

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 8.

Octobre

1904.

- Sommaire:** 34. M. M. SMOLUCHOWSKI. Sur la formation des veines d'efflux dans les liquides.
35. M. STANISLAS LORIA. Recherches sur la vision oblique.
36. M. HUGO ZAPAŁOWICZ. Revue critique de la flore de Galicie, III partie.

Séance du lundi 17 Octobre 1904.

PRÉSIDENTE DE M. E. GODLEWSKI.

34. M. M. SMOLUCHOWSKI. **O powstawaniu żył podczas wypływu cieczy.** (*Sur la formation des veines d'efflux dans les liquides*). Mémoire présenté par M. A. Witkowski m. t. à la séance du 5 Juillet 1904.

I.

Un des phénomènes les plus ordinaires et pourtant trop peu étudiés, de l'hydrodynamique, est la formation d'une veine d'efflux, lorsqu'un liquide passe par un petit orifice avec une vitesse suffisante. On peut s'expliquer ce fait, lorsque le liquide en traversant p. ex. une ouverture dans le fond d'un vase, sort dans l'air ambiant, par l'action de la gravité et de la tension capillaire, qui ont la plus grande influence sur la forme du jet et qui peuvent causer même sa dispersion dans un train de gouttelettes.

Mais même lorsque l'espace extérieur est rempli du même liquide (rendu visible par la différence de coloration), où ces forces ne peuvent pas opérer, le liquide y forme une veine, au lieu de s'épancher dans toutes les directions. Ce phénomène est bien connu en aéromécanique (colonne de fumée, jet de vapeur).

À première vue l'interprétation de ces phénomènes d'après l'hydrodynamique des liquides idéals paraît impossible, puisqu'alors la distribution des lignes de flux devrait être analogue à celle des courants électriques, qui, au contraire, tendent à remplir toute l'éten-



due du corps conducteur. Cependant, Helmholtz ¹⁾ a établi une différence importante de ces deux cas, qui consiste dans une condition additionnelle de l'hydrodynamique, c'est-à-dire que la pression absolue ne peut s'abaisser nulle part au-dessous de la valeur zéro. Au lieu de dépasser cette limite, le liquide se déchirerait, et la rupture engendrerait une surface de discontinuité. Or, la théorie exige que la vitesse du liquide, qui est liée avec l'abaissement de la pression par la formule

$$(1) \quad p = p_0 - \rho \frac{v^2}{2},$$

devienne infinie à chaque arête pointue, d'où résulterait toujours la naissance de telles surfaces de discontinuité, dans ces endroits.

Dans le cas mentionné il faut s'imaginer, d'après Helmholtz, que le liquide se fend au bord de l'orifice, et que la surface de discontinuité, où la pression est zéro, produit ce que nous appelons veine d'efflux, en séparant les parties centrales, animées d'un mouvement rapide, de l'eau dormante, à l'extérieur.

Cette théorie, en donnant lieu, dans le cas de deux dimensions, à l'emploi élégant des fonctions de variables complexes, a été le point de départ d'une quantité de recherches ²⁾ sur des formes spéciales des veines, qui forment un domaine considérable de l'hydrodynamique classique, très intéressant, sans doute, au point de vue mathématique.

Mais il semble qu'on n'a jamais essayé de vérifier par l'expérience les hypothèses sur lesquelles elle repose.

Et il faut remarquer que cette théorie n'a pas été acceptée sans contradiction: c'est surtout Lord Kelvin ³⁾ qui s'oppose à l'hypothèse des surfaces de discontinuité.

En effet, la supposition d'une telle surface, où deux parties du liquide à vitesses différentes et permanentes sont en contact, quoique justifiée dans le cas des liquides idéals, est inadmissible pour les liquides réels doués d'une certaine viscosité, puisque le frottement nivellerait cette différence des vitesses dans un moment ⁴⁾. On ne

¹⁾ Berl. Ber. 1868 p. 215, *Gesam. Abhdg.* I p. 146.

