Raport Badawczy

Research Report

RB/47/2014

Modele opóźnień w systemach ekonomicznych. Własności i zastosowania. Część I. Wprowadzenie

J. Gadomski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Zakładu zgłaszający pracę:
Dr hab. inż. Lech Kruś, prof. PAN

Warszawa 2014

SPIS TREŚCI

Modele opóźnień w systemach ekonomicznych. Własności i zastosowania.

Wstęp

Z doświadczenia wiemy, że pomiędzy przekręceniem pokrętła gorącej wody a ustaleniem się temperatury wody wypływającej z prysznica mija jakiś czas; wiemy też, że czas ten w różnych prysznicach bywa różny, co może być przyczyną niepożądanych doznań. Również wtedy, gdy dowiadujemy się, że cena ropy naftowej szybko rośnie na światowych giełdach, z dużą pewnością możemy oczekiwać, że ceny paliw na krajowym rynku również odpowiednio wzrosną. W obu przypadkach mamy do czynienia ze zjawiskiem nazywanym opóźnieniem.

Ze zjawiskiem opóźnienia mamy do czynienia, gdy reakcja obserwowanego systemu lub jego części na zmianę pewnego czynnika następuje po jakimś czasie. Opóźnienia są nieodłączne od zjawisk dynamicznych, w których przyczyna zmian poprzedza wystąpienie jej następstw. Jednak nie wszystkie zależności przyczynowo-skutkowe są związane z działaniem mechanizmu opóźnienia; często są to zjawiska złożone, w których działają inne mechanizmy, między innymi sprzężenia zwrotne, które powodują, że to samo zjawisko jest zarazem przyczyną i następstwem powiązanych zjawisk.

Modele opóźnienia stanowią ważny element konstrukcyjny modeli dynamicznych, to jest takich, które objaśniają zmiany pewnych zmiennych zależnych (objaśnianych) za pomocą zmian pewnych innych zmiennych, zwanymi niezależnymi lub objaśniającymi, które nie zależą od zmiennych zależnych. Często przyjmowane jest założenie, że zmienna zależna reprezentuje kategorię, której zmiany są następstwem zmian wartości zmiennych niezależnych reprezentujących kategorie będące przyczynami tych zmian[1].

Hendry et al. (1984), strona 1057, przyczyn zjawiska opóźnienia dopatrują się w takich kosztach dostosowania, jak: koszty transakcyjne, badawcze, optymalizacji oraz gdy podmioty powoli reagują na zmiany w otoczeniu w następstwie bezwładności, utrwalonych przyzwyczajeń, zwłoki w dostrzeganiu/rozpoznaniu zmian. Według tej opinii powolność reakcji wiąże się również z niepewnością oraz niedoskonałością rynków. Do wymienionych czynników można dodać opóźnienie informacji, na których podstawie są analizowane i podejmowane decyzje.

Modele opóźnienia są tworzone dla potrzeb różnych dziedzin nauki i różnych zastosowań. Na gruncie ekonomii zależnościami klasycznymi mającymi postać modelu opóźnienia są między innymi: wpływ nakładów inwestycyjnych na zasób kapitału, transmisja ceny, tj. opóźnienie zmiany ceny krajowej importowanego surowca względem zmiany ceny tego surowca na rynkach międzynarodowych, opóźnienie sprzedaży względem zmiany ceny - lub w skali makroekonomicznej - reakcja popytu konsumpcyjnego na zmianę dochodu dyspozycyjnego, czy wreszcie reakcja gospodarki na zmianę stopy procentowej.

---

[1] W przypadku modeli stochastycznych trudno mówić o zależnościach przyczynowo-skutkowych.

Celem modelu opóźnienia jest opisanie zależności zmiennej zależnej od zmiennych niezależnych. W wielu przypadkach celem tym jest również oszacowanie, o ile okresów zmiany zmiennej zależnej są opóźnione w stosunku do zmiany zmiennej niezależnej i w jakim stopniu zmiany te są rozłożone, bądź skupione w czasie.

W analizie opóźnień wyodrębnić można dwie podstawowe grupy zagadnień. Grupa pierwsza, to analiza mechanizmów, które decydują o właściwościach badanego opóźnienia. Grupa druga, szczególnie ważna w badaniach empirycznych, to zagadnienia związane z estymacją modeli opóźnień.

