JAN MARIAN WŁODEK
Zakład Biologii Stawów PAN

Krakowianowa metoda rozwiązywania równań regresji wielorakiej w zastosowaniu do badań biometrycznych w rybactwie

W badaniach nad populacjami ryb — w planie prac Zakładu Biologii Stawów są one w dużym zakresie uwzględniane — biometryczne ich opracowanie stanowi podstawę charakterystyki badanego pogłowia.

Dr J. M. Włodek w poszukiwaniu metod statystycznych najbardziej racjonalnych, a przy tym i praktycznych w zastosowaniu, oparł się na mało dotychczas rozpowszechnionym i w biometrii dotąd nie stosowanym rachunku krakowianowym.

Pracę niniejszą publikujemy ze względu na znaczenie, jakie może mieć zastosowanie metody krakowianowej dla zagadnień biologicznych w ogólności, a w naszym szczególnym wypadku dla badań nad populacjami ryb.

Jest to pierwsza praca z tego zakresu, mająca charakter metodyczny, dlatego nie zajmuje się ona bezpośrednio karpiem jako jednostką biologiczną. Dalsze prace o charakterze metodycznym i o zastosowaniu opracowanych metod do badań nad populacją karpia polskiego będą się ukazywały w następnych numerach Biuletynu.

REDAKCJA

I. Wstęp

Biometryczne opracowania populacji karpi i innych ryb opierają się między innymi na uchwyceniu związków zachodzących pomiędzy ich cechami. Ścisłe, a więc liczbowe, uchwycenie tych związków polega na obliczeniu współczynników korelacji i regresji.

W badaniach nad karpiem obliczano dotychczas współczynniki korelacji i regresji tylko między dwoma cechami, nie uwzględniając cech innych. Badania polegające na równoczesnym uchwyceniu większej ilości cech, tzn. badania współzależności wielorako — nie były przeprowadzane.

Przy obliczaniu współczynników uwzględniających większą ilość cech, głównym technicznym zagadnieniem staje się metoda rozwiązywania równań, w których równocześnie występuje większa ilość niewiadomych.

Praca ta ma na celu podanie metody, która wydaje się najlepszą.

Dotychczas używane metody rozwiązywania równań o wielu niewiadomych, a więc i równań normalnych, używanych w statystyce, są bardzo uciążliwe, wymagają zapisywania wielu pomocniczych elementów, dużego nakładu pracy, wiele miejsca, i ponad to nie doprowadzają do ogólnych rozwiązań (metoda Doolittle'a). Nie posiadają one również na ogół sprawdzianów poprawności obliczeń w trakcie ich przeprowadzania — a to pociąga za sobą konieczność przynajmniej dwukrotnego rozwiązywania niewiadomych.

Metody te możemy podzielić na dwie grupy: jedną z nich stanowiłaby metoda wyznacznikowa, drugą — metody sukcesywnej eliminacji. Zastosowanie ich jest bardzo uciążliwe. Szerokie zastosowanie metody regresji cząstkowych w statystyce rolniczej (jak i w ogóle w statystyce) dla obliczenia wielkości współzależności natrafiało dotychczas na trudności właśnie z tych powodów. Prof. UJ S. Schmidt[1] stosował do rozwiązywania układów równań normalnych metodę Doolittle'a. Była ona najlepsza ze wszystkich dotychczas znanych, gdyż pozwalała na sprawdzenie obliczeń w trakcie rozwiązywania równań.

Prof. UJ T. Banachiewicz[2] jest autorem zupełnie nowych metod rozwiązywania równań normalnych, które dzięki swoim zaletom okazały się w porównaniu z dawniej używanymi o wiele cenniejsze.

Istnieje kilka metod służących do rozwiązywania układów równań normalnych za pomocą krakowianów. W pracy niniejszej omówimy jedną z nich, najlepszą i najdogodniejszą dla naszych celów. Metody te prof. Banachiewicz nazwał krakowianowymi, ponieważ opierają się na specjalnych działaniach przeprowadzanych na tablicach liczb, które nazwał krakowianami (od nazwy miasta, w którym powstały).

Z pojawieniem się rachunku krakowianowego otwierają się nowe horyzonty dla zastosowania metody regresji i korelacji cząstkowych, a co za tym idzie — dla badania współzależności wielorako.

Rozwiązywanie układów równań normalnych metodą krakowianową wykazuje cenne jej zalety, a mianowicie: wydatne zmniejszenie nakładu pracy przy rozwiązywaniu równań, znaczne zmniejszenie ilości elementów, które należy zapisywać — a w następstwie tego oszczędność miejsca zapisu, stałą

---

[1] Por. S. Schmidt: *Zastosowanie korelacji wielorakiej i cząstkowej do badań gospodarstw rolnych* (Zjazd naukowo-rolniczy w Poznaniu 1929 r.).

[2] Por. w spisie literatury prace prof. T. Banachiewicza na temat krakowianów.

http://rcin.org.pl

kontrolę obliczeń — dzięki której raz rozwiązanego krakowianu nie potrzeba drugi raz sprawdzać. Posługiwanie się krakowianami nie jest uciążliwe, ponieważ elementy tablic krakowianowych dają się obliczać bez przerwy na maszynie do liczenia. Rachunek krakowianowy dysponuje ponad to uogólnieniami — wskutek czego wzory w postaci krakowianowej można łatwiej zapamiętać.

Krakowiany znalazły uznanie i obcych uczonych. Np. uczony włoski Belluzzi[3] tak się wyraża o rachunku krakowianowym:

«Metodą rozwiązującą ostatecznie z genialną prostotą niezmiernie ważne zagadnienie układów równań liniowych, sprowadzającą mozolne rozwiązywanie prawie do zabawy, jest metoda podana niedawno przez Banachiewicza»

II. Wiadomości z rachunku krakowianowego

Aby zrozumieć działania przy rozwiązywaniu współczynników regresji cząstkowej, należy omówić przede wszystkim najniezbędniejsze pojęcia rachunku krakowianowego.

Mając tablicę liczb, np.:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

gdzie n — numer wiersza, a m — numer kolumny, mamy subskrypty elementów oznaczające w tablicy miejsca, na których znajdują się elementy tablicy; pierwszy subskrypt odnosi się do kolumny, drugi do wiersza. Takie zestawienie tabelaryczne liczb określamy nazwą «krakowian». Dla zaznaczenia, że jest to krakowian, ujmuje się tablicę w klamry, np.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Można jeszcze dodać kolumnę sumową, powstałą z zesumowania elementów w wierszach:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \Sigma_1 \\ \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & \Sigma_n \end{vmatrix}$$

Krakowiany można też oznaczać literami alfabetu, które ujmuje się w klamry lub oznacza tłustym drukiem.

$$\{a\} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \text{ lub } \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

---

[3] Por. O. Belluzzi: *Scienza delle Construzzioni* t. II. cz. II str. 20 (Cyt. za W. Sierpińskim *Zasady algebry wyższej*, Warszawa 1946.)

Chcąc pomnożyć dwie tablice liczb przez siebie metodą krakowianową postępuje się według zasady: każda kolumna pierwszej tablicy przez każdą kolumnę tablicy drugiej. Jest to podstawowa zasada rachunku krakowianowego. Elementy tablicy wynikowej (iloczynowej) zapisuje się na miejscu o subskrypcie, w którym pierwszą cyfrę (numer kolumny) wyznaczają numery kolumn pierwszego krakowianu, a drugą cyfrę (numer wiersza) wyznaczają numery kolumn krakowianu drugiego.

Pierwszy krakowian wyznacza zatem numer kolumny elementowi wynikowemu, a kolumny drugiego krakowianu wyznaczają miejsca w wierszu krakowianu wynikowego. Z tego powodu w rachunku krakowianowym bardzo ważny jest porządek czynników przy mnożeniu.

Pomnożyć dwie kolumny przez siebie, to znaczy pomnożyć naprzeciw siebie stojące elementy, a ich iloczyny dodać, to jest wykonać sumomnożenie.

Bardzo ważne jest to, że takie sumomnożenie dwóch kolumn dokonujemy na maszynie do liczenia — automatycznie, nic nie zapisując na boku.

Mnożąc przez siebie krakowiany $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, gdzie

$$\boldsymbol{a} = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{matrix}\right| \quad \boldsymbol{b} = \left|\begin{matrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{matrix}\right|$$

otrzymujemy w wyniku krakowian iloczynowy $\boldsymbol{c}$:

$$\begin{array}{|ccc|} \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{3} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{array} \cdot \begin{array}{|cc|} \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{2} \\ b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{array} = \begin{array}{|ccc|c} \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{3} & \\ c_{11} & c_{21} & c_{31} & 1 \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & 2 \\ & & & \end{array}$$

czyli: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$.

Liczby wpisane ponad krakowianami oznaczają numerację kolumn. Pierwszy krakowian wyznacza numery kolumn w krakowianie wynikowym, a kolumny drugiego krakowianu (drugi czynnik w tym mnożeniu) wyznaczają numery wierszy krakowianu wynikowego. Skutkiem tego krakowian wynikowy ma tyle wierszy, ile ma kolumn krakowian drugi, przy czym:

$$c_{11} = \begin{array}{|c|} \multicolumn{1}{c}{1} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{array} \begin{array}{|c|} \multicolumn{1}{c}{2} \\ b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{array} \text{ to znaczy: } \{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13}\}$$

(to jest sumomnożenie)

$$c_{12} = \begin{array}{|c|} \multicolumn{1}{c}{1} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{array} \begin{array}{|c|} \multicolumn{1}{c}{2} \\ b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \end{array} = \{a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{23}\} \text{ itd.}$$

Obliczenie ostatniego elementu przedstawia się następująco:

$$c_{31} = \begin{array}{c} 3 \\ \left| \begin{array}{c} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \left| \begin{array}{c} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{array} \right| \end{array} = \{ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{12} + a_{33}b_{13} \}.$$

Aby zatem obliczyć iloczyn krakowianów **a** oraz **b**, należy wykonać dla danego przykładu 6 sumomnożeń. Pierwsza cyfra w subskryptach elementów krakowianu wynikowego odnosi się do kolumn pierwszego krakowianu w porządku mnożenia, a cyfra druga do kolumn krakowianu drugiego. Subskrypty elementów krakowianu iloczynowego wskazują więc, z których kolumn przez ich pomnożenie powstał dany element.

