

Raport Badawczy
Research Report

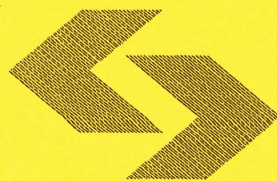
RB/47/2014

**Modele opóźnień w systemach
ekonomicznych.
Własności i zastosowania.
Część I. Wprowadzenie**

J. Gadomski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences



POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Zakładu zgłaszający pracę:
Dr hab. inż. Lech Kruś, prof. PAN

Warszawa 2014

SPIS TREŚCI

WSTĘP

CZĘŚĆ I Wprowadzenie

- Rozdział 1.1 Podstawowe pojęcia
 - Rozdział 1.2 Rozkład opóźnienia
 - Rozdział 1.3 Wynikowy rozkład opóźnienia
 - Rozdział 1.4 Wybrane własności dynamiczne
 - Rozdział 1.5 Mierzenie opóźnienia
 - Rozdział 1.6 Średnia rozkładu opóźnienia wynikowego $M(U)$ jako miara opóźnienia (1)
 - Rozdział 1.7 Średnia rozkładu opóźnienia wynikowego $M(U)$ jako miara opóźnienia (2)
 - Rozdział 1.8 Wielomian operatorowy i funkcja tworząca
 - Rozdział 1.9 Podstawowe stałe struktury/rozkłady opóźnienia rozłożonego
 - 1.9.1 Skończone struktury/rozkłady opóźnienia
 - 1.9.1.1 Liniowa struktura opóźnienia
 - 1.9.1.2 Model Almon
 - 1.9.2 Niekończone struktury/rozkłady opóźnienia
 - 1.9.2.1 Rozkład Pascala-Solowa
 - 1.9.2.2 Model Tsurumi
 - 1.9.2.3 Model z rozkładem Poissona
 - 1.9.2.4 Model Jorgensena
 - Rozdział 1.10 Źródła zmienności struktur opóźnienia
- Podsumowanie Części I

CZĘŚĆ II Złożone struktury modeli opóźnienia rozłożonego

- Rozdział 2.1. Suma modeli opóźnienia rozłożonego
 - Rozdział 2.2. Superpozycja modeli opóźnienia rozłożonego
 - Rozdział 2.3. Suma modeli opóźnienia rozłożonego wielu zmiennych
- Podsumowanie Części II

CZĘŚĆ III Modele opóźnienia w systemach przepływów

- Rozdział III.1 Sformułowanie problemu
 - Rozdział III.2 Modele opóźnienia w systemach przepływów ze stałym rozkładem opóźnienia
 - Rozdział III.3 Modele opóźnień w systemach przepływów ze zmiennymi rozkładami opóźnień
 - III.3.1 Model z dwoma parametrami
 - III.3.1.1 Model populacji
 - III.3.1.2 Model zmiennej sprawności procesów inwestowania w Polsce przed 1989 r.
 - III.3.1.3 Model transmisji ceny
 - III.3.1.4 Model kredytu
- Podsumowanie Części III

Dodatek

Bibliografia

Modele opóźnień w systemach ekonomicznych. Własności i zastosowania.

Wstęp

Z doświadczenia wiemy, że pomiędzy przekręceniem pokrętkła gorącej wody a ustaleniem się temperatury wody wypływającej z prysznica mija jakiś czas; wiemy też, że czas ten w różnych prysznicach bywa różny, co może być przyczyną niepożądanych doznań. Również wtedy, gdy dowiadujemy się, że cena ropy naftowej szybko rośnie na światowych giełdach, z dużą pewnością możemy oczekiwać, że ceny paliw na krajowym rynku również odpowiednio wzrosną. W obu przypadkach mamy do czynienia ze zjawiskiem nazywanym opóźnieniem.

