

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 9.

Novembre

1906.

- Sommaire:** 47. Mme C. REIS. Contribution à l'étude de la glande gazogène chez les téléostéens. — Suite.
48. M. R. WEIGL. Sur le mode d'union des cellules épithéliales dans l'intestin des Vertébrés.
49. M. K. OLSZEWSKI. Température d'inversion du phénomène de Joule-Kelvin de l'air et d'azote. Notice préliminaire.
50. M. J. MOROZEWICZ. Sur la méthode de séparation du potassium et du sodium sous la forme de chloroplatinates.
51. M. S. ZAREMBA. Sur la fonction de Green et quelques-unes de ses applications.
52. Note du rédacteur concernant le travail de M. Weyberg (voyez Bulletin d'Juillet Nr. 39).

Séance du lundi 5 Novembre 1906.

PRÉSIDENCE DE M. K. OLSZEWSKI.

47. Mme CAROLINE REIS. Dalsze przyczynki do badań nad gruczołem gazotwórczym ryb kostnoskieletowych. (*Weitere Beiträge zur Kenntnis der Gasdrüse bei den Knochenfischen*). (*Contribution à l'étude de la glande gazogène chez les téléostéens. — Suite*). Mémoire présenté par M. J. Nusbaum m. c. le 15 Octobre 1906.

Seit dem Erscheinen unserer letzten Arbeit¹⁾ über den histologischen Bau der Gasdrüse bei den Ophididen und Perciden haben wir die betreffenden Verhältnisse bei verschiedenen Knochenfischen einem umfassenden vergleichend-anatomischen Studium unterzogen und sind zu einigen interessanten Ergebnissen gelangt, die wir in einer ausführlichen Arbeit, welche demnächst erscheinen soll, veröffentlicht werden. Hier seien nur einige Punkte erörtert. Die Gasdrüse nimmt eine sehr verschiedene Partie der Schwimmblasenwand ein; während sie bei Makropodus an der ganzen inneren Oberfläche der Schwimmblase entwickelt ist, verbreitet sie sich bei

¹⁾ K. Reis u. Prof. J. Nusbaum. Weitere Studien zur Kenntnis des Baues und der Funktion der Gasdrüse und des Ovals in der Schwimmblase der Knochenfische (Ophididae, Percidae); Anat. Anz. Bd. 28, 1906.



Syngnathus und Girardinus nur im vorderen Ende der Schwimmblase, und bei anderen Fischgattungen wie Trigla und Sargus nimmt sie einen beschränkten, verhältnismäßig kleinen Teil der Bauchseite der Schwimmblasenwand ein. Makroskopisch betrachtet, wechselt die Form der Gasdrüse von einer Fischgattung zur anderen. Indessen läßt sich trotz der Mannigfaltigkeit der Gestaltungen ein allen Gasdrüsen zugrundeliegender, gemeinsamer Typus — die Hufeisenform nachweisen. Die verschiedenen Formen der Gasdrüse sind, wie wir vermuten, durch Zerfall der Arme des Hufeisens in zwei oder mehrere Teile, durch Faltungen und Verzweigungen des Epithelkörpers entstanden. In allen diesen Fällen tritt die allen Drüsen eigene Tendenz zutage, bei dem kleinsten Raume die größtmögliche Oberfläche zu bieten.

Die typische Hufeisenform der Gasdrüse finden wir bei den Ophididen, andere Fischgattungen weisen eine größere oder geringere Abweichung von derselben auf. So z. B. stellt der Epithelkörper bei *Corvina nigra* ein hufeisenförmiges Schildchen dar, dessen verlängerte Arme nach innen eingebogen sind; zwischen den Armen des Schildchens sehen wir ein Gefäßbündel aus der Wand der Schwimmblase austreten, welches radiäre Gefäßbündel in die Drüse entsendet.

Eine andere Abweichung von der primären hufeisenförmigen Gestalt der Drüse finden wir bei *Dentex vulg.* Die Arme des Hufeisens verlängern sich ansehnlich und bilden eine bandartige Schleife, indem sie sich in der Mitte des Drüsenfeldes treffen. Wenn wir die Gasdrüse von *Dentex* an der Stelle durchschneiden, wo sich die beiden Arme aneinander schmiegen, erhalten wir ein Bild, das der aus drei halbmondförmigen Teilen bestehenden Gasdrüse von *Trigla* entspricht.

Bei manchen Fischen bleibt die Hufeisenform des Schildchens erhalten, während seine Oberfläche in zahlreiche Lappchen zerfällt. So besteht z. B. bei *Pagellus*, *Sargus* und bei anderen Gattungen noch die Drüse aus zwei Teilen, die aus unzähligen aneinander sich schmiegenden Lappchen zusammengesetzt sind (*Umbrina*, *Chrysophrys*) oder sich baumartig (*Perca*), resp. blattartig (*Crenilabrus*) verzweigen.

Die Hauptbestandteile der Gasdrüse bilden Kapillargefäße — „organo vascolare“ (Emery) und eine Epithelschicht — „drüsige Säume“ (Müller), „corpo epitheliale“ (Coggi). Die Gefäße stammen von

der Arteria coeliaca, welche beim Durchdringen der Schwimmblasenwand sich in mehrere Zweige teilt, die sich weiter in Bündel zarter, paralleler Ästchen verzweigen und Wundernetze bilden. Aus diesen treten Bündel von Kapillaren in radiärer Richtung in das drüsige Schildchen ein. Ganz ähnlich verlaufen die venösen Gefäße, jedoch in entgegengesetzter Richtung, und verlassen die Schwimmblase an derselben Stelle, wo die Arterie eintritt, um in die Pfortader zu münden. Beide Gefäßarten bilden ein kontinuierliches spongiöses Blutgefäßgewebe, wie Bykowski und Nusbaum¹⁾ bei Fierasfer nachgewiesen haben, das aus intermittierenden arteriellen und venösen Gefäßen besteht.

Der Epithelkörper besteht aus einem ein- oder mehrschichtigen Epithel. Im ersten Falle setzt sich das Epithel aus zylindrischen Zellen zusammen, die zahlreiche, nach dem Innern der Blase gerichtete einfache Ausstülpungen bilden. Dies wäre der einfachste Bautypus des einschichtigen Epithelkörpers, wie wir ihn bei *Blenius* finden. Weit komplizierter erscheint der Epithelkörper bei *Gobius* und *Trigla*, wo die tubulösen Ausstülpungen sich nach verschiedenen Richtungen verzweigen und mit ihren blinden Enden zusammenwachsen, so daß an Querschnitten durch die Drüse viele, von zylindrischem oder kubischem Epithel begrenzte Lumina hervortreten. Andere Lumina, die zwischen den erwähnten erscheinen, stellen extraglanduläre Gänge dar, die meistens von Blutgefäßen und spärlichem Bindegewebe ausgefüllt sind. Einen deutlichen Übergang zu dem kompakten Epithelkörper mancher Fische stellt die Gasdrüse von *Syngnathus* und *Girardinus* dar. Die tubulösen Ausstülpungen sind an der Basis der Drüse so zahlreich, daß sie durch Aneinanderpressen ihre Lumina verlieren und zu fast kompakten Schichten von Epithelzellen sich umbilden. In der nächsten Nähe des Lumens der Schwimmblase bleibt infolge eines geringeren Druckes der tubulöse Bau der Drüse ganz deutlich erhalten. Gleichzeitig unterliegt auch die Gestalt der Zellen einer gründlichen Veränderung; in dem geschichteten Teile, an der Basis der Drüse, werden die zylindrischen Zellen infolge vielseitigen Druckes unregelmäßig polygonal, während die Zellen der oberen Schicht der Drüse ihre zylindrische Form in den Tubulis bewahren.

¹⁾ Bykowski L. u. Nusbaum J. Beiträge zur Morphologie des parasitischen Knochenfisches *Fierasfer* Cuv. Bull. de l'Acad. de sciences, Cracovie 1904.

Die kompakten Drüsen (*Sargus*, *Pagellus*) bestehen aus einigen Schichten von Epithelzellen, die von zahlreichen Kapillargefäßen in den verschiedensten Richtungen durchzogen sind. Ihre Zellen nehmen stufenweise in der Richtung von der Basis des Epithelorgans zum Lumen der Blase an Größe stetig ab, so daß die letzte Schicht aus ganz platten Epithelzellen besteht. In den kompakten Gasdrüsen finden wir ganz eigenartige Ausführungsgänge (— wie wir solche früher bei den Ophididen nachgewiesen haben¹⁾ —, die keine eigenen Wandungen aufweisen, sondern Lücken im Epithelgewebe zwischen den einzelnen Epithelzellen (interzelluläre Gänge), oder zwischen den Zellen und den Wandungen der sie umgebenden Blutkapillaren (perivaskuläre Gänge) bilden.

Wir glauben der Vermutung Raum geben zu dürfen, daß die mannigfaltigen Formen der Gasdrüse als verschiedene Umbildungsstadien der tubulösen Drüse zu einer kompakten zu betrachten sind. Bei den von uns beobachteten Gattungen lassen sich, wie wir oben dargelegt haben, vier Typen nachweisen, die aber eigentlich nur vier Entwicklungsstadien der Gasdrüse bilden: 1) zuerst die lediglich aus tubulösen Ausstülpungen bestehende Drüse bei *Blenius* und 2) die aus mannigfaltig verzweigten Tubuli zusammengesetzte Drüse bei *Trigla* u. *Corvina* etc., dann 3) die teils Tubuli und teils ein geschichtetes Epithel bildende Drüse von *Hippocampus* u. *Syngnathus*, sowie 4) die eigentlichen kompakten Drüsen von *Sargus*, *Charax*.

Im innigen Zusammenhange mit dem allgemeinen Bau der Drüse verbleibt auch die Form der Ausführungsgänge. Im ersten Typus funktionieren die einfachen tubulösen Ausstülpungen als Ausführungsgänge der Drüsen; im zweiten und in dem tubulösen Teil der Drüse des dritten Typus bilden die vielfach verzweigten tubulösen Ausstülpungen, Ausführungsgänge, welche in verschiedenen Richtungen die Gasdrüse durchziehen, so daß an Quer- und Längsschnitten viele von zylindrischem Epithel begrenzte Lumina erscheinen. In dem kompakten Teil an der Basis der Drüse des dritten und des vierten Typus finden wir keine Tubuli mehr, sondern wir finden in der kompakten Masse der Zellen Lücken, die sich in verschiedensten Richtungen zwischen den einzelnen Zellen oder zwischen den Wandungen der Zellen und den sie umgebenden Blutgefäßen

¹⁾ l. c.

hinziehen und durch welche die Zerfallsprodukte der Drüsenzellen ins Blasenlumen befördert werden.

In der Gasdrüse, mag sie dem einen oder dem anderen Bautypus angehören, ist die ausscheidende Partie von der ausführenden nie genau zu trennen. Ein Beispiel dürfte es näher erklären. Bei *Syngnathus* haben wir in manchen Tubuli, welche sich in das Lumen der Blase direkt öffnen, eine Menge von Gasbläschen angetroffen, die wahrscheinlich vom Zerfall der näher der Basis der Gasdrüse gelegenen Drüsenzellen stammen. Zugleich aber mußten auch die an diese Tubuli grenzenden Drüsenzellen an der Gasbläschenbildung teilnehmen, da sie einen großen Teil ihres Zelleibes eingebüßt haben, so daß eine Reduktion des Zylinderepithels zu einem Plattepithel eingetreten ist. In anderen Tubuli finden wir tatsächlich in den ihre Lumina umgebenden Zellen zahlreiche Gasbläschen. Ganz ähnliche Bilder sind in den kompakten Drüsen zu finden, z. B. bei *Sargus*.

Es ist bei dieser Gelegenheit hervorzuheben, daß mit der Umbildung der Gasdrüse aus einer tubulösen in eine kompakte zugleich ihre Leistungsfähigkeit beim Ausscheidungsprozesse sich steigern dürfte, da im ersten Falle nur eine Fläche der Zelle, im letzteren aber die Drüsenzellen allseits, den Lumina der Ausführungsgänge (intrazelluläre und perivaskuläre Räume) zugewendet sind, so daß einige Partien der Drüsenzellen gleichzeitig ihre Gasbläschen aus dem Zellinnern in den Ausführungsgang befördern können. Während die Ausführungsgänge der tubulösen Drüsen sehr weite Lumina haben, so daß sie auf den Querschnitten durch die Gasdrüse gleich unsere Aufmerksamkeit auf sich ziehen, sind die Gänge der kompakten Drüsen oft sehr schwer zu erkennen, da sie kein stabiles Lumen besitzen und erst in den in voller Gasabsonderung begriffenen Gasdrüsen erweitert und daher sichtbar werden. Dies dürfte die Hauptursache sein, daß sie von vielen Autoren bisher nicht bemerkt worden sind. (Corning¹⁾, Deineka²⁾, Jaeger³⁾.

¹⁾ Corning H. K. Beiträge zur Kenntnis der Wandernetzbildungen in der Schwimmblase der Teleostier. *Morph. Jahrb.* 1888. Bd. 14.

²⁾ Deineka D. Zur Frage über den Bau der Schwimmblase. *Zeitschr. für wiss. Zoologie.* 1904.

³⁾ Jaeger A. Die Physiologie und Morphologie der Schwimmblase der Fische. *Arch. f. ges. Phys. d. Menschen u. d. Tiere.* Bd. 94, 1903.

J. Müller¹⁾ hat noch im J. 1840 die Vermutung ausgesprochen, daß in den „drüsigen Säumen“ Drüsenkanäle vorhanden sein müßten, (von denen hin und wieder Durchschnitte ein undeutliches Bild geben), vermittelt deren die abgesonderte Luft in das Innere der Blase eindringt. Es ist daher befremdend, wenn wir bei Corning²⁾ lesen: „Ich habe weder von Drüsenkanälen noch von Öffnungen auf der innern, die drüsigen Säume überkleidenden Schicht der Schwimmblase etwas auffinden können“, umso mehr, da zu gleicher Zeit Coggi³⁾ bei den von ihm studierten Gattungen verschiedene Hohlräume und Gänge nachgewiesen hat. Auch Jaeger⁴⁾ hat in der Drüse von Sciaena Hohlräume in Gestalt von ein wenig in die Länge gezogenen Ballonen bemerkt, die von zartem Epithel überkleidet, den Blutkapillaren ähnlich sind, interzellulär verlaufen und hie und da ins Schwimmblasenlumen münden. Diese Hohlräume sind nach Jaeger blasige Auftreibungen von präformierten Gängen, Gasbehälter, die der Schwimmblase das Gas liefern.

Im Innern der Epithelzellen hat weder Jaeger noch einer von den früheren Forschern Gasbläschen gesehen; sie wurden zum erstenmale von Bykowski und Nusbaum⁵⁾ und dann von uns⁶⁾ 7) näher beschrieben. Die jetzigen Untersuchungen liefern weitere Belege zur Bestätigung unserer früheren Beobachtungen.

Bei den verschiedenen von uns untersuchten Formen (Syngnathus, Hippocampus, Sargus etc.) haben wir einen ganz ähnlichen Prozeß der Gasausscheidung gefunden, wie wir ihn in unserer früheren Arbeit bei den Ophididen⁷⁾ beschrieben haben. Die Gasbläschen bilden sich im Innern der Zellen durch Fragmentation der Kerne bei gleichzeitigem körnigen Zerfall des Zellplasmas. Die Zerfallsprodukte der Zellen gehen nach weiteren chemischen Veränderungen in die Gasbestandteile der Schwimmblase über. Die

¹⁾ Müller J. Über die Nebenkiemen und Wundernetze. Arch. f. Anat. und Phys. Berlin. 1840.

²⁾ l. c.

³⁾ Coggi A. Interni ai corpi rossi della vesica natatoria di alcuni Teleostei. Mitteil. d. Zool. Station zu Neapel. Bd. 7. 1885—87.

⁴⁾ l. c.

⁵⁾ l. c.

⁶⁾ K. Reis u. Prof. J. Nusbaum. Zur Histologie der Gasdrüse in der Schwimmblase der Knochenfische, zugleich ein Beitrag zur Trophospongienfrage. Anat. Anz. 1905.

⁷⁾ l. c.

Verdichtung der Gase muß die Ausscheidung begleiten, da im Schwimmblasenlumen eine ziemlich große Spannung der Gase herrscht. Unserer Ansicht nach findet die Verdichtung der Gase in den Gasbläschen statt, da sie trotz des sich ihnen widersetzen- den, intrazellulären Druckes ihre bläschenförmige Gestalt behalten und sogar an Größe mit der fortschreitenden Gasausscheidung zu- nehmen. Je größer die Bläschen, umso weniger vom Zellenzerfall stammende Körner enthalten sie, weil diese bei der Ausscheidung verbraucht wurden. Ein weiterer Beweis, daß die Spannung des Gases in den Bläschen groß ist, ja sogar diejenige im Schwimm- blasenlumen und in den Drüsengängen übertrifft, ist aus dem Ber- sten der Hülle der aus den Zellen austretenden Gasbläschen zu ersehen. In den Drüsengängen und im Lumen der Blase kann man sehr oft einen Haufen körniger Zerfallsprodukte finden, dessen einzelne Körner den an der Peripherie der Gasbläschen sich be- findenden ähnlich sehen und als Reste des die Gasausscheidung bewirkenden Zellenzerfalls zu deuten sind.

48. M. RUDOLF WEIGL. **O wzajemnem połączeniu komórek nabłonko- wych przewodu pokarmowego kręgowców.** (*Über die gegenseitige Verbindung der Epithelzellen im Darme der Wirbeltiere*). (*Sur le mode d'union des cellules épithéliales dans l'intestin des Vertébrés*). Mémoire présenté par M. J. Nusbaum m. e.

(Planche XXIX.)

Gegenstand reger Untersuchungen besonders in den letzten Jahren wurden die von Golgi entdeckten und von andern For- schern oft unter verschiedenen Namen beschriebenen intrazellulären Netzstrukturen verschiedener Gewebszellen. Besonders sind es die Arbeiten E. Holmgrens (4), die Anregungen zu zahlreichen Nach- untersuchungen gegeben haben. Dieser Forscher gelangte nämlich zu einer höchst eigenartigen Entstehungs- und Funktionshypothese dieser Strukturen. Es sollen nämlich diese intrazellulären Netze Verzweigungen extrazellulär gelegener Zellen sein, sich verflüssigen können und so ein Ernährungsmaterial für die Zellen bilden. Als Holmgren diese Gebilde in den zylindrischen Epithelien der Darmschleimhaut wiederfand, schrieb er ihnen auch da dieselbe physiologische Bedeutung und denselben morphologischen Charakter

zu. Hier sollen dieselbe Rolle intrazelluläre Verzweigungen des subepithelialen Bindegewebes spielen, welches in ähnlicher Weise, wie wir es in der glatten Muskulatur sehen, zwischen die Zellen hindringt, bis zu den Schlußleisten reicht und so ein Wabenwerk bildet, in dessen Maschen die einzelnen Epithelzellen eingebettet liegen. Die so entstandenen Bindegewebssepten erzeugen aus sich das Trophosphonium.

Da diese Befunde die jetzt allgemein herrschende Auffassung des Bauplanes dieser Gewebsform von Grund aus zu verändern suchten, unternahm ich auf Anregung und unter der Leitung des Hrn. Prof. Dr. Josef Nusbaum, dem ich auch an dieser Stelle für die mannigfache Unterstützung, die er mir während der Arbeit zuteil werden ließ, meinen aufrichtigsten Dank ausspreche, eine Nachuntersuchung dieses Gegenstandes.

Ich kam jedoch zu ganz anderen Resultaten. Einerseits konnte ich konstatieren, daß die intrazellulären Netzstrukturen der Darmepithelzellen nichts mit den extrazellulären Gebilden gemein haben, vielmehr auf die Zelle beschränkt bleiben¹⁾; andererseits stellte es sich heraus, daß die Epithelzellen der Darmschleimhaut nicht durch Bindegewebssepten subepithelialer Herkunft voneinander geschieden sind, sondern — in Übereinstimmung mit den jetzt fast allgemein herrschenden Anschauungen — durch Spalten getrennt und durch Interzellularbrücken verbunden bleiben. Vom subepithelialen Bindegewebe werden sie durch die Basalmembran scharf abgegrenzt.

Es scheinen überhaupt die neuen Anschauungen Holmgrens den alten, schon längst geschlichteten Streit um das gegenseitige Verhalten des Epithels und des subepithelialen Gewebes wieder ins Leben rufen zu wollen. Denn schon Erdmann und Krause schilderten gewissermaßen ähnliche Befunde²⁾; auch sind die Befunde

¹⁾ Über den Bau und das Auftreten des binnenzelligen Netzapparates und anderer Strukturen verschiedener Zellen des Darmtractus werde ich in einer andern Arbeit berichten.

²⁾ Krause rechnet die Basalmembran zum Stratum proprium. Sie soll sich dadurch auszeichnen, daß sie zwischen die Fortsätze der Epithelzellen eigene Fortsätze oder Leisten entsendet (Zitiert nach Dawidoff (87)).

Erdmann beschreibt die Basalmembran als eine Membran, welche Fortsätze sowohl in das Epithel, als auch in das Stroma der Zellen entsendet. (Zitiert nach Drasch (81)).

In Quain's „Elements of Anatomie“ wird die Basalmembran als ein aus flachen Zellen bestehendes Gebilde beschrieben. Sie soll einerseits mit den verästelten

Holmgrens geradeso wie die ältern Ansichten Heidenhain's, Virchow's Trugbilder und entspringen denselben Fehlerquellen. Unstreitig lassen sich auch viele von den von R. Heidenhain (88) und Stöhr (89) angeführten Ursachen des Entstehens dieser Strukturbilder zur Erklärung der Befunde Holmgrens heranziehen.

Auf diese Ursachen brauche ich also nicht näher einzugehen. Ich will nur auf einen großen Fehler der von Holmgren angewandten Trichlormilchsäurefixierung hinweisen, nämlich, daß das gegenseitige Verhalten des Zellfußes und der Basalmembran ganz zerstört. Durch die Eigenschaften dieses Reagens, welches eine starke Quellung der Zellen verursacht, verliert die Zelle ihre Form, zieht sich oft zu Fäden aus, der Fuß der Zelle bleibt stellenweise mit der Basalmembran in innigem Verband, stellenweise ist er wieder von ihr abgebrochen und infolgedessen erhalten wir nicht das Bild einer schönen Abgrenzung gegen das subepitheliale Gewebe, sondern nur ein Gewirr von Fäden und Membranellen. Da ist es wirklich schwer, die Natur der Elemente zu bestimmen, man weiß nicht, was Zelle, was deren Ektoplasmaschicht und Interzellularbrücke, was Basalmembran und Bindegewebsfibrillen sein soll, und wie sich das alles zueinander verhält.

Dagegen sehen wir an gut konservierten Darmzotten, daß das Epithel gegen das Zottenstroma hindurch die Basalmembran scharf abgegrenzt wird. Diese Membran besteht an meinen Präparaten aus 2 Schichten: einem äußerst zarten, strukturlosen Häutchen, welches sich der Basis der Epithelzellen anlegt und auch höchstwahrscheinlich ein Produkt dieser Zellen darstellt, und aus einem Geflecht aus zarten Bindegewebsfibrillen mit eingestreuten Kernen. Mit dieser Schichte der Basalmembran steht das adenoide Gewebe des Zottenkörpers durch seine Fasern in innigem Verband¹⁾.

Diese Verhältnisse treten an Präparaten klar zutage, bei deren Konservierung der Zotteninhalt schrumpft und sich vom Epithel retrahiert; da sieht man öfters, wie sich stellenweise das strukturlose Häutchen der Basalmembran einerseits von den Epithel-

Zellen des retikulären Gewebes verbunden sein, andererseits soll sie Fortsätze in das Epithel entsenden, welche sogar die Oberfläche der letzteren erreichen (Zitiert nach Dawidoff (87)).

¹⁾ Einen solchen Bau der Basalmembran nehmen auch Schaffner, Oppel und Ebner an. Ausführliches Literaturverzeichnis über diesen Gegenstand bei Oppel (97) und Ebner (99).

zellen, andererseits von dem bindegewebigen Teil der Basalmembran löst. Bei diesem Prozesse wird also deutlich die Basalmembran in ihre Komponenten zerlegt.

Ich muß jedoch betonen, daß nicht überall eine so scharfe Grenze zwischen dem Epithel und dem Zottenstroma zu finden ist. Besonders bei den urodelen Amphibien verschwindet stellenweise diese scharfe Abgrenzung, insbesondere an den Spitzen der Falten, und da hat es, besonders an etwas schräg geführten Schnitten, oft den Anschein, als ob das Bindegewebe zwischen die Zellen ausstrahlen möchte. Es handelt sich aber da gewiß nicht um die allgemein bestehenden Verhältnisse, sondern um Veränderungen, die vielleicht unter anderen durch das Einwandern von Leukocyten hervorgerufen werden.

Auch von seiten Oppels (02) stießen die Befunde Holmgrens auf heftigen Widerspruch. Nur die Strukturverhältnisse, die Saint-Hilaire (03) an den Darmepithelzellen von *Amphiuma* schildert, scheinen sich den Anschauungen Holmgrens zu nähern; hier handelt es sich aber um elastische Fasern, die ein dichtes, subepitheliales Geflecht bilden und zwischen die einzelnen Zellen dringen.

Dieses Material stand mir nicht zur Verfügung. Alle von mir untersuchten Amphibien¹⁾ zeigen nichts Ähnliches. Überall sind die elastischen Fasern in den Darmschleimhautfalten nur äußerst spärlich entwickelt und nie sah ich sie zwischen den Zellen des Epithels.

Was stellen uns nun die von Holmgren abgebildeten, zwischenzelligen Membranellen vor? (*Proteus*). Vor allem haben wir es hier mit ein wenig geschrumpften Zellen zu tun, und diese Schrumpfung kann eine zweifache sein; je nach der Art dieser Schrumpfung erhalten wir auch verschiedene Bilder.

Der erste dieser zwei Typen stellt sich uns folgendermaßen dar: die Zellen schrumpfen samt ihrer ektoplasmatischen Grenzschichte, oder besser gesagt, sie weichen auseinander; es entstehen zwischen ihnen Spalträume, die von zarten, weiter unten näher zu beschreibenden Interzellularbrücken durquert sind (Fig. 1 A). Wir haben hier keine Spur von zwischenzelligen Membranellen. Solche Bilder gibt Holmgren nicht.

¹⁾ Zur Untersuchung gelangten: *Rana esculenta*, *Bombinator igneus*, *Amblistoma*, *Axolotl*, *Proteus anguineus*, *Salamandra maculosa*, *Spelerpes ruber*, *Triton cristatus*, *Triton taeniatus* und *Triton pyrrhogaster*.

Beim zweiten Typus schrumpft das Plasma (Entoplasma) der Zellen zusammen, die ektoplasmatischen Grenzschichten der benachbarten Zellen machen jedoch diese Schrumpfung nicht mit, erscheinen also wie miteinander verklebt, und wir bekommen daher ein Bild zweier eingeschrumpften Zellkörper und zwischen ihnen ein lamellöses Gebilde, welches ganz gerade oder auch geschlängelt zwischen den Zellen verläuft. Mit diesen so entstandenen Membranellen steht das Plasma an bestimmten Stellen noch in Verbindung, und so entstehen Gebilde, die Interzellularbrücken vortäuschen (Fig. I B). Das sind die Bilder Holmgrens nach meiner Deutung.