²⁾ Kichhoff *Crelle J.* 70 (1869), *Abhdlg.* p. 416; Rayleigh *Phil. Mag.* 5 (1876) p. 430; Michell *Phil. Trans* 1890; Réthy *Beibl.* 1895 p. 679 etc.

³⁾ *Nature* 50 p. 524--597 (1894).

⁴⁾ Voir p. ex. Lamb *Hydrodynamics* p. 541.

peut que la regarder comme une fiction mathématique, dont l'usage peut être avantageux quelquefois, mais pourvu que l'on prouve que les conséquences ne sont pas de nature fictive aussi.

Nous n'examinerons pas maintenant si un tel mouvement, pourvu qu'il soit possible, serait stable, puisque nous serons conduits à élucider cette question par l'expérience à la fin de ce travail; mais il faut insister, au contraire, sur ce fait que l'hypothèse du liquide parfait s'écarte de la réalité surtout dans ce qui est le plus important pour cette théorie, en admettant un glissement parfait, le long des parois du vaisseau et de l'orifice, tandis que les liquides réels y forment une couche adhérente immobile et par conséquent, ne causent pas le prétendu abaissement infini de la pression aux arêtes pointues.

D'autre part, comme je l'ai exposé dans un autre travail¹⁾, les équations ordinaires des fluides sont suffisantes — bien entendu si l'on tient compte de la viscosité — pour prouver la nécessité du phénomène caractéristique en question: de l'asymétrie des lignes de flux, par rapport à la surface de séparation.

Lorsque le mouvement est assez lent pour permettre l'omission des termes du second degré par rapport aux vitesses, les équations du mouvement

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \text{ etc.} \quad (2)$$

ne sont pas changées par la substitution de $-u$, $-v$, $-w$, $a-p$, au lieu de u , v , w , p ; c'est-à-dire les lignes de flux ne changent pas de forme (seulement de direction) par suite d'une inversion des différences de pression, et par conséquent, elles doivent être symétriques des deux côtés de l'orifice, pourvu que les parois soient symétriques.

Mais à mesure de l'accroissement des vitesses, les termes d'inertie gagnent en importance, la substitution mentionnée cesse d'être applicable, et le mouvement devient asymétrique.

Il est facile de reconnaître, en considérant l'effet de ces deux facteurs, que le résultat sera justement une tendance au change-

¹⁾ Ces Bulletins 1903 p. 149.

ment du mouvement dans le sens indiqué par le phénomène des veines:

Le but de l'étude expérimentale exposée dans ce travail est de trancher la question de savoir si c'est l'effet de l'inertie et de la viscosité, comme nous le supposons, ou bien si c'est la formation des surfaces de discontinuité, conformément à l'opinion de Helmholtz, qui produit le phénomène des veines d'efflux.

II.

Les expériences étaient basées sur la méthode bien connue¹⁾ qui consiste à faire entrer une matière colorante dans un certain point du liquide en mouvement, ce qui permet d'observer la ligne de flux qui y passe, et de la copier.

Je choisis comme l'exemple le plus simple et le mieux défini: l'efflux par une ouverture dans une paroi mince. Cette paroi était représentée par une feuille de cuivre dur (épaisseur 0.095 mm) séparant les deux parties d'un tube en verre (diamètre 45 mm) dont les bases, aplanies et polies, y étaient attachées avec un peu de cire à cacheter. L'ouverture, au centre de la feuille, qui était traversée par le courant du liquide, avait une forme circulaire (diamètre 2.45 mm); ses bords étaient arrondis.

Les extrémités opposées des tubes étaient fermées par des bouchons, avec des tuyaux d'entrée et de décharge, dont l'un était construit d'une façon spéciale A, avec une pointe à l'intérieur, percée d'un tout petit trou, ce qui avait pour but de réduire les vitesses aux valeurs très petites exigées, comme nous verrons plus loin, dans ces expériences.

