

230/2012

Raport Badawczy
Research Report

RB/56/2012

**Mechanizmy aukcji
i przetargów uwzględniające
preferencje wielokryterialne
i wieloatrybutowe**

L. Kruś, E. Toczyłowski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences



POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Zakładu zgłaszający pracę:
dr inż. Lech Krus

Warszawa 2012

3 Aukcje wielokryterialne

Rozpatrujemy sytuację decyzyjną, w której organizator aukcji, zwany dalej również kupującym, chce najkorzystniej nabyć usługę lub określony produkt w drodze aukcji typu angielskiego. Zakładamy, że jest zbiór n oferentów (sprzedawców) konkurujących o otrzymanie kontraktu na dostarczenie tej usługi (produktu).

Niech $O = \{o^1, o^2, \dots, o^n\}$ oznacza zbiór oferentów biorących udział w aukcji. Oferty $x \in X$ są oceniane za pomocą wektora m kryteriów $y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\} \in R^m$ określonych przez kupującego. Odwzorowanie $W: X \rightarrow R^m$ przyporządkowuje każdej ofercie wektor tych kryteriów. Kupujący chce uzyskać w wyniku aukcji ofertę charakteryzującą się najniższymi wartościami kryteriów. W przestrzeni ocen R^m określamy relacje

slabej dominacji: $y^1 \succeq y^2 \Leftrightarrow y_i^1 \leq y_i^2$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, m$, oraz

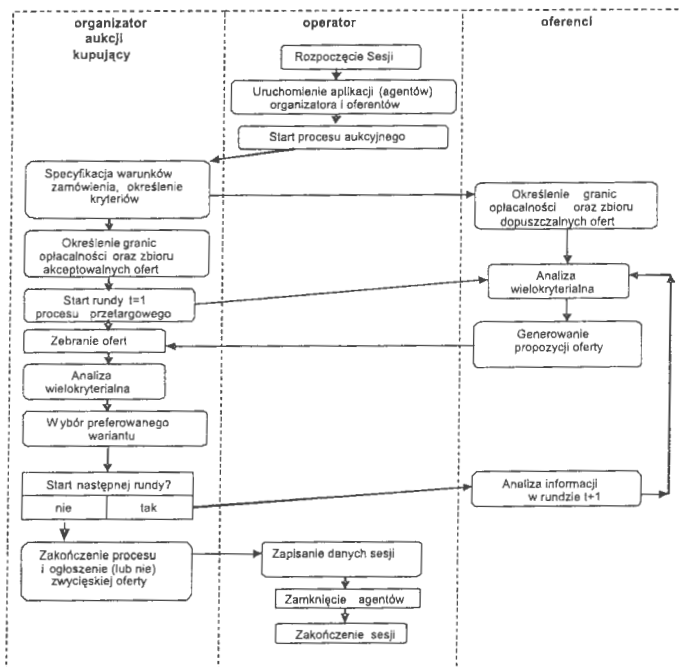
dominacji: $y^1 \prec y^2 \Leftrightarrow y_i^1 \leq y_i^2$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, m$ oraz $y^1 \neq y^2$.

Kupujący ma określone granice opłacalności sformułowane jako zbiór dopuszczalnych ofert i odpowiadający mu zbiór akceptowalnych wielokryterialnych ocen $Y^0 = W(X^0)$. Oferty spoza zbioru X^0 nie są akceptowalne przez kupującego.

Aukcja przebiega w pewnej liczbie rund $t = 1, 2, \dots$. W każdej rundzie t oferenci składają oferty $x^i(t)$, gdzie $i = 1, 2, \dots, n$ jest indeksem oferenta. Zakłada się, że każdy oferent ma również określone granice opłacalności sformułowane jako zbiór dopuszczalnych ofert X^i i odpowiadający mu zbiór wielokryterialnych ocen $Y^i = W(X^i)$. W przypadku, gdy nie będzie mógł znaleźć w tym zbiorze oferty, która przebiję ofertę konkurencyjną, będzie musiał odstąpić od dalszego udziału w aukcji.

Możliwy jest szczególny przypadek, gdy wystąpi tylko jeden oferent. Wówczas organizator aukcji i oferent znajdują się w sytuacji przedstawionej w punkcie 2, jako wielokryterialne zagadnienie przetargowe. Podana w punkcie 2 procedura może być wykorzystana do wspomniani u procesu znalezienia konsensusu uwzględniającego wielokryterialne preferencje obu stron.

Ogólny schemat aukcji prowadzonej z pomocą odpowiedni zbudowanego systemu komputerowego przedstawiono na Rys.4. Uwzględniono działania

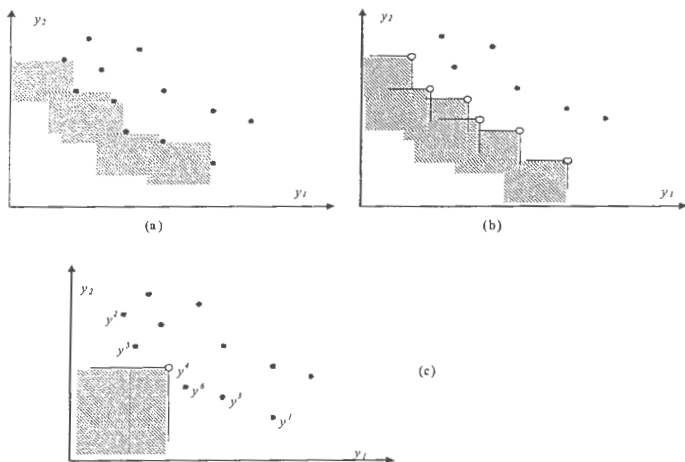


Rysunek 4: Ogólny schemat aukcji

operatora systemu, który uruchamia aplikacje - agenty komputerowe dla kupującego oraz dla oferentów. Przed rozpoczęciem właściwego procesu aukcyjnego istotne jest określenie granicy opłacalności i wynikającego z niej zbioru akceptowalnych ofert przez kupującego, a także określenie granic opłacalności każdego oferenta i dopuszczalnych zbiorów ofert, które ten oferent może składać. Informacje te są prywatne, ściśle poufne i niedostępne dla innych uczestników aukcji.

Celem procesu aukcyjnego z punktu widzenia kupującego jest uzyskanie najlepszej oferty ze względu na jego preferencje. Ze strony oferenta, celem jest uzyskanie kontraktu spełniającego warunki opłacalności, ale również z uwzględnieniem jego własnych preferencji.

W przypadku klasycznej (jednokryterialnej) aukcji typu angielskiego oferenci (sprzedający) zgłaszają w kolejnych rundach oferty z coraz niższą ceną usługi. W rozpatrywanym przypadku aukcji wielokryterialnej, oferty zgłaszane przez oferentów w danej rundzie mogą być nieporównywalne w sensie podanej wyżej relacji dominacji. Wymagana jest ich ocena przez kupującego przy wykorzystaniu metod analizy wielokryterialnej.



Rysunek 5: Przykłady zbiorów możliwych ofert według zasad (a), (b), (c).

Przykład zbioru ofert podlegających ocenie kupującego przedstawiono na Rys. 5 jako czarne punkty w przestrzeni dwóch kryteriów y_1, y_2 . W zbiorze tym można wyróżnić oferty niezdominowane (Pareto optymalne) z punktu widzenia kupującego, oznaczone na części (c) rysunku jako $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$.

