

28/2004

Raport Badawczy

RB/33/2004

Research Report

**Modelowanie matematyczne
w inżynierii i ochronie
środowiska**

L. Bogdan, J. Studziński

**Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences**



POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr hab. inż. Zbigniew Nahorski

Warszawa 2004

**Polska Akademia Nauk
Instytut Badań Systemowych**

Raport /2004

Lucyna Bogdan, Jan Studziński

Modelowanie matematyczne w inżynierii i ochronie środowiska

Redakcja:
Jan Studziński

Warszawa 2004

Lucyna Bogdan, Jan Studziński

Modelowanie matematyczne w inżynierii i ochronie środowiska

Spis treści

Wstęp

1. Temperaturmodellierung im Boden anhand der Messungen aus dem meteorologische Monitoring (*Lucyna Bogdan, Jan Studzinski*)
2. Zastosowanie analizy harmoniczej w modelu temperatury gleby (*Lucyna Bogdan*)
3. Wspomaganie zarządzania miejską siecią wodociagową za pomocą modeli matematycznych (*Jan Studzinski*)

Wstęp

W raporcie zamieszczono trzy artykuły dotyczące modelowania matematycznego w zastosowaniu do problemów inżynierii i ochrony środowiska. Dwa artykuły omawiają problemy związane z modelowaniem zmiennych meteorologicznych, w tym przypadku z modelowaniem temperatury w glebie na podstawie pomiarów temperatury powietrza (L. Bogdan i J. Studzinski: *Temperaturmodellierung im Boden anhand der Messungen aus dem meteorologischechen Monitoring*, oraz L. Bogdan: *Zastosowanie analizy harmonicznej w modelu temperatury gleby*). Jest to rzeczywiste zagadnienie istotne w meteorologii i wynikające z faktu, że pomiary temperatury powietrza są stosunkowo łatwe do wykonywania, podczas gdy pomiary temperatury w glebie są uciążliwe i jednocześnie bardzo użyteczne w ogrodnictwie i rolnictwie. Trzeci artykuł dotyczy modelowania procesów związanych z eksploatacją sieci wodociągowej (J. Studzinski: *Wspomaganie zarządzania miejską siecią wodociagową za pomocą modeli matematycznych*) i omawia zagadnienia związane z tworzeniem systemu informatycznego do zarządzania przedsiębiorstwem wodociagowym przy użyciu modeli matematycznych.

Lucyna Bogdan

Zastosowanie analizy harmonicznej w modelu temperatury gleby

*(artykuł publikowany w wydawnictwie IBS PAN w serii Badania Systemowe, t. 37,
pt. Wspomaganie informatyczne rozwoju społeczno-gospodarczego i ochrony
środowiska)*

Zastosowanie analizy harmoniczej w modelu temperatury gleby

Lucyna Bogdan

Instytut Badań Systemowych, Polska Akademia Nauk
bogdan@ibspan.waw.pl

This paper concerns the modeling of soil temperatures changes as a function of air temperatures. The method of harmonic analysis was applied. The results are quite satisfactory and suggest that this method can be used for solving the tasks of approximation meteorological data problems.

Key words: harmonic analysis of measurements data, meteorological data monitoring, mathematical modeling of temperature changes.

1. Estymowanie trendu liniowego i składnika okresowego

Zadanie polega na dopasowaniu do zadanych danych w postaci

T	t ₁	t ₂	t _k
Y _t	Y ₁	Y ₂	Y _k

modelu o postaci

$$Y_t = \alpha + \beta t + Y_{ot}$$

gdzie Y_{ot} jest zmienną o okresie N . Należy znaleźć współczynniki α , β i postać trygonometryczną zmiennej Y_{ot} .