Ähnliche Verhältnisse schildert M. Heidenhain (01) an Querschnitten der glatten Muskulatur. Wenn wir uns also der durch ihn eingeführten Nomenklatur bedienen, so unterscheiden wir auch an den zylindrischen Epithelien eine Schrumpfung „mit der Haut“ (II Typus Heidenhain's) und „in der Haut“ (I Typus Heidenhain's).

Dabei denke ich jedoch keineswegs an eine vollkommene Übereinstimmung der betreffenden Strukturverhältnisse in der glatten Muskulatur und in den Darmepithelien, wie es neulich Holmgren getan hat. Die Zellen der glatten Muskulatur sind ja — wie allgemein bekannt — durch Bindegewebslamellen voneinander getrennt, und diese bleiben auch bei der Schrumpfung der Zellen „mit der Haut“ zwischen den einzelnen Zellen. Nie sehen wir dies jedoch bei Epithelzellen; hier sind die interzellulären Räume von solchen Gebilden ganz frei und nur von Brücken durchquert. Diese Brücken sind auch keineswegs das Produkt der hypothetischen Interzellularlamellen Holmgrens.

Hievon überzeugen wir uns durch Vergleichung der Längsschnitte mit den Querschnitten. Bei der Schrumpfung „in der Haut“ haben wir auch zwischen den Darmepithelzellen lamellöse Gebilde; das sind aber, wie ich eben dargestellt habe, die verklebten ektoplasmatischen Differenzierungen benachbarter Zellen. An Längsschnitten sehen wir, wie diese interzellulären Lamellen an der Basis der Zellen sich in zwei Lamellen teilen und jede für sich dem ihr angehörenden Zelleibe sich anschmiegt. Oft verläuft auch eine solche interzelluläre Lamelle geschlängelt, steht abwechselnd mit dem Plasma einer oder der anderen Zelle in Verbindung und täuscht so, wie auch Holmgren bemerkt, Zellbrücken vor. Sie sind jedoch leicht zu erkennen und nicht mit diesen Gebilden zu verwechseln.

Es unterliegt keinem Zweifel, daß diese Interzellulargebilde nichts mit dem subepithelialen Bindegewebe gemein haben.

Die ähnliche Färbbarkeit bei Anwendung bestimmter Tinktionen hat ja doch gar nichts zu bedeuten. Es ist das eben auch nur ein Fehler der von Holmgren angewandten Färbmethode, daß sie eben diese Elemente nicht differenziert. Färbt man z. B. den Proteusdarm mit Säurefuchsin + Orange, der v. Gieson'schen Flüssigkeit und mit deren Modifikationen oder nach den Methoden Unnas für Collagenfärbung, so bekommt man bei gelungener Färbung eine sehr schöne und äußerst scharfe, kontrastreiche Differenzierung dieser Gebilde, wobei sich das subepitheliale Bindegewebe hochrot, die zwischenzelligen Membranellen gelblich, ähnlich wie das Plasma der Zylinderzellen färbt. Wie bemerkt, haben wir es also hier mit nichts anderem als mit den ektoplasmatischen Grenzschichten der benachbarten Zellen zu tun; diese Grenzschicht befindet sich auch an der Basis der Zelle, die der Basalmembran aufsitzt, so daß man sie oft von dieser letzteren nicht zu unterscheiden vermag. Ab und zu findet man aber auch Stellen, wo alle diese Gebilde voneinander deutlich getrennt sind und uns das wahre Verhalten klar darlegen.

Auch andere Bilder, die Holmgren als Stütze für seine Anschauung verwertet, sind nicht imstande, diese aufrechtzuerhalten; so z. B. die Gruenhagenschen Räume. Holmgren sieht sie als präformiert an und ist der Ansicht, daß sie nicht in der Zelle, sondern zwischen der Zellbasis und der Basalmembran entstehen. Die Wandungen dieser Räume sollen durch Bindegewebssepta gebildet werden, die von der Basis dieser Räume bis zu den Schlußleisten reichen; und das führt Holmgren als Grund an, weshalb man sie nicht als ektoplasmatische Differenzierungen der Epithelzellen ansehen kann. Diese seine Auseinandersetzungen haben jedoch nur geringe Beweiskraft, denn warum sollte — auch an sehr verlängerten Zellen — eine ektoplasmatische Differenzierung nicht von der Basis bis zur Schlußleiste reichen? Außerdem entstehen die Gruenhagenschen Räume — welcher Natur sie auch sein mögen — nicht unter den Zellen, sondern in den Zellen, wie es auch Reuter und Andere angeben. Die Wandungen derselben sind also die ektoplasmatischen Bildungen der Zelle selbst und nicht Bindegewebssepten. Öfters erhielt ich Bilder, bei denen auch die so veränderten Zellen sich von der Basalmembran abheben; an solchen Zellen haben die Gruenhagenschen Räume das Aussehen von Aus-

sackungen an dem Basalteile der Zelle und die Basalmembran befindet sich unten, ohne mit ihr in Verbindung zu stehen.

Was also den Verband und die Zusammengehörigkeit der zwischenzelligen Membranellen mit den subepithelialen Gebilden des Bindegewebes anbelangt, so bin ich — wenigstens was die Verhältnisse des Darmepithels der Wirbeltiere anbelangt — davon überzeugt, daß Holmgrens Annahmen auf Irrtum beruhen, da ihn der Wunsch, diesen Zusammenhang nachzuweisen — welcher doch für seine Erklärung der Trophospongiengebilde eine *conditio sine qua non* bildet — dazu verleitet. Bilder, welche einen solchen Zusammenhang vortäuschen, als bestehende und allgemein gültige Strukturverhältnisse zu deuten.

Diese meine Anschauungen betreffen aber nur die Verhältnisse an dem Zylinderepithel des Dünndarmes der Wirbeltiere, und ich will sie nicht verallgemeinern. An niederen Tieren z. B. in dem Hautepithel und in manchen Gegenden des Darmes bei den Blutegeln erhielt auch ich Bilder, die den von Blochmann (05), Ramon y Cajal (03) und Holmgren beschriebenen Befunden vollkommen entsprechen. Meiner Ansicht nach dürfen jedoch die Strukturverhältnisse dieser Tierklassen nicht ohne weiteres denen der Wirbeltiere angepaßt werden und noch viel weniger können sie als Beweis für die Struktur des Darmes der Wirbeltiere auf die Wagschale gelegt werden.

Ich gehe jetzt zur Beschreibung der Interzellularbrücken über.

Wie schon oben angedeutet wurde, haben wir es bei der Schrumpfung der zylindrischen Epithelien mit zwei Formen dieser Erscheinung zu tun.

Bei einem Typus bleiben die verdichteten Grenzsichten benachbarter Zellen miteinander verklebt und nur der Plasmakörper schrumpft, hängt jedoch an bestimmten Stellen mit der Grenzsichte zusammen. An Quer- wie auch an Längsschnitten der Zellen (vergl. Fig. 2, 3, 4) sieht man beinahe ausnahmslos, daß diese stachelartigen Ausziehungen des Plasmaleibes benachbarter Zellen in knötchenartigen Gebilden zusammenstoßen, und man hat den Eindruck, als ob an diesen Stellen ein kontinuierlicher Übergang des Plasmas benachbarter Zellen stattfände. Wir erhalten somit ganz ähnliche Bilder, wie sie uns Heidenhain in seinem Schema der Schrumpfung „in der Haut“ der glatten Muskelzellen bietet; nur sind es hier nicht flügelartige radiäre Septen des Plasmaleibes, die

an Grenzfibrillen befestigt sind, sondern stachelartige Ausziehungen des Plasmaleibes. Wirkliche Interzellularbrücken sind zwar diese Stacheln nicht, da sie sich ja nicht zwischen zwei benachbarten Zellen, sondern in ihnen selbst befinden und daselbst nur das Entoplasma mit der ektoplasmatischen Grenzschiote verbinden. Sie deuten uns aber jene Stellen an, wo solche Interzellularbrücken bei der zweiten Art der Schrumpfung entstehen. (Ähnliche Gebilde beschreibt Cloetta (93)).

Dazu sei noch bemerkt, daß der Raum, welcher bei dieser Art der Schrumpfung zwischen dem geschrumpften Entoplasma und der ektoplasmatischen Grenzschiote entsteht, nur selten leer erscheint. Gewöhnlich ist er mit einer sich heller färbenden Substanz ausgefüllt (deutlich zusehen auf Fig. 2) und wir haben es da gewiß mit dem Ektoplasma und der aus dem geschrumpften Entoplasma austretenden Zellymphe zu tun.

Wenn bei der anderen Art der Schrumpfung die Zellen auseinanderweichen, so erhalten wir ganz andere Bilder (Fig. 5, 6). Wieder ist jede Zelle wie mit Stacheln besetzt; diese Stacheln verbinden sich aber mit denen der Nachbarzellen so, daß sie uns dadurch kontinuierliche Stränge darstellen, durch welche die auseinandergetretenen Zellen verbunden bleiben. Hier haben wir die wahren Interzellularbrücken vor uns¹⁾.

Über den Bau dieser Gebilde der Darmepithelien liegen in der Literatur nur spärliche Angaben vor²⁾, Kolossow (98, 02) deutet sie als lamellöse Fortsetzungen der ektoplasmatischen Grenzschiote. Ich lasse hier seine Beschreibung folgen.

¹⁾ Diese Bilder des durch die angewandten Reagentien (mit und besonders in der Haut) zusammengeschrumpften Zellkörpers geben natürlich nicht den normalen Bau der Zelle wieder, hier haben wir aber — wie es auch Barfurth (96) bei der Beschreibung der Interzellularbrücken des Uterus bemerkt — ein Naturexperiment vor uns, durch welches präformierte, aber verborgene Strukturen verdeutlicht werden.

²⁾ Über Interzellularbrücken der Darmepithelien berichten R. Heidenhain (87), Nicolas (91), Cohn (95), Carlier (96), Kolossow (98, 02), Schneider (02), Brummer (75), Ogneff (92), Garten (96). — Die Angaben der letzten drei Forscher beziehen sich nur auf die Magenepithelzellen. Gelegentlich werden Interzellularbrücken in der Dünndarmschleimhaut auch von Zimmermann (98) und von Reuter (03) erwähnt. Die Existenz wahrer Brücken an den Darmepithelzellen leugnen Stöhr (92), Cloetta (93), Ebner (99), Dekhuyzen und Vermaat (03), und Holmgren (04).

„An den Seitenflächen der Zelle bildet das Protoplasma eine dünne ektoplasmatISChe GrenzsChicht..., durch viele verschwindend kleine und miteinander anastomisierende lamellöse Fortsetzungen hängt die erwähnte Schicht direkt mit den gleichen GrenzsChichten der Nachbarzellen zusammen“.

Die Methode Kolossow's¹⁾, die zwar zum Nachweis der Existenz der interzellulären Verbindung durch Brücken gute Dienste leistet, gibt über den Bau dieser Gebilde nur schlechte Auskunft. Die Zellen schrumpfen stark ein, weichen aber trotzdem nur wenig auseinander. Wir sehen also gewöhnlich nicht nur die Brücken, sondern auch die starken Falten der ektoplasmatiscHen GrenzsChicht, die uns Scheidewände zwischen den Zellen vortäuschen.

Nach Schneider (02) sollen die Brücken das Produkt der Körnchen der an der Peripherie der Zellen verlaufenden Fäden sein, uns also Verbindungsfäden der Körnchen zweier benachbarter Zellen darstellen. Andere Autoren, die über Zellbrücken der Darmepithelien berichten, sehen sie als stachelförmige Ausläufer der Zellen an, die sich mit denen der benachbarten Zellen verbinden. Was ihren Bau anbelangt, so lassen sie dieselben meistens nur aus der ektoplasmatiscHen GrenzsChicht des Zelleibes aufgebaut sein.

Zur Beurteilung der Frage über den Bau der Brücken bei den Darmepithelien werde ich auch die Bilder, die uns die Schrumpfung „in der Haut“ bietet, zu Hilfe nehmen. An so geschrumpften Zellen sehen wir, daß das Entoplasma benachbarter Zellen an gewissen Stellen nur durch knöpfchenartige Gebilde getrennt oder vielmehr verbunden ist (Fig. 2); treten nun die Zellen ein wenig auseinander, so verschwinden die eben genannten Gebilde²⁾ und an ihre Stelle treten plasmatische Verbindungsbrücken ohne irgend welche

¹⁾ Fixierung durch Injizieren (2—3 Minuten) ins Blutgefäßsystem des zu untersuchenden Organes einer Mischung von:

$\frac{1}{2}\%$	wässriger Osmiumsäure	100 ccm
30%	Salpetersäure	$\frac{1}{2}$ —1 „
	Eisessig	1 „
	Kalium nitricum 10 bis 20 gr	

dann zur endgültigen Fixation auf 16—24 St. in reine $\frac{1}{2}\%$ Osmiumsäurelösung.

²⁾ Die schwarzen Pünktchen, die oft beim Auseinanderrücken der Zellen in der ektoplasmatiscHen Schicht an der Basis der Brücken auftreten, entsprechen gewiß nicht den oben beschriebenen schwarzen Knötchen, vielleicht eher den von Schneider beschriebenen Desmochondren peripherischer Fäden.

merkbare Grenze (Fig. 6). Wenn die Schrumpfung nur schwach ist, sind diese Brücken oft so dick, daß man an ihnen eine äußere, dunkler gefärbte Schicht, die der ektoplasmatischen Grenzschiicht angehört, unterscheidet und eine innere, hellere, die vielleicht als unmittelbare Entoplasmaverbindung der Zellen zu deuten wäre. Auch der Bau der knötchenartigen Bildungen verleitet zu einer solchen Annahme¹⁾. Betrachtet man das Flächenbild der Zelle, so bestehen diese Gebilde aus einem schwarzen Ring mit hellerem Inhalt (Fig. 7).

Aus diesem Bau der Gebilde und ihrem Verhalten (Verschwinden beim Auseinandertreten der Zellen) schließe ich, daß es nicht Gebilde *sui generis* sind, sondern daß sie uns nur die Stellen markieren, wo sich das Entoplasma benachbarter Zellen verbindet. Ihre scharfe Färbbarkeit ergibt sich daraus, daß ja an diesen Stellen alle Plasmaschichten und ektoplasmatischen Differenzierungen benachbarter Zellen zusammenstoßen und dadurch ein mehr kompaktes Klümpchen bilden.

Es besteht also die Brücke aus einer ektoplasmatischen Hülle und einer entoplasmatischen Achse²⁾.

¹⁾ Diese Knötchen, die immer sehr scharf zwischen den — nicht oder nur sehr wenig — auseinandergewichenen Zellen hervortreten und die uns dadurch die Grenzlinien benachbarter Zellen markieren, deutet Holmgren als Querschnitte wirklicher Grenz fibrillen, wie wir sie auch an den glatten Muskelzellen finden.

Meiner Anschauung nach, haben wir es da nicht mit Grenz fibrillen zu tun; wenn dem so wäre, müßten wir sie an Längsschnitten die uns die Seitenfläche der Zellen zeigen, deutlich sehen. In Fig. 7, 8 habe ich solche Zellen abgebildet; wir sehen hier den Verlauf und die Anordnung dieser Gebilde sehr deutlich. Es sind also keine längsverlaufenden Fibrillen, sondern nur Knötchen, die bei schwacher Schrumpfung der Zelle (mit der Haut) durch längs- und querverlaufende Linien miteinander verbunden sind (Fig. 7). Auch Schneider (02) sah gewiß diese Gebilde zwischen den Zellen. Er schreibt: „Wenn zwischen zwei benachbarten Zellen die Interzellularlücken fehlen, so wird die Zellkontur durch dunkle Punkte bezeichnet, die leicht zu schwarzen Linien verfließen“.

²⁾ Nach Studnička (99) sind die Brücken der Epithelzellen plasmatische Ausläufer derselben; wenn nun — nach den Anschauungen dieses Forschers — das Plasma an seiner Oberfläche sich zu einer Membran verdichtet, so trifft dasselbe Schicksal auch die Brücken und dann stellen sie uns nicht mehr einen Verband des frischen Entoplasmas benachbarter Zellen dar, sondern sind nur ektoplasmatische Differenzierungen. Diese Argumentation Studnička's kann — etwas modifiziert — auch auf unseren Fall angewendet werden. Der Prozeß der oberflächlichen Verdichtung des Plasmas trifft hier auch nur den peripherischen Teil

An Stellen, wo die Zellen weiter auseinanderrücken, sieht man nichts mehr von diesem Bau der Brücken, weil sie da stark gedehnt und zu dünnen, oft langen Fäden ausgezogen werden (Fig. 6). Es ist auch anzunehmen, daß bei einer so starken Dehnung die entoplasmatische Achse nicht nur zu einem äußerst dünnen Faden reduziert wird, sondern auch zerreißt; dann erscheinen die Brücken auch nur als Ausläufer der ektoplasmatischen Grenzschicht.

Es fragt sich nun, ob die fibrillären Differenzierungen des Plasmas durch diese Brücken in die der Nachbarzellen übergehen?¹⁾

Bilder, die man zuweilen zu Gesichte bekommt, (besonders schön an im Carnoy-Gemisch konservierten Material), scheinen dafür zu sprechen. Man sieht nämlich an Längsschnitten, wie quer durch die Zelle verlaufende Fäden direkt durch die Brücken in die Nachbarzellen übergehen und oft auf diese Weise mehrere Zellen miteinander verbinden²⁾. (Fig. 9). Bei starken Vergrößerungen lösen sich diese oft dicken Fäden in zwei, zuweilen auch in mehrere Fibrillen auf. Diese Fibrillen erscheinen wieder als Verbindungsfäden von Körnchen, die an in der Längsachse der Zelle verlaufenden Fäden verteilt sind. Wir erhalten also in dem konservierten Zellplasma oft ein äußerst regelmäßiges Netzwerk von Fäden, welches schon Klein (79) und Schneider (02) für die Epithelzellen des Darmkanals beschrieben haben. Auch M. Heidenhain (99) sah oft die Längsfibrillen der Darmepithelzellen durch zarte — jedoch farblose — Querbrücken verbunden. Diese Fäden bewirken — je nach der stärkeren Entwicklung in einer Richtung — entweder eine Längs- oder eine Querstreifung des Plasmas. Inwiefern jedoch die Natur dieses Netzwerkes den Bau der lebenden Zelle wiedergibt, traue ich mich nicht zu entscheiden¹⁾. Denn an Präparaten

der verhältnismäßig dicken Brücken. Es bleibt also in der Brücke noch ein Strang von frischem Plasma, durch welchen das Entoplasma benachbarter Zellen in Verbindung steht. Vergl. auch Barfurth (97).

¹⁾ In diesem Falle bestände eine Brücke aus einer Fibrille in einer plasmatischen Achse und einer ektoplasmatischen Hülle. Bekanntlich nimmt einen solchen Bau der Epithelzellbrücken Ramon y Cajal an.

²⁾ Diese Gebilde — die auch Holmgren beschreibt — verlaufen intrazellulär und sind nicht mit denen, die an der Oberfläche der Zellen auftreten und unten näher beschrieben werden sollen, zu verwechseln.

¹⁾ Es ist nämlich nicht ausgeschlossen, daß wir es auch hier mit einer Täuschung zu tun haben. Denn die Bilder, die uns der Längsschnitt der Zelle zeigt, entsprechen nicht denen des Querschnittes; an Querschnitten konnte ich das so

aus best konservierenden Gemischen sieht man gewöhnlich bei sehr guter Konservierung keine Spur von diesen Gebilden. Oft zeigt jedoch das Protoplasma, besonders in den oberen Partien der Zelle, eine deutliche Schichtung. Die dunkleren wie auch die helleren Partien haben denselben Bau, nur ist das Protoplasma in den dunkleren bedeutend dichter. Diese dunkleren Partien, die oft sehr schmal sein können, durchqueren die Zelle, setzen sich auch in die Nachbarzellen fort, so daß man den Eindruck gewinnt, als ob wir es auch hier mit denselben Gebilden zu tun hätten. Es sind aber keine Fäden, sondern nur Stränge (vielleicht ganze Schichten) eines dichteren Plasmas.

Was die Anordnung der Brücken an den Zellen anbelangt, so zeigen uns die Bilder in Fig. 7, 8, daß sie äußerst regelmäßig sein kann, wofür auch die Angaben Zimmermanns (98) und Schneiders (02) sprechen.

Es erübrigt nur noch, die oft stark ausgebildeten Verbindungslinien der Brücken auf dem Flächenbild zu besprechen.

Nach Zimmermann (98) stehen die Brücken auf der Höhe von Längsleisten, die miteinander wieder durch schwächere Querleisten zusammenhängen. Auch Schneider (02), der die Interzellularbrücken von den Desmochondren ableitet, beschreibt sie als regelmäßig an Längsfibrillen verteilt, die wieder durch Querfibrillen verbunden sind. Ich deute diese Leisten und Fibrillen als Fältelung der ektoplasmatischen Grenzschichte, die erst durch die Einwirkung der schrumpfenden Reagentien hervorgerufen wird.

Es handelt sich ja bei der Entstehung der Brücken um eine Schrumpfung mit der Haut; das ektoplasmatische Häutchen ist aber an bestimmten Stellen (Brücken) an dasjenige der Nachbarzellen

regelmäßige Netzwerk nicht wiederfinden, wir sehen hier nur, wie das stark geschrumpfte Entoplasma oft durch dünne fibrillenähnliche Züge (Stacheln) sich mit dem der Nachbarzellen verbindet. Es ist also möglich, daß während der Schrumpfung das zwei benachbarte Stacheln einer und derselben Zelle verbindende Entoplasma nicht so stark schrumpft und eine Art Leiste bildet, deren Rücken, von oben gesehen, uns eine Fibrille vortäuscht. Bei regelmäßiger Anordnung der Stacheln und geeigneter Schnittführung (in der Richtung des Pfeiles, Fig 10), bekommen wir also in der geschrumpften Zelle (an der Grenze des Ekto- und Entoplasmas) ein regelmäßiges Netzwerk mit Knotenpunkten: das sind die Stachelausziehungen mit den sie verbindenden Plasmaleisten. Daß es sich hier nicht um ähnliche Gebilde wie die Plasmasfasern der Epidermis handelt, — die auch mehrere Zellen miteinander verbinden können, — scheint mir ganz sicher zu sein.

fixiert; bei der Schrumpfung müssen also Fältchen entstehen, die je nach der Verteilung der Zellbrücken regelmäßige oder mehr weniger unregelmäßige Figuren bilden. Es entsteht an der Fläche der Zelle ein Maschenwerk von Fältchen, in dessen Knotenpunkten sich die Zellbrücken befinden. (So deutete ich auch die lamellosen Brücken Kolossoff's. Hieher gehören auch die von Holmgren beschriebenen und auch so gedeuteten, quer über die Zellen verlaufenden Fäden).

Auf eines möchte ich noch aufmerksam machen.

Bei der Durchmusterung der Präparate, wo es sich um eine markante Schrumpfung „in der Haut“ handelt, wird man unwillkürlich durch das scharfe Auftreten der Knötchen dazu verleitet, an die Brückenknötchen der Stacheln und Riffzellen zu denken. Die Ähnlichkeit dieser Gebilde ist nicht zu verkennen und wird oft dadurch gesteigert, daß man hie und da auch Bilder erhält, wo die interzellularen Lamellen entfarbt sind. Wenn wir noch dazu die Befunde Rabl's (96, 97), nach dessen Ansicht die Brückenknötchen untereinander verbunden sein sollen, im Auge behalten, so hätten wir ja ganz entsprechende Bilder. Ob und inwiefern jedoch diese Bildungen einander entsprechen, möchte ich hier nicht entscheiden.

Wenn wir jetzt diese Befunde, nämlich die Verbindung benachbarter Zellen durch Brücken, auf ihren physiologischen Wert hin prüfen wollen, so müssen wir vor allem berücksichtigen, daß die Beschaffenheit der Brücken von prinzipieller Bedeutung ist. Denn sind die Brücken nur das Produkt der ektoplasmatichen Grenzschicht oder gar der Interzellulärsubstanz, so können sie ja auch nur einer mechanischen Funktion dienen, nämlich der Aufrechterhaltung eines Verbandes der Zellen, der es den Zellen ermöglicht auseinanderzutreten und so zwischenzellige Hohlräume zu bilden, welche einerseits dem Lymphstrom freie Bahn lassen, andererseits auch das resorbierte Material zeitweise in sich aufnehmen.

Ganz anders und viel komplizierter kann sich ihre Funktion gestalten, wenn wir, wie ich oben zu beweisen bemüht war, annehmen, daß durch die Interzellulärbrücken ein kontinuierlicher Verband und Übergang des Entoplasmas (vielleicht samt seinen cytoplasmatischen Differenzierungen) benachbarter Zellen vermittelt wird. Hier drängt sich natürlich der Gedanke auf, daß es sich um Vorrichtungen handelt, die — außer der obengenannten Funktion —

als ihre höhere Aufgabe, die Übertragung von Reizen auf benachbarte Zellen übernehmen.

Lemberg, am 14. Juli 1906.

Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1. Schematische Darstellung der Schrumpfung A „mit der Haut“ und B „in der Haut“.

Fig. 2. Schnitt durch die Oberkernzone der Darmepithelzellen von *Proteus*. „Schrumpfung in der Haut“. Das stark geschrumpfte Entoplasma bleibt durch dünne fibrillenähnliche Züge mit den Nachbarzellen in Verbindung. An der Verbindungsstelle hämatoxylingefärbte Knötchen.

Carnoy-Gemisch, Eisenhämatoxylin. Zeiss Apoch. homog. Imm. 1·5 mm. Ok. 4. Zeichnungsprisma.

Fig. 3. Schnitt durch die Oberkernzone der Darmepithelzellen von *Proteus*. Deutliche Schrumpfung „in der Haut“. An einer Stelle treten die Zellen ein wenig auseinander und bleiben durch Brücken verbunden.

Carnoy-Gemisch, Eisenhämatoxylin. Zeiss Apoch. homog. Imm. 1·5 mm. Ok. 4. Zeichnungsprisma.

Fig. 4. Darmepithel von *Proteus*. Schrumpfung „in der Haut“ wie bei Fig. 2, dieselbe Konservierung.

Zeiss homog. Imm. 1·5 mm. Ok. 4. Zeichnungsprisma.

Fig. 5. Schnitt durch die Oberkernzone der Darmepithelzellen von *Proteus*. Schrumpfung „in der Haut“ mit einer nur leichten Schrumpfung „mit der Haut“. Die Zellen bleiben an den Stellen der Interzellularbrücken noch eng miteinander durch Knötchen verbunden.

Carnoy-Gemisch, Eisenhämatoxylin. Zeiss Apoch. homog. Imm. 1·5 mm. Ok. 4. Zeichnungsprisma.

Fig. 6. Schnitt durch die Oberkernzone der Darmepithelzellen von *Spelerpes*. Schrumpfung „mit der Haut“. Die Zellen treten weit auseinander, es entstehen dünne fadenförmige Interzellularbrücken.