Wyznaczanie ofert niezdominowanych i wybór przez kupującego oferty zgodnie z jego preferencjami może być wykonany metodą punktu referencyjnego, analogicznie jak to przedstawiono w punkcie 2.3. Metoda ta była zaimplementowana w systemie komputerowym, zastosowanym do przeprowadzonych eksperymentalnych sesji służących analizie motywacyjnie zgodnych decyzji w wielokryterialnym przetargu (Kruś, Skorupiński, Toczyłowski 2011). Rozwinięcie metody punktu referencyjnego w zastosowaniu do analizy ofert w wielokryterialnych aukcjach zawiera praca (Ogryczak, Kozłowski 2011).

W przypadku wielokryterialnych aukcji pojawia się wiele kwestii dotyczących sposobu prowadzenia aukcji, a w szczególności zakresu informacji dostępnego dla oferentów. W różny sposób mogą być formułowane zasady określające jak mają być poprawiane oferty w kolejnej rundzie. Przykładowo rozpatrzmy następujące trzy warianty:

- a. proponowana oferta nie może być zdominowana przez żadną z ofert podanych w poprzednich rundach,
- b. proponowana oferta powinna dominować dowolną z poprzednich ofert niezdominowanych,
- c. proponowana oferta powinna dominować wybraną przez kupującego, preferowaną przez niego ofertę niezdominowaną.

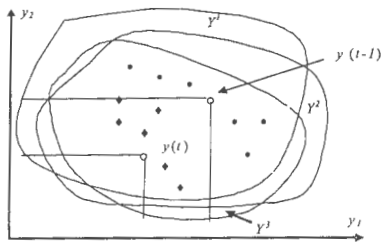
Zbiory, do których mogą należeć proponowane oferty w przypadku tych trzech wariantów, zaznaczono schematycznie w postaci zakreskowanych obszarów na Rys. 5 odpowiednio w części a. b. i c.

Wariant a. określa najłagodniejsze wymagania dotyczące kolejnych ofert. Umożliwia składanie ofert niezdominowanych, ale także nieporównywalnych z innymi ofertami niezdominowanymi w poprzedniej rundzie. Zbiór, do którego powinny należeć poprawiane oferty, stanowi sumę odpowiednio przesuniętych stożków dominacji bez punktów brzegowych.

W wariantcie b. kolejna oferta powinna dominować przynajmniej jedną z wcześniejszych ofert niezdominowanych. Poprawione oferty powinny należeć do zbioru określonego przez stożki dominacji przesunięte do dotychczasowych punktów niezdominowanych, z punktami brzegowymi, ale bez punktów początkowych, zaznaczonych pustymi kółkami. Niektóre z ofert możliwych do

zapropionowania w wariancie a. nie mogą być złożone w tym przypadku, chociaż mogłyby być interesujące dla kupującego. W wariantach a. i b. oferenci muszą uzyskać informację o wszystkich wcześniejszych ofertach niezdominowanych. Kupujący nie musi informować oferentów o preferowanej ofercie w każdej rundzie, chociaż taka informacja może zaowocować przyspieszeniem procesu aukcji.

W wariancie c. kupujący po każdej rundzie podaje preferowaną przez siebie ofertę i oczekuje poprawy co najmniej dla jednego z kryteriów. Warian ten oznacza najsilniejsze wymagania dotyczące kolejnych ofert zgodnie z preferencjami kupującego. Mogą być jednak przy tym pominięte oferty niezdominowane interesujące dla kupującego, istotne zwłaszcza w końcowej fazie aukcji, gdy oferenci zbliżają się do swoich granic opłacalności.



Rysunek 6: Zbiory dopuszczalnych ofert

Na Rys. 6 przedstawiono w przestrzeni kryteriów y_1, y_2 przykład zbiorów Y^1, Y^2, Y^3 dopuszczalnych ofert trzech oferentów. Czarne punkty przedstawiają przykłady ofert złożonych w rundzie $t - 1$. Oferta $y(t - 1)$ zaznaczona pustym kółkiem została wybrana przez kupującego jako najlepsza w tej rundzie. W odpowiadającym jej punkcie zaczyna się zbiór poprawiających ofert określony przez przesunięty stożek dominacji, zgodnie z wariantem c. Czarne romby oznaczają przykłady ofert w kolejnej rundzie t . Puste kółko oznaczone jako $y(t)$ odpowiada preferowanej ofercie wybranej przez kupującego w tej rundzie. W punkcie tym zaczyna się kolejny przesunięty stożek dominacji określający zbiór poprawiających ofert w rundzie kolejnej. Zbiory te ograniczone są przez granice opłacalności poszczególnych oferentów wynikające

z ich zbiorów dopuszczalnych ofert i zmniejszają się w kolejnych rundach, tak że kolejni oferenci mogą wypaść z aukcji oraz mogą być pominięte oferty interesujące dla kupującego, wynikające z ograniczeń nakładanych przez przyjęty stózek dominacji.

Do rozważenia jest zastosowanie różnych sposobów poprawiania ofert na różnych etapach aukcji. Przykładowo, można jako podstawowy przyjąć wariant c., natomiast na samym początku aukcji oraz w końcowych rundach (gdy od aukcji zaczynają odstępować oferenci) wariant a. lub b. Zakładamy, że kupujący na początku aukcji, gdy nie zna możliwych ofert, może nie być w pełni świadomy swoich preferencji. Dlatego wskazane jest umożliwienie oferentom składania stosunkowo szerokiego wachlarza ofert, co umożliwia wariant a. lub b. W końcowej fazie aukcji szkoda byłoby stracić niezdominowaną ofertę leżącą blisko za zbiorem określonym przez stózek dominacji.

Wymienione wyżej kwestie zostały w szczególny sposób rozwiązane w przypadku wielorundowego przetargu - realizowanego w formie aukcji na wykonanie obiektu użyteczności publicznej, rozpatrywanego w trakcie badań. Oferty oceniane były ze względu na dwa minimalizowane kryteria: koszt i czas realizacji. Organizator przetargu ustalił przy tym dyskretny, skończony zbiór T wariantowych terminów realizacji tr . Założono, że organizator przetargu jak i każdy oferent ma swoją granicę opłacalności dla wymienionych terminów. W przypadku organizatora jest to maksymalny dopuszczalny koszt, powyżej którego nie jest zainteresowany realizacją obiektu. W przypadku oferentów założono, że każdy z nich dokonał wcześniej analizy wielokryterialnej możliwych realizacji obiektu i określił na tej podstawie swoją granicę opłacalności, tj. wektor minimalnych wartości zapłaty za realizację obiektu dla tych terminów. Poniżej tych wartości realizacja obiektu jest dla niego nieopłacalna. Oferent nie wie, który termin realizacji zostanie ostatecznie wybrany przez decydenta. Zapewniona jest poufność informacji. Żaden z oferentów nie zna ani granic opłacalności konkurentów, ani ich ofert. Nie zna również granicy opłacalności decydenta. Analogicznie decydent nie zna granic opłacalności oferentów. Mechanizm przetargu ma umożliwić wyłonienie wykonawcy oraz wariantu realizacji obiektu, zapewniających jak największe korzyści z realizacji obiektu.