Posłużymy się Twierdzeniem 1

Załóżmy, że $a_n \in \mathbb{R}_n$, $n \in \mathbb{N}$, jest ciągiem o okresie $N \geq 2$. Dla $p \in \mathbb{N}$, $p \leq N/2$ i każdego $n \in \mathbb{N}$ zdefiniujemy

$$C_p(n) = \cos\left(p \frac{2\pi}{N} n\right), \quad S_p(n) = \sin\left(p \frac{2\pi}{N} n\right),$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_k$$

$$\alpha_p = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \cos\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) a_k \quad \text{dla} \quad 0 < p < N/2$$

$$\alpha_p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) a_k \quad \text{dla} \quad p = N/2$$

$$\beta_p = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \sin\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) a_k$$

Przy tych założeniach wyrażenie

$$a_n = \begin{cases} \alpha_0 + \sum_{j=1}^{N/2} \alpha_j C_j(n) + \sum_{j=1}^{N/2-1} \beta_j S_j(n), & n \in N, \text{ gdy } N \text{ jest parzyste} \\ \alpha_0 + \sum_{j=1}^{(N-1)/2} \alpha_j C_j(n) + \sum_{j=1}^{(N-1)/2} \beta_j S_j(n), & n \in N, \text{ gdy } N \text{ jest nieparzyste} \end{cases}$$

nazywamy postacią trygonometryczną ciągu.

Przykładowo dla $N=3$:

$$a_n = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right) + \beta_1 \sin\left(\frac{2\pi}{3} n\right)$$

dla $N=4$:

$$a_n = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\left(\frac{2\pi}{4} n\right) + \beta_1 \sin\left(\frac{2\pi}{4} n\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{2\pi}{4} n\right)$$

Do przeprowadzenia dowodu tego twierdzenia wykorzystuje niżej podany lemat i następujące:

Twierdzenie 2

Niech $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią unitarną i niech $(C_0, C_1, S_1, \dots, C_k, S_k) \in Y$ będą niezerowe i wzajemnie prostopadłe. Wtedy dla każdego $y \in Y$ rzut punktu y na podprzestrzeń $(C_0, C_1, S_1, \dots, C_k, S_k)$ jest dany wzorem

$$\hat{y} = \sum_{i=0}^k \left\langle y, \frac{y_i}{\|y_i\|^2} \right\rangle y_i$$

Jeżeli

$$C_n(t) = \cos(nt), \quad n=0, 1, \dots, k$$

$$S_n(t) = \sin(nt), \quad n=1, 2, \dots, k$$

to aproksymacją funkcji y elementami przestrzeni $(C_0, C_1, S_1, \dots, C_k, S_k)$ jest funkcja

$$\begin{aligned}
\hat{y} &= \sum_{n=0}^k \frac{\langle y, C_n \rangle}{\|C_n\|^2} C_n + \sum_{n=1}^k \frac{\langle y, S_n \rangle}{\|S_n\|^2} S_n = \\
&= \frac{\langle y, C_0 \rangle}{\|C_0\|^2} C_0 + \sum_{n=1}^k \frac{\langle y, C_n \rangle}{\|C_n\|^2} C_n + \sum_{n=1}^k \frac{\langle y, S_n \rangle}{\|S_n\|^2} S_n = \\
&= \alpha_0 + \sum_{n=1}^k \alpha_n C_n + \sum_{n=1}^k \beta_n S_n
\end{aligned}$$

Wykorzystano przy tym zależności:

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle, \text{ ponieważ } \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$$1 = C_0 \Rightarrow \|C_0\|^2 = 1$$

$$C_n(t) = \cos(nt) \Rightarrow \|C_n(t)\|^2 = \frac{N}{2}$$

$$S_n(t) = \sin(nt) \Rightarrow \|S_n(t)\|^2 = \frac{N}{2}$$

Przedstawione zależności, z wyjątkiem definicji normy, która została tu przypomniana dla jasności, wynikają, jak już było wspomniane, z następującego lematu:

Lemat: Dla dowolnych $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ i dla $p \in Z \cap \left[0, \frac{N}{2}\right]$ zdefiniujmy

$$C_p = \begin{bmatrix} \cos\left(p \frac{2\pi}{N} \cdot 1\right) \\ \cos\left(p \frac{2\pi}{N} \cdot 2\right) \\ \vdots \\ \cos\left(p \frac{2\pi}{N} \cdot N\right) \end{bmatrix} \quad C_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad S_p = \begin{bmatrix} \sin\left(p \frac{2\pi}{N} \cdot 1\right) \\ \sin\left(p \frac{2\pi}{N} \cdot 2\right) \\ \vdots \\ \sin\left(p \frac{2\pi}{N} \cdot N\right) \end{bmatrix}$$

Dla dowolnych $p, q \in Z \cap \left[0, \frac{N}{2}\right]$ będzie wówczas:

1. $\langle 1, C_p \rangle = \langle 1, S_p \rangle = \langle C_q, S_p \rangle = 0$
2. $\langle C_q, C_p \rangle = \langle S_q, S_p \rangle = 0$ jeśli $p \neq q$

$$3. \langle C_p, C_p \rangle = \langle S_p, S_p \rangle = 0 = \frac{N}{2} \quad \text{jeśli} \quad p < \frac{N}{2}$$

$$4. \langle C_p, C_p \rangle = N \quad \langle S_p, S_p \rangle = 0 \quad \text{jeśli} \quad p = \frac{N}{2}$$

Dowód lematu.

ad.1. Twierdzimy, że jeżeli $p \in Z$ i $\frac{p}{N} \notin Z$, to

$$\sum_{k=1}^N \cos\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) = \sum_{k=1}^N \sin\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) = 0 \quad (1)$$

Otóż dla

$$z = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) \in \mathbb{C} \quad (2)$$

mamy

$$1 - z \neq 0 \quad (3)$$

Dalej, ponieważ dla ogólnej postaci mamy

$$z = r \cos \phi + i r \sin \phi = r e^{i\phi} \quad (4)$$

czyli

$$z^n = (r e^{i\phi})^n = r^n e^{in\phi} \quad (5)$$

Formuła *von Moivre* stanowi, że

$$(\cos \phi + i \sin \phi)^n = \cos(n\phi) + i \sin(n\phi) \quad (6)$$

Wobec tego dla (1) otrzymujemy

$$z^n = \cos\left(p \frac{2\pi}{N} n\right) + i \sin\left(p \frac{2\pi}{N} n\right) \quad (7)$$

Dla $n=N$ otrzymujemy dla (1)

$$z^N = \cos\left(p \frac{2\pi}{N} N\right) + i \sin\left(p \frac{2\pi}{N} N\right) \quad (8)$$

Ponieważ $\cos(2\pi p) = 1$ i $\sin(2\pi p) = 0$, to $z^N = 1$ i stąd wynika, że

$$1 - z^N = 0 \quad (9)$$

Ponieważ

$$\sum_{k=1}^N \cos\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) + \sum_{k=1}^N \sin\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) = z + z^2 + \dots + z^N = z \frac{1-z^N}{1-z} \quad (10)$$

jako n-ty wyraz szeregu geometrycznego.

Wobec (3) i (9) mamy

$$z \frac{1-z^N}{1-z} = 0$$

Stąd wynika, że

$$\sum_{k=1}^N \cos\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) + \sum_{k=1}^N \sin\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) = 0 \quad (11)$$

i stąd

$$\langle 1, C_p \rangle = \langle 1, S_p \rangle = 0$$

ad.2. Jeżeli $p, q \in N \cap [0, N/2]$ i $p \neq q$, to, ponieważ $2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$, mamy

$$\begin{aligned} \langle C_p, C_q \rangle &= \sum_{k=1}^N \cos\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) \cos\left(q \frac{2\pi}{N} k\right) = 0 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N \cos\left(p+q \frac{2\pi}{N} k\right) + \sum_{k=1}^N \cos\left(p-q \frac{2\pi}{N} k\right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\langle 1, C_{p+q} \rangle + \langle 1, C_{p-q} \rangle) = 0 + 0 = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Dowód dla $\langle S_p, S_q \rangle$ przeprowadza się podobnie, korzystając z zależności

$$2 \sin x \cos y = \cos(x-y) - \cos(x+y).$$

ad.3. Jeżeli $p \in N \cap [0, N/2]$ i $p < N/2$, to

$$\begin{aligned} \langle C_p, C_p \rangle &= \sum_{k=1}^N \cos\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) \cos\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N \cos\left(p+p \frac{2\pi}{N} k\right) + \sum_{k=1}^N \cos\left(p-p \frac{2\pi}{N} k\right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N \cos\left(2p \frac{2\pi}{N} k\right) + \sum_{k=1}^N \cos\left(0 \cdot \frac{2\pi}{N} k\right) \right) = \frac{1}{2} (0 + N) = \frac{N}{2} \end{aligned} \quad (13)$$

a jeżeli $p = N/2$, to $\langle C_p, C_p \rangle = \frac{1}{2}(N+N) = N$.