Carnoy-Gemisch, Thiazinrot, R. Toluidin. Zeiss Apoch. homog. Imm. 1·5 mm. Ok. 4. Zeichnungsprisma.

Fig. 7. Darmepithelzellen von *Proteus*. Die mittlere Zelle zeigt uns ihre Seitenfläche. Man sieht hämatoxylingefärbte Knötchen, bestehend aus einem dunklen Ring mit hellerem Inhalt. Diese Knötchen sind durch längs- und querverlaufende Fibrillen verbunden.

Carnoy-Gemisch, Eisenhämatoxylin. Zeiss homog. Imm. 1·5 mm. Ok. 4. Zeichnungsprisma.

Fig. 8. Darmepithelzellen von *Proteus*. Wie in Fig. 7.

Zeiss Apoch. homog. Imm. 1·5 mm. Ok. 2.

Fig. 9. Darmepithelzellen von *Triton cristatus*. Schwarze hämatoxylingefärbte intrazelluläre Fibrillen mit Verdickungen durchqueren die Zellen und gehen durch die Brücken in solche Fibrillen der Nachbarzellen über. Die längsverlaufenden Fibrillen sind in dem Präparate nicht stark ausgeprägt und wurden bei der Zeichnung nicht berücksichtigt.

13



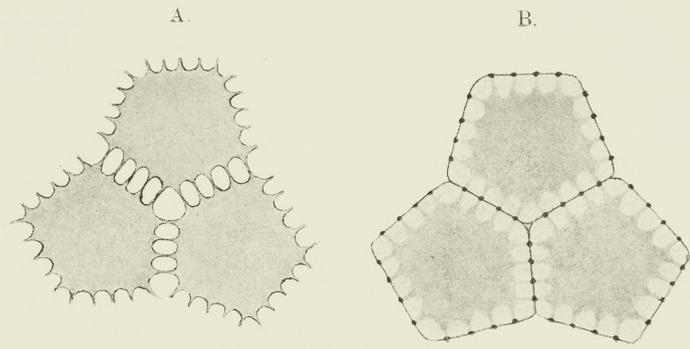


Fig. 1.

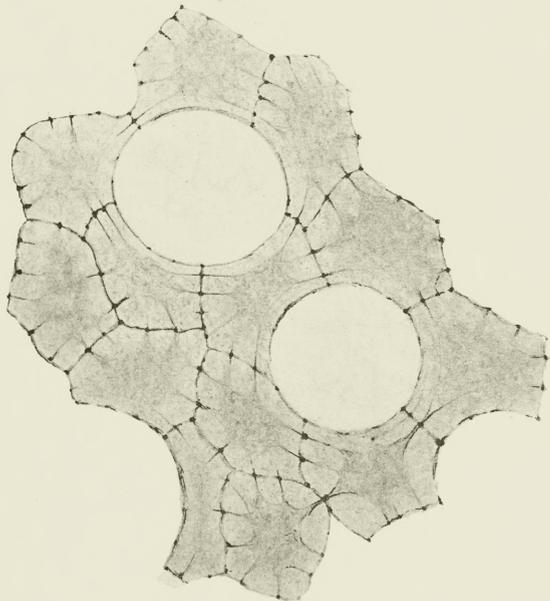


Fig. 2.

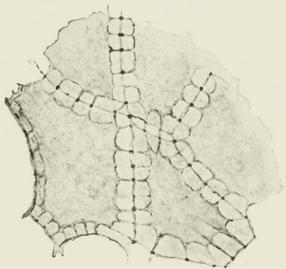


Fig. 3.



Fig. 5.



Fig. 6.

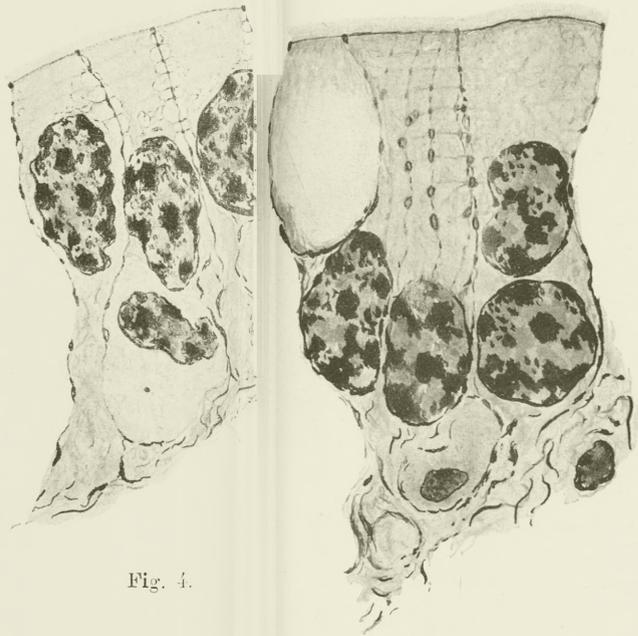


Fig. 4.

Fig. 7.



Fig. 8.

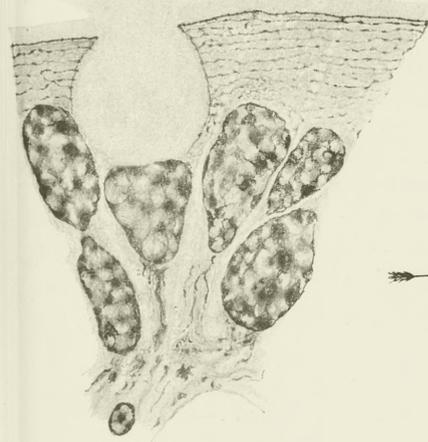


Fig. 9.

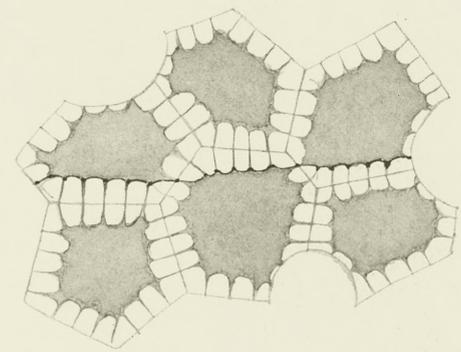


Fig. 10.



Carnoy-Gemisch, Zeiss homog. Imm. 1.5 mm. Ok. 4. Zeichnungsprisma.

Fig. 10. Schnitt durch die Oberkernzone des Darmepithels von Proteus. Die Konturen der Zellen mit Zeichnungsprisma nach dem Präparate gezeichnet. Die Struktur der Zellen schematisiert zur Erläuterung des Entstehens der intrazellulären Fibrillen. Wenn wir uns vorstellen, daß der Längsschnitt der Zellen in der Richtung des Pfeils fällt, so erscheint uns die dunkel gezeichnete Linie als intrazelluläre punktierte Fibrille (wie in Fig. 9).

Literaturverzeichnis.

- 96) Barfurth D. Zelllücken mit Zellbrücken im Uterusepithel nach der Geburt. Verh. d. anat. Ges.
 97) — Anat. Hefte Bd. IX.
 05) Blochmann T. Epithel und Bindegewebe bei Hirudo. Anat. Anz. Bd. 26.
 75) Brummer. Stacheln und Riffzellen in der Magenwand verschiedener Säugetiere. Mediz. Zentralblatt (nach Studnička (99)).
 96) Carlier E. W. On intercellular Bridges in columnar Epithelium. La Cellule T. 11. Fsc. 2.
 93) Cloetta. Beiträge zur mikroskopischen Anatomie des Vogeldarmes. Arch. f. mikroskop. Anatomie. Bd. 41.
 95) Cohn Th. Über Interzellularlücken und Kittsubstanz. Anat. Hefte. 1. Abt. Heft 15.
 87) Davidoff M. Untersuchungen über die Beziehungen des Darmepithels zum lymphoiden Gewebe. Archiv für mikroskop. Anat. Bd. 29.
 03) Dekhuyzen und Vermaat. Über das Epithel der Oberfläche des Magens. Anat. Anz. Ergänzungsh. zum Bd. 23.
 81) Drasch Otto. Beiträge zur Kenntnis des feineren Baues des Dünndarmes, insbesondere über die Nerven desselben. Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. Bd. 82. III. Abt.
 99) Ebner Victor. Koelliker's Handbuch der Gewebelehre des Menschen. 6. Aufl. 3. Bd.
 96) Garten S. Die Interzellularbrücken der Epithelien und ihre Funktion. Archiv f. Anat. u. Physiol., physiol. Abt. Jahrg. 1895.
 99) Heidenhain M. Über die Struktur der Darmepithelzellen. Archiv für mikroskop. Anat. Bd. 54.
 01) Heidenhain M. Struktur der kontraktile Materie. Merkel-Bounet's. Ergebn. d. Anat. u. Entwicklungsgesch. Bd. 10. 1900.
 88) Heidenhain R. Beiträge zur Histologie und Physiologie der Dünndarmschleimhaut. Arch. f. d. ges. Physiol. Bd. 43. Supplementheft.
 04) Holmgren E. Beiträge zur Morphologie der Zelle. II. Teil. Verschiedene Zellarten. Anat. Hefte. I. Abt. Bd. 25. (Hier auch Verzeichnis seiner Arbeiten über Darmepithelzellen).
 04) Holmgren E. Zur Kenntnis der zylindrischen Epithelzellen. Arch. f. mikroskop. Anat. Bd. 65.
 79) Klein E. Observations on the structure of cells and nuclei. Quarterly Journ. of microsc. Science New Ser. Vol. 19. (Nach Opperl (97)).
 98) Kolossow A. Eine Untersuchungsmethode des Epithelgewebes, besonders

der Drüsenepithelien und die erhaltenen Resultate. Arch. f. mikroskop. Anatom. Bd. 52.

02) Kolossow A. Zur Anatomie und Physiologie der Drüsenepithelzellen. Anat. Anzeiger. Bd. 21.

91) Nicolas A. Recherches sur l'épithélium de l'intestin grêle. Internation. Monatsschrift f. Anat. u. Physiol. Bd. 8. (Nach Cohn (95)).

92) Ogneff. Einige Bemerkungen über das Magenepithel. Biol. Zentralblatt Bd. 12.

97) Opperl A. Lehrbuch d. vergl. mikrosk. Anatomie d. Wirbeltiere. Bd. II.

03) Opperl A. Verdauungs-Apparat. Merkel-Bounet's Ergebn. der Anat. und Entwicklungsgesch. Bd. 12, 1902, auch weitere Bde 13, 1903; 14, 1904.

96) Rabl H. Untersuchungen über die menschliche Oberhaut. Arch. f. mikrosk. Anat. Bd. 48.

98) Rabl H. Haut. Merkel-Bounet. Ergebn. d. Anat. und Entwicklungsgesch. Bd. 7, 1897.

03) Ramón y Cajal. Un sencillo metodo de coloracion selectiva del reticulo protoplasmatico. Trabajos del laborat. de investig. biolog. de la Univers. de Madrid. T., II. fasc. 4.

01) Reuter K. Zur Frage der Darmresorption. Anat. Anzeiger. Bd. 19.

03) Saint Hilaire. Über den Bau des Darmepithels nei Amphiuma. Anat. Anz. Bd. 22.

02) Schneider K. Lehrbuch d. vergl. Histologie d. Tiere.

89) Stöhr Ph. Über die Lymphknötchen des Darmes. Arch. für mikroskop. Anatom. Bd. 33.

92) Stöhr Ph. Verdauungs-Apparat. Merkel-Bounet. Ergebn. d. Anatom. u. Entwicklungsgesch. Bd. 1, 1891.

99) Studnička T. K. Über die interzellularen Verbindungen, den sogenannten Cuticularsaum und den Flimmerbesatz der Zellen. Sitzungsber. d. k. b. Gesellschaft. d. Wissenschaften. Jahrg. 1898.

98) Zimmermann W. Beiträge zur Kenntnis einiger Drüsen und Epithelien. Arch. f. mikrosk. Anat. Bd. 52.

49. M. K. OLSZEWSKI m. t. **Temperatura inwersyi zjawiska Joula i Kelvina w powietrzu i azocie. Wiadomość tymczasowa. (Inversionstemperatur der Joule-Kelvinschen Erscheinung für Luft und für Stickstoff. Vorläufige Mitteilung). (Température d'inversion du phénomène de Joule-Kelvin de l'air et d'azote. Notice préliminaire).**

In meiner vor 5 Jahren veröffentlichten¹⁾ Arbeit habe ich die Inversionstemperatur der Joule-Kelvinschen Erscheinung für Wasserstoff zu -80.5° bestimmt; diese Zahl hat für mich nachher

¹⁾ K. Olszewski, Bull. Acad. Crac. 1901, (453).

bei dem Bau von Verflüssigungsapparaten¹⁾ für dieses Gas ausschlaggebend gewirkt. Diese Abhandlung hat auch die Aufmerksamkeit der Physiker auf sich gelenkt, und sie diente A. W. Porter²⁾ als Ausgangspunkt für eine theoretische Arbeit, die eine Untersuchung der Exaktheit der van der Waalschen und Dietericischen Zustandsgleichungen auf grund der von mir gefundenen Inversionstemperatur bezweckte. Wegen der großen theoretischen Wichtigkeit solcher Bestimmungen habe ich mich entschlossen, ähnliche Messungen auch für andere Gase durchzuführen, vor allem für Luft und deren Hauptbestandteile. Bis jetzt habe ich die Versuche über die Inversionstemperaturen für Luft und für Luftstickstoff zum Abschluß gebracht, und erlaube mir die Ergebnisse in einer kurzen Notiz der Akademie vorzulegen, wobei ich mir eine eingehende Beschreibung der Versuchsanordnung und der Apparate für eine spätere Mitteilung vorbehalte. Ich bemerke bloß, daß der gebrauchte Apparat im Prinzip von dem vor 5 Jahren von mir verwendeten nicht differierte, aber angesichts der hohen Temperatur (bis 300°), bei welcher die Versuche mit Luft und mit Stickstoff angestellt werden mußten, beträchtliche Änderungen sowohl in Einzelheiten wie in Ausmaßen erfuhr.

Da Witkowski bereits 1898³⁾ und Porter (l. c.) in diesem Jahre auf grund theoretischer Erwägungen zu der Ansicht kamen, daß die Inversionstemperatur der Joule-Kelvinschen Erscheinung für Gase wahrscheinlich eine Funktion des Druckes ist, habe ich bei den jetzigen Versuchen spezielle Aufmerksamkeit den Anfangsdrucken der einer nicht umkehrbaren Entspannung unterworfenen Gase zugewendet.

Der Apparat wurde in einem Ölbade erwärmt; behufs Temperaturmessung kam ein hochgradiges Quecksilberthermometer zur Anwendung; um aber die kleinen Temperaturdifferenzen, welche bei der Gasentspannung auftreten, zu bestimmen, bediente man sich eines Eisen-Konstanten-Thermoelements, dessen Empfindlichkeit etwa 0.2° für 1 mm Galvanometeraus Schlag (an der Skala gemessen) betrug.

Das bis auf den Anfangsdruck p komprimierte Gas wurde einer

¹⁾ K. Olszewski, Bull. Acad. Crac. 1902, (625) und 1903, (241).

²⁾ A. W. Porter, Phil. Mag. Ser. [6], 11, (554), 1906.

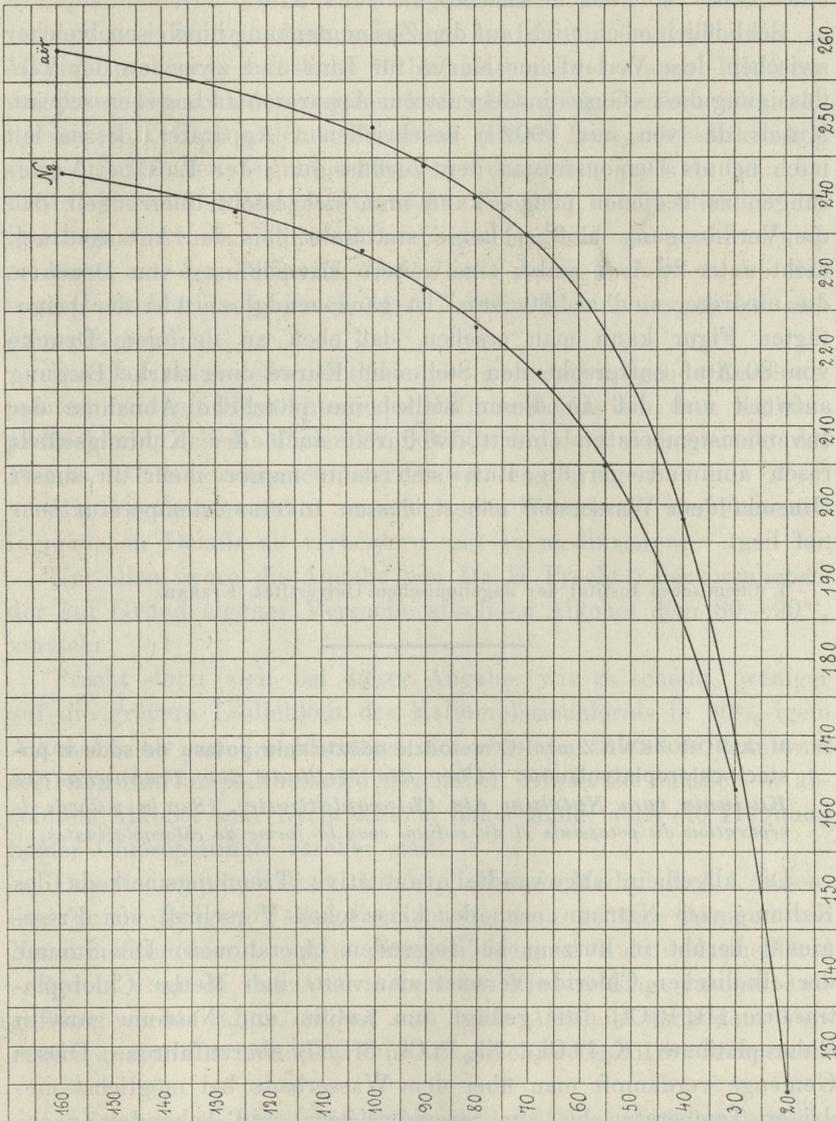
³⁾ A. W. Witkowski, Bull. Acad. Crac. 1898, (282).

Entspannung bis zu einer Atmosphäre unterworfen; der Versuch wurde unter diesen Umständen mehrmals wiederholt, wobei die Temperatur des Gases allmählich von $+300^{\circ}$ nach abwärts geändert wurde. Oberhalb einer gewissen Temperatur t_i zeigte das Thermoelement eine Erwärmung des Gases, unterhalb derselben eine deutliche Abkühlung an, und bei der Temperatur t_i selbst war der integrale Effekt der Joule-Kelvinschen Erscheinung gleich Null.

In nachstehender Tabelle sind die Werte der Anfangsdrucke p (in kg auf 1 cm^2) und die ihnen entsprechenden Inversionstemperaturen t_i angegeben.

L u f t		S t i c k s t o f f	
p	t_i	p	t_i
160	$+259^{\circ}$	159	$+243^{\circ}$
100	249	126	238
90	244	102	233
80	240	90	228
70	235	80	223
60	226	68	217
40	198	55	205
20	124	30	163

In nebenstehender Fig. 1 wurden die Versuchsergebnisse als Punkte eingetragen, welche als Ordinaten die Anfangsdrucke p (kg auf 1 cm^2) und als Abszissen die entsprechenden Inversionstemperaturen t_i besitzen. Durch Verbinden dieser Punkte erhält man eine Kurve, welche die Abhängigkeit der Inversionstemperaturen der untersuchten Gase von den Anfangsdrucken ausdrückt. Der Verlauf der Kurven bestätigt vollauf die Annahme von Witkowski und von Porter, daß die Inversionstemperaturen Funktionen des Druckes sind. Die Werte der Inversionstemperaturen für Luft, berechnet von Witkowski nach der empirischen Formel von Rose-Innes ($+360^{\circ}$) sowie auf Grund der Formel von van der Waals ($+500^{\circ}$), sind zwar recht hoch, wenn man sie mit den von mir erhaltenen vergleicht; man muß aber berücksichtigen, daß der letzte Wert unter Annahme einer kleinen (1 Atm.) Druckdifferenz berechnet wurde, wogegen meine Zahlen sich auf den integralen



Wert der Joule-Kelvinschen Erscheinung beziehen, bei Entspannung eines Gases von hohem Drucke bis zu 1 Atm.

Schließlich möchte ich auf den Zusammenhang hinweisen, welcher zwischen dem Verlauf der Kurve für Luft und zwischen der Verflüssigung dieses Gases in Gegenstrom-Apparaten zu bestehen scheint. Mittels des von mir 1902¹⁾ beschriebenen Apparates, dessen ich mich behufs Demonstration der Verflüssigung der Luft bei Vorlesungen zu bedienen pflege, kann man sich leicht überzeugen, daß die Verflüssigung bloß so lange stattfindet, bis der Anfangsdruck nicht unter 80 Atm. sinkt; eine weitere Entspannung von Drucken, die niedriger sind als 80 Atm., ist ganz erfolglos. Aus der beigefügten Figur kann man ersehen, daß eben an der dem Drucke von 80 Atm. entsprechenden Stelle die Kurve eine starke Biegung aufweist und daß an dieser Stelle eine plötzliche Abnahme der Inversionstemperatur eintritt, wodurch auch der Kühlungseffekt rasch abnimmt, da die Luft sich dann immer mehr in dieser Hinsicht dem Wasserstoff nähert, dessen Inversionstemperatur sehr tief liegt.

I. Chemisches Institut der Jagellonischen Universität, Krakau.

-
50. M. J. MOROZEWICZ in. c. **O metodzie oddzielania potasu od sodu w postaci chloroplatynianów.** (*Über die Methode der Trennung des Kaliums vom Natrium als Chloroplatinate*). (*Sur la méthode de séparation du potassium et du sodium sous la forme de chloroplatinates*).

Die allgemein angewandte quantitative Trennungsmethode des Kaliums vom Natrium nach der klassischen Vorschrift von Fresenius²⁾ beruht in kurzem auf folgenden Operationen: Die Summe der alkalischen Chloride versetzt man mit einer Menge Chloroplatinsäure (H_2PtCl_6), die genügt, um Kalium und Natrium ganz in Chloroplatinate (K_2PtCl_6 , $Na_2PtCl \cdot 6H_2O$) überzuführen. Dieses Gemenge verdampft man über dem Wasserbade bei möglichst niedriger Temperatur bis zur Sirupkonsistenz und behandelt nach-

¹⁾ K. Olszewski, Bull. Acad. Crac. 1902, (623).

²⁾ Quant. Chem. Anal. I. 1875, S. 538. Zeitschr. f. anal. Chem. XVI, 1877, S. 63.

her mit 70 — 80 volumenprozentigem Äthylalkohol. Das Natriumplatinchlorid wie auch die gewöhnlich etwa im Überschuß vorhandene Chloroplatinsäure gehen in Lösung, wodurch das in Alkohol praktisch unlösliche Kaliumplatinchlorid durch Filtrieren von jenen abgeschieden werden kann. Das goldgelbe kristallinische Pulver (K_2PtCl_6), welches Fresenius mittels Lupe oder Mikroskop auf seine Reinheit hin zu untersuchen empfiehlt, trocknet man bei $130^\circ C$ bis zum konstanten Gewicht, aus dem man schließlich das Quantum des Kaliumchlorids berechnet. Das Natrium bestimmt man entweder aus der Differenz oder direkt durch Reduktion des Natriumplatinchlorids, wonach das Natriumchlorid ausgelaugt und gewogen wird.

Die oben dargestellte Methode gibt ganz befriedigende Resultate, insofern wir zur Berechnung des Kaliumchlorids aus dem Kaliumplatinchlorid den Koeffizienten 0.3056, der dem Atomgewicht des Platins 197.18 ¹⁾ entspricht, zur Anwendung bringen.

Mit der Zeit bemühte man sich, die Vorschrift von Fresenius in manchen Details zu verbessern und zu modifizieren.

Vor allem wäre die Angabe von Dr. H. Precht ²⁾ hervorzuheben, der auf Grund eigener Versuche absoluten Alkohol dem 80—90% vorzieht.

Precht stützt sich bei dieser Angabe, wie es scheint, weniger auf die größere Löslichkeit des Kaliumplatinchlorids in 80%-igem Alkohol ³⁾ als auf das Verhalten des absoluten Alkohols dem wasserfreien Natriumplatinchlorid gegenüber. Dieses ist nämlich in absolutem Alkohol sehr leicht löslich, daher findet auch die Trennung beider Chloroplatinate rascher statt.

Dupré ⁴⁾ empfiehlt statt des Äthylalkohols Methylalkohol, besonders in denjenigen Fällen, wo im Gemisch größere Mengen von Natriumplatinchlorid neben geringen Mengen Kaliumplatinchlorid enthalten sind, da das Auswaschen des Niederschlags rascher ausgeführt werden kann. Sonst sind beide Alkohole nach dem Verfasser analytisch einander beinahe gleichwertig. Die Temperatur

¹⁾ Vergleich: F. Dupré. Die Bestimmung des Kaliums als Kaliumplatinchlorid. Inaug.-Dissert. Halle 1893

²⁾ Zeitschr. f. anal. Chem. XVIII. 1879, S. 514. Chem. Ztg. XX. 1896, S. 209.

³⁾ Nach Precht beträgt die Löslichkeit des K_2PtCl_6 in absolutem Alkohol 1:42600, in 80%-igem Alkohol — 1:26400 (a. a. O. S. 514).

⁴⁾ Vgl. S. 21.

beim Trocknen des Niederschlags erhöht Dupré auf 160° C, wodurch er an Zeit gewinnt.

Andere Modifikationen der Methode von Fresenius beruhen nur auf weniger wichtigen Abänderungen beim Filtrieren, Trocknen und Wägen des Niederschlags.

Am wichtigsten von allen angeführten Fragen ist ohne Zweifel die Frage nach der Konzentration des Alkohols. Die Mehrheit der Mineral-Analytiker der Gegenwart¹⁾ scheint sich an die ursprüngliche Vorschrift von Fresenius zu halten und zur Trennung der Chloroplatinate 80%-igen (eventuell 75 oder 85%-igen) Alkohol zu verwenden. Dagegen empfehlen andere und vor allem Prof. F. P. Treadwell²⁾ in seinem bekannten Lehrbuch der analytischen Chemie auf grund der Untersuchungen von Precht und Dupré zu diesem Zwecke „absoluten Alkohol (am besten Methylalkohol)“.

Angesichts solcher Meinungsverschiedenheiten und in Anbetracht der Wichtigkeit der erörterten Methode für die Forschungen auf dem Gebiete der chemischen Mineralogie erschien eine nähere Aufklärung dieser Frage sehr wünschenswert. Die zu diesem Zwecke angestellten Versuche ergaben folgende Resultate:

Seit langer Zeit habe ich wahrgenommen, daß der Niederschlag von Kaliumplatinchlorid nach Abscheidung vermittels absoluten Alkohols stets einen geringen Rückstand von Natriumchlorid enthält, der erst durch Versetzen mit einigen cm³ verdünnten z. B. 80%-igen Alkohols entfernt werden konnte.