Mogą występować krakowiany jednokolumnowe, np.:

$$\boldsymbol{d} = \left| \begin{array}{c} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \\ \\ d_{1n} \end{array} \right|$$

lub jednowierszowe:

$$\boldsymbol{e} = \{ e_{11} e_{21} e_{31} \ldots e_{m1} \}.$$

Każdy element w krakowianie iloczynowym $\boldsymbol{c}$ przytoczonym powyżej, powstał przez pomnożenie dwóch krakowianów jednokolumnowych.

W myśl zasady mnożenia krakowianów przez siebie otrzymuje się po pomnożeniu krakowianu $\boldsymbol{a}$ przez $\boldsymbol{b}$, ale w porządku odwrotnym niż powyżej iloczyn:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \left| \begin{array}{cc} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{array} \right| \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{array} \right| \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \left| \begin{array}{cc} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \\ c_{13} & c_{23} \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Otrzymany krakowian wynikowy ma te same elementy co krakowian wynikowy $\boldsymbol{c}$ z poprzedniego mnożenia. Nie jest to jednak ten sam krakowian, ponieważ nie ma tej samej ilości wierszy i kolumn. Krakowian $\boldsymbol{c}$ bowiem ma 3 kolumny i 2 wiersze, a krakowian wynikowy z drugiego mnożenia ma 2 kolumny i 3 wiersze. Nastąpiła więc zamiana liczby kolumn na liczbę wierszy, a liczby wierszy na liczbę kolumn. Określa się to jako transpozę krakowianu $\boldsymbol{c}$. Transpozę taką oznaczamy literą τ. Jak widać, transpozę tę spowodowała zmiana porządku czynników w mnożeniu. Wynika z tego, że mnożenie krakowianowe nie jest przemienne.

Wykonane mnożenie można przedstawić następująco:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = \tau \boldsymbol{c}$$

http://rcin.org.pl

gdzie τ oznacza transpozę krakowianu $\boldsymbol{c}$.

Literą τ oznacza się też krakowian jedynkowy, tj. taki, który ma na przekątni same jedynki, a w pozostałych miejscach zera, np.:

$$\tau = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ilość jedynek w τ dobiera się stosownie do ilości wierszy krakowianu mnożonego przez τ. Krakowian τ jest szczególnym wypadkiem krakowianów przekątnych, tj. takich, które mają elementy tylko na przekątni.

Mnożąc krakowian $\boldsymbol{a}$ przez τ otrzymuje się:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

czyli $\boldsymbol{a} \cdot \tau = \boldsymbol{a}$

Przy zmianie porządku mnożenia otrzymuje się:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

czyli nastąpiła transpoza krakowianu $\boldsymbol{a}$ — zamiana kolumn na wiersze. Mnożenie to można zapisać ogólnie:

$$\tau \cdot \boldsymbol{a} = \tau \boldsymbol{a}.$$

Mnożenie krakowianu τ przez inny krakowian powoduje zawsze transpozę tego krakowianu. Żeby osiągnąć tę transpozę, τ musi się znajdować na pierwszym miejscu, bo gdy znajduje się na drugim miejscu w porządku mnożenia, wówczas transpoza nie występuje.

Bardzo ważną właściwością mnożenia krakowianowego jest jego stała kontrola. Wymnażając przez siebie dwa krakowiany, opatrzone kolumnami sumowymi, można stwierdzić, że wymnażając kolumnę sumową pierwszego krakowianu przez kolumny krakowianu drugiego, w krakowianie wynikowym otrzymuje się nowy wiersz i nową kolumnę — kolumnę sumową. Oznacza to, że elementy w kolumnie sumowej muszą odpowiadać sumie elementów w danym wierszu, i tak samo — elementy w wierszu sumowym muszą odpowiadać sumie elementów kolumny. Przez pomnożenie dwóch kolumn sumowych krakowianów **a** oraz **b** otrzymuje się element, którego wartość musi się równać sumie generalnej krakowianu wynikowego. Przez porównanie więc wartości elementu w kolumnie lub wierszu sumowym z odpowiednią sumą wiersza lub kolumny bardzo łatwo można stwierdzić, czy w obliczeniach nie ma błędu. Sumy wierszy lub kolumn winny się równać odpowiednim elementom kolumn i wierszy sumowych. Sprawdzian ten pozwala kontrolować mnożenie krakowianów wiersz po wierszu, np.:

http://rcin.org.pl

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \Sigma a \\ \hline a_{11} & a_{21} & a_{31} & \Sigma_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \Sigma_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \Sigma_3 \end{array} \cdot \begin{array}{ccc} 1 & 2 & \Sigma b \\ \hline b_{11} & b_{21} & \Sigma_1 \\ b_{12} & b_{22} & \Sigma_2 \\ b_{13} & b_{23} & \Sigma_3 \end{array} = \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & \Sigma c & \\ \hline c_{11} & c_{21} & c_{31} & c_{\Sigma a1} & 1 \\ c_{12} & c_{22} & c_{33} & c_{\Sigma a2} & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ c_{1\Sigma b} & c_{2\Sigma b} & c_{3\Sigma b} & c_{\Sigma a\Sigma b} & \Sigma \end{array}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

Elementy **c**, gdzie występuje znak sumy w subskrypcie, oblicza się w następujący sposób:

$$c_{\Sigma a1} = \begin{array}{|c|} \Sigma a \\ \hline \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} 1 \\ \hline b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{array} \text{ itd. } c_{\Sigma b1} = \begin{array}{|c|} 1 \\ \hline a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \Sigma b \\ \hline \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \end{array} \text{ itd.}$$

Element sumy generalnej $c_{\Sigma a\Sigma b} = \begin{array}{|c|} \Sigma a \\ \hline \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \Sigma b \\ \hline \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \end{array}$

Zazwyczaj stosuje się tylko kontrolę wierszy przez obliczanie kolumny sumowej, a nie oblicza się elementu sumy generalnej.

Przykład praktycznego zastosowania mnożenia krakowianów

W przykładzie wykorzystano dane pochodzące z materiałów pomiarowych zebranych w czasie odłowów karpi w jesieni 1953 r., a przeprowadzonych dla celów selekcyjnych w gospodarstwach doświadczalnych Zakładu Biologii Stawów PAN.

Pomiary te dotyczą między innymi następujących cech karpia: jego grubości, długości całkowitej oraz największej wysokości.

W podanym poniżej przykładzie dla uproszczenia rachunku uwzględniono tylko te trzy wyszczególnione cechy i to w odniesieniu do trzech tylko osobników.

Badane cechy (zmienne) oznaczono:

długość całkowita karpia w cm $= X_1$
największa wysokość karpia w cm $= X_2$
grubość karpia w cm $= X_3$

Wybrane dla przykładowego obliczenia wymiary 3 karpi są następujące:

Nr karpia	Długość całkowita w cm — X_1	Największa wysokość w cm — X_2	Największa grubość w cm — X_3
karp nr 10	34,1	11,1	6,0
,, ,, 20	36,4	13,0	6,3
,, ,, 30	34,4	11,2	5,5

Wymiary te tworzą tablicę liczb i można z nich utworzyć krakowian $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a} = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \Sigma a \\ \hline 34{,}1 & 11{,}1 & 6{,}0 & 51{,}2 \\ 36{,}4 & 13{,}0 & 6{,}3 & 55{,}7 \\ 34{,}4 & 11{,}2 & 5{,}5 & 51{,}1 \end{array}$$

Cyfry umieszczone ponad krakowianem oznaczają numery kolumn. Oznaczenia w tym przykładzie odpowiadają oznaczeniom zmiennych. Pomnóżmy krakowian **a** przez krakowian **b** utworzony z 2 innych, nie uwzględnionych w krakowianie **a**, zmiennych dla tych samych karpi, a mianowicie: długość głowy i najniższą wysokość:

Nr karpia	Długość głowy w cm	Najniższa wysokość w cm
Karp nr 10	8,5	4.0
„ „ 20	10,3	5,0
„ „ 30	9,0	4,0

Ze zmiennych tych można utworzyć krakowian $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{b} = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & \Sigma b \\ \hline 8{,}5 & 4{,}0 & 12{,}5 \\ 10{,}3 & 5{,}0 & 15{,}3 \\ 9{,}0 & 4{,}0 & 13{,}0 \end{array}$$

Mnożac krakowian $\boldsymbol{a}$ przez $\boldsymbol{b}$ otrzymuje się

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}.$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \Sigma a \\ \hline 34{,}1 & 11{,}1 & 6{,}0 & 51{,}2 \\ 36{,}4 & 13{,}0 & 6{,}3 & 57{,}7 \\ 34.4 & 11{,}2 & 5{,}5 & 51{,}1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & \Sigma b \\ \hline 8{,}5 & 4{,}0 & 12{,}5 \\ 10{,}3 & 5{,}0 & 15.3 \\ 9{,}0 & 4{,}0 & 13{,}0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & \Sigma & \\ \hline 974{,}37 & 329{,}05 & 165{,}39 & 1468.81 & 1 \\ 456{,}00 & 154{,}20 & 77{,}50 & 687.70 & 2 \\ \cline{4-4} & & & 2156.51 & \end{array}\right|$$

$$c_{11} = \left|\begin{array}{c} 1 \\ \hline 34{,}1 \\ 36.4 \\ 34.4 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} 1 \\ \hline 8{,}5 \\ 10{,}3 \\ 9{,}0 \end{array}\right| = 34{,}1 \cdot 8{,}5 + 36{,}4 \cdot 10{,}3 + 34{,}4 \cdot 9{,}0 = 289{,}85 + 374{,}92 - 309.60 = 974{,}37$$

$$c_{12} = \left|\begin{array}{c} 1 \\ \hline 34{,}1 \\ 36.4 \\ 34.4 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} 2 \\ \hline 4.0 \\ 5{,}0 \\ 4.0 \end{array}\right| = 34.1 \cdot 4{,}0 + 36{,}4 \cdot 5{,}0 + 34.4 \cdot 4{,}0 = 136{,}40 + 182{,}00 + 157.60 = 456{,}00$$

Podobnie postępujemy dla obliczenia dalszych elementów krakowianu $\boldsymbol{c}$.