Ze zjawiskiem opóźnienia mamy do czynienia, gdy reakcja obserwowanego systemu lub jego części na zmianę pewnego czynnika następuje po jakimś czasie. Opóźnienia są nieodłączne od zjawisk dynamicznych, w których przyczyna zmian poprzedza wystąpienie jej następstw. Jednak nie wszystkie zależności przyczynowo-skutkowe są związane z działaniem mechanizmu opóźnienia; często są to zjawiska złożone, w których działają inne mechanizmy, między innymi sprzężenia zwrotne, które powodują, że to samo zjawisko jest zarazem przyczyną i następstwem powiązanych zjawisk.

Modele opóźnienia stanowią ważny element konstrukcyjny modeli dynamicznych, to jest takich, które objaśniają zmiany pewnych zmiennych zależnych (objaśnianych) za pomocą zmian pewnych innych zmiennych, zwanymi niezależnymi lub objaśniającymi, które nie zależą od zmiennych zależnych. Często przyjmowane jest założenie, że zmienna zależna reprezentuje kategorię, której zmiany są następstwem zmian wartości zmiennych niezależnych reprezentujących kategorie będące przyczynami tych zmian¹.

Hendry et al. (1984), strona 1057, przyczyn zjawiska opóźnienia dopatrują się w takich kosztach dostosowania, jak: koszty transakcyjne, badawcze, optymalizacji oraz gdy podmioty powoli reagują na zmiany w otoczeniu w następstwie bezwładności, utrwalonych przyzwyczajzeń, zwłoki w dostrzeganiu/rozpoznaniu zmian. Według tej opinii powolność reakcji wiąże się również z niepewnością oraz niedoskonałością rynków. Do wymienionych czynników można dodać opóźnienie informacji, na których podstawie są analizowane i podejmowane decyzje.

Modele opóźnienia są tworzone dla potrzeb różnych dziedzin nauki i różnych zastosowań. Na gruncie ekonomii zależnościami klasycznymi mającymi postać modelu opóźnienia są między innymi: wpływ nakładów inwestycyjnych na zasób kapitału, transmisja ceny, tj. opóźnienie zmiany ceny krajowej importowanego surowca względem zmiany ceny tego surowca na rynkach międzynarodowych, opóźnienie sprzedaży względem zmiany ceny - lub w skali makroekonomicznej - reakcja popytu konsumpcyjnego na zmianę dochodu dyspozycyjnego, czy wreszcie reakcja gospodarki na zmianę stopy procentowej.

¹ W przypadku modeli stochastycznych trudno mówić o zależnościach przyczynowo-skutkowych.

Celem modelu opóźnienia jest opisanie zależności zmiennej zależnej od zmiennych niezależnych. W wielu przypadkach celem tym jest również oszacowanie, o ile okresów zmiany zmiennej zależnej są opóźnione w stosunku do zmiany zmiennej niezależnej i w jakim stopniu zmiany te są rozłożone, bądź skupione w czasie.

W analizie opóźnień wyodrębnić można dwie podstawowe grupy zagadnień. Grupa pierwsza, to analiza mechanizmów, które decydują o właściwościach badanego opóźnienia. Grupa druga, szczególnie ważna w badaniach empirycznych, to zagadnienia związane z estymacją modeli opóźnień.

W historii badań zaangażowanie w rozwiązywanie problemów z obu tych grup było nierównomierne. W pierwszym okresie uwaga badaczy była skupiona głównie na analizie konstrukcji i własności różnych modeli opóźnienia. Były to przede wszystkim prace: Fishera (1937), Koycka (1954), Solowa (1960), Almon (1965), Griliches (1967). Równolegle prowadzone były prace poświęcone drugiej grupie zagadnień.