Die Verunreinigung entsteht nicht nur in den Fällen, wo wir die Chloride mit einem Quantum Chloroplatinsäure versetzen, das zur Überführung in Chloroplatinate nicht ausreicht, sondern auch dann, wo dieses Reagens in genügender Menge und sogar in Überschuß vorhanden ist und wo von der Anwesenheit eines freien, nicht gebundenen Natriumchlorids in der Lösung nicht die Rede sein kann³⁾.

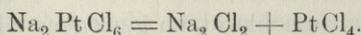
¹⁾ Vgl. z. B. P. Jannasch, Praktischer Leitf. der Gewichtsanal. 1904, S. 323. M. Dittrich, Gesteinsanalyse 1905, S. 42. H. E. Washington, Chem. Anal. of Rocks, 1904, S. 140 u. s. w. Vergl. auch. H. Neubauer, Abgekürzte Methode der Kalibestimmung, Zeitschr. f. anal. Chem. XXXIX, 1900, S. 494, u. a. m.

²⁾ Kurzes Lehrbuch der analytischen Chemie. II, 1903, S. 35.

³⁾ Man konnte sich davon am leichtesten in folgender Weise überzeugen. Ein Tropfen der Lösung wurde im Wasserbade verdunstet und der Rückstand mikroskopisch untersucht. Bestand dieser nur aus goldgelben Oktaedern von Kaliumplatinchlorid und orangefärbigen, nadelförmigen Kriställchen von Natriumplatinchlorid.

Entsprechende Versuche haben weiterhin gezeigt, daß auch Lösungen, die absichtlich mit $1\frac{1}{2}$ bis 2 mal größerer Menge Chloroplatinsäure als die theoretisch berechnete versetzt wurden, nach vorsichtigem Eindampfen und Behandeln mit absolutem Alkohol einen unlöslichen Rückstand gaben, in dem man mit dem Mikroskop in der Hauptmasse der Kaliumplatinchloridkristalle immer noch einzelne Körner von Natriumchlorid nachweisen konnte. Erst wenn man etwa die vierfache Menge von diesem Reagens hinzufügte, wurde ein befriedigendes Resultat erzielt, d. h. erst dann ließ sich das Kaliumplatinchlorid mittels absoluten Alkohols trennen und von Natriumchlorid befreien.

Aus den angeführten Beobachtungen folgt, daß wasserfreier Alkohol auf das Natriumplatinchlorid auch bei gewöhnlicher Temperatur nach folgendem Schema teilweise zersetzend wirkt:



Eines der Zersetzungsprodukte — das Natriumchlorid — ist in absolutem Alkohol unlöslich und bleibt daher auf dem Filter samt dem gleichfalls unlöslichen Kaliumplatinchlorid zurück. Nur ein großer (z. B. ein vierfacher) Überschuß von freier Chloroplatinsäure verursacht ein konstantes chemisches Gleichgewicht, da er die Zersetzung der Verbindung $\text{Na}_2 \text{PtCl}_6$ verhindert¹⁾.

Alkohol, der 20 Volumprocente Wasser enthält, verursacht die obige Zersetzung nicht und ergibt ganz reines Kaliumplatinchlorid.

Zur quantitativen Aufklärung der angeführten Verhältnisse wurden folgende Versuche angestellt:

0·8407 gr NaCl + 0·3825 gr KCl wurden in 250 cm³ Wasser gelöst. Von dieser Lösung wurden 3 Proben à 50 cm³ (=0·2446 gr) genommen und zur Trennung der beiden Chloroplatinate wurde im ersten Falle 80%-iger, im zweiten 90%-iger und im dritten absoluter Alkohol angewendet. Man erhielt:

rid, so konnten wir sicher annehmen, daß das Reagens ($\text{H}_2 \text{PtCl}_6$) in genügender Menge zugesetzt wurde, falls aber außer den obgenannten Kristallen auch farblose Würfeln von Natriumchlorid sichtbar waren, so war der Reagenszusatz zu knapp.

¹⁾ Precht konstatierte die Zersetzung des Natriumplatinchlorids in heißer Alkohollösung bei Anwesenheit von Äther (a. a. O. S. 515). Dupré (l. c.) erwähnt auch die Zersetzung des Platinchlorids bei gewöhnlicher Temperatur in Äthylalkohol, führt aber keine näheren Beweise an.

- 1) $K_2PtCl_6 = 0.2511$ gr;
 $KCl = 0.0767$ gr = 31.36% , anstatt theor. 31.27% (+ 0.09%)
- 2) $K_2PtCl_6 = 0.2578$ gr;
 $KCl = 0.0789$ gr = 32.06% , anstatt theor. 31.27% (+ 0.79%)
- 3) $K_2PtCl_6 = 0.2590$ gr;
 $KCl = 0.0792$ gr = 32.38% , anstatt theor. 31.27% (+ 1.11%).

Die teilweise Zersetzung des Natriumplatinchlorids bei Anwendung von 90% -igem und von absolutem Alkohol beeinträchtigt in unvorteilhafter Weise die Genauigkeit der Resultate, da sie ein Plus zur Folge hat, welches weit außerhalb der Grenzen der analytisch zulässigen Versuchsfehler liegt. Es ist hier zu bemerken, daß bei allen drei Proben überschüssige Chloroplatinsäure zur Anwendung gelangte, und zwar je 15 cm³ einer 5% -igen Lösung anstatt 12.5 cm³, wie theoretisch berechnet wurde. Die Anwesenheit einer Beimengung von Natriumchlorid im gewogenen Kaliumplatinchlorid wurde mikroskopisch nur in der 2-ten und 3-ten Probe konstatiert.

Der 80% -ige Alkohol hat noch diesen ökonomisch wichtigen Vorzug, daß er den Zusatz von überschüssiger H_2PtCl_6 nicht erfordert, deren Zubereitung sehr zeitraubend ist. Man kann sich mit der theoretischen oder sogar mit noch geringerer Menge ruhig begnügen, ohne ungünstige Resultate befürchten zu müssen.

Um die Richtigkeit dieser Behauptungen zu beweisen, führe ich folgende drei bei Benützung von 80% -igem Alkohol ausgeführten Bestimmungen an:

- 1) 0.2039 gr NaCl + KCl gaben 0.3354 gr K_2PtCl_6 ;
 0.1026 gr KCl = 50.32%
- 2) 0.2030 gr NaCl + KCl gaben 0.3345 gr K_2PtCl_6 ;
 0.1022 gr KCl = 50.34%
- 3) 0.2055 gr NaCl + KCl gaben 0.3383 gr K_2PtCl_6 ;
 0.1033 gr KCl = 50.30% .

Trotzdem man zur ersten Probe nur 7 cm³ einer 10% -igen Lösung von H_2PtCl_6 (anstatt der theoretisch notwendigen 7.2 cm³), zur zweiten 10 cm³ und zur dritten 14 cm³ verbraucht hatte; gelangte man zu ganz übereinstimmenden Resultaten.

Bei Benützung von absolutem Alkohol stimmen die Resultate weniger gut überein. Die drei folgenden Bestimmungen an derselben

Mischung bei Zusatz von je 15 cm³ H₂PtCl₆ (d. h. zweimal soviel, als theoretisch berechnet wurde) ergaben folgendes Resultat:

- 4) 0·2038 gr NaCl + KCl; 0·3382 gr K₂PtCl₆;
0·1036 gr KCl = 50·71%
- 5) 0·2031 gr NaCl + KCl; 0·3364 gr K₂PtCl₆;
0·1028 gr KCl = 50·66%
- 6) 0·2058 gr NaCl + KCl; 0·3425 gr K₂PtCl₆;
0·1047 gr KCl = 50·86%.

Die Trennung bei Benützung von absolutem Alkohol ist also nicht nur weniger genau, sondern auch weniger ökonomisch, wogegen wir bei 80%-igem Alkohol bedeutende Ersparnisse an Chloroplatinsäure machen.

Um noch zu beweisen, daß ein kleines Minus von Chloroplatinsäure die Genauigkeit der Bestimmung bei gleichzeitiger Benützung von 80%-igem Alkohol nicht beeinträchtigt, wurden noch folgende Versuche angestellt.

Ein Gemenge angeschmolzener Salze, das aus 1·4191 gr NaCl und 1·2524 gr KCl (zusammen 2·6715 gr) bestand, das also 46·88% KCl enthielt, wurde in 250 cm³ gelöst. Drei Proben dieser Lösung zu je 50 cm³ wurden mit je 9 cm³ einer 21%-igen Chloroplatinsäure anstatt der theoretisch nötigen 9·2 cm³ versetzt. Die Resultate waren folgend:

- 1) 0·5395 gr NaCl + KCl; 0·8266 gr K₂PtCl₆;
0·2526 gr KCl = 46·80% (— 0·08%)
- 2) 0·5393 gr NaCl + KCl; 0·8226 gr K₂PtCl₆;
0·2520 gr KCl = 46·73% (— 0·15%)
- 3) 0·5383 gr NaCl + KCl; 0·8254 gr K₂PtCl₆;
0·2522 gr KCl = 46·86% (— 0·02%).

Die Reinheit des Kaliumplatinchlorids wurde jedesmal mikroskopisch konstatiert, der Niederschlag bei 130—135°C bis zur Gewichtskonstanz getrocknet und in einer Platinschale gewogen. Das Mittel der Bestimmungsfehler beträgt also — 0·08%, und wenn wir nur die zwei sich näher stehenden Resultate (das erste und das dritte) berücksichtigen, verringert sich der Fehler bis zu — 0·05%, was sogar einem sehr anspruchsvollen Analytiker genügen muß.

Aus den obigen Versuchen läßt sich folgern, daß bei Abscheidung des Kaliums vom Natrium in Form von Chloroplatinaten die ursprüng-

liche Vorschrift von Fresenius, der 80%-igen Alkohol empfiehlt, entschieden vorzuziehen ist. Eine größere Löslichkeit des Kaliumplatinchlorids ist nicht zu befürchten, wenn zur einmaligen Operation der Trennung 50—80 cm³ der Waschflüssigkeit zur Anwendung kommen, was in den meisten Fällen ganz hinreichend ist. Der dadurch verursachte Verlust zeigt sich erst in den Hundertsteln der Prozente, was für die gewöhnliche analytische Praxis fast belanglos ist. Sonst kann man in Fällen, wo es sich um besondere Genauigkeit handelt, immer den Löslichkeits-Koeffizienten des Kaliumplatinchlorids berücksichtigen, der nach Precht 1 gr Salz auf 26400 gr 80-gewichtsprozentigen Alkohols beträgt.

Die Ergebnisse unserer Untersuchungen wollen wir nochmals in folgenden drei Punkten kurz zusammenfassen:

1. Die Anwendung von wasserfreiem (absolutem) Alkohol zur Trennung des Kaliums vom Natrium als Chloroplatinate ist nicht angezeigt, da dieses Reagens ($C_2H_5 \cdot OH$) eine teilweise Zersetzung des Natriumplatinchlorids (Na_2PtCl_6) in das lösliche Platinchlorid und in das unlösliche Natriumchlorid bewirkt. Das letztere verunreinigt den Kaliumplatinchloridniederschlag (K_2PtCl_6), wodurch zu hohe Zahlen resultieren. Nur ein großer (etwa 4-facher) Überschuß von Chloroplatinsäure (H_2PtCl_6) kann diesem Mißstand vorbeugen.

2. 80%-iger Alkohol gibt praktisch ganz befriedigende Resultate. Außerdem spart man an Reagentien, besonders an der teureren Chloroplatinsäure, die in theoretisch berechneter oder sogar in noch geringerer Menge zugesetzt werden kann, wodurch gleichzeitig das Auswaschen des Filters beim Filtrieren des Niederschlags (K_2PtCl_6) erleichtert wird.

3. Das Polarisationsmikroskop leistet uns bei dieser, wie auch bei vielen anderen Methoden hervorragende Dienste, und zwar nicht nur bei der Prüfung der Reinheit des Niederschlags (K_2PtCl_6) oder der analysierten Summe der alkalischen Chloride ($KCl + NaCl$), sondern auch dann, wenn es sich um Feststellung der Tatsache handelt, ob diese Summe mit einer genügenden Menge Chloroplatinsäure versetzt worden ist, um die Chloride in Chloroplatinate überzuführen¹⁾.

¹⁾ In bezug auf die Bemerkung (Seite 798) ist noch hinzuzufügen, daß die Reinheit der Summe der Chloride ($KCl + NaCl$) am leichtesten folgendermaßen festgestellt wird. Ein Tropfen der wässrigen Lösung wird im Wasserbade bei

niedriger Temperatur eingedampft und der kristallinische Rückstand unter dem Polarisationsmikroskop untersucht. Falls die Lösung nur Kalium- und Natriumchlorid enthält, besteht der ausgetrocknete Rückstand nur aus kleinen Würfeln dieser Salze, welche als isotrope Körper auf das polarisierte Licht nicht reagieren. Dagegen verraten kleine Beimengungen von Chloriden oder Sulfaten alkalischer Erden ihre Anwesenheit in dem Rückstand durch entsprechende Doppelbrechung, welche sofort konstatiert werden kann.

Aus dem mineralogischen Institut der Jagell. Univ. in Krakau.

51. M. S. ZAREMBA m. c. Funkcye Greena i niektóre zastosowanie tej funkcyi.
(*Sur la fonction de Green et quelques-unes de ses applications*).

I. Introduction.

§ 1. J'ai été amené, à l'occasion de recherches relatives à une classe d'équation aux dérivées partielles du 4-me ordre, recherches dont je compte publier les résultats dans un mémoire ultérieur, à établir une série de propriétés de la fonction de Green. Ces propriétés de la fonction de Green étant susceptibles d'applications variées et importantes, il m'a semblé utile de leur consacrer un mémoire spécial.

Les théorèmes que j'ai en vue sont, pour la plupart, extrêmement vraisemblables à priori. A cause de cela, il n'y a intérêt à en faire l'objet d'une étude particulière qu'à la condition de présenter des démonstrations parfaitement rigoureuses ne laissant subsister aucune trace de doute. Si, comme je l'espère, j'ai réussi à satisfaire complètement à cette condition, on m'excusera sans doute d'avoir donné quelquefois un peu trop de développement peut-être à mon exposition.

§ 2. Nous nous proposons d'étudier la fonction de Green relative à l'équation aux dérivées partielles, à deux variables indépendantes de la forme suivante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - m^2 u = 0. \quad (1)$$

où m représente un nombre réel et non négatif. En posant, suivant l'usage,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

nous écrirons l'équation (1) ainsi:

$$\Delta u - m^2 u = 0.$$

Pour éviter tout malentendu, il est nécessaire de définir le sens que nous allons donner au terme „fonction de Green“. A cet effet, considérons dans le plan n lignes formées

$$(2) \quad (S_1), (S_2), \dots (S_n)$$

et supposons: 1° que chacune d'elles considérée isolément, partage le plan précisément en deux régions connexes dont elle serait la frontière commune: 2° qu'aucune des lignes précédentes n'ait un point commun avec une autre d'entre elles. Le plan sera évidemment partagé par l'ensemble des lignes (2) en $n + 1$ régions.

Aucune des lignes (2) n'ayant de points situés à l'infini, il n'y aura parmi les régions (2) qu'une seule région (R_0) s'étendant à l'infini. Nous l'appellerons la région infinie et nous diviserons les n autres régions en catégories de la façon suivante: toute région contiguë à la région (R_0) sera dite de première catégorie, toute région autre que (R_0) et contiguë à une région de première catégorie sera dite de seconde catégorie; enfin, d'une manière générale, toute région contiguë à une région de catégorie k sans être elle-même une région de catégorie $k - 1$ sera dite de catégorie $k + 1$.

Cela posé, nous dirons que les lignes formées (1) sont des branches différentes d'une même ligne formée non connexe; convenons une fois pour toutes de désigner cette ligne non connexe par le symbole (S).

Nous dirons, en outre, que l'ensemble des régions de catégories impaires constitue le domaine intérieur (D), et que l'ensemble des autres régions, y compris la région infinie (R_0), constitue le domaine extérieur (D'). Le sens que nous venons de donner aux symboles (S), (D) et (D') leur sera conservé dans toute l'étendue de ce mémoire. Les points angulaires que pourront avoir les branches de la ligne (S) s'appelleront „sommets“.

Cela posé, pour définir la fonction de Green relative à l'équation (1) et au domaine (D), rapportons le plan de la ligne (S) à un système de coordonnées rectangulaires (x, y), envisageons deux points A et B situés à l'intérieur du domaine (D), désignons par r la distance de ces points et considérons la fonction $G(A, B, m^2)$ des coordonnées des points A et B et du paramètre m^2 , fonction qui,

considérée comme fonction des coordonnées du point B jouit des propriétés suivantes:

1^o Cette fonction vérifie, dans tout le domaine (D) sauf en A , l'équation aux dérivées partielles suivantes:

$$\Delta G - m^2 G = 0.$$

2^o La somme:

$$G(A, B, m^2) + \frac{1}{2\pi} \log r$$

est continue dans le voisinage du point A .

3^o Le point A étant fixe à l'intérieur du domaine (D), la fonction $G(A, B, m^2)$ tend uniformément vers zéro lorsque la plus courte distance du point B à la frontière (S) du domaine (D) tend vers zéro.

La fonction $G(A, B, m^2)$ que nous venons de définir sera la fonction de Green relative à l'équation (1) et au domaine (D).

Nous adopterons la même définition pour la fonction de Green relative au domaine (D') extérieur à la ligne (S) en la complétant toutefois au moyen de la condition additionnelle suivante: lorsque le point B s'éloigne indéfiniment, le point A restant fixe à l'intérieur du domaine (D') la fonction de Green $G(A, B, m^2)$ reste bornée¹⁾.

§ 3. La fonction de Green existe; la définition du paragraphe précédent la détermine sans ambiguïté; cette fonction ne prend, à l'intérieur du domaine auquel elle se rapporte, que des valeurs réelles et non négatives; elle admet une dérivée déterminée par rapport à la normale à la ligne (S); elle est symétrique par rapport aux deux points dont elle dépend; enfin la fonction de Green est, à l'intérieur du domaine auquel elle se rapporte, une fonction analytique des coordonnées de ces deux points²⁾. Bien que les propositions précédentes soient classiques, au moins en ce qui concerne la fonction de Green relative à l'équation de Laplace, il ne semble pas que l'on puisse les regarder toutes démontrées rigoureu-

¹⁾ On verra un peu plus bas qu'en réalité, dans les conditions considérées, la fonction $G(A, B, m^2)$ tend uniformément vers une constante qui n'est différente de zéro que pour $m = 0$.

²⁾ Voir les travaux de M. Liapounoff, M. Korn, M. Stekloff, M. Lauricella et les miens publiés dans divers recueils depuis 1898.

sement dans le cas où l'on se borne, comme nous le ferons, à admettre au sujet de la ligne (S) les hypothèses que j'ai adoptées dans mon travail sur l'équation

$$\Delta u - m^2 u = 0$$

dans le cas de deux variables indépendantes²⁾.

Il n'y a certes pas de difficulté à combler cette lacune, cependant, à cause de l'importance du sujet et pour assurer une base solide aux développements ultérieurs, je crois faire oeuvre utile en reprenant rapidement la démonstration de chacun des théorèmes qui viennent d'être énoncés.

§ 4. Existence de la fonction de Green. Posons³⁾

$$(3) \quad f(z) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{z^2+t^2}}}{\sqrt{z^2+t^2}} dt$$

où l'on doit prendre la détermination positive du radical et considérons d'abord le domaine (D) intérieur à la ligne (S). Soit A un point pris arbitrairement à l'intérieur du domaine (D) et B un point variable dans ce domaine. Désignons par r la distance des points A et B et par $\varphi(r)$ la fonction définie par la formule

$$\varphi(r) = \frac{-1}{2\pi} f(mr)$$

lorsque $m > 0$, et par la formule

$$\varphi(r) = \frac{-1}{2\pi} \log r$$

dans le cas où $m = 0$.

Cela posé, désignons par $g(A, B, m^2)$ la fonction qui, considérée comme fonction des coordonnées du point B , vérifie l'équation

$$\Delta g - m^2 g = 0$$

dans toute l'étendue du domaine (D) et qui, lorsque la distance du

²⁾ Zaremba. Les fonctions fondamentales de M. Poincaré et la méthode de Neumann pour une frontière composée de polygones curvilignes. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1904, p. 396.

³⁾ Loc. cit. p. 398.

point B à la ligne (S) tend vers zéro, tend vers la même valeur que la fonction $\varphi(r)$.

Les résultats que j'ai établis dans le mémoire cité quelques lignes plus haut, ne laissent subsister aucun doute sur l'existence de la fonction $g(A, B, m^2)$. D'autre part, il est évident que la formule

$$G(A, B, m^2) = \varphi(r) - g(A, B, m^2) \quad (4)$$

fournit pour la fonction de Green une expression vérifiant la définition du § 2. Donc la fonction de Green relative au domaine (D) intérieur à la ligne (S) existe.

Passons au domaine extérieur (D') . Dans le cas général, lorsque $m > 0$, rien n'est à changer dans la démonstration précédente; il faut seulement ajouter à la définition de la fonction $g(A, B, m^2)$, la condition suivante: lorsque le point B s'éloigne indéfiniment, la fonction $g(A, B, m^2)$ doit tendre vers zéro.

Reste à examiner le cas particulier où $m = 0$. Désignons par O un point fixe choisi arbitrairement à l'intérieur du domaine (D) et désignons par $\psi(A, B)$ la fonction qui, considérée comme fonction des coordonnées du point B est harmonique dans le domaine (D') , régulière à l'infini et tend, lorsque la distance du point B à la ligne (S) tend vers zéro, vers une limite égale à celle de l'expression $\frac{1}{2\pi} \log \frac{OB}{AB}$. Le problème de Dirichlet extérieur relatif à la ligne (S) étant possible (voir le mémoire cité plus haut), la fonction ψ existera. D'ailleurs la formule

$$G(A, B) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{OB}{AB} - \psi(A, B) \quad (5)$$

fournit évidemment une expression de la fonction de Green demandée. En résumé, l'existence de la fonction de Green est établie complètement.

§ 5. Assurons-nous que la définition du § 2 détermine la fonction de Green complètement. Deux lemmes nous seront nécessaires.

Lemme I. Lorsqu'une fonction u , continue dans une aire (Ω) , vérifie l'équation

$$\Delta u - m^2 u = 0,$$

où, rappelons-le, m est réel, dans toute l'étendue de cette aire, sauf peut-être en un nombre limité de points $A_1, A_2 \dots A_n$ isolés, situés

à l'intérieur de l'aire (Ω), elle vérifie forcément l'équation considérée, même en chacun de ces points.

J'ai eu l'occasion d'établir le lemme correspondant pour trois variables indépendantes (Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, 6 Février 1905, p. 94, 95 et 96). Une méthode absolument analogue est applicable au cas actuel; on n'aura qu'à remplacer la fonction

$$\frac{e^{-mr}}{r}$$

par la fonction $f(mr)$, en continuant à représenter par $f(z)$ la fonction définie par la formule (3).

Lemme II. Lorsqu'une fonction $u(B)$ des coordonnées d'un point B vérifie l'équation

$$\Delta u - m^2 u = 0$$

dans tout le domaine (Ω) extérieur à un cercle (C) de rayon R et lorsqu'elle est bornée dans ce domaine, elle tend uniformément vers une constante c lorsque le point B s'éloigne indéfiniment et cette constante ne peut être différente de zéro que dans le cas où la constante réelle m se réduit à zéro.

On peut évidemment supposer sans nuire à la généralité, que la fonction u est réelle et qu'elle est continue sur la circonférence du cercle (C). Supposons qu'il en soit ainsi et considérons d'abord le cas où

$$m > 0.$$

Désignons par $v(B)$ la fonction qui vérifie l'équation

$$\Delta v - m^2 v = 0$$

dans le domaine (Ω), qui prend sur (C) les mêmes valeurs que la fonction u et qui tend uniformément vers zéro lorsque le point B s'éloigne indéfiniment. Posons

$$(6) \quad w = u - v.$$

La fonction w jouit des mêmes propriétés générales que la fonction u et de plus elle s'annule sur le cercle (C). Considérons à l'intérieur du domaine (Ω) un point quelconque B_0 . Soit ϱ_0 la distance de ce point au centre O du cercle (C). Désignons par M une limite supérieure de la quantité $|w|$, par ϱ la distance d'un point variable

B au point 0 , centre du cercle (C) , par (C_1) un cercle concentrique au cercle (C) , de rayon $R_1 > \rho_0$, par i l'unité imaginaire et considérons la fonction de Bessel $J_0(z)$. En vertu des propriétés bien connues de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta u - m^2 u = 0,$$

on aura:

$$w + M \frac{J_0(im\rho)}{J_0(imR_1)} \geq 0; \quad w - M \frac{J_0(im\rho)}{J_0(imR_1)} \leq 0,$$

pour toute valeur de ρ comprise dans l'intervalle (R, R_1) . On aura donc:

$$|w(B_0)| \leq M \frac{J_0(im\rho_0)}{J_0(imR_1)}.$$

Cette inégalité ayant lieu si grand que soit R_1 , elle entraîne la conséquence suivante:

$$w(B_0) = 0.$$

Cela prouve que la fonction w est nulle identiquement. Or, cette circonstance entraîne évidemment le théorème que nous voulions établir.

Passons au cas où $m = 0$. En principe la même méthode de démonstrations restera applicable, il faudra seulement 1° au lieu d'imposer à la fonction v la condition de s'annuler à l'infini lui imposer celle d'être régulière à l'infini, 2° remplacer la fonction

$$\frac{J_0(im\rho)}{J_0(imR_1)}$$

par la fonction

$$\frac{\log \frac{\rho}{R}}{\log \frac{R_1}{R}}.$$

En résumé, le lemme qui nous voulions démontrer est établi.

Nous voici en mesure de démontrer que la définition du § 2 détermine complètement la fonction de Green. Conservons les notations du § 2 et envisageons d'abord le domaine (D) intérieur à la ligne (S) . Supposons que l'on ait trouvé deux expressions différen-

tes pour la fonction de Green $G(A, B, m^2)$ et désignons par $u(B)$ leur différence. La fonction u s'annulera sur (S) et vérifiera l'équation

$$\Delta u - m^2 u = 0$$

dans tout le domaine (D) sauf peut-être en A . En vertu du Lemme I elle vérifiera en réalité l'équation précédente même en A ; elle sera donc nulle identiquement. Donc, dans le cas du domaine intérieur, la définition du § 2 ne laisse subsister aucune indétermination.

Passons au domaine extérieur (D') . Soit $u(B)$ la différence de deux expressions différentes de la fonction de Green $G(A, B, m^2)$. La fonction $u(B)$ serait bornée, elle s'annulerait sur (S) et elle vérifierait l'équation

$$\Delta u - m^2 u = 0$$

dans tout le domaine (D') sauf peut-être en A . Il résulte du Lemme I que la fonction u vérifiera en réalité l'équation précédente même au point A . D'autre part le Lemme II nous apprend ceci: lorsque le paramètre réel m est différent de zéro, la fonction $u(B)$ tend uniformément vers zéro dans le cas où le point B s'éloigne indéfiniment; lorsque au contraire le paramètre m est nul, la fonction u est régulière à l'infini. Il résulte de tout cela que la fonction u est nulle identiquement.