Sumę generalną krakowianu wynikowego otrzymuje się przez pomnożenie dwóch ostatnich kolumn sumowych:

$$c_{\Sigma a \Sigma b} = \begin{array}{c} \Sigma a \\ \left| \begin{array}{c} 51,2 \\ 55,7 \\ 51,1 \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} \Sigma b \\ \left| \begin{array}{c} 12.5 \\ 15.3 \\ 13.0 \end{array} \right| \end{array} = 51,2 \cdot 12,5 + 55,7 \cdot 15,3 + 51,1 \cdot 13,0 = 640.00 + 852,21 + 664,30 = 2156,51$$

Sumy generalnej, która dla naszego przykładu wynosi 2156,51, zwykle nie oblicza się, bo wystarcza kontrola sumowa w wierszach. Po zesumowaniu elementów c z pierwszego wiersza (oczywiście bez ostatniego elementu sumowego) dostaje się sumę równą wartości ostatniego elementu znajdującego się w kolumnie sumowej. Jest to dowodem, że pierwszy wiersz został dobrze obliczony. Tak samo postępuje się z drugim wierszem. Ponieważ sumy zgadzają się, zatem iloczyn krakowianów $\boldsymbol{a}$ oraz $\boldsymbol{b}$ obliczono dobrze.

Tych wszystkich elementów, które zostały tu podane, nie potrzeba zapisywać, gdy praca wykonywana jest na maszynie do liczenia. Maszyna rejestruje automatycznie wszystkie poprzednie etapy obliczeń — tak, że w wyniku dostaje się od razu gotowe sumomnożenie, bez zapisywania, tak jak powyżej, elementów pośrednich. Ten wzgląd decyduje o tym, że działania krakowianowe są predestynowane do liczenia na arytmometrze.

Mnożąc te krakowiany w odwrotnym porządku: $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ otrzymuje się:

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = \tau \boldsymbol{c}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & \Sigma b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \Sigma a \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 8,5 & 4,0 & 12,5 \\ 9,3 & 5,0 & 15,3 \\ 10,3 & 4,0 & 13,0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cccc} 34,1 & 11,1 & 6,0 & 51,2 \\ 36,4 & 13,0 & 6,3 & 55,7 \\ 34,4 & 11.2 & 5,5 & 51,1 \end{array} \right| = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} 974,37 & 456.00 \\ 329,05 & 154,20 \\ 165,39 & 77,50 \end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\ \hline 1468,81 \quad 687,70 \quad 2156,51 \end{array}$$

Krakowian $\tau \boldsymbol{c}$ powstał z zamiany kolumn krakowianu $\boldsymbol{c}$ na wiersze, a wierszy na kolumny. Ponieważ w krakowianie $\boldsymbol{c}$ nie mnożyliśmy kolejno kolumn krakowianu $\boldsymbol{a}$ przez kolumnę Σb krakowianu $\boldsymbol{b}$ — dlatego też nie ma w krakowianie $\tau \boldsymbol{c}$ kontroli wierszowej, tylko kontrola kolumnowa. Chcąc więc wprowadzić tu kontrolę wierszy, należałoby pomnożyć kolumnę Σb z krakowianu $\boldsymbol{b}$ kolejno przez kolumny w krakowianie $\boldsymbol{a}$.

Z kolei podajemy przykład mnożenia, w którym jako jeden czynnik występuje krakowian τ. Weźmy np. krakowian $\boldsymbol{a}$ i pomnóżmy go przez τ. τ dobieramy odpowiednio do krakowianu $\boldsymbol{a}$. Niech τ występuje jako drugi czynnik.

$$\left| \begin{array}{cccc} 34,1 & 11,1 & 6,0 & 51,2 \\ 36.4 & 13.0 & 6,3 & 55,7 \\ 34.4 & 11,2 & 5,5 & 51,1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 34,1 & 11,1 & 6,0 & 51,2 \\ 36,4 & 13.0 & 6,3 & 55.7 \\ 34,4 & 11,2 & 5,5 & 51.1 \end{array} \right|$$

bo $\boldsymbol{a} \cdot \tau = \boldsymbol{a}$.

Natomiast, gdy τ wystąpi jako pierwszy czynnik w mnożeniu, następuje transpozа, bo $\tau \cdot \boldsymbol{a} = \tau \boldsymbol{a}$.

http://rcin.org.pl

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{cccc} 34{,}1 & 11{,}1 & 6{,}0 & 51{,}2 \\ 36{,}4 & 13{,}0 & 6{,}3 & 55{,}7 \\ 34{,}4 & 11{,}2 & 5{,}5 & 51{,}1 \end{array}\right| = \begin{array}{c} \left|\begin{array}{ccc} 34{,}1 & 36{,}4 & 34{,}4 \\ 11{,}1 & 13{,}0 & 11{,}2 \\ 6{,}0 & 6{,}3 & 5{,}5 \end{array}\right| \\ \hline \begin{array}{ccc} 51{,}2 & 55{,}7 & 51{,}1 \end{array} \end{array}$$

i tak np. $\tau \cdot \boldsymbol{b} = \tau\boldsymbol{b}$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{cc} 8{,}5 & 4{,}0 \\ 9{,}3 & 5{,}0 \\ 10{,}3 & 4{,}0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 8{,}5 & 9{,}3 & 10{,}3 \\ 4{,}0 & 5{,}0 & 4{,}0 \\ & & \end{array}\right|$$

Każdy krakowian można podnieść do drugiej potęgi. W tym celu mnoży się każdą kolumnę krakowianu, który podnosi się do drugiej potęgi, przez każdą kolumnę tego krakowianu.

Na przykład:

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{a} & \cdot & \boldsymbol{a} & = & \boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{A} \\ \left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \Sigma_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \Sigma_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \Sigma_3 \end{array}\right| & \cdot & \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{array}\right| & = & \left|\begin{array}{cccc} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{\Sigma 1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{\Sigma 2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{\Sigma 3} \end{array}\right| \end{array}$$

Podnieśmy do drugiej potęgi krakowian $\boldsymbol{a}$. Według podanej zasady należy pomnożyć każdą kolumnę przez każdą kolumnę.

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \Sigma \\ \hline 34{,}1 & 11{,}1 & 6{,}0 & 51{,}2 \\ 36{,}4 & 13{,}0 & 6{,}3 & 55{,}7 \\ 34{,}4 & 11{,}2 & 5{,}5 & 51{,}1 \end{array}\right|^2 = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \Sigma \\ \hline 34{,}1 & 11{,}1 & 6{,}0 & 51{,}2 \\ 36{,}4 & 13{,}0 & 6{,}3 & 55{,}7 \\ 34{,}3 & 11{,}2 & 5{,}5 & 51{,}1 \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \Sigma \\ \hline 34{,}1 & 11{,}1 & 6{,}0 & 51{,}2 \\ 36{,}4 & 13{,}0 & 6{,}5 & 55{,}7 \\ 34{,}4 & 11{,}2 & 5{,}5 & 51{,}1 \end{array}\right|$$

Przykłady mnożenia niektórych elementów krakowianu $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 34{,}1 \cdot 34{,}1 + 36{,}4 \cdot 36{,}4 + 34{,}4 \cdot 34{,}4 = 3671{,}13 \\ A_{33} &= 6{,}0 \cdot 6{,}0 + 6{,}3 \cdot 6{,}3 + 5{,}5 \cdot 5{,}5 = 105{,}94 \\ A_{\Sigma 3} &= 51{,}2 \cdot 6{,}0 + 55{,}7 \cdot 6{,}3 + 51{,}1 \cdot 5{,}5 = .\ 939{,}16 \end{aligned}$$

Krakowian $\boldsymbol{A}$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & \Sigma & \\ \hline 3671{,}13 & 1236{,}99 & 623{,}12 & 5531{,}24 & 1 \\ 1236{,}99 & 417{,}65 & 210{,}10 & 1864{,}74 & 2 \\ 623{,}12 & 210{,}10 & 105{,}94 & 939{,}16 & 3 \end{array}$$

Rozpatrzmy bliżej ten krakowian potęgowy. Jest to krakowian mający tyle wierszy ile kolumn (bez kolumny sumowej, którą się dodaje tylko dla kontroli). Zauważmy też, że potęgując jakiś krakowian $\boldsymbol{a}$ nie potrzeba wypisywać dwa razy tego samego krakowianu, jak to zrobiono powyżej — wystarczy zapisać go raz. Numery kolumn krakowianu $\boldsymbol{a}$ wyznaczają więc zarówno numer kolumny, jak i numer wiersza w krakowianie $\boldsymbol{A}$. Musimy też zauważyć, że np. $A_{21} = A_{12}$, bo na ten element składają się dwie takie same kolumny, a tylko porządek subskryptów decyduje o miejscu tego elementu w krakowianie $\boldsymbol{A}$. Skutkiem tego otrzymuje się cały szereg elementów równowartościowych.

Jeżeli przeprowadziłoby się linię dzielącą po przekątni krakowian $\boldsymbol{A}$ według elementów $A_{11} A_{22} A_{33}$ (elementów przekątniowych), to możemy zauważyć, że każdy element krakowianu $\boldsymbol{A}$ występuje raz nad tą linią, a raz pod nią. Pamiętając o tej właściwości, krakowian taki można zapisać opuszczając wszystkie elementy znajdujące się pod przekątną. Otrzymuje się wówczas:

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 3671,13 & 1236,99 & 623,12 & 5531,24 \\ & 417,65 & 210,10 & 1864.74 \\ & & 105,94 & 939,16 \end{vmatrix}$$

Elementy kolumny sumowej świadczą o tym, że sumowano wartości stojące poza przekątną. Zauważmy jeszcze, że sumując pierwszy wiersz — dostaniemy wartości elementu sumowego, sumując zaś wiersz drugi plus wartość drugiego elementu z pierwszego wiersza — dostaje się element sumowy drugiego wiersza, a sumując ostatnią kolumnę, dostaniemy ostatni element sumowy.

Weźmy inny krakowian, np. $\boldsymbol{b}$, różny od krakowianu $\boldsymbol{a}$ i podnieśmy go do drugiej potęgi:

$$\boldsymbol{b} = \begin{array}{|ccc|} 1 & 2 & \Sigma \\ \hline 8.5 & 4.0 & 12.5 \\ 10.3 & 5.0 & 15.3 \\ 9,0 & 4,0 & 13,0 \end{array} \qquad \boldsymbol{b}^2 = \begin{vmatrix} 259,34 & 121,50 & 380.84 \\ 121,50 & 57,00 & 178,50 \end{vmatrix}$$

Mimo, że krakowian $\boldsymbol{b}$ nie jest krakowianem kwadratowym, to jednak po spotęgowaniu dał również krakowian kwadratowy.