On produisait les vitesses désirées en élevant le réservoir qui contenait le liquide, à la hauteur convenable au-dessus du tuyau de décharge. Leurs valeurs résultaient du nombre des gouttes qui s'y écoulaient, et de leur poids moyen, obtenu par une détermination spéciale.

L'introduction de la matière colorante se faisait au moyen du tube *M*, terminé par un allongement capillaire extrêmement mince, et guidé par l'anneau *R* et par la boîte hermétique *D*, de telle façon que le point *P*, d'où sortait la matière colorante, pouvait être

¹⁾ Oberbeck, Wied. Ann. 2 p. 1 (1877); Reynolds, Phil. Trans. 1883; Marey Journ. Phys. 1 p. 192 (1902) et autres expérimentateurs.

approché plus ou moins de la paroi de séparation, en adoptant, en outre, une distance latérale quelconque, par suite d'un mouvement rotatoire du tube *M*. Le liquide colorant sortait, en quantités très petites, pour éviter l'influence sur les lignes de flux, par suite de la pression exercée par un petit réservoir situé plus haut. C'était de l'encre bleue ordinaire, mais filtrée avec soin, dont je faisais

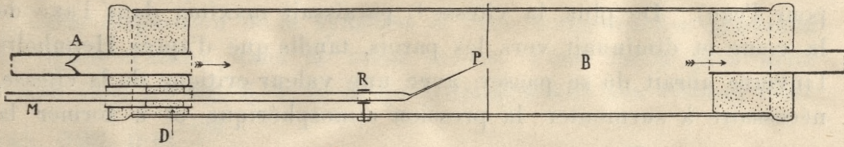


Fig. 1.

usage pour ces expériences; sa densité était mesurée [à 1.00085 par rapport à l'eau de température égale (17°)] et celle de l'eau employée y était égalisée par l'addition d'une petite quantité (0.12%) de sel.

La situation de l'appareil était telle que le point *P* et le milieu de l'ouverture se trouvaient au même niveau; par conséquent la ligne de flux colorée, s'étendant de *P* dans le vaisseau *B* était contenue dans un plan horizontal, et dans la même position se trouvait son image, produite sur la table au moyen d'un miroir incliné, réfléchissant des rayons incidents perpendiculaires sur un prisme à réflexion totale.

On avait choisi cette disposition, puisqu'alors les courants verticaux de convection produisent les moindres perturbations qui, en plus, peuvent être contrôlées toujours, en observant si la ligne de flux est bien horizontale. Ces courants, engendrés par des variations de la température environnante, causent bien d'ennui, lorsque la vitesse horizontale du liquide est petite. Pour diminuer leurs effets il fallut envelopper l'appareil d'un large tube en verre, rempli chaque fois avec le même liquide que le vaisseau intérieur. Ces difficultés disparaissent d'ailleurs, pour la plupart, avec l'emploi des liquides plus visqueux, d'autant plus qu'il y faut employer caeteris paribus, comme nous verrons plus loin, des vitesses plus grandes.

Outre ces précautions il fallait prendre garde à la purification extrême des liquides employés et de l'appareil lui-même, puisque la moindre particule de poussière suffisait à engorger la capillaire *P* ou l'ouverture *A*, et dans les expériences à pression diminuée, au contact hermétique de toutes les parties de l'appareil.

III.