W drugim okresie, który - jak się wydaje - trwa nadal, dominują prace poświęcone zagadnieniom należącym do grupy drugiej. Do najwybitniejszych prac tego nurtu należy zaliczyć przede wszystkim następujące: Griliches (1967), Maddala (1977), Dhrymes (1981). Wpłynęły na to następujące czynniki: rozwiązano znaczną część podstawowych problemów grupy pierwszej oraz dostrzeżono wagę i złożoność problemów estymacji. Za cezurę można uznać pojawienie się artykułu Almon (1965) i Jorgensena (1966), w których zaproponowano odpowiednio tak zwane modele wielomianowy i ilorazowy. Modele te z jednej strony charakteryzują się dużą elastycznością w tym sensie, że nie wymagają od stosujących modele opóźnienia zaangażowania a zarazem zwalniają od problemów należących do grupy pierwszej.

Wielką syntezę osiągnięć na polu badania modeli opóźnienia stanowi książka Dhrymesa (1981). Mimo, że od jej pierwszego wydania minęło ponad trzydzieści lat, jest ona wciąż fundamentalnym źródłem wiedzy o modelach opóźnień. Stanowi zarazem wzorzec, do którego należy się odnieść decydując się na pisanie o modelach opóźnień. Autorowi tej pracy wydaje się, że ma tu coś nowego do zaproponowania.

Celem tej pracy jest zaprezentowanie analizy modeli opóźnień, której niektóre wątki stanowią nawiązanie do przedstawionego powyżej okresu pierwszego, jak również korzystającej z rozwiązań zaproponowanych w badaniach późniejszych. Są to następujące grupy problemów.

Pierwsza grupa wiąże się z doбором miernika opóźnienia. Podejmowane tu zagadnienie jest następstwem powszechnego przyjmowania w literaturze przedmiotu jako miernika opóźnienia wartości średniej rozkładu opóźnienia, co w wielu wypadkach może być powodem nieporozumień i błędów interpretacji. Ma to znaczenie zwłaszcza wtedy, gdy celem analizy jest określenie opóźnienia zmiennej zależnej względem zmiennej niezależnej, a nie wyłącznie mechanizm opóźnienia.

Druga grupa zagadnień podjętych w tej pracy jest związana z analizą własności podklasy modeli opóźnienia opisujących zjawiska związane z przepływami. Do tej podklasy zaliczyć można takie modele jak: model kształtowania się kapitału pod wpływem inwestycji i deprecjacji kapitału, model kształtowania się stanu depozytów w systemie bankowym pod wpływem strumieni wpłat oraz wypłat, model kształtowania się poziomu zadłużenia z tytułu kredytu udzielonego przez system bankowy pod wpływem strumienia spłat wcześniej zaciągniętych kredytów oraz strumienia nowoudzielonych kredytów. Do tej podklasy można również zaliczyć model demograficzny, w którym liczba ludności jest kształtowana przez strumienie urodzeń oraz zgonów. Wspólną cechą wymienionych tu modeli jest to, że występują w nich kategorie zasobów oraz strumieni zasilających (wpływających) oraz wyczerpujących te zasoby. W zjawiskach opisywanych za pomocą tych modeli często istotnymi wielkościami są średni czas, jaki jednostki strumienia wyczerpującego zasób przebywały w zasobie oraz średni okres przebywania jednostki w tym zasobie. Wielkości te, poza wyjątkami, nie są równe.

Trzecia grupa problemów wiąże się z analizą własności modeli opóźnienia, w których mechanizm opóźnienia ulega zmianie. Problematyka ta nie jest nowa, np. Tinsley (1967), Pesando (1972), Otto (1985), Gadomski (1986), Dahl, Kulaksizoglu (2005); jej umiarkowany rozwój wynika – jak się wydaje – z dwóch przyczyn. Pierwsza, to niedostatek informacji, powodujący konieczność wyboru modeli uproszczonych, ze stałymi współczynnikami, przysparzającymi mniejsze trudności przy estymacji parametrów. Przyczyna druga, wiąże się z podejściem pragmatycznym, polegającym na daleko idącym – w stosunku do wiedzy o badanym zjawisku – upraszczaniu i w związku z tym na pominięciu analizy mechanizmów opóźnienia. Jest to również wynik osłabienia „czujności badawczej” w następstwie pojawienia się modeli wielomianowego Almon (1965) i ilorazowego Jorgensena (1966) – ich elastyczność często prowadzi do uzyskania zadowalającego wyniku: wszystko to, czego nie udaje się - z jakiegoś powodu - wtłoczyć w część deterministyczną modelu, przypisane zostaje czynnikowi losowemu.