W historii badań zaangażowanie w rozwiązywanie problemów z obu tych grup było nierównomierne. W pierwszym okresie uwaga badaczy była skupiona głównie na analizie konstrukcji i własności różnych modeli opóźnienia. Były to przede wszystkim prace: Fishera (1937), Koycka (1954), Solowa (1960), Almon (1965), Griliches (1967). Równolegle prowadzone były prace poświęcone drugiej grupie zagadnień.

W drugim okresie, który - jak się wydaje - trwa nadal, dominują prace poświęcone zagadnieniom należącym do grupy drugiej. Do najwybitniejszych prac tego nurtu należy zaliczyć przede wszystkim następujące: Griliches (1967), Maddala (1977), Dhrymes (1981). Wpłynęły na to następujące czynniki: rozwiązano znaczną część podstawowych problemów grupy pierwszej oraz dostrzeżono wagę i złożoność problemów estymacji. Za cezurę można uznać pojawienie się artykułu Almon (1965) i Jorgensena (1966), w których zaproponowano odpowiednio tak zwane modele wielomianowy i ilorazowy. Modele te z jednej strony charakteryzują się dużą elastycznością w tym sensie, że nie wymagają od stosujących modele opóźnienia zaangażowania a zarazem zwalniają od problemów należących do grupy pierwszej.

Wielką syntezę osiągnięć na polu badania modeli opóźnienia stanowi książka Dhrymesa (1981). Mimo, że od jej pierwszego wydania minęło ponad trzydzieści lat, jest ona wciąż fundamentalnym źródłem wiedzy o modelach opóźnień. Stanowi zarazem wzorzec, do którego należy się odnieść decydując się na pisanie o modelach opóźnień. Autorowi tej pracy wydaje się, że ma tu coś nowego do zaproponowania.

Celem tej pracy jest zaprezentowanie analizy modeli opóźnień, której niektóre wątki stanowią nawiązanie do przedstawionego powyżej okresu pierwszego, jak również korzystającej z rozwiązań zaproponowanych w badaniach późniejszych. Są to następujące grupy problemów.

Pierwsza grupa wiąże się z doborem miernika opóźnienia. Podejmowane tu zagadnienie jest następstwem powszechnego przyjmowania w literaturze przedmiotu jako miernika opóźnienia wartości średniej rozkładu opóźnienia, co w wielu wypadkach może być powodem nieporozumień i błędów interpretacji. Ma to znaczenie zwłaszcza wtedy, gdy celem analizy jest określenie opóźnienia zmiennej zależnej względem zmiennej niezależnej, a nie wyłącznie mechanizm opóźnienia.

Druga grupa zagadnień podjętych w tej pracy jest związana z analizą własności podklasy modeli opóźnienia opisujących zjawiska związane z przepływami. Do tej podklasy zaliczyć można takie modele jak: model kształtowania się kapitału pod wpływem inwestycji i deprecjacji kapitału, model kształtowania się stanu depozytów w systemie bankowym pod wpływem strumieni wpłat oraz wypłat, model kształtowania się poziomu zadłużenia z tytułu kredytu udzielonego przez system bankowy pod wpływem strumienia spłat wcześniej zaciągniętych kredytów oraz strumienia nowoudzielonych kredytów. Do tej podklasy można również zaliczyć model demograficzny, w którym liczba ludności jest kształtowana przez strumienie urodzeń oraz zgonów. Wspólną cechą wymienionych tu modeli jest to, że występują w nich kategorie zasobów oraz strumieni zasilających (wpływających) oraz wyczerpujących te zasoby. W zjawiskach opisywanych za pomocą tych modeli często istotnymi wielkościami są średni czas, jaki jednostki strumienia wyczerpującego zasób przebywały w zasobie oraz średni okres przebywania jednostki w tym zasobie. Wielkości te, poza wyjątkami, nie są równe.