Jeżeli można obliczyć kwadrat krakowianowy, to krakowian $\boldsymbol{a}$ będzie krakowianem pierwiastkowym w stosunku do krakowianu $\boldsymbol{A}$, bo $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{A}$, czyli $\sqrt{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{a}$. W naszym przypadku mamy już dany pierwiastek krakowianu $\boldsymbol{A}$. Zachodzi pytanie, jak obliczyć pierwiastek z krakowianu np. $\boldsymbol{R}$ — to znaczy, w jaki sposób znaleźć taki krakowian — oznaczmy go jako $\boldsymbol{r}$ — by pomnożywszy go przez siebie otrzymać z powrotem $\boldsymbol{R}$?

Metoda obliczania takiego pierwiastka jest najważniejszą dla nas metodą krakowianową, gdyż wiąże się ściśle z obliczaniem współczynników regresji cząstkowej. Dlatego omówiono ją osobno.

III. Obliczanie współczynników regresji cząstkowej z równań normalnych za pomocą krakowianowej metody pierwiastka kanonicznego

Pomiary odnoszące się do 5 cech karpi handlowych (podane poniżej) tworzą tablicę liczb — czyli krakowian pomiarów odnoszących się do 130 karpi. W przykładzie tym wykorzystano dane pochodzące z materiałów pomiarowych zebranych w czasie odłowów karpi w jesieni 1952 przez ówczesną Sekcję Rybacką Komisji Ekologiczno-Rolniczej Polskiej Akademii Umiejętności. Kolumny *Nr karpia* nie bierze się w obliczeniach pod uwagę, jest podana tylko dla porządku. Kolumna *Waga* odnosi się do wyrazów wolnych w równaniach normalnych, ponieważ dane znajdujące się w niej przyjęliśmy jako zmienną zależną.

Nr karpia	N 1 kolumna	Długość całkowita w cm 2 kolumna	Największa wysokość w cm 3 kolumna	Największa grubość w cm 4 kolumna	Długość jelit w cm 5 kolumna	Waga karpia w g 6 kolumna
1	1	32,2	11,4	5,4	76	692,6
2	1	30,2	11,9	5,4	75	633,0
3	1	29,6	10,6	5,0	66	554,4
4	1	30,8	11,0	5,5	75	612,7
:	:	:	:	:	:	:
130	1	33,4	11,3	5,0	80,5	650,0

Kolumna *N* oznacza częstotliwość wystąpienia danych pomiarów, a więc jeden, ponieważ mamy do czynienia z szeregiem statystycznym szczegółowym.

Dla zmiennych przyjęte zostały następujące oznaczenia:

waga karpia w g $= X_1$
długość całkowita karpia w cm $= X_2$
największa wysokość w cm $= X_3$
największa grubość w cm $= X_4$
długość jelit w cm $= X_5$

Chcąc obliczyć wielkość współzależności, jaka zachodzi pomiędzy wagą 130 karpi, przyjętą jako zmienną zależną, a każdą inną zmienną, przy równoczesnym uwzględnieniu wszystkich pozostałych zmiennych, musi się obliczyć współczynniki regresji cząstkowej. Współczynniki te otrzymuje się po rozwiązaniu równania:

$$X_1 = a_1 + b_{12\cdot345}X_2 + b_{13\cdot245}X_3 + b_{14\cdot235}X_4 + b_{15\cdot234}X_5$$

Przyjmując:

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ b_{12\cdot345} &= A \qquad b_{14\cdot235} = C \\ b_{13\cdot245} &= B \qquad b_{15\cdot234} = D \end{aligned}$$

otrzymuje się szukane równanie:

http://rcin.org.pl

$$X_1 = a + AX_2 + BX_3 + CX_4 + DX_5.$$

Wiadomo, że dla znalezienia współczynników regresji cząstkowej należy rozwiązać odpowiedni układ równań normalnych. Ponieważ równanie to odnosi się do 130 karpi, więc dla wszystkich karpi można zapisać:

$$\Sigma X_1 = Na + A\Sigma X_2 + B\Sigma X_3 + C\Sigma X_4 + D\Sigma X_5.$$

Równania normalne układa się w sposób powszechnie przyjęty. W podanym niżej przykładzie kolumna wyrazów wolnych występuje po prawej stronie:

$$\begin{array}{llllll}
Na & + A\Sigma X_2 & + B\Sigma X_3 & + C\Sigma X_4 & + D\Sigma X_5 & = \Sigma X_1 \\
a\Sigma X_2 & + A\Sigma X_2^2 & + B\Sigma X_3 X_2 & + C\Sigma X_4 X_2 & + D\Sigma X_5 X_2 & = \Sigma X_1 X_2 \\
a\Sigma X_3 & + A\Sigma X_2 X_3 & + B\Sigma X_3^2 & + C\Sigma X_4 X_3 & + D\Sigma X_5 X_3 & = \Sigma X_1 X_3 \\
a\Sigma X_4 & + A\Sigma X_2 X_4 & + B\Sigma X_3 X_4 & + C\Sigma X_4^2 & + D\Sigma X_5 X_4 & = \Sigma X_1 X_4 \\
a\Sigma X_5 & + A\Sigma X_2 X_5 & + B\Sigma X_3 X_5 & + C\Sigma X_4 X_5 & + D\Sigma X_5^2 & = \Sigma X_1 X_5
\end{array}$$

Przeprowadzone kolejne sumomnożenia równania pierwszego przez zmienne niezależne dają w rezultacie każdą kolumnę pomnożoną przez każdą kolumnę. Nie jest to nic innego, jak obliczanie kwadratu krakowianowego. Kolumna szósta — *Waga* — odnosi się do wyrazów wolnych w równaniach normalnych, ponieważ przyjęto ją jako zmienną zależną.

Przy podniesieniu do kwadratu krakowianu złożonego z pięciu kolumn (bez wagi) otrzymuje się:

$$\begin{array}{c}\text{1 kolumna}\\ \left|\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\ \\1\end{array}\right|\end{array} \cdot \begin{array}{c}\text{1 kolumna}\\ \left|\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\ \\1\end{array}\right|\end{array} = \begin{array}{l}130\\ \text{czyli } N\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{1 kolumna}\\ \left|\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\ \\1\end{array}\right|\end{array} \cdot \begin{array}{c}\text{2 kolumna}\\ \left|\begin{array}{c}32{,}2\\30{,}2\\29{,}6\\30{,}8\\ \\33.4\end{array}\right|\end{array} = \begin{array}{l}4164{,}8\\ \text{czyli } \Sigma X_2\end{array}$$

Wymnażając w ten sposób w dalszym ciągu każdą kolumnę przez każdą kolumnę, w rezultacie otrzymuje się krakowian, który będzie identyczny z układem danych w równaniach normalnych bez wyrazu wolnego, a zarazem krakowianowym kwadratem 5 kolumn tablicy pomiarów. Kolumnę wyrazu wolnego otrzymuje się, wymnażając kolejno w sposób krakowianowy ostatnią kolumnę przez wszystkie kolumny układu danych.

$$\left|\begin{array}{lllll}
N & + \Sigma X_2 & + \Sigma X_3 & + \Sigma X_4 & + \Sigma X_5 \\
\Sigma X_2 & + \Sigma X_2^2 & + \Sigma X_3 X_2 & + \Sigma X_4 X_2 & + \Sigma X_5 X_2 \\
\Sigma X_3 & + \Sigma X_2 X_3 & + \Sigma X_3^2 & + \Sigma X_4 X_3 & + \Sigma X_5 X_3 \\
\Sigma X_4 & + \Sigma X_2 X_4 & + \Sigma X_3 X_4 & + \Sigma X_4^2 & + \Sigma X_5 X_4 \\
\Sigma X_5 & + \Sigma X_2 X_5 & + \Sigma X_3 X_5 & + \Sigma X_4 X_5 & + \Sigma X_5^2
\end{array}\right| = \boldsymbol{R}$$

krakowian zaś kolumnowy wyrazów wolnych:

$$\left|\begin{array}{l} \Sigma X_1 \\ \Sigma X_1 X_2 \\ \Sigma X_1 X_3 \\ \Sigma X_1 X_4 \\ \Sigma X_1 X_5 \end{array}\right| = \boldsymbol{L}$$

Z niewiadomych (współczynniki regresji cząstkowej) układu równań normalnych można utworzyć krakowian $\boldsymbol{x}$. Przedstawia się on w postaci wierszowej następująco:

$$\tau \boldsymbol{x} = \{ a + A + B + C + D \}$$

Układ równań normalnych można więc zapisać w sposób krakowianowy[1]:

$$\{ x\tau R + L \} = 0 \qquad \text{lub} \qquad \{ R\tau x + L \} = 0$$

W tak krótki sposób zapisane zostały metodą krakowianów równania normalne.

$\boldsymbol{R}$ — oznacza krakowian kwadratowy danych stojących przy współczynnikach regresji cząstkowej,

$\boldsymbol{x}$ — oznacza krakowian niewiadomych (współczynników regresji cząstk.),

$\boldsymbol{L}$ — oznacza krakowian wyrazów wolnych,

$\boldsymbol{r}$ — oznacza pierwiastek kwadratowy krakowianu $\boldsymbol{R}$.

Krakowian $\boldsymbol{R}$ powstał z podniesienia do kwadratu tablicy pomiarów (metodą krakowianową). Szukamy innego krakowianu — oznaczmy go jako $\boldsymbol{r}$ — który pomnożony przez siebie, czyli podniesiony do drugiej potęgi, da z powrotem $\boldsymbol{R}$. Mając kolumnę $\boldsymbol{L}'$ obliczoną równocześnie z $\boldsymbol{r}$ tak, by $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\boldsymbol{L}'$, można otrzymać wiersz niewiadomych:

(1) $\{ R\tau x + L \} = 0$

(2) Jeżeli $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}$

(3) oraz $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{L}'$

(4) to $\{(r \cdot r).\tau x + rL'\} = 0$

(5) $\tau \boldsymbol{x} = \dfrac{-\boldsymbol{L}'}{\boldsymbol{r}}$

---

[1] Por. T. Banachiewicz: *Sur la resolution des équations normales de la methode des moindres carres*. W-wa 1950. Str. 1.