Dowody dla $\langle S_p, S_p \rangle = \frac{N}{2}$ (dla $p < \frac{N}{2}$) i dla $\langle S_p, S_p \rangle = 0$ (dla $p = \frac{N}{2}$) są podobne.

Teraz dla przeprowadzenia dowodu twierdzenia 1 należy skorzystać z twierdzenia 2 i przedstawionego powyżej lematu. Dla naszego modelu

$$Y_t = \alpha + \beta t + Y_{ot} \quad (14)$$

podprzestrzeni, na której szukamy rzutu wektora Y (objektu), jest podprzestrzeń $(1, T, C_1, S_1, C_2, S_2, \dots, C_k, S_k)$.

Przykład: Mamy następujące dane:

t	1	2	3	4	5	6	7
Y_t	8	28	30	8	28	30	20

Zastosujemy model (14) ze zmienną Y_{ot} o okresie $N=6$. Przyjmujemy:

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 8 \\ 28 \\ 30 \\ 8 \\ 28 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} \quad C_1 = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{6} \cdot 1) \\ \cos(\frac{2\pi}{6} \cdot 2) \\ \cos(\frac{2\pi}{6} \cdot 3) \\ \cos(\frac{2\pi}{6} \cdot 4) \\ \cos(\frac{2\pi}{6} \cdot 5) \\ \cos(\frac{2\pi}{6} \cdot 6) \\ \cos(\frac{2\pi}{6} \cdot 7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad S_1 = \begin{pmatrix} \sin(\frac{2\pi}{6} \cdot 1) \\ \sin(\frac{2\pi}{6} \cdot 2) \\ \sin(\frac{2\pi}{6} \cdot 3) \\ \sin(\frac{2\pi}{6} \cdot 4) \\ \sin(\frac{2\pi}{6} \cdot 5) \\ \sin(\frac{2\pi}{6} \cdot 6) \\ \sin(\frac{2\pi}{6} \cdot 7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 1) \\ \cos(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 2) \\ \cos(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 3) \\ \cos(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 4) \\ \cos(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 5) \\ \cos(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 6) \\ \cos(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} \sin(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 1) \\ \sin(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 2) \\ \sin(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 3) \\ \sin(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 4) \\ \sin(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 5) \\ \sin(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 6) \\ \sin(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} \cos(3 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 1) \\ \cos(3 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 2) \\ \cos(3 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 3) \\ \cos(3 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 4) \\ \cos(3 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 5) \\ \cos(3 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 6) \\ \cos(3 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 7) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Obliczamy macierz $X = [1 \ T \ C_1 \ S_1 \ C_2 \ S_2 \ C_3]$ oraz macierze $X^T X$ i $X^T Y$. Rozwiązujemy układ równań

$$X^T X \alpha = X^T Y \quad (15)$$

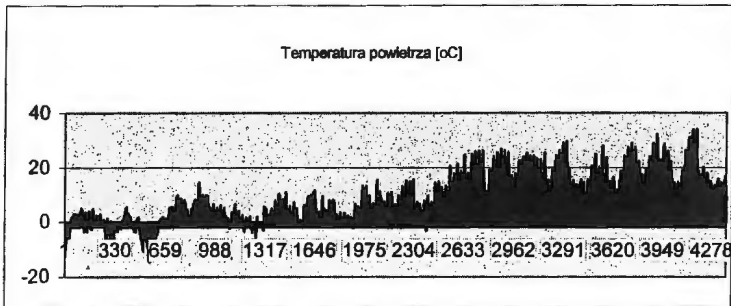
i otrzymujemy przykładowy model

$$Y_t = 2 + 2t - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot t\right) + 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot t\right) + 6\cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot t\right) - 6\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}) - (1)\cos(\pi t), \quad t \in \mathbb{N}$$

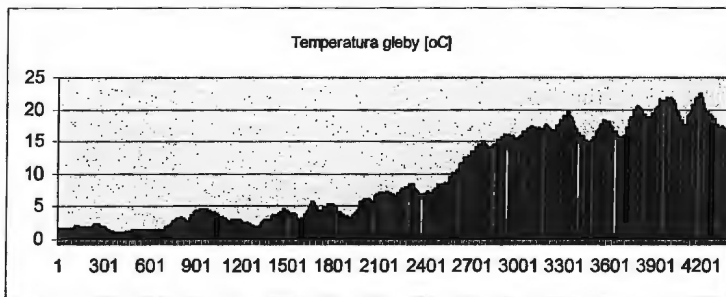
o współczynnikach: $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 2\sqrt{3}$, $\alpha_4 = 6$, $\alpha_5 = -6\sqrt{3}$, $\alpha_6 = -1$.