Zostal zbudowany specjalny wieloagentowy system komputerowy umożliwiający symulację różnych wariantów realizacji procesu przetargowego. System działa w środowisku AIMMS (AIMMS, Bisschop, Roelofs 2009). Użytkownicy systemu odgrywają odpowiednio role organizatora przetargu oraz oferentów. System uruchamiany jest przez operatora, który uruchamia agenta dla organizatora przetargu oraz odpowiednią liczbę agentów dla oferentów. System zapewnia poufność wprowadzanych informacji. Sposób prowadzenie przetargu był zgodny z ogólnym schematem przedstawionym na Rys.4. W każdej rundzie oferenci mogli składać oferty z ceną dla każdego z tych terminów. Organizator przetargu wykonywał po każdej rundzie analizę wielokryterialną złożonych ofert, przy czym nie informował o swoich preferencjach. Oferenci uzyskiwali informacje o najlepszych ofertach dla poszczególnych terminów, ale nie byli informowani, kto je złożył.

Analiza wielokryterialna prowadzona przez organizatora przetargu wykonywana była w sposób interakcyjny z wykorzystaniem przedziałowej metody punktu referencyjnego A. P. Wierzbickiego (Wierzbicki 1986, Wierzbicki, Małowski, Wessels 2000). Zgodnie z tą metodą organizator może przeglądać i analizować niezdominowane warianty ofert w przestrzeni swoich kryteriów, przyjmując odpowiednio punkty rezerwacji r i aspiracji a w tej przestrzeni. Wskaźniki i -tych składowych tych wektorów r_i, a_i dotyczą odpowiednio kosztu i czasu realizacji. Rozwiązywane są zadania postaci:

$$\max z + \epsilon \sum_{i \in \{\text{koszt}, \text{czas}\}} z_i \quad (4)$$

przy ograniczeniach wynikających z przedziałowej metody punktu referencyjnego:

$$z \leq z_i \quad \forall i \in \{\text{koszt}, \text{czas}\} \quad (5)$$

$$z_i \leq \gamma \frac{r_i - x_i}{r_i - a_i} \quad \forall i \in \{\text{koszt}, \text{czas}\} \quad (6)$$

$$z_i \leq \frac{r_i - x_i}{r_i - a_i} \quad \forall i \in \{\text{koszt}, \text{czas}\} \quad (7)$$

$$z_i \leq \beta \frac{a_i - x_i}{r_i - a_i} + 1 \quad \forall i \in \{\text{koszt}, \text{czas}\} \quad (8)$$

ograniczeniach wartości minimalizowanych wartości czasu realizacji i kosztu:

$$x_{\text{koszt}} \geq p_{o, tr} - M(1 - w_{ot}) \quad \forall o \in O, tr \in T \quad (9)$$

$$x_{czas} \geq d_{tr} - (d_{max} - d_{min})(1 - q_t) \forall tr \in T \quad (10)$$

oraz ograniczeniach wynikających z dyskretnych wartości czasów realizacji:

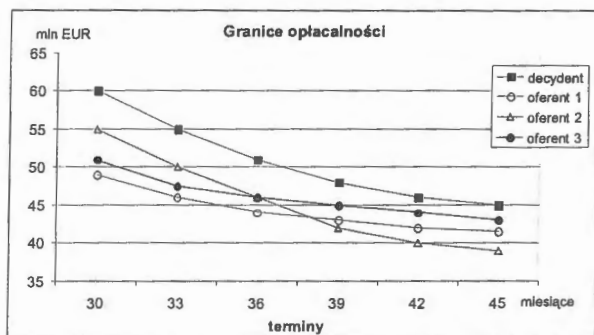
$$\sum_{o \in O, tr \in T} w_{o, tr} = 1 \quad (11)$$

$$\sum_{o \in O} w_{o, tr} = q_{tr} \quad \forall tr \in T \quad (12)$$

Jest to zadanie programowania mieszanego. Przedstawia konkretną realizację przedziałowej metody punktu referencyjnego dla rozpatrywanego tutaj problemu optymalizacji wielokryterialnej, rozwiązywanego dla organizatora przetargu. Zadanie to jest rozwiązywane przez system dla zadanych przez decydenta punktów τ , a . Rozwiązaniem jest punkt x w przestrzeni kryteriów: koszt i czas realizacji, który jest niezdominowany w zbiorze wariantów przedstawionych przez oferentów w ich ofertach. W powyższym sformułowaniu przyjęto następujące oznaczenia: $z, z_{koszt}, z_{czas} \in \mathbf{R}$ - zmienne pomocnicze; ϵ, β, γ - współczynniki przedziałowej metody punktu referencyjnego, ϵ - odpowiednio mała liczba, $0 < \beta < 1 < \gamma$; p_{max} i p_{min} są to odpowiednio najdroższa i najtańsza oferta złożona dla wszystkich terminów realizacji; d_{max} i d_{min} oznaczają odpowiednio najdłuższy i najkrótszy termin realizacji przedsięwzięcia; $w_{o, tr}$ dla $o \in O$ i $t \in T$; q_{tr} dla $tr \in T$ są uzupełniającymi zmiennymi binarnymi.

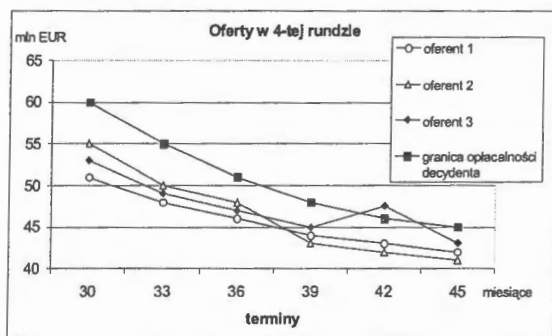
Decydent kończy analizę wielokryterialną, gdy uzna, że ocenił i porównał wszystkie interesujące go rozwiązania niezdominowane, wybierając rozwiązanie najlepsze według jego preferencji. Podejmuje wówczas decyzję, czy kontynuować postępowanie przetargowe w następnej rundzie, czy je zakończyć.

Przeprowadzono szereg sesji symulowanych przetargów. Początkowo ich celem było testowanie systemu, a następnie analiza interaktywnych sesji prowadzonych z udziałem osób występujących w roli organizatora przetargu - zwanego dalej decydem i oferentów. Interesujące było zbadanie różnych możliwych zachowań oferentów i decydenta i ich wzajemne relacje. Jedną z podstawowych jest kwestia czy, ewentualnie w jakim stopniu, wielorundowy mechanizm przetargu może zachęcać oferentów do ujawniania ich prywatnych informacji dotyczących rzeczywistych kosztów realizacji obiektu, sprzyjając uzyskaniu efektywnej alokacji i wyborowi najlepszego rozwiązania.