W pracy problematyka estymacji modeli opóźnienia rozłożonego jest całkowicie pominięta, osobom zainteresowanym z czystym sumieniem można polecić prace klasyczne: Griliches (1967), Dhrymes (1981), Hendry et al. (1984). W prezentowanych dalej rozważaniach struktura opóźnienia będzie z założenia dana lub aproksymowana w zadowalający sposób.

Praca składa się z następujących części. W Części I sformułowany jest uogólniony model opóźnienia rozłożonego. Uogólnienie polega na uwzględnieniu, że na zmienną zależną mają wpływ nie tylko zmienna niezależna i zmienna losowa, ale również podlegający zmianom mechanizm opóźnienia, który jest dany przez strukturę i/lub rozkład opóźnienia i mnożnik długookresowy. Zaproponowana będzie nowa kategoria nazwana wynikowym rozkładem opóźnienia. W tej samej Części I omawiane są również podstawowe pojęcia charakteryzujące rozkład opóźnienia, (jeśli istnieje): wartość średnia, wariancja i

mediana rozkładu opóźnienia. W dalszej części wprowadzone są pojęcia funkcji tworzącej i operatora wielomianowego jako przydatnych narzędzi analizy modeli opóźnienia.

Część II zawiera omówienie podstawowych własności modeli złożonych modeli opóźnienia. Badana jest suma modeli opóźnienia rozłożonego, która jest również modelem opóźnienia rozłożonego, ze strukturą opóźnienia będącą sumą składowych struktur opóźnienia, z rozkładem opóźnienia będącym średnią ważoną składowych rozkładów opóźnienia. Współczynnikami wagowymi tej średniej są udziały mnożników długookresowych modeli składowych w wartości mnożnika długookresowego modelu-sumy. Te same współczynniki wagowe uczestniczą w wyznaczeniu wartości średniej rozkładu opóźnienia sumy modeli opóźnienia; jest ona równa średniej ważonej wartości średnich składowych rozkładów opóźnienia. Wariancja rozkładu opóźnienia modelu będącego sumą modeli opóźnienia rozłożonego jest nie mniejsza od średniej ważonej (za pomocą tych samych współczynników wagowych) wariancji rozkładów opóźnienia modeli składowych. W przypadku superpozycji, tj. połączenia szeregowego modeli opóźnienia rozłożonego, która zachowuje własności modelu opóźnienia rozłożonego, struktura opóźnienia superpozycji modeli opóźnienia rozłożonego jest splotem struktur opóźnienia modeli składowych, mnożnik długookresowy całości jest iloczynem mnożników długookresowych modeli wchodzących w skład superpozycji, wartość średnia rozkładu superpozycji modeli jest sumą wartości średnich rozkładów opóźnienia modeli składowych oraz wariancja rozkładu opóźnienia superpozycji modeli opóźnienia jest równa sumie wariancji rozkładów opóźnienia modeli składowych.

W Części III omawiane są podstawowe, spotykane w literaturze modele opóźnienia rozłożonego ze stałym rozkładem opóźnienia, ich interpretacja oraz przykłady ich zastosowań. Modele te znajdują zastosowanie wtedy, gdy nie ma podstaw do przyjęcia założenia, że mechanizm opóźnienia ulega zmianie.