Dużym ułatwieniem w obliczeniach jest podzielenie wszystkich elementów krakowianów **R** oraz **L** przez *N*. Dzielenie to nie wpłynie na wartość współczynników regresji cząstkowej:

$$\frac{\mathbf{R}+\mathbf{L}}{N} = \left|\begin{array}{lllll} 1.0 & +\frac{\Sigma X_2}{N} & +\frac{\Sigma X_3}{N} & +\frac{\Sigma X_4}{N} & +\frac{\Sigma X_5}{N} \\ \frac{\Sigma X_2}{N} & +\frac{\Sigma X_2^2}{N} & +\frac{\Sigma X_3 X_2}{N} & +\frac{\Sigma X_4 X_2}{N} & +\frac{\Sigma X_5 X_2}{N} \\ \frac{\Sigma X_3}{N} & +\frac{\Sigma X_2 X_3}{N} & +\frac{\Sigma X_3^2}{N} & +\frac{\Sigma X_4 X_3}{N} & +\frac{\Sigma X_5 X_3}{N} \\ \frac{\Sigma X_4}{N} & +\frac{\Sigma X_2 X_4}{N} & +\frac{\Sigma X_3 X_4}{N} & +\frac{\Sigma X_4^2}{N} & +\frac{\Sigma X_5 X_4}{N} \\ \frac{\Sigma X_5}{N} & +\frac{\Sigma X_2 X_5}{N} & +\frac{\Sigma X_3 X_5}{N} & +\frac{\Sigma X_4 X_5}{N} & +\frac{\Sigma X_5^2}{N} \end{array}\right| + \left|\begin{array}{l} \frac{\Sigma X_1}{N} \\ \frac{\Sigma X_1 X_2}{N} \\ \frac{\Sigma X_1 X_3}{N} \\ \frac{\Sigma X_2 X_4}{N} \\ \frac{\Sigma X_1 X_5}{N} \end{array}\right| \bullet = \{P + W\}$$

Przyjmując oznaczenia:

$$\frac{\mathbf{R}}{N} = \mathbf{P} \qquad \frac{\mathbf{L}}{N} = \mathbf{W}$$

$$\begin{array}{lll} \Sigma(X_1 X_2) = P_{12} & \Sigma(X_3 X_4) = P_{34} & \frac{\Sigma(X_1)}{N} = \text{średnia arytm. } M_1 \\ \Sigma(X_n X_m) = P_{nm} & \Sigma(X_n^2) = P_n^2 & \Sigma(X_2) = \quad ,, \quad ,, \quad M_2 \\ \Sigma(X_1^2) = P_1^2 & \Sigma(X_5^2) = P_5^2 & \Sigma(X_n) = \quad ,, \quad ,, \quad M_n \end{array}$$

Wówczas dla naszego przykładu:

$$\frac{\mathbf{R}+\mathbf{L}}{N} = \left|\begin{array}{lllll} 1.0 & +M_2 & +M_3 & +M_4 & +M_5 \\ M_2 & +P_2^2 & +P_{32} & +P_{42} & +P_{52} \\ M_3 & +P_{23} & +P_3^2 & +P_{43} & +P_{53} \\ M_4 & +P_{24} & +P_{34} & +P_4^2 & +P_{54} \\ M_5 & +P_{25} & +P_{35} & +P_{45} & +P_5^2 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{l} M_1 \\ W_{12} \\ W_{13} \\ W_{14} \\ W_{15} \end{array}\right| = \{P + W\}$$

dla ogólnego zaś wypadku (ponieważ jest to kwadrat krakowianowy, więc ilość wierszy w krakowianie **P** = ilości kolumn, $m = n$):

$$\left|\begin{array}{llllll} 1.0 & +M_1 & +M_2 & +M_3 & +\ldots & M_n \\ M_1 & +P_{11}^2 & +P_{21} & +P_{31} & +\ldots & P_{n1} \\ M_2 & +P_{12} & +P_2^2 & +P_{32} & +\ldots & P_{n2} \\ M_3 & +P_{13} & +P_{23} & +P_3^2 & +\ldots & P_{n3} \\ & & & & & \\ M_n \ldots & P_{1n} \ldots & P_{2n} \ldots & P_{3n} & \ldots & P_n^2 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{l} M_{n+1} \\ W_{(n+1)1} \\ W_{(n+1)2} \\ W_{(n+1)3} \\ \\ W_{(n+1)n} \end{array}\right| = \{P_n + W_{n+1}\}$$

Ponieważ krakowian $\boldsymbol{P}$ jest krakowianem potęgowym drugiego stopnia, wobec tego można go zapisać jako krakowian przekątny, a krakowian wyrazów wolnych zapisać obok, nie zmieniając go. Podamy dla kontroli kolumnę sumową oznaczoną jako $\boldsymbol{S}$, pamiętając o specjalnym sposobie sumowania. Otrzymamy dla naszego przykładu:

$$\begin{array}{ccccccc}
\multicolumn{5}{c}{\boldsymbol{P}} & \boldsymbol{W} & \boldsymbol{S}\\
\end{array}$$
$$\left|\begin{array}{ccccccc}
1.0 + & M_2 + & M_3 + & M_4 + & M_5 + & M_1 & \Sigma_1\\
 & P_2^2 + & P_{32} + & P_{42} + & P_{52} + & W_{12} & \Sigma_2\\
 & & P_3^2 + & P_{43} + & P_{53} + & W_{13} & \Sigma_3\\
 & & & P_4^2 + & P_{54} + & W_{14} & \Sigma_4\\
 & & & & P_5^2 + & W_{15} & \Sigma_5
\end{array}\right| = \{P + W\}$$

dla ogólnego zaś wypadku:

$$\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{P} & \boldsymbol{W} & \boldsymbol{S}
\end{array}$$
$$\left|\begin{array}{cccccc}
1.0 + & M_1 + & M_2 + & M_3 + & \dots & M_n\\
 & P_1^2 + & P_{21} + & P_{31} + & \dots & P_{n1}\\
 & & P_2^2 + & P_{32} + & \dots & P_{n2}\\
 & & & P_3^2 + & \dots & P_{n3}\\
 & & & & & \\
 & & & & & P_n^2
\end{array}\right| + \left|\begin{array}{c|c}
M_{n+1} & \Sigma_1\\
W_{(n+1)1} & \Sigma_2\\
W_{(n+1)2} & \Sigma_3\\
W_{(n+1)3} & \Sigma_4\\
\vdots & \vdots\\
W_{(n+1)n} & \Sigma_n
\end{array}\right| = \{P_n + W_{n+1}\}$$

Korzyści jakie płyną z podzielenia krakowianu **R** przez **N** są następujące:

1) Otrzymuje się mniejsze liczby — a przez to ekonomię miejsca.

2) W wypadku bardzo dużych liczb dostaje się zwykle liczby, na których łatwiej można wykonywać działania na maszynie.

3) Pierwsze równanie otrzymuje się w postaci średnich arytmetycznych, przez co od razu można się zorientować co do rzędu rozpatrywanych wielkości, w tym wypadku różnych przeciętnych rozmiarów karpi handlowych.

4) Odpada, jak to okaże się poniżej, obliczanie pierwszego wiersza w pierwiastku kanonicznym.

Niewiadome uzyskuje się podobnie jak poprzednio (str. 14).

(1) $\{P\tau x + W\} = 0$

(2) Jeżeli $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}$

(3) oraz $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{W'}$

(4) to $\{(k \cdot k)\tau x + kW'\} = 0$

(5) wówczas $\tau \boldsymbol{x} = \dfrac{-\boldsymbol{W'}}{\boldsymbol{k}}$

Równania te pociągają za sobą łączne rozwiązanie kolumny $\boldsymbol{W}$ wraz z pierwiastkiem, tak by $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{W}' = \boldsymbol{W}$.

Należy zaznaczyć, że podzielenie kolumny $\boldsymbol{W}$ przez **P** nie daje współczynników regresji cząstkowej, a dopiero rozłożenie na czynniki i podzielenie daje szukane niewiadome.

Postępowanie przy obliczaniu współczynników regresji cząstkowej rozpada się na dwa etapy:

1) Znalezienie pierwiastka krakowianu $\boldsymbol{R}$ łącznie z kolumną $\boldsymbol{L}$ albo jak w naszym przykładzie pierwiastka krakowianu $\boldsymbol{P}$ łącznie z kolumną $\boldsymbol{W}$

2) Podzielenie krakowianu jednokolumnowego $\boldsymbol{L}'$ czy $\boldsymbol{W}'$ z przeciwnym znakiem przez krakowian $\boldsymbol{r}$ względnie $\boldsymbol{k}$.

W tej kolejności zajmiemy się obliczeniami.

Utwórzmy dla naszego przykładu krakowian równań normalnych z pomiarów, które uzyskujemy z tablic liczb zapisanych w czasie odłowów karpi:

$\Sigma(X_1)$	83 910,0	M_1	645,4615	$\Sigma(X_1X_2)$	2 734 192,76	P_{12}	21 032,2500
$\Sigma(X_2)=$	4 164,80	$M_2=$	32,0369	$\Sigma(X_1X_3)$	946 269,52	P_{13}	7 278,9960
$\Sigma(X_3)=$	1 432,50	M_3	11,0192	$\Sigma(X_1X_4)=$	441 634,66	P_{14}	3 397,1890
$\Sigma(X_4)=$	670,30	$M_4=$	5.1561	$\Sigma(X_1X_5)$	6 667 180,73	P_{15}	51 286.0000
$\Sigma(X_5)=$	10 116,00	$M_5=$	77,8154				
				$\Sigma(X_2X_3)=$	6 182,72	P_{23}	355,2517
$\Sigma(X_2)^2=$	134 172,88	$P_2^2=$	1032,0990	$\Sigma(X_1X_4)$	21,583,58	$P_{24}=$	166.0275
$\Sigma(X_3)^2=$	15 944,63	P_3^2	122,6510	$\Sigma(X_2X_5)-$	326.185,93	P_{25}	2 509.1225
$\Sigma(X_4)^2=$	3 495,01	$P_4^2=$	26,8847				
$\Sigma(X_5)^2$	802 528,91	P_5^2	6173.2993	$\Sigma(X_3X_4)=$	7 449,56	$P_{34}=$	57,3043
				$\Sigma(X_3X_5)=$	112 291,44	$P_{35}=$	863,7803
				$\Sigma(X_4X_5)$	52 486,76	$P_{45}=$	403,7443

Tworząc z pomiarów *krakowian normalny* $\{P + W\}$ zapisujemy:

a	A	B	C	D	W	S
1,0000	32,0369	11,0192	5,1561	77,8154	645,4615	772,4891
	1032,0990	355,2517	166,0275	2509,1225	21032,2590	25126,7876
		122,6510	57,3043	863,7803	7278,9960	8689,0025
			26,8847	403,7443	3397,1890	4056,3059
				6173,2993	51286,0000	61313,7618

Oznaczenia 5 pierwszych kolumn odnoszą się do niewiadomych układu równań. Kolumna sumowa jest dodana dla kontroli wierszowej obliczeń.