Il est donc démontré que la définition du § 2 détermine la fonction de Green complètement.

Faisons remarquer que l'on tire immédiatement des considérations précédentes la justification de la note de la p. 805.

§ 6. La fonction de Green ne prend que des valeurs réelles et non négatives. Les expressions de cette fonction trouvées au § 4 sont réelles. Donc, eu égard au § précédent, la réalité de la fonction de Green est parfaitement évidente. Je viens de dire que cette fonction ne prend jamais de valeurs négatives. Cette proposition peut être précisée. Observons dans ce but que, dans les hypothèses où nous nous sommes placés, le domaine auquel se rapporte la fonction de Green peut n'être pas d'un seul tenant, puisqu'il peut se composer de plusieurs des régions déterminées dans le plan par les diverses branches de la ligne (S) . Je dis que la fonction $G(A, B, m^2)$ [je conserve les notations du § 2], considérée comme fonction des coordonnées du point B , reste différente de zéro et positive à l'intérieur de celle des régions précédentes à l'intérieur de laquelle se

trouve le point A ; dans les autres, la fonction considérée est nulle. La seconde partie de cette proposition est une conséquence immédiate des propriétés élémentaires et bien connues des intégrales de l'équation

$$\Delta u - m^2 u = 0.$$

Quand à la première partie, il ne sera peut-être pas superflu de l'examiner de plus près.

Désignons par (R) la région dans laquelle se trouve le point A et bornons-nous d'abord à nous assurer qu'à l'intérieur de cette région, la fonction $G(A, B, m^2)$ ne peut jamais devenir négative.

Lorsque le paramètre m a une valeur réelle non nulle, la propriété précédente de la fonction de Green résulte immédiatement du théorème bien connu suivant: lorsqu'une fonction u vérifie l'équation

$$\Delta u - m^2 u = 0$$

dans une certaine aire, elle ne peut avoir à l'intérieur de cette aire, ni un maximum positif, ni un minimum négatif. Lorsque le paramètre $m = 0$, la région (R) ne coïncidant pas avec la région infinie (R_0) , la propriété considérée de la fonction de Green est classique. Supposons donc que le point A se trouve à l'intérieur de la région infinie (R_0) et que l'on ait en même temps $m = 0$. Je décris un cercle (Σ) de centre A et de rayon assez petit pour que ce cercle se trouve tout entier à l'intérieur de la région (R_0) et pour que de plus, sur la circonférence de ce cercle, la fonction $G(A, B, 0)$ soit constamment positive. Désignons par (R'_0) la partie de la région (R_0) extérieure au cercle (Σ) . Soit (R''_0) la transformée par rayons-vecteurs réciproques de la région (R'_0) , le pôle P de la transformation étant un point quelconque ne faisant partie ni de la région (R'_0) ni de sa frontière.

La région (R'_0) ne s'étendra pas à l'infini et, puisque la fonction de Green est régulière à l'infini, la transformée v de cette fonction sera une fonction harmonique jouissant des propriétés suivantes: elle sera harmonique dans la région (R''_0) , elle sera positive sur la transformée de la circonférence (Σ) et, sur les autres parties de la frontière de (R''_0) , elle se réduira à zéro. Donc la fonction v ne deviendra jamais négative à l'intérieur de la région (R''_0) . Par conséquent il en sera de même de la fonction de Green à l'intérieur de la région (R'_0) .

On conclura immédiatement de là, en remarquant que le rayon du cercle (Σ) peut être pris inférieur à toute longueur donnée à l'avance, que la fonction de Green ne peut en aucun point de la région (R_0) prendre une valeur négative. En somme, il est prouvé que la fonction de Green ne prend une valeur négative en aucun point de la région (R). Reste à établir qu'à l'intérieur de cette région, la fonction de Green est différente de zéro. A cet effet faisons la remarque suivante: soit u une fonction vérifiant l'équation

$$\Delta u - m^2 u = 0$$

à l'intérieur d'une certaine aire et (C) un cercle de centre O et le rayon r situé dans cette aire; on aura pour la valeur $u(O)$ de la fonction u en O , une formule de la forme

$$(7) \quad u(O) = \psi(r, m) \int_C u ds$$

où l'intégrale doit être prise dans le sens des arcs croissants suivant la circonférence de cercle (C), la fonction $\psi(r, m)$, dont l'expression explicite serait très facile à écrire, étant une quantité toujours positive.

Voici ce qu'il est très aisé de conclure de la formule (7): lorsqu'une fonction u ne devenant jamais négative dans une aire connexe (Ω) vérifie dans cette aire l'équation

$$\Delta u - m^2 u = 0,$$

et lorsqu'en outre cette fonction s'annule, ne fût-ce qu'en un point situé à l'intérieur de l'aire (Ω), elle est nulle identiquement à l'intérieur de cette aire.

En s'appuyant sur cette proposition, on voit de suite que, si la fonction de Green $G(A, B, m^2)$, considérée comme fonction des coordonnées du point B , s'annulait en un point de la région (R) envisagée plus haut, elle se réduirait à zéro en tout point de cette région, distinct du point A . Or, cela est absurde. Donc la fonction de Green est différente de zéro en tout point intérieur à la région (R). Par conséquent, la fonction de Green jouit bien des propriétés annoncées dans ce paragraphe.

Notons en passant que les faits établis dans ce paragraphe conduisent à la conséquence suivante: la fonction de Green relative

à l'équation de Laplace et au domaine (D') extérieur à la ligne (S) prend à l'infini une valeur positive différente de zéro.

§ 7. Existence de la dérivée suivant la normale et symétrie de la fonction de Green. Nous avons vu au § 4 que la détermination de la fonction de Green se ramène au Problème de Dirichlet (généralisé lorsque $m > 0$). Désignons pour un moment par h_0 la fonction qui représente les valeurs périphériques de la fonction demandée dans le Problème de Dirichlet.

Il est très aisé de voir que, dans le problème que l'on a à résoudre pour calculer la fonction de Green, la fonction h_0 jouit de la propriété suivante: le potentiel dérivant d'une double couche de densité h_0 possède une dérivée déterminée suivant la normale à la ligne (S). Par conséquent, pour résoudre le problème, on pourra appliquer la formule (3) p. 431 de mon mémoire déjà cité à la p. 806; on devra seulement, dans le cas de l'équation de Laplace, quand il s'agira de la fonction de Green relative au domaine (D') et lorsque le point A se trouvera dans la région infinie (R_0) prendre soin de débarrasser la formule rappelée du pôle $\lambda = -1$; on y arrivera en remplaçant la fonction h_0 par la différence $h_0 - c$, en désignant par c une quantité, facile à déterminer, dépendant seulement de la position du point A ; la fonction $\psi(A, B)$ entrant dans la formule (5) prendra alors la forme suivante:

$$\psi(A, B) = v + c,$$

où v est la fonction fournie par la formule considérée plus haut pour $\lambda = -1$. D'après ce qui précède, la fonction de Green pourra être mise sous la forme d'une somme dont un terme sera une fonction possédant des dérivées finies et continues dans le voisinage de la ligne (S), le second terme étant un certain potentiel v de double couche. La densité de la double couche dont dérive le potentiel v sera une combinaison linéaire à coefficients constants de la valeur périphérique d'un potentiel de simple couche et des valeurs périphériques intérieures et extérieures d'un potentiel v_0 , de double couche, admettant une dérivée déterminée suivant la normale à la ligne (S). En partant de ces remarques on reconnaîtra, avec un peu d'attention, que la fonction v admet une dérivée déterminée suivant la normale à la ligne (S); dérivée qui, considérée comme fonction de la position du pied de la normale à laquelle elle se rapporte, sera continue en chaque point

distinct des sommets de la ligne (S). Il résulte de ce qui précède qu'il en sera de même de la fonction de Green elle-même. J'ajoute, qu'en s'appuyant sur les considérations qui viennent d'être exposées ainsi que sur le mémoire que j'ai eu à rappeler à plusieurs reprises, on peut aisément établir le théorème suivant: désignons par $DG(A, B, m^2)$ la dérivée de la fonction de Green par rapport à l'une quelconque des coordonnées du point B et par l la plus courte distance de ce point à la ligne (S); il existera un nombre positif p inférieur à l'unité, tel que le produit

$$(8) \quad l^p DG(A, B, m^2)$$

tende uniformément vers zéro en même temps que la longueur l .

Ce théorème n'est pas sans intérêt parce que, dans celles des applications du théorème de Green où intervient la fonction de Green, il permet d'éviter les difficultés provenant des sommets de la ligne (S). En particulier, on s'assurera aisément que le théorème précédent, joint à celui qui concerne l'existence et la continuité de la dérivée de la fonction de Green suivant la normale à la ligne (S), permet de terminer une forme parfaitement rigoureuse à la démonstration ordinaire de la symétrie de la fonction de Green par rapport aux coordonnées des points A et B .

§ 8. Analyticité de la fonction de Green. Il semblerait au premier abord qu'il suffit de faire remarquer à ce sujet que l'équation

$$\Delta u - m^2 u = 0$$

est de celles dont toutes les intégrales sont, comme l'a montré M. Picard, analytiques. Pour voir ce qu'il en est, désignons par ξ et η d'une part et par x et y d'autre part, les coordonnées des deux points dont dépend la fonction de Green et représentons cette fonction par le symbole $G(\xi, \eta, x, y, m^2)$. Cela posé, comme la définition de la fonction de Green implique la réalité des quatre variables ξ, η, x et y , voici le seul résultat que fournit le théorème de M. Picard: si l'on attribue à l'un des deux systèmes de deux variables ξ, η ou x, y un système de valeurs réelles (a, b) , définissant un point A situé à l'intérieur du domaine (Ω) auquel se rapporte la fonction de Green, cette fonction, considérée comme fonction des variables du second système, sera, dans le voisinage de tout point B distinct de A et intérieur au domaine (Ω) une fonction analytique régulière. Or, à cause de la restriction relative à la réalité

du point (a, b) , il ne semble pas possible d'en conclure immédiatement le théorème que nous avons en vue et dont la forme précise est la suivante: étant donné deux points réels distincts (ξ_0, η_0) et (x_0, y_0) , situés à l'intérieur du domaine auquel se rapporte la fonction de Green $G(\xi, \eta, x, y, m^2)$, cette fonction sera développable en une série procédant suivant les puissances entières et positives des différences:

$$\xi - \xi_0, \eta - \eta_0, x - x_0, y - y_0,$$

absolument convergente, pourvu que l'on ait:

$$\begin{cases} |\xi - \xi_0| < \delta; |\eta - \eta_0| < \delta \\ |x - x_0| < \delta; |y - y_0| < \delta \end{cases} \quad (9)$$

en désignant par δ un nombre positif non nul, dépendant des positions des points (ξ_0, η_0) et (x_0, y_0) .

En se reportant au § 4, on verra sans peine que le théorème précédent se ramène immédiatement au théorème suivant: désignons par h la fonction représentant les valeurs périphériques de la fonction v demandée dans le Problème de Dirichlet (ordinaire ou généralisé suivant la valeur de m) et supposons que, par rapport à deux paramètres ξ et η dont la fonction h dépendrait, cette fonction soit développable en une série entière de la forme

$$h = \sum_{i, j} h_{i, j} (\xi - \xi_0)^i (\eta - \eta_0)^j \quad (10)$$

absolument et uniformément convergente sur la ligne (S) et pour toutes les valeurs de ξ et η vérifiant des inégalités de la forme:

$$\begin{cases} |\xi - \xi_0| \leq \delta_1 \\ |\eta - \eta_0| \leq \delta_1 \end{cases}, \quad (11)$$

où δ_1 représente un nombre positif non nul. Dans ce cas, la fonction v , considérée comme fonction des paramètres ξ et η ainsi que des coordonnées x et y , jouira de la propriété suivante, si l'on désigne par x_0 et y_0 les coordonnées d'un point intérieur au domaine auquel se rapporte le Problème de Dirichlet considéré, on pourra développer la fonction v en une série entière de la forme

$$v = \sum c_{i, j, p, q} (\xi - \xi_0)^i (\eta - \eta_0)^j (x - x_0)^p (y - y_0)^q, \quad (12)$$

absolument convergente, pourvu que les variables ξ , η , x et y vérifient des inégalités de la forme (9).

Pour établir ce théorème nous nous appuyerons sur le lemme suivant: soit u une fonction bornée vérifiant l'équation

$$\Delta u - m^2 u = 0$$

dans l'un des domaines (D) ou (D') et (x_0, y_0) un point quelconque situé à l'intérieur du domaine considéré; les coefficients du développement en série suivant:

$$u = \sum b_{p,q} (x-x_0)^p (y-y_0)^q$$

satisferont à des inégalités de la forme suivante:

$$(13) \quad \left| b_{p,q} \right| < \frac{C}{\delta_2^{p+q}} M,$$

où C et ϱ_2 représentent des nombres positifs dépendant uniquement de la position du point (x_0, y_0) par rapport à la ligne (S) , tandis que la lettre M désigne une limite supérieure de la quantité $|u|$.

Pour établir ce lemme, décrivons du point (x_0, y_0) comme centre un cercle (Σ) de rayon R assez petit pour que ce cercle se trouve tout entier à l'intérieur du domaine dans lequel on considère la fonction u . Cela posé, il suffit de remarquer que la fonction de Green est facile à former effectivement dans le cas du cercle et d'exprimer à l'aide de cette fonction la valeur de la fonction u à l'intérieur du cercle (Σ) au moyen des valeurs qu'elle prend sur la circonférence de ce cercle, pour arriver au lemme qu'il s'agit d'établir. Revenons au théorème énoncé plus haut. D'après les hypothèses faites au sujet de la série (10) nous aurons

$$(14) \quad \left| h_{i,j} \right| \leq \frac{H}{\delta_1^{p+q}}$$

en désignant par H une certaine constante positive.

Cette remarque faite, désignons par $v_{i,j}$ la solution du Problème de Dirichlet pour le domaine qui nous occupe, dans le cas où les valeurs périphériques de la fonction demandée sont représentées par la fonction $h_{i,j}$. Nous aurons:

$$(15) \quad \left| v_{i,j} \right| \leq \frac{H}{\delta_1^{p+q}},$$

à cause de l'inégalité (14). On conclura aisément de là au moyen du lemme établi il y a un instant, que la fonction v pourra certainement être représentée au moyen de la série (12) laquelle sera absolument convergente pour tout système de valeurs des variables vérifiant les inégalités (9), à condition de prendre pour δ le plus petit des nombres δ_1 et δ_2 ; on trouve en effet que, δ ayant cette valeur, les coefficients de la série (12) vérifient les inégalités suivantes:

$$\left| c_{i, j, p, q} \right| < \frac{C \cdot H \cdot M}{\delta^{i+j+p+q}}.$$

§ 9. Le sujet propre de ce mémoire consiste dans l'étude des propriétés de la fonction de Green relative au domaine (D) intérieur à la ligne (S). Nous admettrons, cela va sans dire, que la ligne (S) vérifie les hypothèses dans lesquelles nous nous sommes placés dans les paragraphes précédents, mais, en outre, nous supposons que les „angles“ de cette ligne, s'il en existe, sont saillants; en d'autres termes: si θ est l'angle, compté à l'intérieur du domaine (D), formé par deux arcs concourants faisant partie de la ligne (S), nous ne nous bornerons pas à supposer que l'on ait:

$$0 < \theta < 2\pi,$$

nous admettrons que

$$0 < \theta < \pi. \quad (16)$$

La méthode que nous allons appliquer repose essentiellement sur la comparaison de la fonction de Green relative au domaine (D) avec la fonction de Green relative à l'équation de Laplace et au domaine extérieur à un cercle ou à un système de deux cercles ne se coupent pas. A cause de cela, nous consacrerons le chapitre suivant à la démonstration de certains théorèmes rendant possible l'application de la méthode indiquée.

II. Théorèmes sur la fonction de Green dans des cas très particuliers.

§ 10. Considérons dans le plan deux points A et B extérieurs à un cercle déterminé (C) de centre O et de rayon R ainsi que la fonction de Green $\mathcal{G}(A, B)$ relative à l'équation de Laplace et à la région du plan extérieure au cercle (C). Envisageons en outre un cercle (C'), de rayon R' , supérieur à R , concentrique au cercle (C),

supposons que les points A et B soient situés dans la partie du plan annulaire (T) limitée par les cercles (C) et (C') , désignons par $d\tilde{t}_B$ l'élément d'aire relatif au point B et soit enfin a la distance du point A au centre commun des cercles (C) et (C') . Je dis que l'on a:

$$(1) \int_{(T)} \left\{ \mathcal{G}(A, B) \right\}^2 d\tilde{t} < (a - R) \left\{ 2R + R' - R + \frac{1}{6} \frac{(R' - R)^2}{R} \right\}.$$

On établira aisément cette inégalité en partant de la remarque suivante: prenons le centre commun O des cercles (C) et (C') pour pôle et le rayon OA pour origine d'un système de coordonnées polaires; si l'on désigne alors par ρ et φ le rayon-vecteur et l'angle polaire du point B on aura, pour

$$\rho < a$$

$$\mathcal{G}(A, B) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{\rho}{R} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ \left(\frac{\rho}{a} \right)^k - \left(\frac{R^2}{a\rho} \right)^k \right\} \cos k\varphi$$

et pour

$$\rho > a$$

$$\mathcal{G}(A, B) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{a}{R} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ a^k - \frac{R^{2k}}{a^k} \right\} \frac{\cos k\varphi}{\rho^k}.$$

§ 10. Actuellement notre but consiste à mettre en évidence certaines propriétés de la fonction de Green $K(A, B)$, relative à l'équation de Laplace et au domaine extérieur à un système de deux cercles égaux (C_1) et (C_2) ne se coupant pas. A cet effet, nous pourrions nous servir de l'expression connue de la fonction $K(A, B)$ au moyen des fonctions \mathcal{G} de Jacobi¹⁾. Il sera plus simple peut-être de procéder de la façon suivante: désignons par $\mathcal{G}_1(A, B)$ la fonction de Green relative au domaine extérieur au cercle (C_1) et posons

$$(2) \quad K(A, B) = \mathcal{G}_1(A, B) - \varphi(A, B).$$

La fonction $\varphi(A, B)$ sera évidemment symétrique par rapport aux deux systèmes de variables dont l'un représente les coordonnées du point A et l'autre celles du point B ; considérée comme fonction des coordonnées de l'un des points A et B , du point B par exemple, elle sera une fonction harmonique à l'extérieur des

¹⁾ Voyez Weber, Partielle Differentialgleichungen I, p. 351, § 142.

cercles (C_1) et (C_2) , elle sera régulière à l'infini, elle s'annulera sur le cercle (C_1) et, sur le cercle (C_2) , elle prendra des valeurs égales à celles de la fonction $\mathcal{G}_1(A, B)$.

D'après ce qui précède, pour étudier de plus près la fonction $K(A, B)$, il suffirait d'avoir une expression générale pour une fonction harmonique à l'extérieur des cercles (C_1) et (C_2) , régulière à l'infini, s'annulant sur le cercle (C_1) et se réduisant, sur le cercle (C_2) , à une fonction continue donnée h . Diverses méthodes connues permettraient de former une expression de ce genre, mais l'expression que fournit le procédé alterné de Murphy se prête le mieux aux applications que nous avons en vue.

C'est cette expression là que nous allons former plus bas. J'ajoute que, pour plus de netteté, nous allons traiter cette question facile sans rien emprunter à la théorie générale de la méthode de Murphy.

§ 11. Commençons par définir certains symboles dont nous aurons à nous servir constamment. Revenons pour un moment à la ligne (S) et aux domaines (D) et (D') définis dans l'Introduction. Nous représenterons par $(F)_i$ et $(\Phi)_e$ les valeurs limites sur la ligne (S) des fonctions F et Φ définies, la première dans le domaine (D) et la seconde dans le domaine (D') . Considérons maintenant une fonction $\psi(A, B, \dots C)$ pouvant dépendre des coordonnées de plusieurs points $A, B, \dots C$; pour représenter la dérivée de cette fonction suivant la normale à la ligne (S) , cette normale étant dans tous les cas dirigée vers l'intérieur du domaine (D) et la dérivée en question se rapportant au cas où l'on regarde la fonction ψ comme fonction des coordonnées du point A , nous nous servirons du symbole

$$\frac{d\psi}{dN_A}$$

Ce symbole ne permet pas de distinguer la dérivée, suivant la normale, relative au domaine (D) de celle qui se rapporte au domaine (D') . Malgré cela nous nous servons du symbole précédent parce que, dans les applications que nous aurons à en faire, aucun malentendu ne sera à redouter.

§ 12. Voici maintenant quelques remarques concernant un potentiel logarithmique v dérivant d'une double couche de densité $\frac{-h}{\pi}$, portée par un cercle de centre O et de rayon R . Nous aurons pour

la valeur $v(B)$ de la fonction v en un point quelconque B du plan l'expression suivante:

$$(3) \quad v(B) = \frac{-1}{\pi} \int_{(C)} h(A) \frac{\cos \gamma}{AB} ds_A$$

en désignant: par A un point situé sur la circonférence du cercle (C) par ds_A l'élément correspondant de l'arc de ce cercle, par $h(A)$ la valeur de la fonction h au point A et par γ l'angle des directions AO et AB .

D'après les conventions du paragraphe précédent, nous pourrions écrire la formule (3) de la façon suivante:

$$(4) \quad v(B) = \frac{1}{\pi} \int_{(C)} h(A) \frac{d \log \overline{AB}}{dN_A} ds_A.$$

D'ailleurs un théorème classique donne:

$$(5) \quad (v)_e = h - \frac{1}{2\pi R} \int_{(C)} h ds$$

$$(6) \quad (v)_i = -h - \frac{1}{2\pi R} \int_{(C)} h ds$$

en supposant, comme nous le ferons, que la fonction h soit continue, posons

$$(7) \quad \sigma = h - \frac{1}{2\pi R} \int_{(C)} h ds$$

$$(8) \quad u = \frac{-1}{\pi} \int_{(C)} \sigma \frac{\cos \gamma}{AB} ds_A.$$

Nous aurons

$$(9) \quad \int_{(C)} \sigma ds = 0,$$

$$(10) \quad (u)_e = \sigma$$

$$(11) \quad (u)_i = -\sigma.$$

Les relations (5), (7) et (10) donnent

$$(12) \quad v = u,$$

à l'extérieur du cercle (C) .

Posons

$$OB = \rho, \quad AB = r,$$

nous aurons:

$$\frac{\cos \gamma}{AB} = \frac{R^2 - \rho^2}{2Rr^2} + \frac{1}{2R}. \quad (13)$$

Par conséquent, en tenant compte de (9), on déduira de (8) la formule:

$$u(B) = \frac{1}{2\pi R} \int_{(\omega)} \sigma \frac{\rho^2 - R^2}{r^2} ds.$$

En se reportant de nouveau à la relation (9), on verra que la formule précédente peut être remplacée par la formule suivante:

$$u(B) = \frac{1}{2\pi R} \int_{(\omega)} \sigma \left\{ \frac{\rho^2 - R^2}{r^2} - \frac{\rho - R}{\rho + R} \right\} ds. \quad (14)$$

Supposons que l'on ait:

$$\rho > R, \quad (15)$$

on aura, à cause de la relation:

$$\int_{(\omega)} \frac{\cos \gamma}{AB} ds = 0$$

et de l'égalité (13):

$$\int_{(\omega)} \frac{\rho^2 - R^2}{r^2} ds = 2\pi R.$$

En s'appuyant sur cette relation, ainsi que sur ce que l'inégalité (15) entraîne l'inégalité:

$$\frac{\rho^2 - R^2}{r^2} - \frac{\rho - R}{\rho + R} \geq 0,$$

on déduira de l'équation (14) les inégalités suivantes:

$$\left. \begin{aligned} u &> \frac{2R}{\rho + R} \mathcal{S}' \\ u &< \frac{2R}{\rho + R} \mathcal{S}'' \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

où \mathcal{S}' et \mathcal{S}'' représentent les bornes inférieure et supérieure de la fonction σ . Bien entendu ces inégalités ne sont valables qu'à l'extérieur du cercle (C) .

D'ailleurs, à l'extérieur du cercle (C) on a la relation (12).

Par conséquent, à l'extérieur du cercle (C) , les inégalités (16) équivalent aux inégalités suivantes:

$$(17) \quad \begin{cases} v(B) > \frac{2R}{\rho + R} \mathcal{S}' \\ v(B) < \frac{2R}{\rho + R} \mathcal{S}'' \end{cases}$$

Faisons maintenant les remarques suivantes: 1° Il résulte de la relation (9) que l'on a

$$\begin{aligned} \text{donc} \quad & \mathcal{S}' < 0 < \mathcal{S}'' \\ & |\mathcal{S}'| < \mathcal{S}'' - \mathcal{S}' \\ & \mathcal{S}'' < \mathcal{S}'' - \mathcal{S}', \end{aligned}$$

2° Il résulte de l'équation (7) que l'on a:

$$\mathcal{S}'' - \mathcal{S}' = H'' - H'$$

en désignant par H' et H'' les bornes inférieure et supérieure de la fonction h .

En s'appuyant sur ces remarques, on tirera aisément des inégalités (17) les conclusions suivantes: lorsque le point B se déplace de façon que la distance ρ de ce point au centre O du cercle (C) ne cesse jamais de satisfaire à l'inégalité:

$$(18) \quad \rho \geq L,$$

où L est une longueur vérifiant l'inégalité:

$$(19) \quad L \geq R$$

on a d'une part:

$$(20) \quad |v(B)| < \frac{2R}{L+R} (H'' - H')$$

et d'autre part:

$$(21) \quad V'' - V' < \frac{2R}{L+R} (H'' - H'),$$

en désignant par V' et V'' les bornes inférieure et supérieure de la fonction $v(B)$ dans la région du plan définie par l'inégalité (18).

§ 13. Considérons deux cercles égaux (C_1) et (C_2) de rayon R , situés dans le plan extérieurement l'un à l'autre. Désignons par O_1 et O_2 les centres de ces cercles, par O le milieu du segment O_1O_2 et par A_1 et A_2 les points-limites du faisceau dont font partie les cercles considérés, le point A_1 étant intérieur au cercle (C_1) et le point A_2 au cercle (C_2) . Posons

$$OA_1 = OA_2 = a$$

$$OO_1 = OO_2 = b$$

désignons ensuite par 2α l'angle sous lequel chacun des deux cercles est vu du point O et par l le minimum de distance de deux points situés l'un sur le cercle (C_1) et l'autre sur le cercle (C_2) .