Wśród modeli ze stałym mechanizmem opóźnienia ważną rolę w modelowaniu ekonomicznym odgrywają modele oparte na hipotezach oczekiwań adaptacyjnych i dostosowania częściowego. Wśród modeli należących do tej kategorii szczególne znaczenie mają te, które opisują systemy, w których zachodzą związki pomiędzy natężeniami strumieni a wielkościami zasobów, przez które strumienie te przepływają. W modelach opóźnień opisujących przepływy wyróżnić można dwie grupy modeli. Są to modele typu: strumień - strumień oraz modele typu zasób - strumień. Typ pierwszy opisuje zależność natężenia strumienia wypływającego od natężenia strumienia wpływającego. W przypadku drugiego typu opisywany jest wpływ strumienia wpływającego na poziom zasobu. Modele przepływów znajdują wiele zastosowań, między innymi w opisie: kształtowania się kapitału pod wpływem inwestycji, depozytów i kredytów w systemie bankowym, w modelach demograficznych.

Część III jest poświęcona również analizie modeli opóźnienia, w których zmianie ulega sam mechanizm opóźnienia. Następstwem tego są pewne szczególne własności tych modeli. W rozdziale tym analizowane są modele wpływu zapasów na tempo zmian cen, transmisji cen, zmian kształtowania się poziomu depozytów i kredytów pod wpływem zmian preferencji klientów bankowych.

Ta książka jest adresowana głównie do ekonomistów, ale też do przedstawicieli innych nauk społecznych zainteresowanych modelowaniem. Modelowanie nie może obyć się bez matematyki, więc i w tej pracy jest nieunikniona. Aby nie zniechęcić czytelników, których nie interesują wywody matematyczne, dużą część dowodów i przekształceń zamieszczono w Dodatku.

W przygotowaniu tej książki nieocenioną pomoc uzyskałem od wielu pracowników Instytutu badań Systemowych PAN. Szczególną wdzięczność chciałbym wyrazić panom profesorowi Przemysławowi Grzegorzewskiemu i doktorowi Piotrowi Nowakowi; nieuniknione błędy są wyłącznie moim dziełem.

1.3 Wynikowy rozkład opóźnienia

W tym rozdziale proponowane są nowe, w literaturze na temat modeli opóźnienia rozłożonego niespotykane pojęcia. Są to: współczynniki udziału, wynikowy rozkład opóźnienia oraz wartość średnia i wariancja wynikowego rozkładu opóźnienia. Pojęcia te są przedstawione poniżej.

Współczynniki udziału $u_{i,i}$, $i = 0, 1, 2, \dots$; są definiowane jako udziały wkładów $y_{i,i}$, $i = 0, 1, 2, \dots$; w wartości oczekiwanej $E(y_i)$ zmiennej zależnej y_i reprezentowanych przez następujące ilorazy:

$$u_{i,i} = \frac{v_{i,i} x_{i-1}}{E(y_i)} = \frac{y_{i,i}}{E(y_i)} = \frac{v_{i,i} x_{i-1}}{\sum_{i=0}^{\infty} v_{i,i} x_{i-1}}, \quad E(y_i) \neq 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

Jak wynika z zależności (1.17), współczynniki udziału $u_{i,i}$, $i = 0, 1, 2, \dots$; są określone, gdy wartość oczekiwana zmiennej zależnej jest nierówna zero. Spełnienie tego warunku oznacza konieczność poczynienia dodatkowych założeń o wartościach zmiennej niezależnej. Ilekroć dalej mowa będzie o rozkładzie wynikowym opóźnienia, będzie to oznaczać, że przyjęte zostało założenie, iż zmienna niezależna nie zmienia znaku i przyjmuje wartości nierówne zeru⁵. Zaletą tego rozwiązania jest klarowna interpretacja wielkości nazywanych udziałami (o co byłoby trudno, jeśli przyjmowałyby zarówno dodatnie jak i ujemne wartości). Z drugiej strony wyklucza zastosowanie tego podejścia do modelowania zjawisk, w których zmienna niezależna jest zmienną losową o zerowej wartości oczekiwanej.