Mamy krakowian $\boldsymbol{P}$ rozłożyć na takie dwa krakowiany $\boldsymbol{k}$, żeby $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} \quad \boldsymbol{P}$ Znaczy to, że mamy znaleźć dwa takie identyczne krakowiany, żeby po-

http://rcin.org.pl

mnożone przez siebie dały z powrotem krakowian **P**. Ponieważ **P** jest krakowianem przekątnym, wobec tego i **k** będziemy obliczać jako krakowian przekątny.

Szukane **k**

$$\mathbf{k} = \left|\begin{array}{ccccc} k_{11} & k_{21} & k_{31} & k_{41} & k_{51} \\ & k_{22} & k_{32} & k_{42} & k_{52} \\ & & k_{33} & k_{43} & k_{53} \\ & & & k_{44} & k_{54} \\ & & & & k_{55} \end{array}\right|$$

(Drugiego **k** nie potrzeba wypisywać, ponieważ musi być identyczne).

Ponieważ krakowian $\{P + W\}$ mamy rozwiązać łącznie z **W**, wobec tego mamy dostać:

$$\mathbf{k} + \mathbf{W}' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & A & B & C & D & W' & S' \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccccccc} k_{11} & k_{21} & k_{31} & k_{41} & k_{51} & W_1' & \Sigma_1'' \\ & k_{22} & k_{32} & k_{42} & k_{52} & W_2' & \Sigma_2' \\ & & k_{33} & k_{43} & k_{53} & W_3' & \Sigma_3' \\ & & & k_{44} & k_{54} & W_4' & \Sigma_4' \\ & & & & k_{55} & W_5' & \Sigma_5' \end{array}\right| \end{array}$$

Metoda obliczania pierwiastka krakowianowego.

I. Pierwszy wiersz tego krakowianu pierwiastkowego oblicza się w ten sposób, że z elementu P_{11} wyciągamy drugi pierwiastek, zapisując go jako element k_{11}, a następnie dzieli się pozostałe elementy pierwszego wiersza **P** przez ten pierwiastek, otrzymując w ten sposób dalsze elementy pierwszego wiersza krakowianu pierwiastkowego **k**. Ponieważ w krakowianie $\{P + W\}$ pierwszym elementem musi być 1,00, wobec tego $\sqrt{1} = 1$, czyli wystarcza przepisać w krakowianie $\{k + W'\}$ wszystkie elementy pierwszego wiersza $\{P + W\}$. Dlatego też dla naszego przykładu:

$$\{k_{11}\ k_{21}\ k_{31}\ k_{41}\ k_{51}\ W_1'\} = \{1,000 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_1\}$$
$$= \{1,0 + 32,0369 + 11,0192 + 1561 + 77,8154 + 645,4615\}$$

II. Obliczenie drugiego wiersza zaczyna się zawsze od obliczenia elementu przekątniowego.

$$k_{22} = \sqrt{P_2^2 - k_{21}^2} = \sqrt{P_2^2 - M_2^2} \qquad k_{22} = \sqrt{32,0369^2 - 1032,099} = 2,3950$$

$$k_{32} = \frac{P_{32} - \{k_{21}k_{31}\}}{k_{22}} = \frac{355,2517 - \{32,0369 \cdot 11,0192\}}{2,3950} = 0,9314$$

$$k_{42} = \frac{P_{42} - \{k_{21}k_{41}\}}{k_{22}} = \frac{166.0275 - \{32,0369 \cdot 5,1561\}}{2.3950} = 0.3516$$

$$k_{52} = \frac{P_{52} - \{k_{21}k_{51}\}}{k_{22}} = \frac{2509,1225 - \{32,0369 \cdot 77,8154\}}{2,3950} = 6,7467$$

$$W'_2 = \frac{W_{12} - \{k_{21}W'_1\}}{k_{22}} = \frac{21032,1500 - \{32,0369 \cdot 645,4615\}}{2,3950} = 147,6678$$

Kontrola obliczeń:

$$\Sigma'_2 = \frac{\Sigma_2 - \{k_{21}\Sigma'_1\}}{k_{22}} = \frac{25126,7876 - \{32,0369 \cdot 772,4891\}}{2,3950} = 158,0925$$

Sumując pozostałe elementy drugiego wiersza otrzymujemy jako sumę tę samą wartość.

III. Obliczanie trzeciego wiersza zaczynamy zawsze od obliczenia elementu przekątniowego.

$$k_{33} = \sqrt{P_3^2 - \{k_{31}^2 + k_{32}^2\}} = \sqrt{122.6510 - \{11.0192^2 + 0.9314^{2'}\}} = 0,6006$$

Dalsze elementy:

$$k_{43} = \frac{P_{43} - \{k_{31}k_{41} + k_{32}k_{42}\}}{k_{33}} = \frac{57,3043 - \{11,0192 \cdot 5,1561 + 0,9314 \cdot 0,3516\}}{0,6006} =$$
$$= 0,2676$$

$$k_{53} = \frac{P_{53} - \{k_{31}k_{51} + k_{32}k_{52}\}}{k_{33}} = \frac{863,7803 - \{11,0192 \cdot 77,8154 + 0,9314 \cdot 6,7467\}}{0,6006} =$$
$$= 0,0549$$

$$W'_3 = \frac{W_{13} - \{k_{31}W'_1 + k_{32}W'_2\}}{k_{33}} =$$
$$= \frac{7278,9960 - \{11,0192 \cdot 645,4615 + 0,9314 \cdot 147,6678\}}{0,6006} = 48,2660$$

Kontrola obliczeń:

$$\Sigma'_1 = \frac{\Sigma_3 - k_{31}\Sigma'_1 + k_{32}\Sigma'_2}{k_{33}} =$$
$$\frac{8689,0028 - \{11,0192 \cdot 772,4891 + 0,9314 \cdot 158,0925\}}{0,6006} = 49,1895$$

Ponieważ 0,6006 + 0,2676 + 0,0549 + 48,2665 = 49,1895, różnica wynosi 0,0001; powstała ona z zaokrągleń.

IV. Obliczanie czwartego wiersza.

$$k_{44} = \sqrt{P_4^2 - \{k_{41}^2 + k_{42}^2 + k_{43}^2\}} = 0,3226$$

http://rcin.org.pl

$$k_{54} = \frac{P_{54} - \{k_{41}k_{51} + k_{42}k_{52} + k_{43}k_{53}\}}{k_{44}} = 0{,}4138$$

$$W'_4 = \frac{W_{14} - \{k_{41}W'_1 + k_{42}W'_2 + k_{43}W'_3\}}{k_{44}} = 13.2947$$

Kontrola obliczeń:

$$\Sigma'_4 = \frac{\Sigma_4 - \{k_{41}\Sigma'_1 + k'_{42}\Sigma'_2 + k_{43}\Sigma'_3\}}{k_{44}} = 14{,}0311$$

Suma pozioma elementów wiersza = 14,0311.

V. Obliczenie ostatniego wiersza dla naszego przykładu.

$$k_{55} = \sqrt{P_5^2 - \{k_{51}^2 + k_{52}^2 + k_{53}^2 + k_{54}^2\}} = 8{,}5071$$

$$W'_5 = \frac{W_{15} - \{k_{51}W'_1 + k_{52}W'_2 + k_{53}W'_3 + k_{54}W'_4\}}{k_{55}} = 6{,}4339$$

Kontrola obliczeń:

$$\Sigma'_5 = \frac{\Sigma_5 - \{k_{51}\Sigma'_1 + k_{52}\Sigma'_2 + k_{53}\Sigma'_3 + k_{54}\Sigma'_4\}}{k_{55}} = 14{,}9410$$

Suma pozioma elementów wiersza 5= 14,9410.

Elementy krakowianu **k** oraz kolumny **W′** zapisuje się zwykle nad odpowiednimi elementami krakowianu {*P*+ *W*}. W naszym przykładzie wszystkie elementy są dodatnie, może się jednak tak zdarzyć, że element będzie ujemny. Najlepiej elementy krakowianu pierwiastkowego zapisywać kolorową kredką — np. elementy dodatnie — czerwoną, a ujemne — niebieską. Uzyskuje się przez to przejrzystość, łatwo odróżnia się krakowian pierwiastkowy od podstawowego (w naszym przykładzie {*P* + *W*}) oraz uzyskuje się daleko idącą ekonomię miejsca.

W tym jednak wypadku zapisujemy nowy krakowian pierwiastkowy osobno:

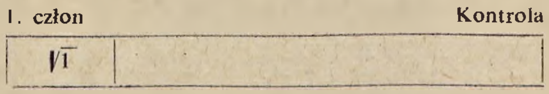
a	A	B	C	D	W′	S′	Błąd sumy
1,0000	32,0369	11,0192	5,1561	77,8154	645,4615	772,4891	
	2,3950	0,9314	0,3516	6,7467	147,6878	158,0925	0,0000
		0,6006	0,2676	0,0549	48,2665	49,1895	0,0001
			0,3226	0,4138	13,2947	14,0311	0,0000
				8,5071	6,4339	14,9410	0,0000

Należy zwrócić szczególną uwagę na to, że obliczając na maszynie do liczenia — obliczamy bez przerwy wszystkie elementy pierwiastkowe, w ten sposób, że nic nie potrzeba zapisywać na boku. Skutkiem tego ilość elementów, które zapisuje się przy obliczaniu pierwiastka dla naszego przykładu ogranicza się do 10 (dla pierwiastka z $\boldsymbol{P}$) oraz 4 nowych elementów dla kolumny $\boldsymbol{W}'$ — razem do 14 elementów.

