

Przy tej samej wartości współczynnika d lecz z ujemną stopą wzrostu $r= -2,5\%$ wariancja wynikowego rozkładu opóźnienia wynosi:

$$D^2(U)_{r=-2,5\%} = 360,8; \; D(U)_{r=-2,5\%} = 19,0.$$

Z przedstawionych powyżej obliczeń dla Przykładu 1.4 wynika, że wariancja rozkładu wynikowego opóźnienia reaguje na wielkość stopy wzrostu zmiennej niezależnej podobnie jak wartość średnia rozkładu wynikowego opóźnienia: maleje wraz ze wzrostem stopy wzrostu zmiennej niezależnej oraz rośnie ze spadkiem tej zmiennej.

Uwaga. Ten wynik nie ma charakteru ogólnego, bowiem w przypadku niektórych rozkładów opóźnienia zwiększenie stopy wzrostu zmiennej niezależnej powoduje wzrost wariancji wynikowego rozkładu opóźnienia. Ilustruje to następujący przykład.

Przykład 1.5

Rozważmy dwa skończone rozkłady opóźnienia $W^{(1)}$ i $W^{(2)}$. Niech pierwszy rozkład opóźnienia $W^{(1)}$ ma tylko dwa niezerowe stałe współczynniki rozkładu: $w_0^{(1)} = 1/3$ i $w_1^{(1)} = 2/3$. Wartość średnia rozkładu opóźnienia wynosi $M(W^{(1)}) = 2/3$ a wariancja $D^2(W^{(1)}) = 2/9$.

Zakładając, że zmienna niezależna x rośnie ze stopą wzrostu równą $r=5\%$, średnia oraz wariancja wynikowego rozkładu opóźnienia wynoszą odpowiednio: $M(U_t^{(1)})=0{,}6446$ i $D^2(U_t^{(1)})=0{,}2291$. Zatem wariancja wynikowego rozkładu opóźnienia obliczona dla wartości stopy wzrostu równej $r=5\%$ jest większa od wariancji rozkładu wynikowego opóźnienia obliczonej dla wartości stopy wzrostu równej $r=0\%$.

Drugi z rozważanych w ramach tego przykładu skończony rozkład opóźnienia $W^{(2)}$ ma również tylko dwa niezerowe stałe współczynniki rozkładu: $w_0=2/3$ i $w_1= 1/3$. Wartość średnia rozkładu opóźnienia wynosi $M(W^{(2)})= 1/3$; zaś wariancja rozkładu opóźnienia wynosi podobnie jak w pierwszym rozkładzie $D^2(W^{(2)})= 0{,}222\ldots$.

Przyjmując to samo założenie, że zmienna niezależna x rośnie ze stopą wzrostu równą $r=5\%$, średnia oraz wariancja wynikowego rozkładu opóźnienia wynoszą dla tego rozkładu odpowiednio: $M(U_t^{(2)})=0{,}312$ i $D^2(U_t^{(2)})=0{,}215$ $M(U_t)= 0{,}312$ i $D^2(U_t)= 0{,}215$. Zatem wariancja rozkładu wynikowego opóźnienia obliczona dla wartości stopy wzrostu równej $r=5\%$ jest mniejsza od wariancji rozkładu wynikowego opóźnienia obliczonej dla wartości stopy wzrostu równej $r=0\%$.

W obu rozważanych w tym przykładzie przypadkach, wzrost zmiennej niezależnej powoduje obniżenie wartości średniej rozkładu opóźnienia wynikowego w stosunku do wartości średniej rozkładu opóźnienia.

Analiza kształtowania się wariancji wynikowego rozkładu opóźnienia w obu przypadkach wskazuje na jej odmienny przebieg. W przypadku pierwszego z rozważanych rozkładów następuje spadek, natomiast w drugim wzrost wariancji wynikowego rozkładu opóźnienia. Wynika z tego następujący wniosek: w ogólnym przypadku wzrost stopy wzrostu może powodować zarówno wzrost jak i spadek wartości wariancji rozkładu wynikowego opóźnienia.

Wyjaśnienie zjawiska różnego zachowania się wariancji rozkładu opóźnienia wynikowego w podanych wyżej przykładach można ograniczyć do opisu słownego: w przypadku pierwszego rozkładu wzrost zmiennej niezależnej powoduje zwiększenie stromizny rozkładu opóźnienia wynikowego, co pociąga za sobą spadek wartości wariancji rozkładu opóźnienia wynikowego, natomiast w przypadku drugiego rozkładu wzrost zmiennej niezależnej powoduje spłaszczenie rozkładu opóźnienia wynikowego, co pociąga za sobą wzrost wartości wariancji rozkładu opóźnienia wynikowego[10].

[10] Określony na danym odcinku rozkład liniowy ma wariancję mniejszą od rozkładu równomiernego określonego na tym samym odcinku.