2. Model temperatury gleby

Powyzszą metode zastosowano do znalezienia modelu temperatury gleby na głębokości 50 cm w zale znosi od temperatury powietrza. Na rys.1 i na rys.2 przedstawiono dane pomiarowe, na podstawie których zostanie zbudowany model. Dane zawierają 4372 pomiary temperatury wykonane w ciągu sześciu miesięcy od stycznia do czerwca co godzinę.



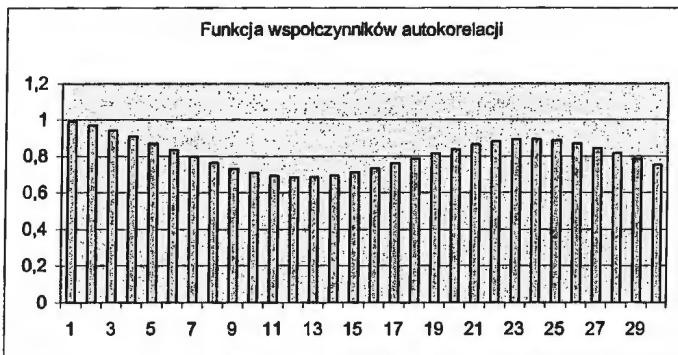
Rysunek 1. Pomiary temperatury powietrza.



Rysunek 2. Pomiary temperatury gleby.

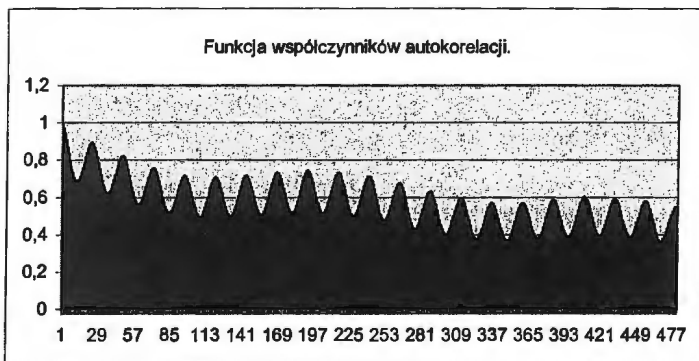
Rysunek pierwszy przedstawia pomiary temperatury powietrza, natomiast rysunek 2 przedstawia pomiary temperatury gleby na głębokości 50cm wykonywane w tych samych chwilach czasowych.

Na rys.3 przedstawiono funkcję autokorelacji temperatury gleby, która pokazuje 24 godzinny cykl występujący w pomiarach. Pomiary zostały wygładzone średnią ruchomą 24-godzinną.



Rysunek 3. Funkcja autokorelacji pomiarów temperatury gleby.

Rysunek 4 pokazuje funkcję autokorelacji temperatury gleby przy większym przesunięciu. Wyniki wskazują, że należy zwrócić uwagę na przesunięcie wynoszące 192 godziny. Rezultaty otrzymane w pracy (Bogdan, Studziński, 2003). potwierdzają to przypuszczenie.



Rysunek 4. Funkcja autokorelacji pomiarów temperatury gleby.

Powyższe rozważania służyły określeniu długości okresu składowej harmonicznej modelu. Mamy tutaj dużą dowolność, gdyż dysponujemy bardzo dużą próbką danych. Pierwszą próbę podjęto dla najkrótszego okresu, czyli 12 godzin, następną dla 24 godzin, potem kolejno 48 godzin, 72 godzin i dłuższych.

Tabela 1. Wyniki modelu przy wejściach wygładzonych średnią ruchomą 192 h

dla okresów 12h, 24h i 48h.