Gdybyśmy mieli do obliczenia jeszcze pierwszy wiersz, co w przypadku użycia krakowianu $\boldsymbol{P}$ nie zachodzi, to musielibyśmy jeszcze dodać m elementów — czyli w naszym wypadku 6; mielibyśmy wówczas do zapisania 20 elementów.

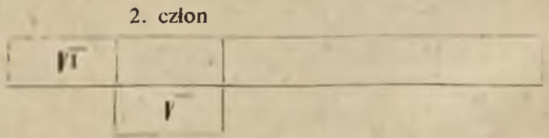
Dla łatwiejszego zapamiętania kolejności i sposobu obliczeń podaję poniżej graficzny schemat obliczeń.

I.

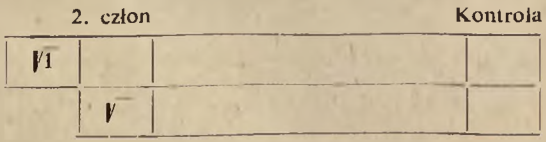


Obliczenie pierwszego wiersza — przepisane z krakowianu $\{P \mid W\}$.

II.

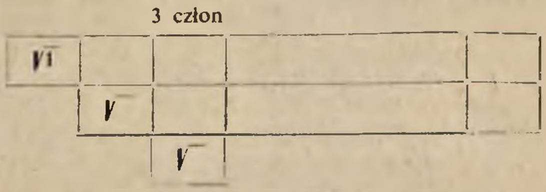


a) Obliczenie pierwiastka na przekątni z drugiego członu. Członem jest tu kolumna elementów stojących powyżej szukanego elementu — czyli krakowian jednokolumnowy już znalezionych elementów szukanego pierwiastka.



b) Obliczenie pozostałych elementów drugiego wiersza wraz z kontrolą przez kolejne pomnożenie dalszych kolumn przez drugi człon i podzielenie przez pierwiastek

III.



a) Obliczanie pierwiastka na przekątni w 3 wierszu.

		3 człon		Kontrola
$\sqrt{1}$				
	$\sqrt{}$			
		$\sqrt{}$		

b) Obliczenie pozostałych elementów 3 wiersza wraz z kontrolą.

IV.

			4 człon		
$\sqrt{1}$					
	$\sqrt{}$				
		$\sqrt{}$			
			$\sqrt{}$		

a) Obliczenie pierwiastka na przekątni w 4 wierszu.

			4 człon		Kontrola
$\sqrt{1}$					
	$\sqrt{}$				
		$\sqrt{}$			
			$\sqrt{}$		

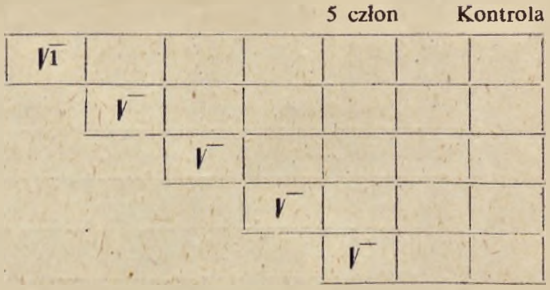
b) Obliczenie pozostałych elementów 4 wiersza wraz z kontrolą.

V.

				5 człon		Kontrola
$\sqrt{1}$						
	$\sqrt{}$					
		$\sqrt{}$				
			$\sqrt{}$			
				$\sqrt{}$		

a) Obliczenie pierwiastka na przekątni w 5 wierszu.

http://rcin.org.pl



b) Obliczenie pozostałych elementów 5 wiersza wraz z kontrolą

W ten sposób otrzymuje się krakowian $\{k \quad W'\}$.

Gdy jest więcej wierszy do obliczenia, postępuje się tak dalej, jak powyżej.

Porządek czynności przy obliczaniu pierwiastków krakowianowych wraz z kolumną $\boldsymbol{W}'$:

1) Przepisuje się pierwszy wiersz z krakowianu $\{P \quad W\}$.

2) Podnosi się do drugiej potęgi drugi element w pierwszym wierszu krakowianu **k** i odejmuje od pierwszego elementu w drugim wierszu w krakowianie $\{P \quad W\}$. Z różnicy wyciąga się drugi pierwiastek. Element przekątniowy w krakowianie $\{P+W\}$ musi być zawsze większy od kwadratu, który mamy od niego odjąć. Gdybyśmy bowiem dostali element minusowy — nie moglibyśmy obliczyć pierwiastka — co oznaczałoby, że krakowian, który rozkładamy na krakowiany pierwiastkowe, nie jest kwadratem innego krakowianu i wobec tego nie posiada pierwiastka.

3) Mnoży się drugą kolumnę przez pozostałe kolumny, odejmując iloczyny od odpowiednich elementów w krakowianie $\{P \quad W\}$. Różnice dzieli się przez znaleziony pierwiastek (patrz punkt 2) wiersza drugiego. Na końcu kontrola.

4) Oblicza się pierwiastek trzeciego wiersza przez podniesienie do drugiej potęgi i zesumowanie wszystkich elementów (a więc dwóch) trzeciej kolumny krakowianu $\boldsymbol{k}$ i odejmuje się tę sumę od pierwszego elementu w trzecim wierszu krakowianu $\{P+W\}$ i wyciąga z różnicy drugi pierwiastek.

5) Oblicza się pozostałe elementy wiersza trzeciego, mnożąc trzecią kolumnę krakowianu pierwiastkowego (a więc 2 elementy) przez pozostałe kolumny (mamy zatem do wykonania kolejne sumomnożenia kolumny trzeciej). Iloczyn odejmuje się od odpowiedniego elementu krakowianu $\{P+W\}$, różnicę dzieli się przez znaleziony pierwiastek trzeciego wiersza. Na końcu kontrola.

6) Oblicza się pierwiastek czwartego wiersza. Postępuje się tu podobnie jak poprzednio. Podnosi się do kwadratu wszystkie elementy krakowianu **k**, stojące w jego czwartej kolumnie; kwadraty te sumuje się — musimy więc

obliczyć kwadrat krakowianowy kolumny czwartej. Iloczyn odejmuje się od elementu przekątniowego czwartego wiersza krakowianu $\{P+W\}$, a z różnicy wyciąga pierwiastek.

7) Obliczenie pozostałych elementów czwartego wiersza. Wykonuje się kolejne sumomnożenie czwartej kolumny (3 elementy) przez pozostałe kolumny krakowianu **k**. Wyniki sumomnożenia odejmuje się od odpowiednich elementów krakowianu $\{P+W\}$, różnicę dzieli się przez element pierwiastkowy czwartego wiersza. Na końcu kontrola.

8) Obliczenie pierwiastka piątego wiersza odbywa się tak samo jak poprzednio. Podnosi się do drugiej potęgi krakowian elementów piątej kolumny krakowianu **k**, wynik odejmujemy od elementu przekątniowego piątego wiersza krakowianu $\{P+W\}$, z różnicy wyciąga się drugi pierwiastek.

9) Obliczenie pozostałych elementów piątego wiersza odbywa się tak samo, jak poprzednio: wykonuje się kolejne sumomnożenie piątej kolumny krakowianu **k** (a więc 4 elementy) przez pozostałe kolumny. Wyniki odejmuje się od odpowiednich elementów krakowianu $\{P+W\}$, różnice te dzieli się przez element pierwiastkowy wiersza piątego. Na końcu kontrola.

W ten sposób obliczony został pierwiastek **k** układu równań normalnych **P** oraz krakowian **W**′ z wyrazów wolnych **W** Gdybyśmy mieli do obliczenia więcej wierszy, to w dalszym ciągu postępowalibyśmy podobnie.

Ten sam układ równań normalnych można by rozwiązać również innymi metodami, które dotychczas w tym celu zalecano, a mianowicie: metodą Gaussa, a zwłaszcza metodą Doolittle'a.

Porównajmy dla tego samego przykładu ilość elementów koniecznych do zapisania, które należy wykonać dla obliczenia niewiadomych, pomijając samo ich obliczenie. Wyniosą one:

przy metodzie krakowianów	14	zapisów
,, ,, Gaussa	60	,,
,, ,, Doolittle'a	— 105	,,

O ile się uwzględni elementy obliczane przez przepisywanie, a przy metodzie Gaussa i mnożniki, to dostaniemy:

przy metodzie krakowianów	20	zapisów
,, ,, Gaussa	71	,,
,, ,, Doolittle'a	111	,,

Metoda krakowianów łączy zalety metod Gaussa i Doolittle'a, wyłączając ich wady. Najuciążliwszą jest metoda Doolittle'a, zalecana ze względu na kontrolę obliczeń, której nie ma w metodzie Gaussa. Z chwilą pojawienia się krakowianów obie te metody rozwiązywania układu równań normalnych odpadają dla naszych celów. Czytelnika, który by zechciał zapoznać się bliżej z wyższością metody krakowianowej odsyłam, do interesującej dyskusji na łamach Przeglądu Geodezyjnego [5].

---

[5]) Por. spis literatury

Znajdowanie niewiadomych

Po obliczeniu krakowianu $\{k + W'\}$ przystępujemy do obliczenia współczynników regresji cząstkowej (niewiadomych). Jak już powiedzieliśmy wyżej, niewiadome otrzymuje się przez podzielenie krakowianu jednokolumnowego $\boldsymbol{W}'$ przez krakowian $\boldsymbol{k}$:

$$\tau \boldsymbol{x} = -\frac{\boldsymbol{W}'}{\boldsymbol{k}}$$

Postępowanie jest następujące:

Bierze się ostatni element kolumny $\boldsymbol{W}'$ z przeciwnym znakiem (bo jak widać we wzorze występuje $-\boldsymbol{W}'$) i dzieli się przez element przekątniowy tego wiersza, z którego pochodzi ostatni element $\boldsymbol{W}'$, ale też z przeciwnym znakiem i wpisuje się do wiersza niewiadomych w kolumnie D.