Voici le résumé des résultats de nos expériences:

1) On observe la formation distincte des veines d'efflux, c'est-à-dire une diminution dans la divergence des lignes d'efflux, avec des vitesses très petites ($0.5 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ vitesse moyenne dans l'ouverture pour l'eau). De plus, la vitesse ¹⁾ paraissait maxima dans l'axe de la veine et diminuait vers les parois, tandis que d'après Helmholtz l'inverse aurait dû se passer, avec une valeur critique de la vitesse, nécessaire à surmonter la pression atmosphérique et à former la veine, de $14 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

2) Les calculs de Helmholtz et de ses successeurs ne s'appliquent qu'au cas le plus simple: des parois infiniment minces et des arêtes absolument pointues. En réalité on devrait s'attendre, eu égard à la courbure finie des bords de l'orifice, à trouver une vitesse cri-

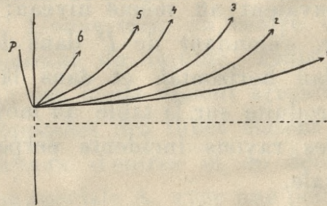


Fig. 2.

tique, séparant le cas où l'efflux est normal et analogue au flux d'électricité, et celui où la rupture du liquide et la formation de la veine a lieu.

Les expériences n'en ont indiqué rien, au contraire, le changement de la forme des lignes d'efflux avec vitesse croissante était tout à fait continu. C'est ce qui résulte de la figure 2, où la ligne de flux, sortant d'un point latéral P est tracée pour quelques valeurs de la vitesse:

1) 0.90; 2) 0.80; 3) 0.71; 4) 0.55; 5) 0.43; 6) $0.24 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$;

¹⁾ Qui peut être jugée dans divers endroits d'après la ténuité du filament coloré, ou directement, en observant le mouvement d'un train d'agglomérations colorées produites par des secousses périodiques.

L'influence de la vitesse sur la partie située en aval de l'ouverture est évidente, tandis que les changements de la partie en amont étaient si petites que le dessin ne les accuse pas. En concordance avec nos remarques sur l'importance relative de l'inertie et de la viscosité, l'asymétrie ressort à mesure de l'accroissement de la vitesse, tandis que la courbe obtenue avec la moindre vitesse est presque symétrique.

Cette disparition de la symétrie et cette concentration graduelle des lignes d'efflux dans la veine ressort d'une façon plus nette encore dans les fig. 3, 4, 5, 6, qui correspondent aux vitesses 0.90, 0.45, 0.23, 0.14 $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$.

Elles sont le résultat d'une série de dessins, obtenus par superposition des différentes lignes produites par une vitesse donnée.

Un détail remarquable c'est la formation des tourbillons annulaires, entourant la veine centrale — développée très nettement surtout

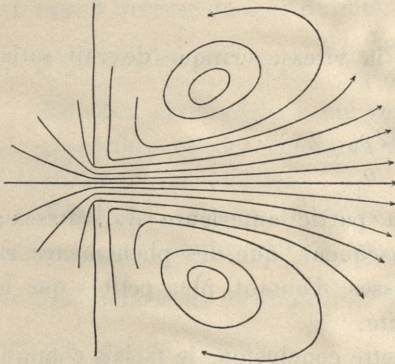


Fig. 3.

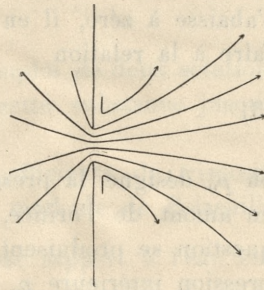


Fig. 4.

dans la fig. 3 — qu'on pouvait observer par inversion du courant, ainsi que le point *P* se trouvait du côté de la veine d'efflux.

Elle donne le moyen de définir ce qu'on peut appeler surface de la veine, c'est-à-dire: la surface qui, en prenant origine aux bords de l'ouverture, sépare les lignes de flux provenant de l'espace en amont et les lignes closes tourbillonnaires de l'espace en aval. Donc, il est évident aussi, que le liquide environnant participe au mouvement de la veine, quoique dans un degré inférieur, et rien n'indique l'existence d'une discontinuité de vitesse.

Ces tourbillons s'évanouissent rapidement avec diminution de la vitesse; la fig. 5 indique encore la convergence caractéristique des lignes de flux latérales en aval de l'ouverture, mais dans le cas représenté par la fig. 6, où il n'y a plus qu'une trace d'asymétrie, rien n'en pouvait être découvert; sans doute les courbes tendent vers une forme tout à fait symétrique pour la limite zéro de vitesse.