Rysunek 7: Granice opłacalności w przykładzie przetargu na obiekt użyteczności publicznej

Wybrane wyniki jednej z sesji przedstawione są na Rys. 7, 8, 9. Sesja dotyczy przetargu na realizację obiektu użyteczności publicznej, w którym bierze udział trzech oferentów. Decydent podał w specyfikacji zamówienia 6 terminów możliwych wariantów realizacji obiektu: 30, 33, 36, 39, 42, 45 miesięcy. Przed ogłoszeniem przetargu określił swoje granice opłacalności - maksymalne koszty realizacji, które może ponieść przy tych wariantach terminu. Zakładamy, że każdy oferent przed przystąpieniem do przetargu określa swoje granice opłacalności - minimalne wartości zapłaty, przy których realizacja obiektu we wskazanych terminach jest dla niego opłacalna. Granice opłacalności decydenta i oferentów są przedstawione na Rys. 7. Zauważmy, że granice opłacalności oferentów są poniżej granicy opłacalności decydenta. Istnieje więc przedział wartości kosztów, w którym potencjalny wynik przetargu może być korzystny dla decydenta i każdego z oferentów. Porównanie granic opłacalności na Rys. 7 przedstawione jest tylko dla celów analizy. Granica opłacalności decydenta i każdego z oferentów stanowi jego poufną informację, nieudostępnianą innym. Decydent jest zainteresowany realizacją obiektu w możliwie krótkim czasie, ale jednocześnie chce zminimalizować koszt przedsięwzięcia. Zdaje sobie sprawę z tego, że realizacja w krótszym terminie wymaga większych nakładów.



Rysunek 8: Oferty w ostatniej rundzie

W każdej rundzie, po otrzymaniu ofert, decydent dokonuje ich wielokryterialnej analizy w przestrzeni swoich kryteriów: kosztu i czasu określonego terminem realizacji. Analiza ta jest wykonywana z wykorzystaniem przedziałowej metody punktu referencyjnego. Analiza prowadzona jest w pewnej liczbie iteracji. W każdej iteracji decydent przyjmuje wartości punktu rezerwacji oraz punktu aspiracji. System komputerowy wyznacza odpowiednie rozwiązanie niezdominowane. Decydent, odpowiednio dobierając punkty rezerwacji i aspiracji może uzyskać reprezentację zbioru rozwiązań niezdominowanych i dokonać wyboru oferty zgodnie ze swoimi preferencjami. O swoim wyborze informuje oferentów dopiero wtedy, gdy zdecyduje się zakończyć procedurę przetargową. Oczywiście w danej rundzie może on uznać, że oferty nie są zadawalające i kontynuować przetarg. Rys. 8 przedstawia zestawienie ofert w ostatniej, czwartej rundzie. Dla terminów 30, 33, 36 miesięcy najkorzystniejsze dla decydenta oferty zostały złożone przez oferenta 1, a dla terminów 39, 42 i 45 miesięcy przez oferenta 2. Decydent uzyskał istotną poprawę ofert w porównaniu z najlepszymi ofertami z pierwszej rundy. Mechanizm przetargu pozwolił na wyłonienie najbardziej efektywnych oferentów dla każdego z wariantów realizacyjnych. W rozpatrywanym przypadku, po dokonaniu analizy wielokryterialnej decydent wybrał ofertę oferenta 2 dla terminu 39 miesięcy.

Runda	Oferenci	Terminy					
		30	33	36	39	42	45
1	oferent 1	56	51	49	47	45	44
	oferent 2	60	54	50	46	44	43,5
	oferent 3	57	53	51	49	47,5	46
2	oferent 1	56	51	49	45	43	42
	oferent 2	55	50	48	46	44	43,5
	oferent 3	55	49	48,5	45	47,5	43
3	oferent 1	54	48	47	44	43	42
	oferent 2	55	50	48	44	42	41
	oferent 3	53	49	47	45	47,5	43
4	oferent 1	51	48	46	44	43	42
	oferent 2	55	50	48	43	42	41
	oferent 3	53	49	47	45	47,5	43
granice opt.: decydena		60	55	51	48	46	45
oferenta 1		49	46	44	43	42	41,5
oferenta 2		55	50	46	42	40	39
oferenta 3		51	47,5	46	45	44	43

Rysunek 9: Oferty składane w poszczególnych rundach

Interesujące mogą być obserwacje różnych zachowań i strategii oferentów przedstawione w Tabeli na Rys. 9. Szare pola oznaczają poprawione oferty złożone przez oferentów w kolejnych rundach. Zwróćmy uwagę na znacznie odbiegającą od innych, ofertę oferenta 3 w 4-tej rundzie dla terminu 42 miesiące. Oferent ten nie poprawił oferty złożonej jeszcze w rundzie 1-szej, ponieważ już wtedy najbardziej konkurencyjna oferta była na jego granicy opłacalności i nie mógł jej przebić. Nie widział więc powodu do poprawy swojej pierwotnej oferty, chociaż mógł ją obniżyć, gdyż znacznie przewyższała jego granicę opłacalności. Niektórzy oferenci w kolejnych rundach poprawiali swoją ofertę, minimalnie obniżając koszt najtańszej oferty z poprzedniej rundy. Jeden z oferentów w pewnej sytuacji decydował się na dokonanie istotnej zmiany znacznie przebijając konkurentów. W tej i w innych przeprowadzonych sesjach zaobserwowano, że wynik końcowy złożonych ofert dążył do poziomu drugiej w kolejności granicy opłacalności oferentów. Zrozumiałe jest, że oferentowi, który dla danego terminu ma najniższą granicę opłacalności, nie oplaca się już takiej oferty obniżyć, gdyż żaden z konkurentów nie może jej przebić. Uzyskanie tego wyniku może jednak wymagać dużej liczby rund zwłaszcza, gdy wszyscy oferenci dokonują tylko minimalnej poprawy ofert w kolejnych rundach.

Wybrane wyniki powyższych badań eksperymentalnych przedstawiono w pracy (Kruś, Skorupiński, Toczyłowski 2011).

4 Zagadnienie decyzji motywacyjnie zgodnych na przykładzie problemu producenta i klientów

Rozpatrujemy przykład rynkowy producenta i nabywców jego produktu. Nabywcy oceniają różne warianty produktu ze względu na własne kryteria. Producent decyduje, który wariant wprowadzi na rynek i zaoferuje klientom. W celu harmonizacji interesów obu stron, wśród kryteriów producenta, oprócz reprezentujących jego wewnętrzne preferencje, jest także kryterium uwzględniające stopień zadowolenia nabywców z oferowanego produktu. Celem badań jest analiza zachowań producenta i nabywców, oraz rozwiązań zgodnych z ich preferencjami.

4.1 Sformułowanie problemu

Producent zamierza zaoferować pewnej zbiorowości klientów L nowy wariant swojego produktu. Warianty produktu charakteryzowane są przez pewien wektor wartości zmiennych $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, gdzie D jest zbiorem dopuszczalnych wartości tych zmiennych. Zbiór D nie jest dany w postaci jawnej. Przyjęto, że zbiór ten jest określony przez zestaw ograniczeń liniowych w postaci: $Ax^T \leq b$, gdzie A i b są odpowiednio macierzą i wektorem współczynników. W skład wektora x wchodzi też zmienne stanowiące kryteria klientów, przykładowo: e - zmienna określająca cechy ekonomiczne, takie jak koszty nabywania, koszty eksploatacji, koszty serwisu produktu, u - zmienna określająca walory użytkowe takie jak niezawodność, jakość wykonania, zaawansowanie technologiczne produktu.