Trzecia grupa problemów wiąże się z analizą własności modeli opóźnienia, w których mechanizm opóźnienia ulega zmianie. Problematyka ta nie jest nowa, np. Tinsley (1967), Pesando (1972), Otto (1985), Gadomski (1986), Dahl, Kulaksizoglu (2005); jej umiarkowany rozwój wynika – jak się wydaje – z dwóch przyczyn. Pierwsza, to niedostatek informacji, powodujący konieczność wyboru modeli uproszczonych, ze stałymi współczynnikami, przysparzającymi mniejsze trudności przy estymacji parametrów. Przyczyna druga, wiąże się z podejściem pragmatycznym, polegającym na daleko idącym – w stosunku do wiedzy o badanym zjawisku – upraszczaniu i w związku z tym na pominięciu analizy mechanizmów opóźnienia. Jest to również wynik osłabienia „czujności badawczej" w następstwie pojawienia się modeli wielomianowego Almon (1965) i ilorazowego Jorgensena (1966) – ich elastyczność często prowadzi do uzyskania zadowalającego wyniku: wszystko to, czego nie udaje się - z jakiegoś powodu - wtłoczyć w część deterministyczną modelu, przypisane zostaje czynnikowi losowemu.

W pracy problematyka estymacji modeli opóźnienia rozłożonego jest całkowicie pominięta, osobom zainteresowanym z czystym sumieniem można polecić prace klasyczne: Griliches (1967), Dhrymes (1981), Hendry et al. (1984). W prezentowanych dalej rozważaniach struktura opóźnienia będzie z założenia dana lub aproksymowana w zadowalający sposób.

Praca składa się z następujących części. W Części I sformułowany jest uogólniony model opóźnienia rozłożonego. Uogólnienie polega na uwzględnieniu, że na zmienną zależną mają wpływ nie tylko zmienna niezależna i zmienna losowa, ale również podlegający zmianom mechanizm opóźnienia, który jest dany przez strukturę i/lub rozkład opóźnienia i mnożnik długookresowy. Zaproponowana będzie nowa kategoria nazwana wynikowym rozkładem opóźnienia. W tej samej Części I omawiane są również podstawowe pojęcia charakteryzujące rozkład opóźnienia, (jeśli istnieje): wartość średnia, wariancja i

mediana rozkładu opóźnienia. W dalszej części wprowadzone są pojęcia funkcji tworzącej i operatora wielomianowego jako przydatnych narzędzi analizy modeli opóźnienia.

Część II zawiera omówienie podstawowych własności modeli złożonych modeli opóźnienia. Badana jest suma modeli opóźnienia rozłożonego, która jest również modelem opóźnienia rozłożonego, ze strukturą opóźnienia będącą sumą składowych struktur opóźnienia, z rozkładem opóźnienia będącym średnią ważoną składowych rozkładów opóźnienia. Współczynnikami wagowymi tej średniej są udziały mnożników długookresowych modeli składowych w wartości mnożnika długookresowego modelu-sumy. Te same współczynniki wagowe uczestniczą w wyznaczeniu wartości średniej rozkładu opóźnienia sumy modeli opóźnienia; jest ona równa średniej ważonej wartości średnich składowych rozkładów opóźnienia. Wariancja rozkładu opóźnienia modelu będącego sumą modeli opóźnienia rozłożonego jest nie mniejsza od średniej ważonej (za pomocą tych samych współczynników wagowych) wariancji rozkładów opóźnienia modeli składowych. W przypadku superpozycji, tj. połączenia szeregowego modeli opóźnienia rozłożonego, która zachowuje własności modelu opóźnienia rozłożonego, struktura opóźnienia superpozycji modeli opóźnienia rozłożonego jest splotem struktur opóźnienia modeli składowych, mnożnik długookresowy całości jest iloczynem mnożników długookresowych modeli wchodzących w skład superpozycji, wartość średnia rozkładu superpozycji modeli jest sumą wartości średnich rozkładów opóźnienia modeli składowych oraz wariancja rozkładu opóźnienia superpozycji modeli opóźnienia jest równa sumie wariancji rozkładów opóźnienia modeli składowych.

W Części III omawiane są podstawowe, spotykane w literaturze modele opóźnienia rozłożonego ze stałym rozkładem opóźnienia, ich interpretacja oraz przykłady ich zastosowań. Modele te znajdują zastosowanie wtedy, gdy nie ma podstaw do przyjęcia założenia, że mechanizm opóźnienia ulega zmianie.