Nous aurons:

$$a = b \cos \alpha \quad (22)$$

$$R = b \sin \alpha \quad (23)$$

$$l = 2b(1 - \sin \alpha). \quad (24)$$

Si l'on désigne par r_1 et r_2 les distances d'un point variable B aux points A_1 et A_2 , par $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)_{c_1}$ la valeur du rapport $\frac{v_1}{v_2}$ lorsque B vient sur le cercle (C_1) et par $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)_{c_2}$ celle qu'il prend lorsque B vient sur (C_2) , on aura:

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)_{c_1} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha - 1}{\cos \alpha - \sin \alpha + 1}, \quad (25)$$

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)_{c_2} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha + 1}{\cos \alpha + \sin \alpha - 1}. \quad (26)$$

Cela posé, cherchons une fonction harmonique à l'extérieur des cercles (C_1) et (C_2) , régulière à l'infini, se réduisant à une fonction continue donnée h sur le cercle (C_2) et à zéro sur le cercle (C_1) .

A cet effet considérons une suite infinie

$$v_0, v_1, v_2, \dots \quad (27)$$

de potentiels logarithmiques dérivant de doubles couches portées

alternativement par le cercle (C_2) et par le cercle (C_1) en ayant soin de définir ces potentiels au moyen des équations suivantes:

$$(28) \quad (v_0)_e - (v_0)_i = 2h$$

$$(29) \quad (v_{2k+1})_e - (v_{2k+1})_i = 2(v_{2k})_1 \quad (k = 0, 1, 2 \dots)$$

$$(30) \quad (v_{2k+2})_e - (v_{2k+2})_i = 2(v_{2k+1})_2 \quad (k = 0, 1, 2 \dots),$$

où $(v_{2k})_1$ et $(v_{2k+1})_2$ représentent les fonctions auxquelles se réduisent: le potentiel v_{2k} sur le cercle (C_1) et le potentiel v_{2k+1} sur le cercle (C_2) .

Désignons par H' et H'' les bornes inférieure et supérieure de la fonction h , par V'_{2k} et V''_{2k} les bornes inférieure et supérieure des valeurs de la fonction v_{2k} sur le cercle (C_1) , enfin par V'_{2k+1} et V''_{2k+1} les bornes inférieure et supérieure des valeurs de la fonction v_{2k+1} sur le cercle (C_2) . Une application facile de l'inégalité (21) nous donnera:

$$V''_0 - V'_0 < \frac{R}{b} (H'' - H'),$$

$$V''_{i-1} - V'_{i-1} < \frac{R}{b} (V''_{i-2} - V'_{i-2}), \quad (i = 2, 3, 4 \dots)$$

d'où

$$(30 a) \quad V''_{i-1} - V'_{i-1} < \left(\frac{R}{b}\right)^i (H'' - H').$$

On conclura de là, en s'appuyant sur l'inégalité (20), après y avoir posé $L = R$, que l'on a:

$$(31) \quad |v_i| < \left(\frac{R}{b}\right)^i (H'' - H') \quad (i = 0, 1, 2, 3 \dots).$$

Par conséquent, si l'on pose

$$(32) \quad v = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i v_i,$$

la série du second membre sera absolument et uniformément convergente dans toute la région du plan extérieure aux cercles (C_1) et (C_2) .

Donc, dans cette région du plan, la somme v de la série précédente sera une fonction harmonique régulière à l'infini. Désignons

par $(v)_{c_1}$ et $(v)_{c_2}$ les fonctions représentant les valeurs périphériques de la fonction v relatives aux cercles (C_1) et (C_2) et posons:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{2\pi R} \int_{(C_1)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (v_{2k})_1 \right\} ds \\ B_2 &= \frac{1}{2\pi R} \int_{(C_2)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (v_{2k+1})_2 \right\} ds + \frac{1}{2\pi R} \int_{(C_2)} h ds. \end{aligned} \right\} (33)$$

Nous aurons:

$$\begin{aligned} (v)_{c_1} &= B_1 \\ (v)_{c_2} &= h - B_2. \end{aligned}$$

En se reportant aux équations (25) et (26), on conclura du résultat précédent que la fonction u , harmonique à l'extérieur des cercles (C_1) et (C_2) , régulière à l'infini, s'annulant sur le cercle (C_1) et se réduisant à la fonction donnée h peut être représentée par la formule suivante:

$$u = v - B_1 + (B_1 + B_2) Q, \quad (34)$$

en posant

$$Q = \frac{\log \left(\frac{r_2 \cdot \cos \alpha + \sin \alpha - 1}{r_1 \cdot \cos \alpha - \sin \alpha + 1} \right)}{\log \left(\frac{\cos \alpha + \sin \alpha - 1}{\cos \alpha - \sin \alpha + 1} \right)}. \quad (35)$$

Montrons, en vue d'applications ultérieures, que la constante $B_1 + B_2$ peut aisément être calculée directement sans recourir aux séries (33). A cet effet faisons la remarque suivante: si l'on désigne par w un potentiel logarithmique dérivant d'une double couche portée par une ligne située toute entière à l'intérieur d'une courbe fermée (Σ) , on a:

$$\int_{(\Sigma)} \frac{dw}{dN} ds = 0,$$

où le symbole $\frac{dw}{dN}$ représente la dérivée de la fonction w prise suivant la normale à la ligne (Σ) et où ds représente un élément d'arc de cette ligne.

Cela posé, considérons dans le faisceau dont font partie les cer-

des (C_1) et (C_2) deux autres cercles (C'_1) et (C'_2) tels que le cercle (C_1) soit intérieur au cercle (C'_1) et (C_2) au cercle (C'_2) ; les cercles (C'_1) et (C'_2) seront évidemment extérieurs l'un à l'autre.

Posons ensuite

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_1}{r_2},$$

en représentant, comme dans la formule (35) par r_1 et r_2 les distances d'un point variable aux points limites du faisceau déterminé par les cercles (C_1) et (C_2) . La formule (35) donnera:

$$(36) \quad \int_{(C'_1)} \frac{d\psi}{dN} u ds'_1 + \int_{(C'_2)} \frac{d\psi}{dN} u ds'_2 = \int_{(C'_1)} \frac{d\psi}{dN} v ds'_1 + \\ + \int_{(C'_2)} \frac{d\psi}{dN} v ds'_2 - B \left\{ \int_{(C'_1)} \frac{d\psi}{dN} ds'_1 + \int_{(C'_2)} \frac{d\psi}{dN} ds'_2 \right\} + \\ + (B_1 + B_2) \left\{ \int_{(C'_1)} \frac{d\psi}{dN} Q ds'_1 + \int_{(C'_2)} \frac{d\psi}{dN} Q ds'_2 \right\}$$

où l'on a désigné: par ds'_1 l'élément d'arc du cercle (C'_1) , par ds'_2 l'élément d'arc du cercle (C'_2) et par $\frac{d}{dN}$ la dérivation suivant la normale intérieure au cercle (C'_1) ou au cercle (C'_2) suivant que l'on considère une intégrale prise suivant la circonférence de cercle (C'_1) ou la circonférence de cercle (C'_2) .

Le théorème de Green donne:

$$\int_{(C'_1)} \frac{d\psi}{dN} v ds'_1 + \int_{(C'_2)} \frac{d\psi}{dN} v ds'_2 = \int_{(C'_1)} \psi \frac{dv}{dN} ds'_1 + \int_{(C'_2)} \psi \frac{dv}{dN} ds'_1.$$

Or, la fonction ψ acquiert des valeurs constantes sur les cercles (C'_1) et (C'_2) et d'autre part on verra, en tenant compte de la remarque faite plus haut que l'on a:

$$\int_{(C'_1)} \frac{dv}{dN} ds'_1 = \int_{(C'_2)} \frac{dv}{dN} ds'_2 = 0.$$

On a donc:

$$\int_{(C'_1)} \frac{d\psi}{dN} v ds'_1 + \int_{(C'_2)} \frac{d\psi}{dN} v ds'_2 = 0.$$

On a en outre évidemment:

$$\int_{(C'_1)} \frac{d\psi}{dN} ds'_1 + \int_{(C'_2)} \frac{d\psi}{dN} ds'_1 = 0.$$

Par conséquent l'équation (36) se réduit à la suivante:

$$\int_{(C'_1)} \frac{d\psi}{dN} u ds'_1 + \int_{(C'_2)} \frac{d\psi}{dN} u ds'_2 = (B_1 + B_2) \left\{ \int_{(C'_1)} \frac{d\psi}{dN} Q ds'_1 + \int_{(C'_2)} \frac{d\psi}{dN} Q ds'_2 \right\}$$

Faisons tendre le cercle (C'_1) vers le cercle (C_1) et le cercle (C'_2) vers le cercle (C_2) . En passant aux limites nous trouverons:

$$B_1 + B_2 = \int_{(C_2)} h \frac{d\psi}{dN} ds. \quad (37)$$

§ 14. Avant de nous servir de la formule (34) pour former la fonction de Green relative à la région du plan extérieure aux cercles (C_1) et (C_2) , nous allons en tirer quelques conséquences qui nous seront utiles plus tard.

Supposons que la fonction h , laquelle est une fonction périodique donnée de période $2\pi R$ de l'arc s du cercle (C_2) , dépende encore d'un paramètre t et admette, par rapport à ce paramètre une dérivée déterminée $\frac{\partial h}{\partial t}$, fonction continue par rapport aux variables s et t pour toutes les valeurs de s et pour les valeurs de t comprises dans un certain intervalle (t_1, t_2) . On conclura de suite de la formule (34) que, pour toute valeur de t appartenant à l'intervalle (t_1, t_2) , la fonction u admettra, par rapport à ce paramètre une dérivée déterminée $\frac{\partial u}{\partial t}$ qui, considérée comme fonction des coordonnées x et y sera identique à la fonction en laquelle se transforme la fonction u quand on remplace la fonction h par la fonction $\frac{\partial h}{\partial t}$.

Considérons la fonction v définie par l'équation (32). Si l'on représente la différence $v - v_0$ au moyen de deux potentiels dérivant de doubles couches portées par les cercles (C_1) et (C_2) , la densité de chacune de ces doubles couches considérée comme fonction de l'arc du cercle qui la porte sera évidemment une fonction analy-

tique régulière pour toute valeur réelle de l'arc. Par conséquent la fonction $v-v_0$ jouira de la propriété suivante: si l'on convient de représenter par $D^{(n)} F$ l'une quelconque des dérivées d'un ordre quelconque n d'une fonction F des coordonnées rectangulaires x, y d'un point variable B , la dérivée $D^{(n)}(v-v_0)$ qui, manifestement sera une fonction harmonique à l'extérieur des cercles (C_1) et (C_2) et régulière à l'infini, admettra, par rapport aux cercles (C_1) et (C_2) , des valeurs périphériques qui constitueront des fonctions continues sur la circonférence de chacun des cercles (C_1) et (C_2) . En s'appuyant sur cette remarque, on tirera immédiatement de la formule (34) les conclusions suivantes:

1° La fonction $D^{(n)} u$, évidemment harmonique à l'intérieur des cercles (C_1) et (C_2) et régulière à l'infini, admettra dans tous les cas, par rapport au cercle (C_1) , des valeurs périphériques constituant, sur la circonférence (C_1) , une fonction continue.

2° Pour que, pour toutes les valeurs de n , non supérieures à un nombre entier et positif k , les fonctions $D^{(n)} u$ admettent, par rapport au cercle (C_2) des valeurs périphériques constituant sur la circonférence de ce cercle une fonction continue, il faut et il suffit qu'il en soit de même des quantités $D^{(n)} v_0$.

Supposons que, par rapport au cercle (C_2) , les dérivées premières de la fonction des coordonnées v_0 admettent des valeurs périphériques déterminées, fonctions continues de l'arc de la circonférence (C_2) et soit H_1 une limite supérieure de ces valeurs périphériques des dérivées considérées. Proposons-nous de trouver une limite supérieure des valeurs absolues des dérivées premières de la fonction u définie par la formule (34). A cet effet désignons par

$\frac{d}{dN_1}$ la dérivation par rapport à la normale au cercle (C_1) et par

$\frac{d}{dN_2}$ la dérivation par rapport à la normale au cercle (C_2) , les normales étant, dans les deux cas, dirigées vers l'intérieur de chacun de deux cercles.

En tenant compte de la forme (4) d'un potentiel de double couche ainsi que du théorème de Green, on exprimera facilement chacune des fonctions v_1, v_2, v_3, \dots entrant dans le second membre de l'égalité (32), au moyen d'un potentiel dérivant d'une simple couche portée par l'un des cercles (C_1) et (C_2) et l'on établira ensuite très aisément les relations suivantes:

$$\frac{dv_{2k+1}}{dN_1} = -\frac{dv_{2k}}{dN_1} \quad (k = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

$$\frac{dv_{2k+2}}{dN_2} = -\frac{dv_{2k+1}}{dN_2}$$

Moyennant ces relations on déduira de (32):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dN_1} &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{dv_{2k}}{dN_1} \\ \frac{dv}{dN_2} &= \frac{dv_0}{dN_2} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{dv_{2k+1}}{dN_2} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Observons que l'addition d'une constante à une double couche portée par une ligne fermée n'influe en rien sur les dérivées du potentiel logarithmique qui en dérive. Nous trouverons aisément:

$$\left| \frac{dv_{2k}}{dN_1} \right| < \frac{2R}{l^2} \left(\frac{R}{b} \right)^{2k} (H'' - H') \quad (k = 0, 1, 2 \dots)$$

$$\left| \frac{dv_{2k+1}}{dN_2} \right| < \frac{2R}{l^2} \left(\frac{R}{b} \right)^{2k+1} (H'' - H')$$

en nous reportant aux inégalités (30 a) et en désignant comme plus haut par l le minimum de distance de deux points situés, l'un sur le cercle (C_1), et l'autre sur (C_2). En s'appuyant sur les inégalités précédentes on déduira les équations (38):

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{dv}{dN_1} \right| &< \frac{4Rb^2}{l^2(b^2 - R^2)} (H'' - H') \\ \left| \frac{dv}{dN_2} \right| &< \frac{4R^2b}{l^2(b^2 - R^2)} (H'' - H') + H_1. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

La formule (37) permettra de trouver aisément une limite supérieure de la valeur absolue de la somme $B_1 + B_2$ et finalement, on déduira des relations (34) et (39) les inégalités suivantes:

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{du}{dN_1} \right| < \frac{4 R b^2}{l^2 (b^2 - R^2)} (H'' - H') + \\ \quad + \frac{a H}{\{a^2 - (b - R)^2\} \log \frac{\cos \alpha - \sin \alpha + 1}{\cos \alpha + \sin \alpha - 1}} \\ \left| \frac{du}{dN_2} \right| < \frac{4 R^2 b}{l^2 (b^2 - R^2)} (H'' - H') + \\ \quad + \frac{a H}{\{a^2 - (b - R)^2\} \log \frac{\cos \alpha - \sin \alpha + 1}{\cos \alpha + \sin \alpha - 0}} + H_1 \end{array} \right.$$

en désignant par H une limite supérieure de l'expression $|h|$.

En s'appuyant sur une des remarques faites plus haut ainsi que sur les inégalités précédentes et en remarquant que $R < b$, on arrivera immédiatement au résultat suivant:

Dans toute l'étendue du domaine extérieur aux cercles (C_1) et (C_2) on a:

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{du}{dx} \right|, \left| \frac{du}{dy} \right| < \frac{4 R b^2}{l^2 (b^2 - R^2)} (H'' - H') + \\ \quad + \frac{a R H}{\{a^2 - (b - R)^2\} \log \frac{\cos \alpha - \sin \alpha + 1}{\cos \alpha - \sin \alpha - 1}} + 2 H_1. \end{array} \right.$$

§ 15. Revenons à la fonction de Green $K(A, B)$ relative à la région du plan extérieure aux cercles (C_1) et (C_2) et, à cet effet, adressons-nous à l'équation (2). Désignons par ξ, η les coordonnées du point A et par x, y celles du point B . L'équation (2) donne:

$$\frac{\partial K}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}.$$

Il résulte immédiatement de la remarque faite au début du paragraphe précédent que la quantité $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$, considérée comme fonction des variables x, y jouit des propriétés suivantes: cette fonction est une fonction harmonique à l'extérieur des cercles (C_1) et (C_2) , régulière à l'infini, prenant sur les circonférences des cercles (C_1) et (C_2) des valeurs égales à celles que prend la fonction $\frac{d\mathcal{G}_1}{d\xi}$. Cela prouve, notons-le en passant, que sur le cercle (C_1) , la fonction

$\frac{d\varphi}{d\xi}$ s'annule. On conclura sans peine de ce qui précède ceci: si l'on désigne par A un point situé sur la circonférence du cercle (C_1) et si l'on pose:

$$\frac{dK(A, B)}{dN_A} = \frac{d\mathcal{G}_1(A, B)}{dN_A} - u(A, B) \quad (42)$$

la fonction $u(A, B)$ sera déterminée par les conditions suivantes: considérée comme fonction des coordonnées du point B , elle sera une fonction harmonique à l'extérieur des cercles (C_1) et (C_2) , régulière à l'infini, prenant sur la circonférence (C_2) les mêmes valeurs que la fonction $\frac{d\mathcal{G}_1(A, B)}{dN_A}$ et s'annulant sur la circonférence (C_1) . Par conséquent la fonction $u(A, B)$ entrant dans l'équation (42) pourra être calculée au moyen de la formule (34), en posant:

$$h = \left\{ \frac{d\mathcal{G}_1(A, B)}{dN_A} \right\}_2, \quad (43)$$

où le second membre représente la fonction à laquelle se réduit la fonction $\frac{d\mathcal{G}_1(A, B)}{dN_1}$, lorsque le point B vient sur la circonférence (C_2) .

Il est clair que les inégalités (40) et (41) seront applicables à la valeur ainsi obtenue de la fonction u . Voici ce que l'on peut conclure de ces inégalités, en se reportant aux égalités (22), (23) et (24), dans le cas où, sans connaître l'angle α , on sait cependant que cet angle vérifie les inégalités:

$$\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \quad (44)$$

où α_1 et α_2 sont deux nombres positifs tels que l'on ait:

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}; \quad (45)$$

1° Il existe un nombre positif fini M_1 , dépendant uniquement des nombres α_1 et α_2 tel que l'on ait:

$$\left| \lambda \frac{\partial u}{\partial z} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right| \leq \frac{M_1}{R^2} \quad (47)$$

dans toute la région du plan extérieure aux cercles (C_1) et (C_2) , pourvu que les fonctions λ et μ vérifient la relation:

$$\lambda^2 + \mu^2 = 1.$$

2° Il existe un nombre positif M_2 , ne dépendant, comme le nombre M_1 , que des nombres α_1 et α_2 , tel que l'on ait:

$$(48) \quad \left| \frac{d}{dN_B} \left\{ \frac{dK(A, B)}{dN_A} \right\} \right| < \frac{M_2}{AB^2}$$

pour toutes les positions du point A sur le cercle (C_1) et du point B sur le cercle (C_2) .

J'ajoute que, dans le premier membre de l'inégalité précédente, j'aurais pu supprimer le signe de la valeur absolue parce que, comme on le prouverait aisément, on aurait alors:

$$(49) \quad \frac{d}{dN_B} \left\{ \frac{dK(A, B)}{dN_A} \right\} \geq 0.$$

Observons que l'on a:

$$\frac{d}{dN_B} \left\{ \frac{dK(A, B)}{dN_A} \right\} = \frac{d}{dN_A} \left\{ \frac{dK(A, B)}{dN_B} \right\}.$$

Bien que cette égalité ne puisse pas être regardée comme étant tout simplement l'expression du théorème élémentaire d'après lequel le résultat de deux dérivations successives est indépendant de l'ordre dans lequel on les effectue, on n'éprouvera pas de difficulté à l'établir en toute rigueur; d'ailleurs, au chapitre suivant, nous aurons à établir une égalité analogue en nous servant d'un raisonnement qui serait applicable au cas actuel.

Pour abrégér l'écriture, nous représenterons l'expression (49) par le symbole:

$$\frac{\partial^2 K(A, B)}{\partial N_A \partial N_B}.$$

Cela nous permettra d'écrire l'inégalité (48) ainsi:

$$(50) \quad \frac{\partial^2 K(A, B)}{\partial N_A \partial N_B} < \frac{M_2}{AB^2}.$$

Il nous reste à faire connaître une expression importante d'une limite supérieure de l'expression:

$$\left| \frac{dK(A, B)}{dN_A} \right|.$$

Supposons que l'angle α vérifie les inégalités (44) et admettons en outre que la plus courte distance d du point B à la ligne (non

connexe) formée par l'ensemble des circonférences (C_1) et (C_2) vérifie une inégalité de la forme:

$$\frac{d}{R} \leq k,$$

en désignant par k un nombre déterminé. Je dis que l'on aura:

$$\left| \frac{dK(A, B)}{dN_A} \right| < E \frac{d}{AB^2} \quad (51)$$

en désignant par E un nombre positif dépendant uniquement des nombres α_1 , α_2 et k .

On établira aisément l'inégalité précédente en partant de l'équation (42), en faisant usage de l'expression connue de la quantité

$$\frac{d\mathcal{G}_1(A, B)}{dN_A},$$

en tenant compte de l'inégalité (47) et en distinguant deux cas, suivant que le point B est plus voisin du cercle (C_1) que du cercle (C_2) ou qu'il n'en est pas ainsi.

III. Théorème sur la fonction de Green dans le cas général.

§ 16. Considérons la fonction de Green $G(\xi, \eta, x, y, m^2)$ relative au domaine (D) , intérieur à la ligne (S) , et à l'équation:

$$\Delta G - m^2 G = 0.$$

Soit O un point quelconque situé sur la ligne (S) , ne coïncidant avec aucun sommet, et B_0 un point choisi arbitrairement à l'intérieur du domaine (D) . Plaçons l'origine des coordonnées en O et dirigeons l'axe commun des η et des y suivant la normale à la ligne (S) en O , vers l'intérieur du domaine (D) . Désignons ensuite par x_0, y_0 les coordonnées du point B_0 et par ρ une longueur choisie arbitrairement à cela près qu'elle soit inférieure à la plus courte distance du point B_0 à la ligne (S) .

Cela posé considérons l'expression:

$$\frac{\partial G(o, \eta, x, y, m^2)}{\partial \eta} \quad (1)$$

et supposons que η tende vers zéro en restant positif, les quantités

x et y variant d'une façon quelconque dans les limites du domaine défini par l'inégalité:

$$(2) \quad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq \rho^2.$$

Je dis que, dans ces conditions, la fonction (1) tendra uniformément vers sa limite.

Pour établir ce théorème, reportons-nous à l'équation (4) de l'Introduction et représentons la fonction $g(A, B, m^2)$ entrant dans cette équation par le symbole:

$$(3) \quad g(\xi, \eta, x, y, m^2).$$

Il est évident qu'il suffirait de faire voir que l'expression:

$$(4) \quad \frac{\partial g(o, \eta, x, y, m^2)}{\partial \eta}$$

jouit de la propriété dont, suivant le théorème à établir, jouirait la quantité (1).

Désignons par A le point (ξ, η) , par B le point (x, y) , par ds_p l'élément d'arc de la ligne (S) relatif à un point P et conservons au symbole $\varphi(r)$ la signification qu'il a dans l'équation (4) de l'Introduction. Nous aurons:

$$(5) \quad g(\xi, \eta, x, y, m^2) = g(A, B, m^2) = \int_{(S)} \frac{dG(P, B, m^2)}{dN_p} \varphi(\overline{AP}) ds_p.$$

D'après cette formule, la quantité $g(A, B, m^2)$, considérée comme fonction des coordonnées ξ et η du point A , se présente comme le potentiel dérivant d'une simple couche de densité:

$$(6) \quad \frac{dG(P, B, m^2)}{dN_p}$$

portée par la ligne (S) . A ce point de vue, la formule (5) définit la fonction g aussi bien à l'intérieur du domaine (D) et sur la ligne (S) elle-même que dans le domaine (D') extérieur à cette ligne. On constate immédiatement que, pour toutes les positions du point A situées sur la ligne (S) ou dans le domaine (D') , l'on a:

$$(7) \quad g(A, B, m^2) = \varphi(\overline{AB}).$$

J'observe que la quantité (6) admet une limite supérieure indépendante des positions du point P sur la ligne (S) et du point B dans le domaine (2). En effet, en vertu des hypothèses adoptées au

sujet de la ligne (S) (§ 9), on pourra faire passer par le point P un cercle extérieur au domaine (D) , de rayon R non nul indépendant de la position de ce point. Soit $\mathcal{G}(P, B, m^2)$ la fonction de Green extérieure relative à ce cercle. On aura:

$$\frac{dG(P, B, m^2)}{dN_p} \leq \frac{d\mathcal{G}(P, B, m^2)}{dN_p}$$

le second membre étant calculé, cela va sans dire, dans l'hypothèse où la normale en P au cercle est dirigée non pas vers l'intérieur du cercle mais vers l'extérieur. Or, le second membre de l'inégalité précédente admet manifestement une limite supérieure qui jouit de la propriété annoncée. En résumé, pourvu que le point B ne sorte pas du domaine (2), nous aurons:

$$0 \leq \frac{dG(P, B, m^2)}{dN_p} \leq C \quad (8)$$

en désignant par C un nombre positif ne dépendant ni de la position du point P sur la ligne (S) , ni de celle du point B dans le domaine (2).

Désignons par Q le point $(0, \eta)$ et par Q' le point $(0, \eta')$. L'équation (5) donnera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(0, \eta, x, y, m^2)}{\partial \eta} + \frac{\partial g(0, \eta', x, y, m^2)}{\partial \eta'} &= \\ &= \int_{(S)} \frac{dG(P, B, m^2)}{dN_p} \left\{ \frac{\partial \varphi(QP)}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi(Q'P)}{\partial \eta'} \right\} ds_p. \end{aligned} \quad (9)$$

Nous nous proposons de tirer de cette équation certaines conséquences en supposant: 1^o que l'on ait:

$$\eta > 0, \quad (10)$$

2^o que l'on ait:

$$\eta + \eta' = 0. \quad (11)$$

3^o que l'on ait:

$$\eta \leq \delta, \quad (12)$$

en désignant par δ un nombre assez petit pour que, l'inégalité (11) étant vérifiée, le point de (S) le plus voisin des points Q et Q' soit le point O , origine des coordonnées.

Dans ces conditions, il sera permis de poser:

$$(13) \quad \psi(\eta, P) = \frac{\partial \varphi(\overline{QP})}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi(\overline{Q'P})}{\partial \eta'}$$

puisque le second membre, à cause de la relation (11), ne dépendra que de la variable position η et de la position du point P sur la ligne (S) .

Il est aisé de voir qu'il existera un nombre positif C' , ne dépendant ni de η ni de la position du point P sur (S) , tel que l'on ait:

$$(14) \quad |\psi(\eta, P)| \leq C'$$

D'ailleurs la fonction $\psi(\eta, P)$ sera manifestement une fonction continue de η même pour $\eta = 0$, pourvu que le point P soit distinct du point O .

Désignons par:

$$(15) \quad \left(\frac{\partial g}{\partial \eta}\right)_0 \text{ et } \left(\frac{\partial g}{\partial \eta'}\right)_0$$

les limites du premier et du second terme du premier membre de (9) lorsque η tend vers zéro, les relations (10), (11) et (12) ne cessant pas d'être vérifiées.