Każdy klient może przeglądać i analizować niezdominowane warianty produktu w przestrzeni swoich kryteriów poprzez rozwiązywanie zadań optymalizacji wielokryterialnej przy użyciu przedziałowej metody punktu referencyjnego A. P. Wierzbickiego (Wierzbicki 1986, Wierzbicki, Makowski, Wessels 2000). Dla zadanych przez klienta punktów rezerwacji i aspiracji jest znajdowane rozwiązanie niezdominowane przez rozwiązanie następującego problemu optymalizacji:

$$\max z + \epsilon \sum_{k \in \bar{X}} z_k, \quad (13)$$

przy ograniczeniach wynikających z przedziałowej metody punktu odniesienia:

$$z \leq z_k \quad \forall k \in \bar{X} \quad (14)$$

$$z_k \leq \gamma \frac{x_k - r_k}{a_k - r_k} \quad \forall k \in \bar{X} \quad (15)$$

$$z_k \leq \frac{x_k - r_k}{a_k - r_k} \quad \forall k \in \bar{X} \quad (16)$$

$$z_k \leq \beta \frac{x_k - a_k}{a_k - r_k} + 1 \quad \forall k \in \bar{X}, \quad (17)$$

$$(18)$$

ograniczeniach określonych przez zbiór rozwiązań dopuszczalnych:

$$Ax \leq b. \quad (19)$$

W sformułowaniu tym z , z_k , x oznaczają zmienne $z, z_k \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^n$, \bar{X} jest zbiorem indeksów kryteriów. Zgodnie z metodą punktu referencyjnego, w kolejnych iteracjach klient zakłada punkt rezerwacji i aspiracji, natomiast system komputerowy, rozwiązuje przedstawione zadanie optymalizacji i wyznacza kolejny wariant niezdominowany w zbiorze D .

Przyjęto, podobnie jak w procedurach wspomagania decyzji kooperacyjnych (Kruś 2011), że punkt rezerwacji danego klienta nie jest wybierany arbitralnie, ale jest określany na podstawie idei BATNA (Fisher, Ury 1981). Pojęcie BATNA (the Best Alternative to Negotiated Agreement) jest szeroko stosowane w negocjacjach, oznacza najlepszy dostępny wariant w porównaniu z alternatywnymi propozycjami rozważanymi w tych negocjacjach.

W rozpatrywanym przypadku oznacza ono produkt dostępny na rynku lub będący w posiadaniu klienta, porównywany z wariantami produktu oferowanego przez producenta. Idea pojęcia BATNA stanowi podstawę sposobu określania stopnia zadowolenia klientów, zaproponowanego w pracy. Klient będzie zainteresowany ofertą producenta, jeśli będzie lepsza od wariantu BATNA.

Dla określonego w ten sposób punktu rezerwacji i różnych punktów aspiracji zakładanych przez klienta, system wyznacza odpowiednie niezdominowane warianty osiągalne. Klient generuje w ten sposób reprezentację Pareto-optimalnego brzegu zbioru D . Proszony jest o wskazanie wariantu, który uważa za najlepszy. Analiza wielokryterialna dokonywana jest niezależnie przez wszystkich klientów. System przechowuje informacje o tych wybranych, preferowanych przez poszczególnych klientów wariantach produktu.

Przyjęto, że przykładowymi kryteriami producenta jest zysk ze sprzedaży produktu oraz renoma wśród klientów akceptujących zaoferowany wariant tego produktu. System umożliwia także formułowanie dodatkowych kryteriów. Zysk wyliczany jest jako różnica przychodu ze sprzedaży i kosztów produkcji. Kryterium zysku jest określone jako:

$$(p_e - p_u) \sum_{i \in L} v_i,$$

gdzie v_i jest zmienną binarną określającą, który z klientów akceptuje oferowany wariant produktu. Przyjęto w uproszczeniu, że przychody są proporcjonalne do zmiennej x_e , a koszty produkcji proporcjonalne do walorów użytkowych x_u , odpowiednio ze współczynnikami proporcjonalności p_e i p_u .

Renoma określana jest na podstawie stopni zadowolenia klientów. Stopień zadowolenia klienta wyznaczany jest dla wariantu proponowanego przez producenta, gdy każdy klient dokonał już wcześniej wielokryterialnej analizy problemu, ma już określony punkt rezerwacji i wybrał preferowany punkt aspiracji oraz preferowany wariant osiągalny. Punkty rezerwacji, punkty aspiracji i preferowane warianty osiągalne wybrane przez różnych klientów mogą być na ogół różne. Stopnie zadowolenia klientów, akceptujących proponowany przez producenta wariant, są agregowane do wartości renowy stanowiącej jedno z kryteriów producenta.

jest przez pewną funkcję określoną w przestrzeni kryteriów charakteryzujących dany produkt. W ogólnym przypadku jest to nieliniowa funkcja użyteczności. Zbiory poziomkowe takiej funkcji w przestrzeni dwóch maksymalizowanych kryteriów k_1, k_2 narysowano liniami przerywanymi. W pierwszej wersji systemu przyjęto szczególny wariant tej funkcji określony przez brzegi przesuniętego stożka dodatniego (zbiory poziomkowe zaznaczone liniami ciągłymi). Problemy wyboru innych postaci tej funkcji, jej identyfikacji i implementacji w systemie są przedmiotem kolejnych badań. Punkty zaznaczone na rysunku oznaczają: a – punkt rezerwacji, b – punkt aspiracji wskazany po zakończeniu analizy wielokryterialnej, c – wybrany, preferowany punkt osiągalny. Zgodnie z przyjętą skalą, wszystkie warianty produktu znajdujące się na zaznaczonych liniach ciągłych wyprowadzonych z punktu d charakteryzują się stopniem zadowolenia: $s = (s_p - s_d) \cdot |a, d| / |a, c|$, gdzie $|a, d|$, oraz $|a, c|$ oznaczają odpowiednio odległości punktu a od punktu d i od punktu c . Maksymalizowane kryterium renomy jest sformułowane jako: $\sum_{i \in L} s_i$ gdzie s_i oznacza stopień zadowolenia klienta $i \in L$.

Producent dokonuje analizy wielokryterialnej w przestrzeni swoich kryteriów podając punkty rezerwacji i punkty aspiracji. System wyznacza i przechowuje znalezione rozwiązania niezdominowane, umożliwiając przeglądanie wyników i wybór rozwiązania zgodnego z preferencjami producenta. Dla danego przez producenta punktu rezerwacji i aspiracji, system wyznacza rozwiązanie niezdominowane rozwiązując następujące zadanie optymalizacji:

$$\max z + \epsilon \sum_{i \in P} z_i \quad (20)$$

przy ograniczeniach wynikających ze sformułowania przedziałowej metody punktu referencyjnego:

$$z \leq z_i \quad \forall i \in P \quad (21)$$

$$z_i \leq \gamma \frac{y_i - r_i}{a_i - r_i} \quad \forall i \in P \quad (22)$$

$$z_i \leq \frac{y_i - r_i}{a_i - r_i} \quad \forall i \in P \quad (23)$$

$$z_i \leq \beta \frac{y_i - a_i}{a_i - r_i} + 1 \quad \forall i \in P \quad (24)$$

$$(25)$$

wynikających ze sformułowania kryterium renomy:

$$y_{renoma} \leq \sum_{l \in L} s_l \quad (26)$$

$$s_l \leq (s_g - s_d) f_{l_k} \quad \forall_{l \in L, k \in X} \quad (27)$$

$$f_{l_k} \leq \frac{x_k - \hat{r}_{l_k}}{\hat{x}_{l_k} - \hat{r}_{l_k}} + M(1 - v_l) \quad \forall_{l \in L^+, k \in X} \quad (28)$$