Wśród modeli ze stałym mechanizmem opóźnienia ważną rolę w modelowaniu ekonomicznym odgrywają modele oparte na hipotezach oczekiwań adaptacyjnych i dostosowania częściowego. Wśród modeli należących do tej kategorii szczególne znaczenie mają te, które opisują systemy, w których zachodzą związki pomiędzy natężeniami strumieni a wielkościami zasobów, przez które strumienie te przepływają. W modelach opóźnień opisujących przepływy wyróżnić można dwie grupy modeli. Są to modele typu: strumień - strumień oraz modele typu zasób – strumień. Typ pierwszy opisuje zależność natężenia strumienia wypływającego od natężenia strumienia wpływającego. W przypadku drugiego typu opisywany jest wpływ strumienia wpływającego na poziom zasobu. Modele przepływów znajdują wiele zastosowań, między innymi w opisie: kształtowania się kapitału pod wpływem inwestycji, depozytów i kredytów w systemie bankowym, w modelach demograficznych.

Część III jest poświęcona również analizie modeli opóźnienia, w których zmianie ulega sam mechanizm opóźnienia. Następstwem tego są pewne szczególne własności tych modeli. W rozdziale tym analizowane są modele wpływu zapasów na tempo zmian cen, transmisji cen, zmian kształtowania się poziomu depozytów i kredytów pod wpływem zmian preferencji klientów bankowych.

Ta książka jest adresowana głównie do ekonomistów, ale też do przedstawicieli innych nauk społecznych zainteresowanych modelowaniem. Modelowanie nie może obyć się bez matematyki, więc i w tej pracy jest nieunikniona. Aby nie zniechęcić czytelników, których nie interesują wywody matematyczne, dużą część dowodów i przekształceń zamieszczono w Dodatku.

W przygotowaniu tej książki nieocenioną pomoc uzyskałem od wielu pracowników Instytutu badań Systemowych PAN. Szczególną wdzięczność chciałbym wyrazić panom profesorowi Przemysławowi Grzegorzewskiemu i doktorowi Piotrowi Nowakowi; nieuniknione błędy są wyłącznie moim dziełem.

1.4 Wybrane własności dynamiczne

Gdy struktura opóźnienia ulega zmianie, celowe jest analizowanie mierników opóźnienia dwuetapowo: wpierw jako wielkości stałych, a następnie – jeśli znany jest charakter ewolucji rozkładów opóźnienia – tendencji.

W analizie modeli opóźnienia wykorzystane będą pojęcia stanu ustalonego oraz pomocniczej zmiennej zależnej y', użyteczne w badaniu mechanizmu opóźnienia w modelu (1.12) bez konieczności uwzględniania zmian wartości mnożnika długookresowego a_t.

Definicja. Stan ustalony występuje wtedy, gdy wszystkie wartości zmiennej niezależnej x przyjmują tę samą wartość x^*, $x^* \neq 0$:

$$x_t = x_{t-1} = x_{t-2} = \ldots = x^*,$$

w którym pomocnicza zmienna zależna y_t' również przyjmuje, wzór (1.15), stałą wartość:

$$y_t' = x^* \sum_{i=0}^{\infty} w_{ti} = x^* .$$

Jak wynika z powyższej zależności, w stanie ustalonym pomocnicza zmienna zależna y_t' ma stałą wartość równą x^*, co nie przesądza stałości zmiennej zależnej y_t, której wartość w stanie ustalonym jest określona również przez współczynnik a_t (mnożnik długookresowy) oraz składnik losowy ε_t:

$$y_t = a_t x^* + \varepsilon_t .$$

Zatem w stanie ustalonym zmienność wartości oczekiwanej zmiennej zależnej $E(y_t)$ jest wynikiem zmienności mechanizmu opóźnienia wyrażającej się zmiennością mnożnika długookresowego a_t. Wartość oczekiwana pomocniczej zmiennej zależnej y_t' w stanie ustalonym jest równa x^*, a zmiany wartości współczynników rozkładu opóźnienia nie mają wpływu na jej wartość.

W stanie ustalonym modele opóźnienia rozłożonego ze stałymi współczynnikami mają stałą wartość oczekiwaną zmiennej zależnej.