W każdym okresie t określone w zależności (1.17) udziały $u_{i,i}$, $i = 0, 1, 2, \dots$; spełniają następujące warunki:

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_{i,i} = 1; \quad (1.18)$$

oraz

$$u_{i,i} \geq 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots;$$

z których wynika, że U_i jest unormowaną strukturą opóźnienia, którą można interpretować jak rozkład prawdopodobieństwa. Udziały $u_{i,i}$, $i = 0, 1, 2, \dots$; wzór (1.17), można interpretować jak prawdopodobieństwo tego, że pewna zmienna losowa τ przyjmie wartość równą i :

$$Pr(\tau = i) = u_{i,i}$$

O udziałach $u_{i,i}$, $i = 0, 1, 2, \dots$; będziemy mówić, że tworzą strukturę unormowaną opóźnienia lub rozkład wynikowy opóźnienia U_i . Rozkład wynikowy opóźnienia U_i charakteryzują podstawowe parametry (jeśli istnieją):

⁵ Jest to nieduża ingerencja w ogólność rozważań, bowiem przy założonej wcześniej ograniczoności zmiennej niezależnej można skonstruować nową zmienną niezależną odpowiednio powiększoną (lub pomniejszoną) o stałą.

$M(U_i)$ - wartość średnia wynikowego rozkładu:

$$M(U_i) = \sum_{i=0}^{\infty} i u_{i,i} = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{y_{i,i}}{E(y_i)} = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{v_{i,i} x_{i-1}}{\sum_{j=0}^{\infty} v_{i,j} x_{i-1}}, \quad (1.19)$$

$D^2(U_i)$ - wariancja wynikowego rozkładu opóźnienia:

$$D^2(U_i) = \sum_{i=0}^{\infty} u_{i,i} [i - m(U_i)]^2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} i^2 u_{i,i} \right) - m^2(U_i). \quad (1.20)$$

Dla wynikowego rozkładu opóźnienia U_i można zdefiniować, analogicznie jak dla rozkładu opóźnienia W_i , medianę rozkładu wynikowego opóźnienia $\eta(U_i)$:

$$\sum_{i=0}^{\eta(U_i)} u_{i,i} < \frac{1}{2} \leq \sum_{i=\eta(U_i)+1}^{\infty} u_{i,i}. \quad (1.21)$$

Dla modeli opóźnienia skończonego wartości parametrów $M(U_i)$ i $D^2(U_i)$ są zawsze określone, co wynika bezpośrednio z przyjętych założeń o współczynnikach opóźnienia i wartościach zmiennej niezależnej. Należy odnotować, że w przypadku nieskończonego modelu opóźnienia parametry $M(U_i)$ i $D^2(U_i)$ mogą nie być określone.

Warto zwrócić uwagę na pewną własność. Jeśli zmienna niezależna x jest zmienną losową o stałej i niezerowej wartości oczekiwanej równej x^* oraz gdy istnieje rozkład opóźnienia W_i , wtedy – co wynika z definicji rozkładu wynikowego U_i – rozkłady W_i i U_i są sobie równe, ponieważ:

$$E(y_i) = a_i x^* \text{ oraz } u_{i,i} = \frac{v_{i,i} x^*}{a_i x^*} = \frac{v_{i,i}}{\sum_{j=0}^{\infty} v_{i,j}} = w_{i,i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Warto również zwrócić uwagę na to, że ważną i bardzo przydatną w dalszych rozważaniach własnością modelu (1.15) jest to, że ma on identyczny z modelem (1.8) rozkład opóźnienia wynikowego.