L'équation (9) donne:

$$(16) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial g}{\partial \eta} + \frac{\partial g}{\partial \eta'} - \left(\frac{\partial g}{\partial \eta}\right)_0 - \left(\frac{\partial g}{\partial \eta'}\right)_0 = \\ & = \int_{(S)} \frac{dG(P, B, m^2)}{dN_P} \left\{ \psi(\eta, P) - \psi(O, P) \right\} ds_P \end{aligned}$$

en représentant, pour simplifier l'écriture, les termes du premier membre de (9) par les symboles:

$$\frac{\partial g}{\partial \eta} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial \eta'}$$

Désignons par (S_1) la portion de (S) formée par tous les points de (S) dont la distance au point O ne dépasse pas une certaine longueur T et par (S_2) le reste de la ligne (S) . Choisissons, comme il est évidemment possible de le faire, la longueur T assez petite pour que la longueur de l'arc (S_1) ne dépasse pas un nombre positif μ donné à l'avance et aussi petit que l'on voudra. La lon-

gueur L choisie, donnons à δ une valeur assez petite pour que, pour toutes les positions du point P sur la position (S_2) de la ligne (S), l'inégalité (12) entraîne l'inégalité suivante:

$$|\psi(\eta, P) - \psi(o, P)| \leq \mu.$$

Cette condition pourra évidemment toujours être vérifiée. Cela posé, décomposons l'intégrale formant le second membre de (16) en leurs parties, étendues l'une à la portion (S_1) et l'autre à la portion (S_2) de la ligne (S). En tenant compte des inégalités (8) et (14), et en désignant par S la longueur totale de (S), nous concluons aisément de (16) que l'on a:

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \eta} + \frac{\partial g}{\partial \eta'} - \left(\frac{\partial g}{\partial \eta} \right)_o - \left(\frac{\partial g}{\partial \eta'} \right)_o \right| < \left\{ 2C \cdot C' + SC \right\} \mu, \quad (17)$$

quelle que soit la position du point B dans les limites du domaine défini par l'inégalité (2).

Voici maintenant ce qui résulte de ce que la relation (7) est vérifiée lorsque le point A est situé dans le domaine (D') ou sur la ligne (S): on pourra attribuer à δ une valeur assez petite pour que l'inégalité (11) entraîne, en dehors des conséquences déjà considérées, encore la conséquence suivante:

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \eta'} - \left(\frac{\partial g}{\partial \eta'} \right)_o \right| < \mu \quad (18)$$

quelle que soit la position du point B dans le domaine (2). Or, les inégalités (17) et (18) donnent:

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \eta} - \left(\frac{\partial g}{\partial \eta} \right)_o \right| < \left\{ 2CC' + C + 1 \right\} \mu. \quad (19)$$

Donc, si petit que soit μ , il sera possible de déterminer δ de façon que l'inégalité (11) entraîne l'inégalité (19), quelle que soit la position du point B dans les limites du domaine (2). Par conséquent notre théorème est démontré.

§ 17. Nous pouvons maintenant démontrer en toute rigueur le théorème suivant: la quantité:

$$\frac{dG(O, B, m^2)}{dN_0}, \quad (20)$$

considérée comme fonction des coordonnées du point B vérifie l'équation suivante:

$$(21) \quad \Delta \frac{dG(O, B, m^2)}{dN_0} - m^2 \frac{dG(O, B, m^2)}{dN_0} = 0$$

à l'intérieur du domaine (D) .

Pour établir ce théorème disposons les axes comme au paragraphe précédent et envisageons la quantité:

$$(22) \quad \frac{\partial G(o, \eta, x, y, m^2)}{\partial \eta}$$

Il résulte immédiatement du théorème établi dans l'introduction, au § 8, que, pour toute valeur positive et non nulle de η , assez petite pour que le point (o, η) se trouve à l'intérieur du domaine (D) , la fonction (22) considérée comme fonction des variables x et y vérifie l'équation:

$$(23) \quad \Delta \frac{\partial G}{\partial \eta} - m^2 \frac{\partial G}{\partial \eta} = 0$$

dans toute l'étendue du domaine (D) sauf au point $x = 0, y = \eta$. Donc si l'on désigne par $\mathcal{G}(B, C, m^2)$ la fonction de Green intérieure relative au cercle limitant le domaine défini par l'inégalité (2), par M un point situé sur la circonférence (C) de ce cercle et par ds_M l'élément d'arc relatif au point M , on aura:

$$(24) \quad \begin{aligned} \frac{\partial G(o, \eta, x, y, m^2)}{\partial \eta} &= \frac{\partial G(Q, B, m^2)}{\partial \eta} = \\ &= \int_{(C)} \frac{\partial G(Q, M, m^2)}{\partial \eta} \frac{d\mathcal{G}(B, M, m^2)}{dN_M} ds_M, \end{aligned}$$

où l'indice (C) indique que l'intégration doit être étendue à toute la circonférence du cercle (C) et où l'on suppose que le point B soit intérieur à ce cercle.

Or, en vertu du théorème établi au paragraphe précédent, il résulte de l'équation (24) que l'on a:

$$(25) \quad \frac{dG(O, B, m^2)}{dN_0} = \int_{(C)} \frac{dG(O, M, m^2)}{dN_0} \frac{d\mathcal{G}(B, M, m^2)}{dN_M} ds_M.$$

Donc, à l'intérieur du cercle (C) , l'équation (21) est vérifiée. En

d'autres termes, cette équation est vérifiée dans le voisinage de chaque point intérieur au domaine (D). Notre théorème est donc établi.

Avant de terminer ce paragraphe, je crois utile de faire remarquer que le théorème du paragraphe précédent et l'équation (24) permettent d'établir aisément les propositions suivantes:

1° Si l'on convient de représenter par $D^{(n)} F$, l'une quelconque des dérivées d'ordre n d'une fonction F par rapport aux coordonnées x et y du point B , on aura:

$$D^{(n)} \left\{ \frac{dG(O, B, m^2)}{dN_0} \right\} = \frac{dD^{(n)} G(O, B, m^2)}{dN_0}. \quad (26)$$

2° Conservons les notations précédentes et convenons de déterminer la position du point O sur une branche de la ligne (S) au moyen de l'arc s compris entre ce point et un point fixe, l'arc en question devant bien entendu être compté dans un sens déterminé. La quantité:

$$D^{(n)} \left\{ \frac{dG(O, B, m^2)}{dN_0} \right\}$$

considérée comme fonction de la variable s sera continue sauf pour les valeurs de s correspondant aux sommets de la branche considérée de la ligne (S).

3° La quantité

$$D^{(n)} \left\{ \frac{dG(O, B, m^2)}{dN_0} \right\}$$

considérée comme fonction des coordonnées du point B sera continue tant que la plus courte distance du point B à la ligne (S) aura une limite inférieure finie différente de zéro.

§ 18. Désignons par A un point quelconque de la ligne (S) ne coïncidant cependant avec aucun sommet, par B un point quelconque situé à l'intérieur du domaine (D) et par l la plus courte distance du point B à la ligne (S). Je me propose de prouver qu'il existe un nombre positif M ne dépendant ni des coordonnées du point B , ni de la position du point A sur la ligne (S), ni même du paramètre positif m^2 , mais seulement de la nature géométrique de la ligne (S), tel que l'on ait:

$$\frac{dG(A, B, m^2)}{dN_A} \leq M \frac{l}{AB^2}. \quad (27)$$

J'observe qu'une application facile du théorème de Green, application qui, eu égard aux théorèmes rappelés ou établis dans l'Introduction, ne donne lieu à aucune objection, fournit la relation suivante:

$$(28) \quad \begin{aligned} G(Q, B, m_1^2) - G(Q, B, m_2^2) = \\ = (m_2^2 - m_1^2) \int_{(D)} G(Q, P, m_1^2) G(B, P, m_2^2) d\tilde{i}_P \end{aligned}$$

en désignant par m_1 et m_2 deux nombres réels quelconques et par $d\tilde{i}_P$ l'élément d'aire relatif au point P .

La relation (28) prouve que la différence formant le premier membre de cette relation, est toujours de même signe que la différence:

$$(29) \quad m_2^2 - m_1^2.$$

Par conséquent, puisque l'expression:

$$G(Q, B, m_1^2) - G(Q, B, m_2^2)$$

s'annule lorsque le point Q vient sur (S) , la différence

$$\frac{dG(A, B, m_1^2)}{dN_A} - \frac{dG(A, B, m_2^2)}{dN_A}$$

aura aussi le signe de la quantité (29). Cela prouve que le premier membre de (27) est une fonction décroissante de la variable positive m^2 .

Par conséquent, pour établir l'inégalité (27), il suffit de démontrer l'inégalité suivante:

$$(30) \quad \frac{dG(A, B, 0)}{dN_A} \leq M \frac{l}{AB^2}$$

où, suivant les notations adoptées, la fonction de Green considérée est la fonction de Green relative à l'équation de Laplace.

Examinons d'abord le cas où l'on a:

$$(31) \quad l \geq \frac{1}{2} \overline{AB}.$$

D'après les hypothèses faites au sujet de la ligne (S) , il sera possible de faire passer par le point A un cercle (C) tangent à la ligne (S) , extérieur au domaine (D) et ayant pour rayon une lon-

gueur R indépendante de la position du point A sur la ligne (S) . Désignons par $\mathcal{G}(Q, B)$ la fonction de Green extérieure relative au cercle (C) et à l'équation de Laplace. On a évidemment:

$$\frac{dG(A, B, O)}{dN_A} \leq \frac{d\mathcal{G}(A, B)}{dN_A}.$$

D'autre part:

$$\frac{d\mathcal{G}(A, B)}{dN_A} = \frac{\varrho^2 - R^2}{2\pi R AB^2}$$

en désignant par ϱ la distance du point B au centre du cercle (C) . On conclura aisément de ces relations que l'inégalité (31) entraînera l'inégalité (30) pourvu que le nombre M ait une valeur vérifiant l'inégalité suivante:

$$M \geq \frac{L + 2R}{\pi R}, \quad (32)$$

où L représente le maximum de distance de deux points du domaine (D) .

Envisageons maintenant le cas où:

$$l < \frac{1}{2} \overline{AB}. \quad (33)$$

Désignons par A' le point de (S) le plus voisin du point B (ou l'un quelconque des points de (S) les plus voisins du point B , si exceptionnellement il y en avait plus d'un).

Exceptionnellement le point A' pourrait coïncider avec le point A . Dans ce cas, en faisant usage des mêmes inégalités que tout à l'heure, on reconnaîtrait que, dans ce cas là, l'inégalité (32) entraînerait encore l'inégalité (30). Supposons donc que les points A et A' soient distincts et considérons deux cercles égaux (C) et (C') , extérieurs au domaine (D) , passant l'un par le point A et l'autre par le point A' , et tels que leur rayon commun r soit déterminé de la façon suivante: dans le cas où l'on aurait:

$$\overline{AA'} < 6R,$$

où R représente la même longueur que dans l'inégalité (32), on prendrait

$$r = \frac{1}{6} \overline{AA'}$$

si au contraire on avait:

$$AA' \geq 6R$$

on prendrait:

$$r = R.$$

Désignons par $K(Q, B)$ la fonction de Green extérieure relative à l'équation de Laplace et au domaine extérieur aux deux cercles (C) et (C') . On aura évidemment:

$$\frac{dG(A, B, O)}{dN_A} \leq \frac{dK(A, B)}{dN_A}$$

et d'autre part, il est clair que l'on se trouvera dans des conditions qui permettent d'appliquer le théorème exprimé par l'inégalité (51). Par conséquent, l'inégalité (33) entraînera certainement l'inégalité (30) si l'on prend:

$$M \geq M_1$$

en désignant par M_1 un nombre positif dépendant uniquement de la nature géométrique de la ligne (S) et qu'il serait aisé mais inutile d'exprimer en fonction du rapport $\frac{L}{R}$. On voit qu'il suffit d'égaliser le nombre M au plus grand des nombres:

$$\frac{L + 2R}{\pi R} \text{ et } M_1$$

pour que l'inégalité (30) et par conséquent l'inégalité (27) soient vérifiées dans tous les cas. Donc le théorème que nous voulions démontrer est établi.

§ 19. Démontrons maintenant le théorème suivant: si l'on conserve au symbole $\varphi(r)$ la signification qu'il a dans la formule (4) de l'Introduction, on aura:

$$(34) \quad \frac{dG(A, B, m^2)}{dN_A} = 2 \frac{d\varphi(AB)}{dN_A} - s(A, B, m^2)$$

en supposant, cela va sans dire, que le point A n'est pas un sommet de (S) et en désignant par $s(A, B)$ la fonction jouissant des propriétés suivantes: considérée comme fonction des coordonnées du point B , elle vérifie, à l'intérieur du domaine (D) , l'équation:

$$\Delta s - m^2 s = 0,$$

lorsque le point B tend vers un point C situé sur (S) mais distinct du point A , la fonction $S(A, B)$ tend vers la même limite que la quantité:

$$2 \frac{d\varphi(\overline{AB})}{dN_A} : \quad (35)$$

enfin, lorsque le point B tend vers le point A la fonction considérée a pour limite la limite vers laquelle tendrait l'expression (35) dans le cas où le point B tendrait vers le point A en restant sur la ligne (S) .

Pour établir le théorème précédent, deux lemmes nous seront nécessaires.

Lemme I. La valeur absolue de la différence:

$$\frac{dG(A, B, m^2)}{dN_A} - 2 \frac{d\varphi(\overline{AB})}{dN_A} \quad (36)$$

a une limite supérieure finie.

Le point A n'étant pas un sommet de la ligne (S) , on pourra mener par ce point deux cercles (C) et (C') tangents en A à la ligne (S) et situés: le premier dans le domaine (D) et le second dans le domaine (D') . Désignons par $\mathcal{G}(P, B, m^2)$ la fonction de Green intérieure relative au cercle (C) et par $\mathcal{G}'(P, B, m^2)$ la fonction de Green extérieure relative au cercle (C') .

Lorsque le point B se trouve à l'intérieur du cercle (C) , on a:

$$\frac{d\mathcal{G}(A, B, m^2)}{dN_A} \leq \frac{dG(A, B, m^2)}{dN_A} \leq \frac{d\mathcal{G}'(A, B, m^2)}{dN_A}.$$

Or, le lemme que nous voulons établir est aisé à démontrer quand on considère la fonction de Green intérieure ou extérieure relative à un cercle. Cette remarque faite, il résulte des inégalités précédentes que la valeur absolue de la différence (36) a une limite supérieure finie lorsque le point B ne sort pas du cercle (C) . D'autre part, lorsque le point B , sans, bien entendu, sortir du domaine (D) , est situé à l'extérieur du cercle (C) , la valeur absolue de l'expression (36) reste bornée, car il en est évidemment ainsi du second terme et il en est de même du premier en vertu du théorème établi au paragraphe précédent. Par conséquent, l'expression (36) jouit bien de la propriété annoncée.

Lemme II. Désignons par A_1, A_2, \dots, A_n un système de n points

déterminés sur la ligne (S) , par B un point variable situé à l'intérieur du domaine (D) , par l la plus courte distance du point B à la ligne (S) , par λ la plus petite des longueurs

$$BA_i \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

et par $u(B)$ une fonction des coordonnées du point B vérifiant, à l'intérieur du domaine (D) , l'équation

$$\Delta u - m^2 u = 0$$

et jouissant en outre des propriétés suivantes:

1° A tout système de deux nombres positifs ε et η , différents de zéro mais aussi petits que l'on voudra, on peut faire correspondre un nombre positif δ , différent de zéro, tel que les inégalités:

$$(37) \quad \begin{cases} l \leq \delta \\ \lambda \geq \eta \end{cases}$$

entraînent l'inégalité suivante:

$$(38) \quad |u| < \varepsilon.$$

2° Pour toute position du point B à l'intérieur du domaine (D) , on a

$$|u| < C \lambda^p$$

en désignant par C une constante positive et par p un nombre constant inférieur à l'unité, positif ou nul.

Je dis que la fonction u est nulle dans toute l'étendue du domaine (D) .

Pour établir ce lemme, attribuons à η et ε des valeurs déterminées et supposons alors que δ ait une valeur telle que les inégalités (37) entraînent l'inégalité (38).

Cela posé, envisageons à l'intérieur du domaine (D) un point déterminé P ainsi qu'un nombre ϱ non supérieur à δ et inférieur à la plus courte distance du point P à la ligne (S) . Soit (D_1) le domaine formé par ceux des points du domaine (D) dont les plus courtes distances à la ligne (S) ne sont pas inférieures à ϱ . Si le nombre ϱ est assez petit, la frontière (S_1) du domaine (D) satisfera à des hypothèses générales de même genre que celles que nous avons adoptées au sujet de la ligne (S) . Supposons que le nombre ϱ satisfasse à cette condition et désignons par $G_1(Q, P, m^2)$ la fonction de Green relative au domaine (D_1) . Nous aurons:

$$u(P) = \int_{(S_1)} \frac{dG_1(Q, P, m^2)}{dN_Q} u(Q) ds_Q. \quad (39)$$

Or, pourvu que ϱ ne dépasse pas une certaine limite, on pourra, en vertu du théorème du paragraphe précédent, trouver une limite supérieure finie de la quantité:

$$\frac{dG_1(Q, P, m^2)}{dN_Q}$$

lorsque le point Q parcourt la ligne (S_1) . Cette remarque faite, on prouvera sans peine que l'intégrale (39) tend vers zéro lorsqu'on fait tendre vers zéro suivant une loi convenable les quantités ε , η et ϱ . On a donc:

$$u(P) = 0,$$

ce qui prouve notre lemme.

Revenons au théorème énoncé au début de ce paragraphe. Il résulte du Lemme I que la différence:

$$\frac{dG(A, B, m^2)}{dN_A} - \left\{ 2 \frac{d\varphi(AB)}{dN_A} - s(A, B) \right\}$$

est bornée. Donc, en vertu des théorèmes des §§ 17 et 18 et du Lemme II, la différence considérée est nulle identiquement. La formule (34) est donc démontrée.

§ 20. Reprenons la fonction:

$$\frac{dG(A, B, m^2)}{dN_A}$$

mais, pour mettre les coordonnées x et y du point B en évidence, écrivons-la ainsi:

$$\frac{dG(A, x, y, m^2)}{dN_A}$$

Cela posé, plaçons l'origine des coordonnées (x, y) en un point E situé sur (S) ne coïncidant ni avec le point A , ni avec aucun sommet, dirigeons l'axe des y suivant la normale en E à la ligne (S) , vers l'intérieur du domaine (D) et soit ϱ le rayon d'un cercle (Σ) tangent en E à la ligne (S) , situé entièrement à l'intérieur du domaine (D) , n'ayant avec la ligne (S) aucun point commun en dehors du point E et jouissant en outre de la propriété suivante:

Si l'on désigne par l et t les plus courtes distances d'un point P pris sur la circonférence (Σ) ou à l'intérieur de cette circonférence, à la ligne (S) et à la tangente en E au cercle (Σ), on a:

$$(41) \quad l \leq 2t.$$

Le cercle (Σ) jouira évidemment de toutes les propriétés précédentes pourvu que l'on ait:

$$(42) \quad \varrho \leq \varrho_E$$

en désignant par ϱ_E une longueur dépendant uniquement de la position du point E sur la ligne (S).

Je dis que la fonction (40) jouira des propriétés suivantes:

1° La dérivée:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{dG(A, o, y, m^2)}{dN_A}$$

tendra vers une limite déterminée lorsque y tendra vers zéro par valeurs positives. D'après le principe des notations adoptées, cette limite pourra être représentée par le symbole:

$$(43) \quad \frac{d}{dN_E} \frac{dG(A, E, m^2)}{dN_A}$$

2° Les inégalités:

$$(44) \quad 0 < y \leq \frac{\varrho}{4}$$

entraînent les inégalités suivantes:

$$(45) \quad \left| \frac{\partial}{\partial y} \frac{dG(A, o, y, m^2)}{dN_A} - \frac{d}{dN_E} \frac{dG(A, E, m^2)}{dN_A} \right| < \frac{n_1 + n_2 m^2 \varrho^2}{\varrho r^2} My$$

$$(46) \quad \left| \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{dG(A, x, y, m^2)}{dN_A} \right\}_{x=0} \right| < \frac{n_1 + n_2 m^2 \varrho^2}{\varrho r^2} My \log \frac{\varrho}{y}$$

$$(47) \quad \left| \left\{ D^{(2)} \frac{dG(A, x, y, m^2)}{dN_A} \right\}_{x=0} \right| < \frac{n_1 + n_2 m^2 \varrho^2}{\varrho r^2} M \log \frac{\varrho}{y}$$

en désignant par $D^{(2)}$ l'un quelconque des symboles opératoires $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, par r la plus courte distance du point A au cercle (Σ), par n_1 et n_2 des constantes numériques qu'il serait facile mais qu'il est inutile de calculer et en conservant à la lettre M la signification qu'elle a dans l'inégalité (27).

Pour établir les inégalités précédentes, posons:

$$u(x, y) = \frac{dG(A, x, y, m^2)}{dN_A}, \quad (48)$$

désignons par $\mathcal{G}(x, y, \xi, \eta)$ la fonction de Green intérieure relative au cercle (Σ) et à l'équation de Laplace et représentons par $-\sin \theta$ et $\cos \theta$, les cosinus directeurs de la normale intérieure au cercle (Σ) en un point (x', y') situé sur la circonférence de ce cercle. Nous aurons, en supposant que le point x, y soit situé à l'intérieur du cercle (Σ) , la relation suivante:

$$u(x, y) = \varrho \int_0^{2\pi} u(x' y') \left\{ -\sin \theta \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x'} + \cos \theta \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y'} \right\} d\theta - \\ - m^2 \iint u(\xi, \eta) \mathcal{G}(x, y, \xi, \eta), d\xi d\eta, \quad (49)$$

où l'intégrale double devra être étendue à toute l'aire du cercle (Σ) .

Reportons-nous aux inégalités (27) et (41) d'une part et rappelons-nous d'autre part que nous avons désigné par r la plus courte distance du point A à la circonférence (Σ) ; nous aurons:

$$\left. \begin{aligned} |u(x' y')| &\leq 2 M \frac{y}{r^2} \\ |u(\xi, \eta)| &\leq 2 M \frac{\eta}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

En s'appuyant sur les relations (49) et (50), on établira immédiatement l'existence de la quantité (43). On établira aussi sans peine les inégalités (45) et (46) pourvu que, en discutant les intégrales doubles que l'on aura à considérer, intégrales dans lesquelles la coordonnée x aura la valeur zéro et la coordonnée y une valeur vérifiant les inégalités (44), on décompose chacune de ces intégrales en deux parties dont l'une serait étendue au domaine défini par l'inégalité:

$$\xi^2 + (\eta - y)^2 \leq \frac{y^2}{4} \quad (51)$$

et l'autre au domaine défini par les inégalités suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \xi^2 + (\eta - y)^2 &\geq \frac{y^2}{4} \\ \xi^2 + (\eta - \varrho)^2 &\leq \varrho^2 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Enfin, pour démontrer encore l'inégalité (47), on pourra procéder de la façon suivante. On commencera par établir, au moyen des relations (49) et (50) que l'inégalité (51) entraîne les inégalités suivantes:

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right| < 16(1 + \rho^2 m^2) \frac{M}{r^2} \\ \left| \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right| < 16(1 + \rho^2 m^2) \frac{M}{r^2} \end{array} \right.$$

Ensuite on décomposera l'intégrale double qui entre au second membre de l'équation (49) en deux autres étendues, l'une au domaine (51) et l'autre au domaine (52). Soit

$$\int_{\Omega} \int u(\xi, \eta) \mathcal{G}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta$$

l'intégrale étendue au domaine (Ω) déterminé par l'inégalité (51).

Les inégalités (50) et (53) permettront de calculer facilement une limite supérieure de la valeur absolue de la quantité:

$$\left\{ D^{(2)} \int_{(\Omega)} \int u(\xi, \eta) \mathcal{G}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \right\}_{x=0}$$

Ayant cette limite supérieure, on achèvera sans peine la démonstration de l'inégalité (47).

En résumé, les propositions énoncées au début de ce paragraphe doivent être regardées comme démontrées.

Faisons observer que les remarques faites à la fin du § 17 permettent de prouver très aisément que l'on a:

$$\frac{d}{dN_E} \frac{dG(A, E, m^2)}{dN_A} = \frac{d}{dN_A} \frac{dG(A, E, m^2)}{dN_E}$$

Notons encore qu'en désignant par:

$$\frac{d^2 G(A, E, m^2)}{\partial N_A \partial N_E}$$

la valeur commune des deux membres de l'inégalité précédente, on aura:

$$(54) \quad \frac{d^2 G(A, E, m^2)}{\partial N_A \partial N_E} \leq \frac{M}{AE^2}$$

en vertu de l'inégalité (27).

Enfin faisons encore remarquer que, puisque la fonction :

$$\frac{dG(A, B, m^2)}{dN_A}$$

n'est jamais négative et puisque à cause de l'inégalité (27), elle tend vers zéro lorsque le point B tend vers un point E situé sur (S) et distinct du point A , on a :

$$\frac{\partial^2 G(A, E, m^2)}{\partial N_A \partial N_E} \geq 0. \quad (55)$$

§ 21. Posons comme plus haut :

$$u(x, y) = \frac{dG(A, B, m^2)}{dN_A} \quad (56)$$

en désignant par x et y les coordonnées du point B , mais supposons maintenant que les axes de coordonnées rectangulaires (x, y) soient placés d'une façon quelconque par rapport à la ligne (S) . On conclura immédiatement de ce que l'on a vu au paragraphe précédent, que les dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} \quad (57)$$

tendent vers des limites déterminées lorsque le point (x, y) tend vers un point quelconque C de la ligne (S) pourvu que ce point ne coïncide ni avec le point A ni avec un sommet de la ligne (S) . On reconnaîtra aussi immédiatement que ces limites varient d'une façon continue lorsque le point C se déplace d'une façon continue sur (S) sans rencontrer le point A ou l'un des sommets de la ligne (S) . On peut encore déduire des résultats du paragraphe précédent une autre conclusion, très utile dans diverses applications : à tout point C situé sur la ligne (S) et ne coïncidant avec aucun sommet, on peut faire correspondre deux longueurs L_1 et L_2 dépendant uniquement de la position du point C sur la ligne (S) , et admettant la première une limite supérieure finie, et la seconde une limite inférieure non nulle, lorsque le point C varie sur la ligne (S) de façon que sa distance au sommet le plus voisin ne devienne pas inférieure à une longueur déterminée, aussi petite que l'on voudra, telles que les inégalités :

$$(58) \quad \begin{cases} \overline{C' C} \leq L_1 \\ \overline{C' C} \leq \frac{1}{16} \overline{AC} \end{cases}$$

où C' est un point situé sur la ligne (S) , entraînent l'inégalité suivante:

$$(59) \quad \left| \frac{\partial^2 G(A, C', m^2)}{\partial N_A \partial N_{C'}} - \frac{\partial^2 G(A, C, m^2)}{\partial N_A \partial N_C} \right| < M \frac{1 + m^2 L^2}{(1-p) L_2^p} \frac{\overline{CC'}^p}{\overline{AC}^3}$$

en conservant à la lettre M la signification qu'elle a dans l'inégalité (27) et en désignant: par L le maximum de distance de deux points situés sur la ligne (S) et par p un nombre quelconque vérifiant les inégalités suivantes:

$$(60) \quad 0 < p < 1.$$

Pour établir l'inégalité (49), j'observe que, si la longueur L_1 ne dépasse pas une limite dépendant uniquement de la position du point C sur la ligne (S) , la première des inégalités (58) entraînera la conséquence suivante: le point C' sera situé sur le côté de la ligne (S) sur lequel se trouve le point C . Supposons que la longueur L_1 vérifie cette condition et, en nous plaçant dans l'hypothèse où la première des inégalités (58) est vérifiée, considérons sur les normales élevées en C et C' deux points C_1 et C'_2 , le point C' se trouvant sur la normale élevée en C et le point C'_1 sur la normale élevée en C' . Je suppose que les points C_1 et C'_1 soient pris de façon que chacun des segments $\overline{CC_1}$ et $\overline{C'C'_1}$ soit situé à l'intérieur du domaine (D) et que l'on ait:

$$(61) \quad \overline{CC_1} = \overline{C'C'_1} = \overline{CC'}.$$

Désignons par α et β les cosinus-directeurs de la direction $\overline{CC_1}$ et par α' , β' ceux de la direction $\overline{C'C'_1}$. Soient, en outre, x et y les coordonnées du point C_1 , x' et y' celles du point C'_1 .