Celem badania własności dynamicznych modeli opóźnienia rozłożonego jest rozpoznanie sposobu, w jaki zmienna zależna reaguje na różnego rodzaju zakłócenia stanu ustalonego. Dla uzyskania możliwie klarownej interpretacji badanie zostaje przeprowadzone przy założeniu, że istnieją podstawowe parametry rozkładu opóźnienia.

Analizę rozpoczniemy od badania następstw jednorazowego zakłócenia (impulsem) wartości zmiennej niezależnej w stanie ustalonym w okresie $t = t_0$:

$$x_t = \begin{cases} x^*, & t \neq t_0; \\ x^* + \Delta x & t = t_0. \end{cases} \tag{1.22}$$

Nietrudno wyliczyć, że pomocnicza zmienna zależna y' przyjmuje wartości:

$$y_t' = \begin{cases} x^*, & t < t_0, \\ x^* + w_{t,t-t_0} \Delta x, & t \geq t_0; \end{cases} \tag{1.23}$$

lub

$$y_t' = \begin{cases} x^*, & t < t_0, \\ x^* \left(1 + w_{t,t-t_0} \dfrac{\Delta x}{x^*} \right), & t \geq t_0. \end{cases}$$

We wszystkich okresach o numerach $t \geq t_0$, odchylenie $y_t' - x_t$ wartości pomocniczej zmiennej niezależnej y_t' od wartości zmiennej niezależnej x_t w stanie ustalonym ($x_{t-i} = x^*$, $i=0, 1, 2, \ldots$) jest równe

$$y_t' - x_t = \Delta x \cdot w_{t,t-t_0}.$$

Z powyższej zależności wynika, że odchylenie wartości zmiennej x_t od wartości x^* o wielkość Δx powoduje w kolejnych okresach odchylenia wartości pomocniczej zmiennej y_t' od jej wartości w stanie ustalonym: w okresie t_0 o wartość $\Delta x \cdot w_{t_0,0}$, w okresie t_0+1 o wartość $\Delta x \cdot w_{t_0+1,1}$, w okresie t_0+2 o wartość $\Delta x \cdot w_{t_0+2,2}$, itd.

W ogólnym przypadku można stwierdzić, że wraz z $t \to \infty$ wyrażenia $\Delta x\, w_{t,t-t_0}$ dążą do zera (model nieskończony) lub przyjmują wartość zero dla[7] $t \geq t_0+i_g$ (model skończony). Oznacza to również, że efekt powstałego w okresie t_0 zakłócenia stanu ustalonego wygasa wraz z upływem czasu a model powraca do stanu ustalonego.

Wśród modeli opóźnienia ważną rolę pełnią modele o stałych rozkładach opóźnienia; $W_t = W$; tzn. dla wszystkich okresów t, $w_{t,i} = w_i = const.$; $i = 0, 1, 2, \ldots$.

W przypadku modeli o stałych rozkładach opóźnienia suma odchyleń wartości pomocniczej zmiennej zależnej y_t' od wartości tej zmiennej w stanie ustalonym x^* jest równa dokładnie wielkości odchylenia wartości zmiennej niezależnej w okresie t_0 od wartości tej zmiennej w stanie ustalonym:

$$\Delta x \sum_{i=0}^{\infty} w_i = \Delta x.$$

Z powyższego równania wynika, że przy stałym rozkładzie opóźnienia impulsowe zakłócenie zmiennej niezależnej w pełni przenosi się na wartości pomocniczej zmiennej zależnej y_t lub, innymi słowy: to, co „wchodzi" w opóźnienie w pełni z niego „wychodzi"; w modelu skończonym w czasie skończonym, natomiast w modelu nieskończonym w czasie nieskończonym.

Wyrażenie:

---

[7] Przez i_g oznaczono najwyższy indeks niezerowego współczynnika rozkładu opóźnienia.

$$\sum_{t=t_0}^{\infty}(t-t_0)\,w_{t-t_0} = \sum_{i=0}^{\infty} i\,w_i$$

określa średnią ważoną czasu trwania zmian zmiennej zależnej spowodowanej odchyleniem wartości zmiennej niezależnej od stanu ustalonego, w której wagami są współczynniki rozkładu opóźnienia. Powyższe wyrażenie jest tożsame, co wynika z jego prawej strony, ze średnią *M(W)* rozkładu opóźnienia *W* o stałych współczynnikach.