Analiza statystyczna			
	Współczynnik korelacji		
	R	0,95463	
	Błąd standardowy	1,453213	
	Liczba obserwacji	4175	
Parametr	zmienna	Wartość parametru	Odchylenie standardowe
α_0	-	3,3388	0,1919
α_w	w	0,0177	0,0183
α_{t-1}	X_{t-1}	0,8321	0,0054
α_1	$X_{\cos(2\pi t/48)}$	-0,1976	2,7375
β_1	$X_{\sin(2\pi t/48)}$	0,0019	0,0318
α_2	$X_{\cos(2\pi t/24)}$	0,2208	0,0318
β_2	$X_{\sin(2\pi t/24)}$	-1,7473	0,1013
α_3	$X_{\cos(2\pi t/12)}$	-0,0279	0,0396
β_3	$X_{\sin(2\pi t/12)}$	0,5040	5,4113

Tabela 2. Wyniki modelu przy wejściach wygładzonych średnią ruchomą 192 h

dla okresów 24h, 48h i 72h

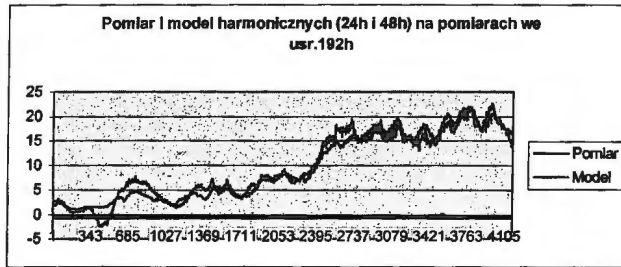
Analiza statystyczna			
	Współczynnik korelacji		
	R	0,8761	
	Błąd standardowy	2,93	
	Liczba obserwacji	4175	
Parametr	zmienna	Wartość parametru	Odchylenie standardowe
α_0	-	-3,3196	2,2275
α_w	w	0,6568	0,1087
α_{t-1}	X_{t-1}	0,7790	0,0107
α_1	$X_{\cos(2\pi t/48)}$	-152,729	202,3142

β_1	$X_{\sin(2\pi t/48)}$	-0,02856	0,06424
α_2	$X_{\cos(2\pi t/24)}$	-0,5859	0,0642
β_2	$X_{\sin(2\pi t/24)}$	-1,6351	0,3406
α_3	$X_{\cos(2\pi t/72)}$	2,7098	2,1397
β_3	$X_{\cos(2\pi t/72)}$	1775,926	2320,557

Jak widać powyżej, tworzenie modelu z okresem 72godz. nie zakończyło się sukcesem.

Tabela 3. Wyniki modelu przy wejściach wygładzonych średnią ruchomą 192 h dla okresów 24h i 48h .

Analiza statystyczna			
	<i>Współczynnik korelacji</i>		
	<i>R</i>	0,9546	
	<i>Błąd standardowy</i>	1,45	
	<i>Liczba obserwacji</i>	4175	
<i>Parametr</i>	<i>zmienna</i>	<i>Wartość parametru</i>	<i>Odchylenie standardowe</i>
α_0	-	-3,3438	0,1918
α_w	w	0,0185	0,0182
α_{t-1}	X_{t-1}	0,8308	0,0050
α_1	$X_{\cos(2\pi t/48)}$	0,0577	0,0319
β_1	$X_{\sin(2\pi t/48)}$	0,0013	0,0318
α_2	$X_{\cos(2\pi t/24)}$	0,2206	0,0318
β_2	$X_{\sin(2\pi t/24)}$	-1,7371	0,10001



Rysunek 5. Wyniki modelowania.

3. Zakończenie

Przedstawiony problem dotyczy modelowania zmian temperatury w glebie w funkcji temperatury powietrza. Do modelowania zastosowano metodę analizy harmonicznej, którą w pracy przedstawiono dość szczegółowo z wyprowadzeniami dowodów.

Otrzymano zadowalające wyniki modelowania, porównywalne z wynikami innych metod, wskazujące na poprawność zastosowanej metody do zadań aproksymacji pomiarów metrologicznych, gdzie zagadnienia występowania cykli pojawiają się bardzo często.

Literatura

Bogdan L., Studzinski J. (2003) Temperaturmodellierung im Boden anhand der Messungen aus dem meteorologische Monitoring. Workshop zur Modellierung und Simulation von Oekosystemen, Koelpinsee, Shaker Verlag, Aachen (w druku).