$$\frac{x_k - \hat{r}_{l_k}}{\hat{x}_{l_k} - \hat{r}_{l_k}} \geq -M(1 - v_l) \quad \forall_{l \in L^+, k \in X} \quad (29)$$

$$s_l \geq \epsilon^* - M(1 - v_l) \quad \forall_{l \in L^+} \quad (30)$$

$$v_l \leq 0 \quad \forall_{l \in L^-} \quad (31)$$

$$f_{l_k} \leq s_d + Mv_l \quad \forall_{l \in L, k \in X} \quad (32)$$

wynikających ze sformułowania kryterium zysku:

$$y_{zysk} \leq \sum_{l \in L} w_l \quad (33)$$

$$w_l \leq Mv_l \quad \forall_{l \in L} \quad (34)$$

$$w_l \leq p_e x_e - p_u x_u + M(1 - v_l) \quad \forall_{l \in L} \quad (35)$$

$$p_e x_e - p_u x_u - w_l + Mv_l \leq M \quad \forall_{l \in L} \quad (36)$$

ograniczeniach dopuszczalnych wariantów produktu wynikających z postaci modelu: $A(x) \leq b$.

W podanym sformułowaniu w_l, v_l, f_l oznaczają dodatkowe zmienne, \bar{Y} oznacza zbiór indeksów kryteriów producenta, L^+ oznacza zbiór klientów dla

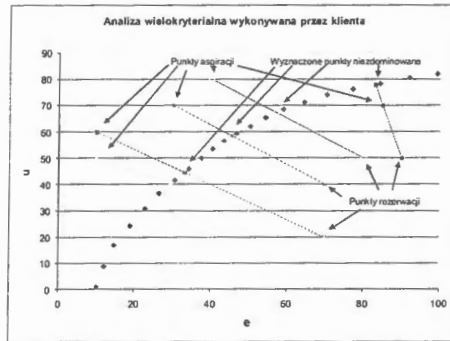
których istnieje wariant produktu lepszy od punktu rezerwacji, L^- - odpowiednio zbiór klientów, dla których nie istnieje wariant poprawiający sytuację wyjściową, M jest dużą liczbą dodatnią, \hat{x}_i, \hat{r}_i oznaczają k -te składowe odpowiednio osiągalnego rozwiązania wybranego przez klienta l oraz jego punktu rezerwacji. Nie wszyscy klienci ze zbioru L^+ mogą być zainteresowani ofertą producenta. Przyjęto, że klient jest zainteresowany ofertą producenta, jeśli jego stopień zadowolenia wzrośnie co najmniej o wartość ε^* w porównaniu z jego sytuacją początkową.

4.2 Eksperymenty obliczeniowe

Przeprowadzono szereg eksperymentów obliczeniowych, w których użytkownicy systemu odgrywali rolę producenta i jego klientów. Przedmiotem analizy były wzajemne relacje zachowań klientów i producenta z uwzględnieniem ich kryteriów. Interesująca jest kwestia, jak preferencje wyboru klientów wpływają na decyzje producenta, który stara się nie tylko maksymalizować swój zysk, ale także dba o renomę produktu. Z drugiej strony - jak decyzje producenta wpływają na stopnie zadowolenia konkretnych klientów. Wybrane wyniki przeprowadzonych interakcyjnych sesji ilustrowane są na rysunkach.

4.2.1 Ilustracja analizy wielokryterialnej

Wyniki przykładowej analizy wielokryterialnej dokonywanej przez jednego z klientów przedstawiono na Rys. 11. W przestrzeni jego kryteriów e (minimalizowane kryterium kosztów) i u (maksymalizowane kryterium walorów użytkowych) przedstawiono wybrane punkty rezerwacji, punkty aspiracji i wyznaczone metodą punktu referencyjnego punkty niezdominowane w zbiorze wariantów osiągalnych określonych przez model. Wszystkie pokazane punkty niezdominowane wyznaczono tą metodą, przy czym na rysunku przedstawiono tylko kilka punktów rezerwacji, aspiracji i odpowiadających im punktów niezdominowanych. Każdy klient, odpowiednio dobierając punkty

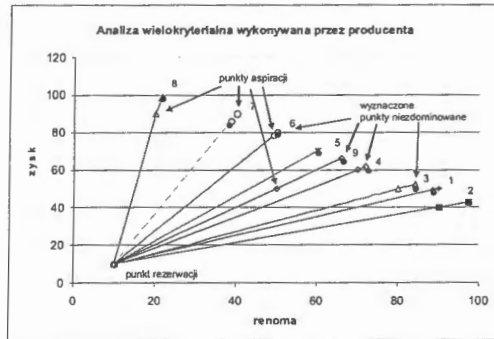


Rysunek 11: Ilustracja analizy wielokryterialnej wykonywanej przez klienta

rezerwacji i aspiracji, ma możliwość wyznaczenia reprezentacji brzegu Pareto- optymalnych wariantów osiągalnych. Proszony jest o wskazanie preferowanego punktu (wariantu) niezdominowanego i odpowiadającego mu punktu aspiracji.

Analiza dokonywana przez producenta może być rozpoczęta, gdy wszyscy klienci wskazali swoje preferowane osiągalne warianty. Producent nie ma dostępu do informacji dotyczących konkretnych klientów, ich indywidualnych wyborów i preferencji. W zależności od wariantu produktu oferowanego klientom, rozważanego przez producenta, wyznaczone są wartości jego kryteriów, w tym przypadku: renoma danego wariantu produktu wśród klientów oraz zysk.

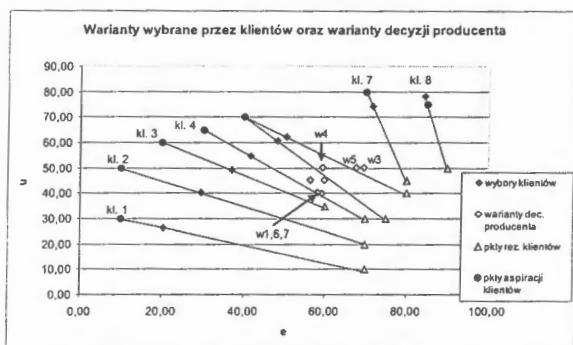
Producent wykonuje analizę wielokryterialną również metodą punktu referencyjnego, analogicznie jak w przypadku klientów, przy czym oba jego kryteria: zysk i renoma są maksymalizowane. Przykład wyników takiej analizy pokazano na Rys. 12. Przyjęto tutaj, że producent zakłada ten sam punkt rezerwacji, natomiast zmienia punkty aspiracji. Czarnymi kropkami zaznaczono wyliczone przez system rozwiązania niezdominowane. Producent ma możliwość wyznaczenia reprezentacji brzegu rozwiązań Pareto- optymalnych i wyboru wariantu zgodnie ze swoimi preferencjami.