Na podstawie przedstawionego wyżej rozumowania wartość średnią rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ można interpretować jako średni czas trwania zakłócenia stanu ustalonego, jeśliby rozkład opóźnienia „zastygł" w postaci, jaką uzyskał w okresie *t*. Własność ta pozwala na wykorzystanie średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ jako miernika wielkości opóźnienia będącego rezultatem działania mechanizmu opóźnienia.

Do interpretacji mediany rozkładu opóźnienia wykorzystane zostanie zakłócenie stanu ustalonego przez schodkową zmianę wartości zmiennej niezależnej:

$$x_t = \begin{cases} x^*, & t < t_0; \\ x^* + \Delta x & t \geq t_0. \end{cases} \tag{1.24}$$

powodujące, że pomocnicza zmienna zależna przyjmuje, na podstawie zależności (1.15) wartości:

$$y_t' = \begin{cases} x^*, & t < t_0; \\ x^* + \Delta x \sum_{i=0}^{t-t_0} w_{ti}, & t \geq t_0. \end{cases} \tag{1.25}$$

lub

$$y_t' = \begin{cases} x^*, & t < t_0; \\ x^*\left(1 + \frac{\Delta x}{x^*}\sum_{i=0}^{t-t_0} w_{ti}\right), & t \geq t_0. \end{cases}$$

Z powyższego wzoru wynika, że dla $t \geq t_0$, odchylenie wartości pomocniczej zmiennej zależnej od wartości zmiennej niezależnej wynosi:

$$y_t' - x_t = \Delta x \sum_{i=0}^{t-t_0} w_{ti} - \Delta x = \Delta x\left(\sum_{i=0}^{t-t_0} w_{ti} - 1\right) = -\Delta x \sum_{i=t-t_0+1}^{\infty} w_{ti},$$

co oznacza, że dąży ono do zera. Wartość pomocniczej zmiennej zależnej y_t' zmienia się w kolejnych okresach o wartość $\Delta x \cdot w_{t,t-t_0}$, dążąc do wartości $x^* + \Delta x$. W przypadku nieskończonego rozkładu opóźnienia całkowite zrównanie się wartości zmiennych y_t' i x_t następuje w czasie nieskończonym.

Istotne jest pytanie o czas niezbędny do tego, aby zmienna zależna y_t' pokonała połowę drogi do uzyskania wartości granicznej $x^* + \Delta x$.

Współczynnik η w wyrażeniu:

$$\sum_{t=0}^{\eta} w_{ti} < \frac{1}{2} \leq \sum_{t=\eta+1}^{\infty} w_{ti}$$

określa liczbę okresów, po upływie których następuje połowa zmiany wartości pomocniczej zmiennej zależnej spowodowanej przez zakłócenie stanu ustalonego w następstwie schodkowej zmiany wartości zmiennej niezależnej. Własność ta pozwala na stosowanie mediany $\eta(W_t)$ rozkładu opóźnienia W_t jako miernika wielkości opóźnienia będącego rezultatem działania mechanizmu opóźnienia.

Powyższe rozumowanie pozwala na interpretowanie wartości $\eta(W_t)$ jako połowy czasu trwania zakłócenia stanu ustalonego spowodowanego przez schodkową zmianę wartości zmiennej niezależnej x, jeśliby rozkład opóźnienia „zastygł" w postaci, jaką uzyskał w okresie t. Własność ta pozwala na wykorzystanie mediany rozkładu opóźnienia $\eta(W_t)$ jako miernika opóźnienia będącego rezultatem działania mechanizmu opóźnienia.

Przenoszenie wahań zmiennej niezależnej

Analiza modeli opóźnienia rozłożonego, gdy zmienna niezależna jest funkcją okresową, ukazuje wiele ważnych własności tych modeli.