Współczynniki $u_{i,i}$, $i = 0, 1, 2, \dots$; udziałów modelu (1.18) są, zgodnie z definicją (1.17), równe:

$$u_{i,i} = \frac{w_{i,i} x_{i-1}}{E(y'_i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Na podstawie wzoru (1.10) określającego współczynniki rozkładu opóźnienia można łatwo uzyskać równość:

$$u_{i,i} = \frac{w_{i,i} x_{i-1}}{E(y'_i)} = \frac{w_{i,i} x_{i-1}}{\sum_{j=0}^{\infty} w_{i,j} x_{i-1}} = \frac{v_{i,i} x_{i-1}}{\sum_{j=0}^{\infty} v_{i,j} x_{i-1}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Zatem modele (1.8) i (1.15) mają jednakowe rozkłady opóźnienia W_i i opóźnienia wynikowego U_i .

Uwaga. Istnienie rozkładu opóźnienia wynikowego U_i nie jest warunkiem wystarczającym istnienia rozkładu opóźnienia W_i ; istnienie rozkładu U_i jest zawsze zapewnione dzięki założeniu o skończonych i niezerowych wartościach, jakie przyjmuje zmienna zależna y .

Uwaga. W skończonych modelach opóźnienia rozłożonego rozkładu opóźnienia i opóźnienia wynikowego oraz parametry tych rozkładów istnieją zawsze.

Uwaga. Jeśli tylko istnieje rozkład (wynikowy opóźnienia i/lub opóźnienia), to można dla niego określić medianę rozkładu.

Oto dwa przykłady ilustrujące omawiane zagadnienia.

Przykład 1.1 Rozważamy model ze stałymi współczynnikami przyjmującymi wartości:

$$v_{i0} = 0 \text{ i } v_{i1} = 1/i^2 \text{ dla } i > 0.$$

W tym wypadku suma

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_{i1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

jest zbieżna, lecz suma

$$\sum_{i=1}^{\infty} i w_{i1} = \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{\frac{1}{i^2}}{\left(\frac{\pi^2}{6}\right)} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

jest rozbieżna, ponieważ wartości iloczynów $i w_{i1}$, $i = 1, 2, \dots$; tworzą rozbieżny ciąg harmoniczny. W tym przypadku istnieje rozkład opóźnienia W_n , którego podstawowe parametry, tj. wartość średnia i wariancja, są nieokreślone.

Przykład 1.2 Niech dla wszystkich $i \geq 0$, $v_{i1} = 1$, natomiast wartości zmiennej niezależnej tworzą ciąg: $x_i = 1$ i $x_{i+1} = 1/i^2$ dla $i > 0$. W tym przypadku nie istnieje rozkład opóźnienia W_n , ponieważ suma współczynników opóźnienia jest rozbieżna, natomiast istnieje rozkład wynikowy U_n , a jego podstawowe parametry, tj. wartość średnia i wariancja, są nieokreślone⁶:

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_{i1} = \sum_{i=0}^{\infty} 1 = \infty;$$

$$u_{i1} = \begin{cases} \frac{6}{6 + \pi^2}, & i = 0; \\ \frac{6}{6 + \pi^2} \frac{1}{i^2}, & i > 1. \end{cases}$$

⁶ Na podstawie zależności: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} i u_{i1} = \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{\frac{1}{i^2}}{\left(\frac{6 + \pi^2}{6}\right)} = \frac{6}{6 + \pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty.$$

Z powyższych rozważań wynika, że - przy spełnionych założeniach o zmiennej niezależnej - rozkład wynikowy opóźnienia istnieje zawsze, a jego parametry są zawsze określone w modelach skończonych, oraz mogą nie być określone w pewnych modelach nieskończonych.

W przypadku modeli skończonych suma (1.9) jest zawsze zbieżna, zatem zawsze mają zdefiniowane rozkłady: wynikowy opóźnienia i opóźnienia.

W przypadku opóźnienia prostego (zwłoki), będącego szczególnym przypadkiem modelu skończonego, oba te rozkłady istnieją zawsze i są rozkładami jednopunktowymi.