3) Puisque, d'après Helmholtz, la naissance de la discontinuité dépend de la condition que la pression aux bords de l'orifice

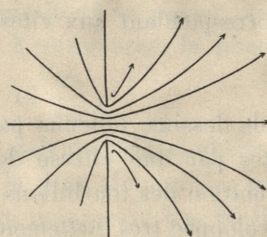


Fig. 5.

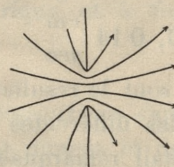


Fig. 6.

s'abaisse à zéro, il en résulte que la vitesse critique devrait satisfaire à la relation

$$(3) \quad v = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}},$$

où p_0 désigne la pression dans la partie antérieure du vaisseau, en amont de l'orifice, et par conséquent, que les phénomènes en question se produisent à des vitesses d'autant plus petites que la pression intérieure p_0 est plus petite.

Pour examiner l'exactitude de cette conclusion, je faisais communiquer le réservoir primaire du liquide, tuyau de décharge, et le petit réservoir de matière colorante avec un vaisseau, d'où l'air pouvait être extrait au moyen d'une trompe aspirante. De cette manière la valeur absolue de pression pouvait être diminuée à volonté, sans changement des différences relatives¹⁾.

Or, des expériences répétées dans des circonstances diverses, avec abaissement de la pression p_0 de 75 cm à 7 cm de mercure, n'ont indiqué aucun changement dans la forme des lignes de flux,

¹⁾ Il est avantageux pour éviter la formation de bulles d'air, d'y employer de l'eau exempte d'air, par ébullition.

ce qui nous force à rejeter définitivement l'application de la théorie de Helmholtz aux phénomènes en question.

4) Dans cette théorie, ce n'est que la densité du liquide qui entre dans le calcul d'après (1), en ayant une influence sur la pression hydrodynamique; le degré de viscosité est indifférent. D'après notre hypothèse, au contraire, c'est le rapport de la densité à la viscosité, la „fluidité“, qui détermine la forme du mouvement. Si l'on connaît une solution particulière des équations (2) pour un liquide caractérisé par les coefficients μ_1, ρ_1 , on leur satisfait aussi, pour un autre liquide, à coefficients μ_2, ρ_2 , en posant

$$u_2 = u_1 \frac{\mu_2 \rho_1}{\mu_1 \rho_2} \quad \text{etc.} \quad \Delta p_2 = \Delta p_1 \frac{\mu_2^2 \rho_1}{\mu_1^2 \rho_2}, \quad t_2 = t_1 \frac{\mu_1 \rho_2}{\mu_2 \rho_1}; \quad (4)$$

ce qui n'est qu'un cas particulier de la similitude dynamique¹⁾.

Par conséquent, si notre explication du phénomène des veines est exacte, la forme des lignes dépendra de la viscosité, mais elle sera la même dans les différents liquides, pour des vitesses choisies en raison inverse de leur fluidité, qui exigeront l'emploi des pressions proportionnelles au rapport $\frac{\mu_2^2 \rho_1}{\mu_1^2 \rho_2}$.

En effet, cette règle a été vérifiée par l'emploi de deux solutions de glycérine, et des colorants mêlés avec cette substance jusqu'à l'égalisation des densités.

Voici les valeurs relatives de leurs coefficients de viscosité (pour la température 19.5°), mesurées par la méthode de Poiseuille, et des coefficients de similitude $\alpha = \frac{\mu_2 \rho_1}{\mu_1 \rho_2}$, par rapport à l'eau employée, qui en résultent:

Glycérine I; densité 1.094; viscosité relative 3.38; $\alpha = 2.895$

Glycérine II; densité 1.116; viscosité relative 5.02; $\alpha = 4.20$

Les densités des deux solutions correspondent aux degrés de concentration: 37.5% et 45.8%.