Niech zmienna niezależna będzie sumą pewnej stałej x_0 i funkcji okresowej rozwiniętej w szereg Fouriera, Fichtenholz (1963), Bronsztejn et al. (2004):

$$x_t = x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sin(j\omega t + \varphi_j), \tag{1.26}$$

gdzie:

x_0 – stała, liczba rzeczywista;

c_j – stałe przyjmujące ograniczone wartości ze zbioru liczb rzeczywistych, $j = 0, 1, 2, \ldots$;

φ_j – stałe przyjmujące ograniczone wartości ze zbioru liczb rzeczywistych, $j = 0, 1, 2, \ldots$;

ω – stała oznaczająca częstość podstawową, przy czym:

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

gdzie stała T, $0 < T < \infty$, oznacza okres wahań.

Występująca we wzorze (1.26) stała x_0 ma na celu zapewnienie, w razie potrzeby, by zmienna zależna nie zmieniała znaku; rozwiązanie to jest przydatne, gdy przedmiotem rozważań jest między innymi wynikowy rozkład opóźnienia (patrz komentarz do wzoru (1.17) wraz z przypisem).

Jak poprzednio, analiza zostanie obecnie ograniczona do badania zależności zmiennej pomocniczej y_t' od zmiennej niezależnej x_t określonej tym razem za pomocą wzoru (1.26).

Podstawiając wzór (1.26) do wzoru (1.15) uzyskujemy:

$$y_t' = \sum_{i=0}^{\infty} w_{ti}\left\{x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sin[j\omega(t-i)+\varphi_j]\right\} = \sum_{i=0}^{\infty} w_{ti}\, x_0 + \sum_{i=0}^{\infty} w_{ti} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sin[j\omega(t-i)+\varphi_j]$$

$$= x_0 + \sum_{i=0}^{\infty} w_{ti} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sin[j\omega(t-i)+\varphi_j] \qquad = x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sum_{i=0}^{\infty} w_{ti} \sin[j\omega(t-i)+\varphi_j]$$

$$= x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \left[\sum_{i=0}^{\infty} w_{ti} \sin(j\omega t+\varphi_j)\cos(j\omega i) - \sum_{i=0}^{\infty} w_{ti} \cos(j\omega t+\varphi_j)\sin(j\omega i)\right]$$

$$= x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \left[\sin(j\omega t+\varphi_j)\sum_{i=0}^{\infty} w_{ti} \cos(j\omega i) - \cos(j\omega t+\varphi_j)\sum_{i=0}^{\infty} w_{ti} \sin(j\omega i)\right]$$

Przyjmując oznaczenia

$$R(j\omega) = \sqrt{\left[\sum_{i=0}^{\infty} w_{ti} \sin(j\omega i)\right]^2 + \left[\sum_{i=0}^{\infty} w_{ti} \cos(j\omega i)\right]^2}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots; \tag{1.27}$$

$$\sin\psi_j = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} w_{ti} \sin(j\omega i)}{r_j}, \cos\psi_j = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} w_{ti} \cos(j\omega i)}{r_j}; \; j = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$\psi(j\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sum_{i=0}^{\infty} w_{ti} \sin(j\omega i)}{\sum_{i=0}^{\infty} w_{ti} \cos(j\omega i)}\right); \tag{1.28}$$

powyższy wzór można przedstawić w postaci:

$$y_t' = x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} c_j R(j\omega) \sin\left[j\omega t + \varphi_j - \psi(j\omega)\right]. \tag{1.29}$$

Ponieważ współczynniki $R(j\omega)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$; nazywane dalej współczynnikami tłumienia, spełniają warunek $0 \le R(j\omega) \le 1$, o zmiennej pomocniczej we wzorze (1.29) można powiedzieć, że jest również funkcją okresową, w której poszczególne częstotliwości mają w stosunku do zmiennej niezależnej zmniejszone amplitudy o czynnik $R(j\omega)$ będący funkcją rozkładu opóźnienia W_t i częstotliwości $j\omega$. Ponadto dla poszczególnych częstotliwości występują przesunięcia fazy o wielkości ψ_j, $0 \le \psi_j \le \pi$, $j = 0, 1, 2, \ldots$; będące również funkcjami rozkładu opóźnienia W_t i częstotliwości $j\omega$, $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Reasumując wnioski ze wzoru (1.28) można skonstatować, że mechanizm opóźnienia tłumi poszczególne częstotliwości z różną siłą (czynnik R_j), oraz opóźnia każdą o τ_j okresów:

$$\tau_j = \frac{\psi_j}{2\pi}, j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1.30}$$