Mamy więc:

$$D = \frac{-6{,}4339}{-8{,}5071} = 0{,}7563.$$

Mając D przystępujemy do obliczenia C:

$$C = \frac{\{0{,}7563 \cdot 0{,}4138\} - 13{,}2947}{-0{,}3226} = \frac{-12{,}9817}{-0{,}3226} = +40{,}2409$$

Dla ułatwienia zapamiętania znaku wprowadzam tzw. «wiersz pośredni», tj. wiersz, w którym występują liczniki ułamków. Niewiadome będą miały zawsze przeciwny znak niż znak licznika. Wiersz ten nie jest bezwzględnie konieczny do zapisania — można by się bez niego obejść, ułatwia jednak zapisywanie znaków niewiadomych oraz kontrolę błędów w liczeniu.

$$B = \frac{\{40{,}2409 \cdot 0{,}2676 + 0{,}7563 \cdot 0{,}0549\} - 48{,}2665}{-0{,}6006} = \frac{-37{,}4565}{-0{,}6006} = +62{,}3651.$$

$$A = \frac{\{62{,}3651 \cdot 0{,}9314 + 40{,}2409 \cdot 0{,}3516 + 0{,}7563 \cdot 6{,}7467\} - 147{,}6678}{-2{,}3950} =$$

$$= \frac{-70{,}3297}{-2{,}3950} = 29{,}3652.$$

$$a = \frac{\{29{,}365 \cdot 32{,}0369 + 62{,}3651 \cdot 11{,}0192 + 40{,}2409 \cdot 5{,}1561 + 0{,}7563 \cdot 77{,}8154\} - 645{,}4615}{-1{,}0000} =$$

$$= \frac{+1248{,}8599}{-1{,}0} = -1248{,}8599.$$

TABELA OBLICZEŃ WSPÓŁCZYNNIKÓW REGRESJI CZĄSTKOWEJ

Krakowian *P* oraz *k*

a	*A*	*B*	*C*	*D*	*W* *W'*	*S* *S'*	Błąd sumy *k* + *W*	
1,0000	32,0369	11,0192	5,1561	77,8154	645,4615	772,4891		I wiersz
1.0000	32,0369	11,0192	5,1561	77,8154	645,4615	772,4891		
	2,3950	0,9314	0,3516	6,7467	147,6678	158,0925	0,0000	II wiersz
	1032,0990	355,2517	166,0275	2509,1225	21032,2500	25126,7876		
		0,6006	0,2676	0,0549	48,2665	49,1895	0.0001	III wiersz
		122,6510	57,3043	863,7803	7278,9960	8689,0025		
			0,3226	0,4138	13,2947	14,0311	0,0000	IV wiersz
			26,8847	403,7443	3397,1890	4056,3059		
				8,5071	6,4339	14,9410	0,0000	V wiersz
				6173,2993	51286,0000	61313,7618		
+ 1248,8599	— 70,3297	— 37,4565	— 12,9817					wiersz pośredni
— 1248,8599	29,3652	62,3651	40,2409	0.7563			0,0036	wiersz współczyn. regresji cząstkowej $\{\tau x\}$

http://rcin.org.pl

Po obliczeniu niewiadomych przystępuje się do sprawdzenia tego obliczenia. Niewiadome powinno się wstawić we wszystkie równania. Wystarczy jednak, jeżeli wstawi się je w równanie, w którym występują największe liczby, bo będzie to najlepszym sprawdzianem dokładności obliczenia. Dokładność ta w naszym przykładzie wynosi 0,0036.

Po obliczeniu niewiadomych całość rozwiązania będzie się przedstawiała jak wykazuje tabela.

Umieszczam tu krakowian $\{P + W\}$ oraz $\{k + W'\}$ i krakowian wierszowy niewiadomych τx.

LITERATURA

T. Banachiewicz, *Sur la résolution des équations normales de la méthode des moindres carrés.* O rozwiązywaniu równań normalnych metodą najmniejszych kwadratów. W-wa 1950. Cracow Observatory Reprint Nr 26.

T. Banachiewicz, *Études d'analyse pratique.* Kraków 1938. Cracow Observatory Reprint Nr 22.

T. Banachiewicz, *Wzory podstawowe dla sześciokąta kulistego i poligonów kulistych.* Kraków 1948.

T. Banachiewicz, *Résolution d'un système d'équations linéaires algébraiques par division.* Cracow Observatory Reprint Nr 24. Odbitka z czasopisma: *L'enseignement mathématique, Revue internationale.* Genève 1948.

T. Banachiewicz, *Rocznik Astronomiczny Obserwatorium Krakowskiego.* Kraków 1924, Vol. 13. Okólnik Obserwatorium Krakowskiego Nr 17.

T. Banachiewicz, *Was sind die Formeln neuer Art.* Acta Astronomica C. 1929 V.

T. Banachiewicz, *Obliczanie wyznaczników za pomocą krakowianów.* Bull. PAU r. 1938, str. 1.

T. Banachiewicz, *Principes d'une nouvelle technique de la méthode des moindres carrés.* Bull. Inter. PAU. r. 1938, str. 134.

T. Banachiewicz, *Sur la résolution numérique d'un système d'équations linéaires.* Bull. Inter. PAU r. 1939, str. 350.

T. Banachiewicz, *Méthode de résolution numérique des équations linéaires du calcul des déterminantes et des invers et de réduction de formes quadratiques.* Bull. PAU r. 1938, str. 393.

T. Banachiewicz, *O algorytmach Gaussa i krakowianowym algorytmie metody najmniejszych kwadratów*, Przegląd Geodezyjny, r. 1949, str. 133.

T. Banachiewicz, *Ein Beispiel der Krakowianen Technik in der Methode der kleinsten Quadrate.* Acta Astronomica Seria C, Kraków, Vol. III, str. 147.

T. Banachiewicz, *Contrôle des opérations avec les cracoviens.* Acta Astronomica Seria C, Vol. III, str. 133.

T. Banachiewicz, *Einfluss der Gewichte auf die Resultate einer Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate.* Op. cit. str. 109.

T. Banachiewicz, *New technic in the method of least squares.* Op. cit. str. 96.

T. Banachiewicz, *Zur Berechnung der Determinanten wie auch der Inverse und zur darauf basierten Auflösung der Systeme der linearen Gleichungen.* Op. cit. str. 41.

T. Banachiewicz, *On the commutation of inverse arrays.* Op. cit. Vol. IV. r. 1939, str. 27.

T. Banachiewicz, *On the use of cracovians for theoretical purposes in pure and applied mathematics.* Op. cit. str. 97.

O. Belluzzi, *Scienza delle construzioni*, t. II. cz. 2, str. 20.

St. Gadziński, *Algorytm Gaussa a Banachiewicza.* Przegląd Geodezyjny, r. 1948, str. 261.

http://rcin.org.pl

S. Hausbrandt, *Algebraiczne ujęcie algorytmu Banachiewicza.* Przegląd Geodezyjny r. 1947, str. 332.

S. Hausbrandt, *Parę uwag dotyczących algorytmu Banachiewicza.* Przegląd Geodezyjny r. 1948, str. 355.

T. Kochmański, *Zarys rachunku krakowianowego.* Główny Urząd Pomiarów, W-wa 1948.

T. Kochmański, *Zastosowanie krakowianów do niektórych prostych rachunków geodezyjnych.* Przegląd Geodezyjny, r. 1948, str. 261.

T. Kochmański, *Krakowiany — nowa gałąź matematyki stosowanej.* Kraków 1947. Cracow Observatory Reprint. Nr 23.

L. Stankiewicz, *Sur les operations arithmétiques dans la rèsolution numèrique d'un systeme d'equations linéaires suivant les méthodes cracoviens de T. Banachiewicz.* Bull. Inter. PAU r. 1938, str. 24.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Ян Мариян Влодек — *Применение краковьянового метода решения уравнений многократной регрессии к биометрическим исследованиям в рыбоводстве.*

Биометрическая разработка исследований по популяции является основанием для характеристики изучаемого поголовья.

В поисках наиболее рациональных, а также наиболее практических в применении статистических методов автор воспользовался до сих пор мало распространенным, а в биометрии еще не применяемым краковьяновым исчислением, созданным доктором Тадеушом Банахевичем, профессором Ягеллонского Университета в Кракове.

В введении автор излагает понятия краковьянового исчисления, подробно занимается вопросом решения системы нормальных уравнений краковьяновым методом канонического корня, доказывает преимущество краковьянового метода решения нормальных уравнений с многими неизвестными по отношению к применявшимся до сих пор методам Гаусса и Дулитля.

Далее автор приводит подробные примеры биометрических разработок основанных на измерении карпов взятых из экспериментальных рыбоводческих станций и на основании этих примеров объясняет весь метод.

Автор приводит краковьян $\{P + W\}$ т. е. такой, в котором данные выступают в виде средних величин, как наиболее удобный по технически-статистическим соображениям для применения при решении коэффициентов частичной регрессии.

ZUSAMMENFASSUNG

Jan Marian Włodek — *Die Auflösung von Gleichungen der vielfachen Regression nach der Krakowianen-Methode angewendet bei den biometrischen Versuchen in der Fischerei.*

Bei Versuchen über die Population bildet ihre biometrische Bearbeitung die Grundlage der Charakteristik der geprüften Population.

Auf der Suche nach neuen statistischen Methoden die sich am besten eignen und praktisch anzuwenden sind, stützte sich der Verfasser auf der bisher wenig bekannten und in der Biometrie bisher nicht angewandten Krakowianen — Rechnung, welche von Professor der Jagellonischen Universitat zu Krakau Dr Tadeusz Banachiewicz bearbeitet wurde.

Im Vorwort bespricht der Verfasser die Formeln der Krakowianen — Rechnung, befasst sich eingehend mit dem Problem der Auflösung von normalen Gleichungen nach der Kra-

http://rcin.org.pl

kowianen — Methode der kanonischen Wurzel. Er beweist, dass die Krakowianen — Methode der Auflösung von normalen Gleichungen mit vielenn Unbekanten viel höher steht, als die bisher angewandten Methoden von Gauss und Doolittle.

In weiteren Teilen der Arbeit gibt der Verfasser genaue Beispiele von Bearbeitungen an, gestützt auf Vermessungen bei Karpfen, die aus Versuchsteichwirtschaften stammten. Auf Grund dieser Beispiele bearbeitet er die ganze Methode. Er gibt den Krakowian $\{P + W\}$ an, und zwar einen solchen in dem die Merkmale als Durchschnittswerte auftreten, als am günstigsten in der Anwendung aus technisch — statistischen Gründen bei der Auflösung des Partiellen Regressions — Koeffizienten.

http://rcin.org.pl