Ces expériences s'accordaient si bien qu'on pouvait superposer les systèmes des courbes obtenus avec vitesses correspondantes [d'après (4)]. Ainsi la fig. 3 était obtenue dans l'eau avec la vitesse $0.90 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, dans Glycérine I avec la vitesse $2.58 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, d'où résulte

¹⁾ Voir: Helmholtz, Wiss. Abh. I p. 158. 891; Smoluchowski, ces Bulletins 1903 p. 151; Prace mat. fiz. XV p. 115 (1904); Phil. Mag. 7 p. 667 (1904).

le rapport des vitesses 2.87, en accord parfait avec le coefficient de similitude 2.895. D'autre part, la vitesse $0.90 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ ou plutôt, eu égard à la différence de densité: $0.86 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, qui d'après la théorie de Helmholtz correspondrait dans la Glycérine I à la vitesse 0.90 dans l'eau, produit une image tout-à-fait différente, intermédiaire entre les fig. 4 et fig. 5.

De même, par exemple, l'identité de la fig. 4 obtenue dans les trois liquides avec des vitesses correspondantes (selon la relation (4)) a été constatée.

En traçant la fig. 6, j'ai tiré profit de cette similitude dynamique, en faisant usage de la figure résultant de la vitesse correspondante dans la glycérine II, puisque l'effet des courants de convection se faisait sentir dans l'eau ordinaire à un tel degré, pour ce mouvement lent, qu'on ne pouvait tracer que les parties antérieures et moyennes des lignes.

J'ajouterai, entre parenthèses, que ceci semble être la première vérification expérimentale de l'identité géométrique des mouvements semblables. Aussi les déterminations approximatives des pressions s'accordaient avec la règle (4), mais je n'entrerai pas dans ces détails, qui n'ont pas de portée directe sur le sujet principal.

IV.

Pendant que les faits exposés plus haut prouvent d'une façon évidente que la formation des veines liquides est causée par l'inertie et la viscosité, d'autre part, l'idée fondamentale de Helmholtz: l'abaissement de pression à l'orifice et la possibilité d'une rupture du liquide, semble être bien raisonnable — c'est de cette façon même que nous expliquons le fonctionnement des trompes aspirantes — et c'est pourquoi j'ai poussé l'étude expérimentale plus loin, vers les vitesses grandes, où de tels phénomènes pourraient se produire.

Comme le dispositif délicat, décrit plus haut, ne s'y prêtait pas, je construisis un appareil très simple et solide (Fig. 7), c'est-à-dire: un tube en verre (diamètre 8.4 mm), rétréci dans la moitié de sa longueur de telle façon qu'il n'y restait qu'un canal étroit [dont les dimensions, déterminées à la fin sur la coupe transversale du tube, aplanie par le polissage, étaient 0.93 et 1.00 mm], qui était muni

dans sa partie supérieure d'un petit tube latéral, servant à l'introduction du colorant, ou à la communication avec un manomètre.

D'abord, pour examiner les petites vitesses, ce tube fut mis en communication avec un diaphragme, construit d'après le modèle du tube *A* fig. 1, et avec un réservoir d'eau, à niveau plus élevé, causant une petite différence de pression. Les lignes de flux colo-

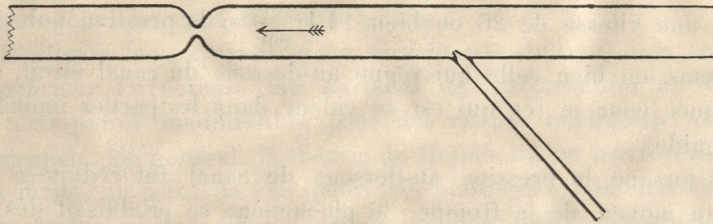


Fig. 7.

rées mettaient en évidence les traits caractéristiques des veines à des vitesses de la petitesse de $6.1 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ dans le canal (c'est $0.082 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ dans le tube). Pendant que l'asymétrie avait disparu à la vitesse de $2.4 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, avec $8.3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ au contraire, il s'y formait une veine cylindrique, longue de 3 cm, entourée de tourbillons, et sujette à de petits changements oscillatoires.