Rysunek 12: Ilustracja analizy wielokryterialnej wykonywanej przez producenta

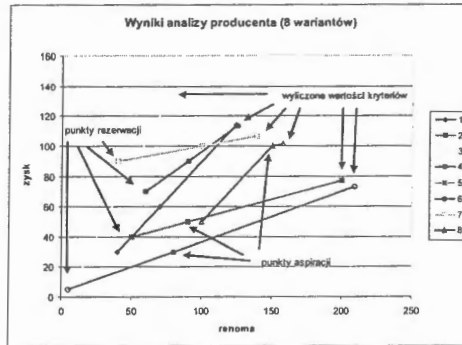
4.2.2 Relacje zachowań klientów i producenta

Kolejne rysunki przedstawiają wyniki uzyskane podczas sesji przeprowadzonej w przypadku 8 klientów i dla różnych decyzji producenta. Celem sesji było zbadanie wzajemnych relacji zachowań klientów i producenta. Przyjęto, że poszczególni klienci mają różne punkty rezerwacji i zróżnicowane preferencje wyboru. Na Rys. 13. widoczne są założone różne warianty niezdominowane wybrane przez klientów oraz punkty aspiracji, dla których zostały one wyznaczone przez system. Interesujące było jak decyzje producenta, w szczególności jego różne preferencje będą wpływać na wariant produktu oferowany klientom, którzy klienci zaakceptują ten produkt, jakie będą stopnie ich zadowolenia i jak to wpływa na kryterium renomy. Rys. 14 przedstawia kilka różnych wariantów możliwych decyzji producenta, różniących się punktami rezerwacji, punktami aspiracji i odpowiadającym im punktom niezdominowanym w przestrzeni kryteriów: renoma i zysk. Przy wyznaczaniu punktów niezdominowanych rozwiązywane są zadania liniowego programowania mieszanego (problemy optymalizacji dyskretno-ciągłej). Zauważmy, że w przypadku wariantu 8, wyznaczony punkt niezdominowany wyraźnie jest



Rysunek 13: Ilustracja sesji z 8 klientami

odchylony od założonego kierunku poprawy określonego przez punkty rezerwy i aspiracji. Na Rys. 15 pokazano w tabeli jakie są efekty wybranych decyzji producenta. Dla każdego wariantu decyzji producenta podano wartości zmiennych decyzyjnych e i u charakteryzujących ten wariant, oraz liczby klientów z niego zadowolonych. W zależności od wariantu decyzji producenta, różne są zbiory klientów akceptujących oferowany produkt. Na Rys. 16 pokazano, jakie są stopnie zadowolenia poszczególnych klientów w zależności od wariantu produktu oferowanego przez producenta. Ujemne wartości tego poziomu zadowolenia oznaczają, że dany wariant produktu nie jest akceptowany przez danego klienta. W przypadku wariantów 1, 6 i 7, oferowanym produktem nie są zainteresowani klienci 7 i 8. W przypadku wariantów 3 i 5, produktem nie jest zainteresowany klient 3. Wariant 3 charakteryzuje się największą, w porównaniu z innymi wariantami tutaj analizowanymi, wartością zysku producenta. Największa liczba klientów jest zainteresowana 4-tym wariantem produktu. Wariant ten charakteryzuje się największą wartością rezerwy, jednocześnie jednak odpowiada mu najniższa, wśród wariantów analizowanych, wartość zysku.



Rysunek 14: Wyznaczenie niezdominowanych wariantów decyzji producenta w seji z 8-ma klientami

5 Uwagi końcowe

W pracy rozpatrzono trzy przypadki sytuacji decyzyjnych, w których agenci działający na rynku starają się osiągnąć swoje indywidualne cele reprezentowane przez odrębne wektory kryteriów lub atrybutów.

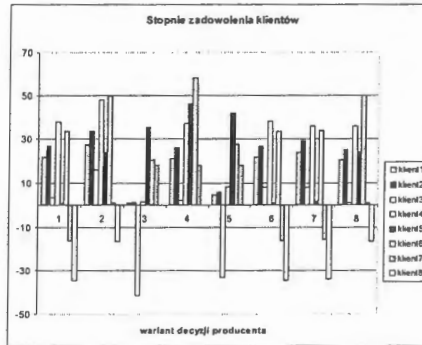
W pierwszym przypadku rozpatrywana jest możliwość współpracy dwóch decydentów. Każdy ocenia wyniki możliwej współpracy ze względu na swoje prywatne kryteria. Problem dotyczy uzgodnienia warunków współpracy w sytuacji, gdy występuje konflikt zarówno między kryteriami danego decydenta, ale również między kryteriami obu decydentów. Przedstawiono model matematyczny problemu jako wielokryterialne zagadnienie przetargowe. Zaproponowano interakcyjną procedurę mediacyjną. W procedurze tej uwzględnia się wspomaganie analizy wielokryterialnej każdego decydenta z wykorzystaniem przedziałowej metody punktu referencyjnego A.P. Wierzbickiego oraz stosuje się ideę rozwiązania kooperacyjnego Nasha przy wyznaczeniu propozycji mediacyjnej. Rozwiązanie Nasha (1950, 1953) zostało zaproponowane w ramach teorii targu przy założeniu skalarnych wypłat graczy. Nie może być zastosowane bezpośrednio w rozpatrywanym problemie wielokryterialnym. W pracy przedstawia się oryginalną konstrukcję umożliwiającą zastosowanie tej idei

Wariant	Preferencje producenta				Zmienne decyzyjne		Liczba zadaw. klientów
	Nazwa kryterium	Punkt rezerwacji	Punkt aspiracji	Wyznaczone wartości kryterium	e	u	
1	renoma zysk	50	70	123,97	58,22	40,22	6
		40	60	113,98			
2	renoma zysk	50	90	199,58	56,36	45,29	7
		40	50	77,42			
3	renoma zysk	10	30	77,85	69,5	50,28	7
		10	50	134,54			
4	renoma zysk	5	80	208,95	59,45	50,28	8
		5	30	73,32			
5	renoma zysk	60	80	106,55	67,60	50,28	7
		50	80	121,24			
6	renoma zysk	60	90	125,08	59,13	40,22	6
		70	90	113,42			
7	renoma zysk	40	100	138,74	58,13	40,39	6
		90	100	106,45			
8	renoma zysk	100	150	157,51	59,77	45,29	7
		50	100	101,33			

Rysunek 15: Porównanie wyników różnych decyzji producenta

i wyznaczenie propozycji mediacyjnych uwzględniających preferencje decydentów.

Rozpatrzono zagadnienie przetargu, w którym jego organizator poszukuje wykonawcy określonych usług lub dostawcy pewnego produktu, realizowanego w formie procedury aukcyjnej. Organizator przetargu ocenia oferty za pomocą wektora kryteriów lub atrybutów. Oferenci, składając oferty kierują się swoimi prywatnymi celami i mają swoje niezależne kryteria oceny. Przedstawiono ogólnych schemat prowadzenia aukcji wielokryterialnych z uwzględnieniem wspomnianą analizy wielokryterialnej prowadzonej przez organizatora aukcji i oferentów. Analizując różne relacje dominacji w przestrzeni kryteriów, rozważono różne warianty określania sposobu poprawy ofert w kolejnych rundach. Interesujące może być zastosowanie tych różnych wariantów w różnych rundach procesu aukcyjnego. Rozpatrzono następnie przykład realizacji przetargu zamkniętego na wykonanie obiektu użyteczności publicznej. Zaproponowano formę tego przetargu, realizowanego w wielorundowej aukcyjnej procedurze składania i oceny ofert. Opracowano odpowiedni model matematyczny, zawierający w szczególności sformułowanie zadania optymalizacji rozwiązywanego w trakcie analizy wielokryterialnej dokonywanej przez organizatora przetargu – decydenta. Skonstruowano wieloagentowy system



Rysunek 16: Wpływ wariantów decyzji producenta na stopnie zadowolenia klientow

komputerowy. Wykorzystując ten system przeprowadzono szereg sesji przykładowych realizacji przetargu, w celu analizy decyzji motywacyjnie zgodnych. Analizowano w szczególności różne możliwe zachowania oferentów i decydenta, ich decyzje i wzajemne relacje.