Si la longueur L_1 ne dépasse pas une limite dépendant uniquement de la position du point C sur la ligne (S) et si les inégalités (58) sont vérifiées l'une et l'autre, il sera aisé, en s'appuyant sur les inégalités du paragraphe précédent, de trouver des limites supérieures de chacune des expressions suivantes:

$$\left| \frac{du}{dN_c} - \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right|$$

$$\left| \frac{du}{dN_{c'}} - \left(\alpha' \frac{\partial u}{\partial x'} + \beta \frac{\partial u}{\partial y'} \right) \right|$$

$$\left| \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} - \left(\alpha' \frac{\partial u}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial u}{\partial y'} \right) \right|,$$

où u est définie au moyen de l'équation (53).

On pourra donc trouver, dans les conditions où l'on s'est placé une limite supérieure de l'expression:

$$\left| \frac{du}{dN_c} - \frac{du}{dN_{c'}} \right|$$

et l'on arrivera ainsi à établir sans peine la proposition qu'il s'agit de démontrer.

§ 22. Interrompons pour un instant la théorie générale de la fonction de Green et considérons la fonction de Green intérieure $\mathcal{G}(A, B, m^2)$ relative à un cercle (C) de centre O et de rayon R . Désignons par x et y les coordonnées du point B et représentons par:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{G}(A, B, m^2)}{\partial x} \right)_0$$

la valeur que prend la dérivée:

$$\frac{\partial \mathcal{G}(A, B, m^2)}{\partial x}$$

lorsque le point B vient coïncider avec le centre O du cercle C . On trouve facilement

$$\left(\frac{\partial \mathcal{G}(A, B, m^2)}{\partial x} \right)_0 = \frac{\psi'(r) \varphi'(R) - \psi'(R) \varphi'(r)}{\psi'(R)} \cos \theta \quad (62)$$

en conservant au symbole $\varphi(r)$ la signification qu'il a dans la formule (4) de l'Introduction, en posant:

$$\psi(r) = J_0(imr)$$

où le second membre représente la fonction de Bessel ordinairement désignée par le symbole J_0 , en désignant par r la longueur \overline{AB} et en appelant θ l'angle formé par la direction de B vers A avec l'axe des x .

Cela posé, soit $u(x, y)$ une fonction vérifiant l'équation

$$\Delta u - m^2 u = 0$$

à l'intérieur du cercle (C) . Si l'on représente par $h(\theta)$ la valeur vers laquelle tend la fonction u lorsque le point (x, y) tend vers un point P de la circonférence, tel que l'angle du vecteur \overline{OP} avec l'axe des x soit égal à θ , on aura, en vertu de la formule (62), la formule suivante:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = R \frac{\psi'(R) \varphi''(R) - \psi''(R) \varphi'(R)}{\psi'(R)} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos \theta d\theta.$$

Or, en tenant compte des équations:

$$\varphi''(r) + \frac{1}{r} \varphi'(r) - m^2 \varphi(r) = 0$$

$$\psi''(r) + \frac{1}{r} \psi'(r) - m^2 \psi(r) = 0$$

on trouve:

$$\psi'(R) \varphi''(R) - \psi''(R) \varphi'(R) = m^2 (\psi'(R) \varphi(R) - \psi(R) \varphi'(R)) = \frac{m^2}{2\pi R};$$

d'ailleurs:

$$\psi'(R) > m^2 R.$$

On aura donc:

$$\left| \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \right| \leq \frac{1}{2\pi R} \left| \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos \theta d\theta \right|.$$

Désignons par h_1 et h_2 le minimum et le maximum de la fonction $h(\theta)$ et remarquons que l'on a:

$$\int_0^{2\pi} h(\theta) \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \left\{ h(\theta) - \frac{h_1 + h_2}{2} \right\} \cos \theta d\theta.$$

Cette égalité et l'inégalité:

$$\left| h(\theta) - \frac{h_1 + h_2}{2} \right| \leq \frac{h_2 - h_1}{2}$$

donnent:

$$\left| \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos \theta d\theta \right| < \pi (h_2 - h_1).$$

Nous aurons donc facilement:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \leq \frac{h_2 - h_1}{2R}. \quad (63)$$

C'est l'inégalité que nous voulions établir.

§ 23. Revenons à la théorie générale et cherchons une limite supérieure des valeurs absolues des dérivées de premier ordre de la quantité:

$$\frac{dG(A, B, m^2)}{dN_A} \quad (64)$$

considérée comme fonction des coordonnées x et y du point B . A cet effet, soit B_0 une position particulière quelconque du point B dans le domaine (D) . Désignons par l_0 la plus courte distance du point B_0 à la ligne (S) et, du point B_0 comme centre décrivons un cercle (C) de rayon égal à $\frac{l_0}{2}$. Supposons que le point B se déplace sur le cercle (C) . On s'assurera de suite, en s'appuyant sur l'inégalité (27), que, dans ces conditions, la fonction (64), qui, comme on sait, ne devient jamais négative, aura pour limite supérieure:

$$\frac{12 M l_0}{AB_0^2}.$$

Cela étant, on conclura de l'inégalité (63) que les dérivées du premier ordre de la fonction (64) par rapport aux coordonnées du point, ne dépasseront pas en valeur absolue, lorsque B vient se confondre avec B_0 , la limite suivante:

$$\frac{12 M}{AB_0^2}.$$

Nous arrivons donc au résultat suivant: si l'on désigne par x et y les coordonnées du point B et par M le nombre que cette lettre représente dans l'inégalité (27), on aura:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{dG(A, B, m^2)}{dN_A} \right|, \left| \frac{\partial}{\partial y} \frac{dG(A, B, m^2)}{dN_A} \right| < \frac{12 M}{AB^2}. \quad (65)$$

§ 24. Je me propose maintenant d'établir les inégalités suivantes, on a:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} G(A, B, m^2) \right|, \left| \frac{\partial}{\partial y} G(A, B, m^2) \right| < \frac{M_1}{AB}, \quad (66)$$

en désignant par x et y les coordonnées du point B et par M_1 une constante numérique dépendant uniquement de la nature géométrique de la ligne (S) .

Pour $m = 0$, les inégalités précédentes ont été établies par M. Picard dans son mémoire fondamental sur la méthode des approximations successives, mais M. Picard s'est placé dans des hypothèses beaucoup moins générales que celles que nous adoptons ici au sujet de la ligne (S) .

Désignons par C le point de la ligne (S) le plus voisin du point B , ou un des points jouissant de cette propriété dans le cas où exceptionnellement il y en aurait plus d'un. Soit (Σ) un cercle passant par le point C mais extérieur au domaine (D) . D'après les hypothèses adoptées au sujet de la ligne (S) on pourra, comme nous le ferons, attribuer au rayon de ce cercle une longueur finie R indépendante de la position du point C sur la ligne (S) . Soit $\mathcal{G}(A, B)$ la fonction de Green extérieure relative au cercle (Σ) et à l'équation de Laplace. On aura:

$$G(A, B, 0) \leq \mathcal{G}(A, B).$$

Or:

$$G(A, B, m^2) \leq G(A, B, 0),$$

done:

$$(67) \quad G(A, B, m^2) \leq \mathcal{G}(A, B).$$

Soit E le centre du cercle (Σ) . On prouvera aisément que l'on a:

$$\mathcal{G}(A, B) \leq \frac{(\overline{AE}^2 - R^2)(\overline{BE}^2 - R^2)}{4\pi R^2 \cdot \overline{AB}^2}.$$

D'autre part on a évidemment:

$$\overline{AE} \leq L + R$$

$$\overline{BE} \leq L + R$$

en désignant par L le maximum de distance de deux points situés sur (S) . Par conséquent:

$$\mathcal{G}(A, B) \leq \frac{1}{4\pi} \left(2 + \frac{L}{R}\right)^2 \frac{(\overline{AE} - R)(\overline{BE} - R)}{\overline{AB}^2}.$$

On a:

$$\overline{BE} - R = \overline{BC},$$

$$\overline{AE} - R \leq \overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}.$$

On aura donc:

$$\mathcal{G}(A, B) \leq \frac{1}{4\pi} \left(2 + \frac{L}{R}\right)^2 \frac{(\overline{AB} + \overline{BC}) \overline{BC}}{\overline{AB}^2}.$$

Cette inégalité et l'inégalité (67) donnent:

$$G(A, B, m^2) \leq \frac{1}{4\pi} \left(2 + \frac{L}{R}\right)^2 \frac{(r + b)b}{r^2} \quad (68)$$

en posant:

$$b = \overline{BC}; \quad r = \overline{AB}$$

pour abrégier l'écriture.

Observons d'une part que b représente la plus courte distance du point B à la ligne (S) et d'autre part qu'il est permis d'intervertir les rôles des points A et B dans le raisonnement qui nous a conduit à l'inégalité (68). Nous aurons:

$$G(A, B, m^2) \leq \frac{1}{4\pi} \left(2 + \frac{L}{R}\right)^2 \frac{(r + a)a}{r^2} \quad (69)$$

en désignant par a la plus courte distance du point A à la ligne (S) .

Désignons par δ une longueur inférieure à la plus courte distance a du point A à la ligne (S) . En partant de l'inégalité (68), on établira sans peine qu'il sera possible de faire correspondre à la longueur δ une longueur T , indépendante de la position du point B dans le domaine (D) , telle que l'on ait:

$$\lim_{\delta=0} T = a \quad (70)$$

et telle en outre que l'inégalité:

$$b \leq \delta \quad (71)$$

entraîne l'inégalité:

$$G(A, B, m^2) \leq \frac{1}{4\pi} \left(2 + \frac{L}{R}\right)^2 \frac{b}{T} \quad (72)$$

Considérons maintenant un point P situé à l'intérieur du do-

maine (D) et tel que la plus courte distance p de ce point à la ligne (S) vérifie l'inégalité:

$$(73) \quad p \leq \frac{\delta}{2}.$$

Si du point P comme centre, on décrit un cercle (C) de rayon p , l'inégalité (72) sera applicable pour toute position du point B à l'intérieur de ce cercle ou sur sa circonférence.

Cette remarque faite, il suffit de se reporter à l'inégalité (63) pour reconnaître que les dérivées:

$$(63) \quad \frac{\partial G(A, B, m^2)}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial G(A, B, m^2)}{\partial y}$$

sont, lorsque le point B coïncide avec le point P , en valeur absolue, inférieures à

$$\frac{1}{4\pi} \left(2 + \frac{L}{R} \right) \frac{1}{T}.$$

En s'appuyant sur ce résultat, ainsi que sur la formule (4) de l'Introduction, on arrive à la conclusion suivante, l'inégalité:

$$(74) \quad b \leq \frac{\delta}{2}$$

entraîne les inégalités suivantes:

$$(75) \quad \left| \frac{\partial g(A, B, m^2)}{\partial x} \right|, \quad \left| \frac{\partial g(A, B, m^2)}{\partial y} \right| < \frac{1}{4\pi} \left(2 + \frac{L}{R} \right)^2 \frac{1}{T} + \frac{1}{2\pi(a-b)}.$$

Or, il résulte d'une propriété connue de l'équation:

$$\Delta u - m^2 u = 0$$

ceci: du moment que l'inégalité (74) entraîne l'inégalité (75), l'inégalité (75) devra être vérifiée pour toutes les positions du point B dans le domaine (D). D'autre part, on peut prendre δ aussi petit que l'on voudra. Donc, eu égard à (70), on aura:

$$(76) \quad \left| \frac{\partial g(A, B, m^2)}{\partial x} \right|, \quad \left| \frac{\partial g(A, B, m^2)}{\partial y} \right| \leq \frac{1}{4\pi} \left(4 + \frac{L}{R} \right)^2 \frac{1}{a}.$$

En se reportant de nouveau à la formule (4) de l'Introduction, on verra que l'inégalité:

$$(76) \quad \overline{AB} \leq a$$

entraînera l'inégalité (66), pourvu que l'on ait:

$$M_1 \geq \frac{1}{4\pi} \left(6 + \frac{L}{R}\right)^2. \quad (77)$$

Considérons maintenant une position B_0 du point B dans le domaine (D) telle que l'on ait:

$$r_0 = \overline{AB_0} > a.$$

Désignons par b_0 la plus courte distance du point B_0 à la ligne (S) . Soit d'abord:

$$b_0 \geq a.$$

Décrivons du point B_0 comme centre un cercle (C) de rayon $\frac{a}{2}$. Ce cercle sera tout entier situé à l'intérieur du domaine (D) et le point A lui sera extérieur.

Il résulte d'ailleurs de l'inégalité (69) que, le point B se déplaçant sur la circonférence du cercle (C) , la fonction positive $G(A, B, m^2)$ restera inférieure à:

$$\frac{3}{2\pi} \left(2 + \frac{L}{R}\right)^2 \frac{a}{r_0}.$$

Moyennant l'inégalité (63), on en conclura que, lorsque B vient en B_0 , les dérivées:

$$\frac{\partial G(A, B, m^2)}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial G(A, B, m^2)}{\partial y} \quad (78)$$

sont, en valeur absolue, inférieures à la quantité:

$$\frac{3}{2\pi} \left(2 + \frac{L}{R}\right)^2 \frac{1}{r_0}.$$

En d'autres termes: les inégalités:

$$\begin{cases} r > a \\ b \geq a \end{cases} \quad (79)$$

entraîneront l'inégalité (66) à condition de prendre:

$$M_1 \geq \frac{3}{2\pi} \left(2 + \frac{L}{R}\right)^2. \quad (80)$$

Conservons les notations employées tout à l'heure, continuons à admettre que:

$$r_0 > a,$$

mais supposons maintenant que l'on ait:

$$b_0 < a.$$

Du point B_0 comme centre, décrivons un cercle (C) de rayon égal à $\frac{1}{2} b_0$. Ce cercle sera évidemment tout entier situé à l'intérieur du domaine (D) et le point A lui sera extérieur. Il résulte d'ailleurs de l'inégalité (68) que, pour aucune position du point B sur la circonférence du cercle (C), la fonction $G(A, B, m^2)$ ne pourra dépasser la limite:

$$\frac{3}{\pi} \left(2 + \frac{L}{R}\right)^2 \frac{b_0}{r_0}.$$

On en conclura, en s'appuyant sur l'inégalité (63), que les inégalités:

$$(81) \quad \begin{cases} r > a \\ b > a \end{cases}$$

entraîneront les inégalités (66) pourvu que l'on prenne:

$$(82) \quad M_1 \cong \frac{3}{\pi} \left(2 + \frac{L}{R}\right)^2.$$

Il est aisé de voir qu'en prenant:

$$(83) \quad M_1 \cong \frac{3}{\pi} \left(2 + \frac{L}{R}\right)^2,$$

on assurera les inégalités (66) dans tous les cas. En effet la valeur (83) satisfait à la fois aux conditions (77), (80) et (82).

Par conséquent, M_1 ayant cette valeur, les inégalités (66) auront lieu dans tous les cas.

§ 25. Désignons par l la plus courte distance à la ligne (S) d'un point A situé à l'intérieur du domaine (D) et par $d\bar{i}$ l'élément d'aire relatif à un point B situé aussi dans le domaine (D), on aura:

$$(84) \quad \int_{(D)} \left\{ G(A, B, m^2) \right\}^2 d\bar{i} < \left\{ 2R + L + \frac{1}{6} \frac{L^2}{R} \right\} l$$

en désignant par L le maximum de distance de deux points situés sur la ligne (S) et par R une longueur telle que, par chaque point de la ligne (S) , on puisse faire passer un cercle de rayon R extérieur au domaine (D) .

La démonstration est immédiate. Soit A' le point de (S) le plus voisin du point A (ou l'un des points jouissant de cette propriété si exceptionnellement il y en avait plus d'un). Faisons passer par le point A' un cercle (C) de rayon R extérieur au domaine (D) et désignons par $\mathcal{G}(A, B)$ la fonction de Green extérieure relative à ce cercle et à l'équation de Laplace. On aura:

$$G(A, B, m^2) < \mathcal{G}(A, B). \quad (1)$$

Cette remarque faite, il suffit de se reporter à l'inégalité (1) du chapitre I pour s'assurer que l'inégalité (84) a lieu.

IV. Quelques applications des théorèmes précédents.

§ 26. Considérons une fonction définie sur la ligne (S) et soit $h(A)$ la valeur de cette fonction en un point A de cette ligne. Désignons par ds_A l'élément d'arc de la ligne (S) relatif au point A et bornons-nous à admettre que l'intégrale:

$$\int_{(S)} h(A) ds_A \quad (1)$$

ait un sens. Si l'on pose alors:

$$u = \int_{(S)} h(A) \frac{dG(A, B, m^2)}{dN_A} ds_A \quad (2)$$

en désignant comme précédemment par $G(A, B, m^2)$ la fonction de Green intérieure relative au domaine (D) et à l'équation:

$$\Delta G - m^2 G = 0,$$

le second membre de l'équation (2) aura un sens et la fonction u des coordonnées x et y du point B sera parfaitement déterminée à l'intérieur du domaine (D) .

En s'appuyant sur les propositions du § 17, on établira en toute rigueur que la fonction u vérifie, à l'intérieur du domaine (D) , l'équation aux dérivées partielles:

$$\Delta u - m^2 u = 0.$$

Supposons que la fonction $h(A)$ soit continue en un point P

situé sur la ligne (S). Je dis que, même si le point P est un sommet, la fonction u a $h(P)$ pour limite lorsque le point B tend vers le point P de manière à rester à l'intérieur du domaine (D), mais d'ailleurs suivant une loi quelconque.

Supposons d'abord que l'on ait:

$$(3) \quad h(P) = 0$$

et soit μ un nombre positif donné mais aussi petit que l'on voudra. Je puis faire correspondre au nombre μ un nombre positif δ , tel que l'inégalité:

$$(4) \quad \overline{PA} \leq \delta$$

entraîne l'inégalité:

$$|h(A)| < \mu.$$

Le nombre δ étant déterminé, on peut, cela résulte de l'inégalité (27) du chapitre précédent, lui faire correspondre un nombre positif ϱ tel que les inégalités:

$$(5) \quad \overline{PB} \leq \varrho$$

$$(6) \quad \overline{PA} \geq \delta$$

entraînent l'inégalité:

$$\frac{dG(A, B, m^2)}{dN_A} < \mu.$$

Done, si l'on désigne par (S') l'ensemble des positions du point A sur (S) vérifiant la condition (4) et par (S'') le reste de la ligne (S), l'inégalité (5) entraînera l'inégalité suivante:

$$(7) \quad |u(B)| < \mu \int_{(S')} \frac{dG(A, B, m^2)}{dM_A} ds_A + \mu \int_{(S'')} |h(A)| ds_A.$$

Observons maintenant ceci: on sait qu'il existe une fonction $v(B)$ des coordonnées du point variable B définie à l'intérieur du domaine (D) vérifiant, dans ce domaine, l'équation:

$$\Delta v - m^2 v = 0$$

et tendant uniformément vers l'unité lorsque la plus courte distance du point B à la ligne (S) tend vers zéro¹⁾.

¹⁾ Nous introduisons la fonction v pour simplifier la démonstration, mais il eût été facile, en s'appuyant sur le § 19, d'éviter l'introduction de cette fonction.

Il est même aisé de voir que, si l'on désigne par b la plus courte distance du point B à la ligne (S) , on aura:

$$|v(B) - 1| < C \cdot b \quad (8)$$

en désignant par C une quantité indépendante de la position du point B dans le domaine (D) .

Pour établir ce point, envisageons le point B' de (S) le plus voisin du point B et faisons passer par ce point un cercle (Σ) extérieur au domaine (D) . Supposons, comme nos hypothèses nous y autorisent, que le rayon R du cercle (Σ) ait une valeur indépendante de la position du point B' sur (S) . Désignons par r la distance du point B au centre du cercle (Σ) . On aura manifestement:

$$\frac{\varphi(r)}{\varphi(R)} < v < 1$$

en désignant ici par $\varphi(r)$ la même fonction que dans la formule (4) de l'Introduction. Or:

$$\left| \frac{\varphi(r)}{\varphi(R)} - 1 \right| < \frac{1}{2\pi\varphi(R)} \frac{b}{R};$$

done l'inégalité (8) aura certainement lieu si l'on pose:

$$C = \frac{1}{2\pi R \varphi(R)}.$$

Sachant que l'inégalité (8) a lieu, on trouve de suite:

$$v(B) = \int_{(S)} \frac{dG(A, B, m^2)}{dN_A} ds_A. \quad (9)$$

On a donc:

$$\int_{(S)} \frac{dG(A, B, m^2)}{dN_A} ds_A < 1.$$

Dès lors l'inégalité (7) donne:

$$|u(B)| < \mu \left\{ 1 + \int_{(S)} |h(A)| ds_A \right\}. \quad (10)$$

Il est donc prouvé qu'il est possible de faire correspondre au nombre μ , si petit qu'il soit, un nombre ϱ tel que l'inégalité (5)

entraîne l'inégalité (10). Donc dans le cas particulier où la relation (3) a lieu, notre proposition est démontrée. Le cas général se ramène au cas particulier qui vient d'être considéré en remarquant que les équations (2) et (9) donnent:

$$u = \int_{(S)} \left\{ h(A) - h(P) \right\} \frac{dG(A, B, m^2)}{dN_A} ds_A + h(P)v.$$

§ 27. Considérons encore un point déterminé P situé sur la ligne (S) , mais supposons maintenant que le point P ne coïncide avec aucun sommet de cette ligne. Prenons, sur le „côté“ de la ligne (S) portant le point P , ce point lui-même pour origine des arcs et supposons que la fonction $h(A)$ considérée comme fonction de l'arc $S = \widehat{PA}$ jouisse, lorsque la valeur absolue de la variable s ne dépasse pas une certaine limite, de la propriété suivante:

$$(11) \quad |h(A) - (a + bs)| < C|s|^{1+p}$$

en désignant par a et b des constantes quelconques, par C une constante positive et par p un nombre différent de zéro et positif.

Je dis que, dans ces conditions, la fonction u définie par la formule (2), jouira de la propriété suivante: la quantité

$$\frac{du}{dN_p}$$

existe. Prenons le point P pour origine des coordonnées, dirigeons l'axe des y suivant la normale à la ligne (S) vers l'intérieur du domaine (D) et supposons que le sens des axes positifs ait été choisi de façon que l'on ait:

$$\left\{ \frac{ds}{dx} \right\}_{s=0} = 1.$$

Posons:

$$w = \frac{a}{2}(e^{mx} + e^{-mx}) + \frac{b}{2m}(e^{mx} - e^{-mx})$$

$$(12) \quad u_1 = u - w.$$

Désignons par $k(A)$ la valeur de la fonction w en un point A situé sur la ligne (S) et posons:

$$h_1(A) = h(A) - k(A).$$

Nous aurons:

$$u_1(B) = \int_{(S)} h_1(A) \frac{dG(A, B, m^2)}{dN_A} ds_A$$

et la fonction h_1 satisfera, pour des valeurs assez petites en valeur absolue de l'abscisse x du point A , à l'inégalité suivante:

$$|h_1(A)| < C_1 |x|^{1+p}.$$

Considérons la quantité:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)_{x=0} \quad (13)$$

En s'appuyant sur l'une des inégalités (65) du chapitre précédent, on établira aisément que l'expression (13) tend vers une limite déterminée, lorsque y tend vers zéro par valeurs positives. En d'autres termes, la quantité:

$$\frac{du_1}{dN_p}$$

existe. Donc, à cause de la relation (12), il en est de même de la quantité:

$$\frac{du}{dN_p} \quad (14)$$

C'est ce que nous voulions établir.

La méthode qui vient d'être indiquée pour établir l'existence de la quantité (14) dans les hypothèses où nous nous sommes placés, permet d'établir la proposition que voici: soient E et F deux points situés sur un même côté de la ligne (S) et tels qu'aucun d'eux ne soit un sommet; supposons que la fonction $h(A)$ considérée comme fonction de l'arc $S = \widetilde{EA}$ admette, pour toute position du point A sur l'arc \widetilde{EF} une dérivée déterminée $h'(s)$ telle que l'on ait:

$$|h'(s) - h'(s_1)| < C |s - s_1|^p$$

en désignant par C une constante et par p un nombre différent de zéro et positif. La dérivée $\frac{du}{dN_A}$ existerait en tout point A de l'arc \widetilde{EF} , distinct des points E et F et serait une fonction continue de l'arc S .

Après ce que nous avons vu, il y a un instant, la démonstra-

tion de l'existence de la quantité $\frac{du}{dN_A}$ est immédiate. Pour établir la continuité de cette quantité, il suffira, ce qui est aisé, de prouver ceci: menons par A la normale à la ligne (S), en ayant soin de la diriger vers l'intérieur du domaine (D). Soient α et β ses cosinus directeurs et Q un point situé sur la normale considérée, à l'intérieur du domaine (D) et assez près du point A pour que le segment AQ n'ait, en dehors du point A , aucun point commun avec la ligne (S).

La quantité:

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y}$$

où x et y représentent les coordonnées du point Q , tend uniformément vers sa limite $\frac{du}{dN_A}$, lorsque le segment \overline{AQ} tend vers zéro, le point A pouvant en même temps varier sur l'arc \overline{EF} , mais de façon que ses distances aux points E et F ne deviennent jamais inférieures à une limite fixe non nulle, que l'on peut d'ailleurs se fixer aussi petite que l'on voudra.

Les quelques applications qui précèdent, nous paraissent être bien propres à mettre en évidence l'intérêt des inégalités établies au chapitre précédent.

Table des matières.

	page
I. Introduction	803
II. Théorèmes sur la fonction de Green dans des cas très particuliers	817
III. Théorème sur la fonction de Green dans le cas général	833
IV. Quelques applications des théorèmes précédents	859

52. Note du rédacteur. M. Weyberg nous prie de faire savoir qu'il signe ses travaux: **Z.** Weyberg et non **S.** Weyberg.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Pod redakcją

Sekretarza Wydziału matem.-przyrod. Józefa Rostafińskiego.

Kraków, 1906. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

21 Grudnia 1906.