Rynkowy problem producenta i nabywców jego produktu, służył jako przykład do analizy motywacyjnie zgodnych wielokryterialnych mechanizmów decyzyjnych z wykorzystaniem komputerowych systemów wieloagentowych. W pracy przedstawiono model matematyczny problemu producenta i jego potencjalnych klientow. Model zawiera oryginalne sformułowania problemów optymalizacji rozwiązywanych w trakcie analizy wielokryterialnej wykonywanej przez producenta i klientow. Istotnym elementem modelu jest propozycja określania renomy jako jednego z kryteriow producenta, harmonizującego jego cele z celami potencjalnych klientow. Wielokryterialne analizy możliwych wariantow produktu dokonywane przez klientow i ich potencjalne decyzje wyboru umożliwiają ocenę jaką renomą będzie mógł się cieszyć konkretny wariant produktu oferowany przez producenta. Przedstawiono propozycje określania stopnia zadowolenia poszczególnych klientow z oferowanego wariantu produktu i ich uwzględnienia w określaniu kryterium renomy. Stopień zadowolenia klienta jest wyznaczany z zastosowaniem pojęcia BATNA,

przy wykorzystaniu założonej postaci funkcji użyteczności klienta. Propozycje te mają charakter wstępny. Celowe są dalsze prace dotyczące różnych sposobów określania tego stopnia zadowolenia, obejmujące w szczególności różne postaci funkcji użyteczności i ich skalowania na podstawie informacji uzyskiwanych od klientów z zastosowaniem interakcyjnych procedur. Został zbudowany wieloagentowy system komputerowy. Z jego pomocą przeprowadzono badania eksperymentalne. Sesje prowadzone w trakcie tych badań i ich wyniki pokazują interesujące relacje między wariantami wybieranymi przez konkretnych klientów, a decyzjami producenta, który starając się maksymalizować zysk dba jednocześnie o renomę w społeczności klientów. Dotyczy to zwłaszcza kwestii, jak decyzje klientów mogą wpływać na decyzję producenta, a następnie jak decyzja producenta jest odbierana przez klientów. Pokazano to na przykładzie wybranych wyników sesji z ośmioma klientami.

Bibliografia

- AIMMS - Optimization Software for Operations Research Applications.
www.aimms.com.
- Bellosta M-J, Brigui I, Kornman S., Vanderpooten D. (2004), A Multi-criteria Model for Electronic Auctions. ACM Symposium on Applied Computing, SAC'04, March 14-17, 2004, Nicosia, Cyprus.
- Bichler M., Kalagnanam J. (2005), Configurable offers and winner determination in multi-attribute auctions. *EJOR*, 160, 380-394.
- Bisschop J., Roelofs M. (2009) The AIMMS Language Reference. Paragon Decision Technology.
- Coombs, C.H; Dawes, R.M, Tversky, A. (1970), *Mathematical psychology: an elementary introduction*. Prentice-Hall, Oxford, England.
- Fisher R., Ury W. (1981), *Getting to Yes*. Houghton Mifflin, Boston.
- Klemperer P. (2004). *Auctions: Theory and Practice*, Princeton University Press.

- Kruś L.(2011), Wielokryterialne decyzje kooperacyjne, metody wspomaganie komputerowego. Instytut Badań Systemowych PAN, Seria: Badania systemowe. Tom 70. Warszawa 2011, 248 str.
- Kruś L., Skorupiński J., Toczyłowski E.(2011), Analiza motywacyjnie zgodnych decyzji w wielokryterialnym przetargu. *Automatyka*, vol. 15, No. 2, 2011, ss. 281-289.
- Kruś L., Skorupiński J., Toczyłowski E.(2010), Analiza motywacyjnie zgodnych decyzji wielokryterialnych na przykładzie problemu producenta i klientów. *Studia I Materiały Polskiego Stowarzyszenia Zarządzania Wiedzą*, Nr 31, 2010, ss. 108-119.
- Kruś L.(2001), Multicriteria decision support in bargaining, a problem of players's manipulations. In: T . Trzaskalik, J. Michnik (Eds.): Multiple objective and goal programming recent developments. Physica Verlag, Heidelberg, 143-160.
- Kruś L., Bronisz P.(1993), Some New Results in Interactive Approach to Multicriteria Bargaining. In: User Oriented Methodology and Techniques of Decision Analysis, A. P. Wierzbicki at al. (Eds.), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 397 , Springer Verlag, Berlin, 21-34.
- Milgrom P.R., Weber R.J. (1982), A theory of auctions and competitive bidding. *Econometrica* 50(5):1089-1122.
- Nash J.F., (1950), The Bargaining Problem, *Econometrica*, Vol. 18, 155-162.
- Nash J.F., (1953), Two-Person Cooperative Games, *Econometrica*, Vol. 21, 129-140.
- Ogryczak W., Kozłowski B. (2011), On Ordered Weighted Reference Point Model for Multi-attribute Procurement Auctions. In: ICCCI 2011, P. Jędrzejewicz et al. (Eds.), Part 1, LNCS 6922, pp. 294-303.
- Skorupiński J. (2010), Wieloagentowy system komputerowy wspomagający wielokryterialną analizę w problemie producenta i klientów. Praca dyplomowa inżynierska, IAIIS PW, Warszawa.

- De Smet Y. (2007), Multi-criteria auctions without full comparability of bids. *EJOR* 177, 1433-1452.
- Teich J.E., Wallenius H., Wallenius j., Zaitsev A. ((2006), A Multi-attribute e-auction mechanism for procurement: theoretical foundations. *EJOR* 175, 90-100.
- Toczyłowski E. (2003), *Optimalizacja procesów rynkowych przy ograniczeniach*. AOW EXIT, Warszawa.
- Toczyłowski E. (2009), Zgodność motywacji w mechanizmach rynku energii. *Rynek Energii*, II(IV), 88-95.
- Torgerson W. S. (1958), *Theory and Methods of Scaling*. Wiley, New York.
- Wierzbicki A.P.(1986), On the Completeness and Constructiveness of Parametric Characterizations to Vector Optimization Problems. *OR Spectrum*, Springer Verlag, Vol. 8, 73-87.
- Wierzbicki A.P., Kruś L., Makowski M. (1993), The Role of Multi-Objective Optimization in Negotiation and Mediation Support. *Theory and Decision*, special issue on "International Negotiation Support Systems: Theory, Methods and Practice" Vol. 34, (2).
- Wierzbicki A.P., Makowski M., Wessels J. (2000), *Model-based Decision Support Methodology with Environmental Applications*. Kluwer Academic Press, Dordrecht, Boston.
- Vickrey W.S. (1961) Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. *Journal of Finance*, Vol. 16, 8-37.