Évidemment, eu égard à la lenteur du mouvement et à la petitesse de la courbure des parois, il n'y pouvait pas être question des phénomènes de Helmholtz, et pourtant la veine caractéristique se formait.

Ensuite, ce tube fut attaché immédiatement au conduit d'eau (pression 3.5 atm.), pendant que l'extrémité inférieure communiquait avec un vaisseau — servant à mesurer la vitesse d'efflux — où la pression pouvait être réduite au moyen d'une trompe aspirante.

Tout d'abord, le tube fut rempli d'eau dans toute sa longueur.

Et alors, lorsque le robinet fut ouvert, il y apparaissait, en réalité, pour une certaine vitesse, le phénomène attendu: la veine d'eau en quittant le canal, se déchirait, ou bien se détachait du liquide environnant, ce qui était visible par suite de la formation d'une surface réfléchissante à l'intérieur. Mais le phénomène n'était

pas du tout permanent, son caractère intermittent s'accusait par un bruit bourdonnant; aussi apercevait-on souvent des interruptions et, en général, une considérable irrégularité du phénomène.

En réglant l'afflux d'eau d'une façon convenable, on pouvait évaluer approximativement la vitesse critique, où ce phénomène apparaissait, à $24 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ dans le canal, tandis que la relation (3) exigerait une vitesse de 26 ou bien $14.4 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ si la pression qui règne au-dessus, ou bien celle qui règne au-dessous du canal étroit, était substituée pour p_0 (ce qui est sa valeur dans les parties immobiles du liquide).

Et lorsque la pression au-dessous du canal fut réduite à 35.5 cm, au moyen de la trompe, le phénomène se produisait dès que la vitesse $14 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ était atteinte, pour la pression de 25.5 cm à une vitesse de $12 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, ce qui correspond aux valeurs théoriques 19 ou $9.7 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ et 14 ou $8.2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

En même temps l'aspect du phénomène changeait: avec la pression atmosphérique l'eau — toute claire jusqu'au moment où la vitesse critique est atteinte — devient trouble au delà, ce qui provient du dégagement d'une quantité de toutes petites bulles d'air, mais avec l'emploi des pressions basses il s'y forment des bulles grandes, comme dans de l'eau bouillante.

On pourrait s'attendre à trouver la vitesse d'efflux indépendante de la pression au-dessous du canal, pourvu que la vitesse critique soit atteinte, puisqu'alors la pression à sa sortie aurait toujours la même valeur zéro. Mais cette conclusion n'a pas été vérifiée par l'expérience, au contraire, on constatait toujours un accroissement de vitesse par suite de l'augmentation de la pression en amont, ou d'une diminution de la pression en aval.

Les causes de cette divergence et des différences entre les valeurs calculées et observées des vitesses critiques sont sans doute les mêmes: d'une part le caractère instable, oscillatoire du phénomène et d'autre part la viscosité du liquide, qui défie tous les calculs basés sur l'abstraction des liquides idéals.

V.

Nous résumerons les conclusions définitives de ces expériences:

Le phénomène de Helmholtz, c'est-à-dire la rupture de la masse liquide quittant une petite ouverture, peut avoir lieu, en réalité, si la vitesse dépasse une valeur considérable (une vingtaine de mètres ¹⁾, mais c'est un phénomène secondaire, qui n'a rien à faire avec la formation des veines d'efflux mêmes, qui peut commencer à des vitesses plus que cent fois plus petites.

D'ailleurs les expériences ne servent pas du tout, bien entendu, à confirmer l'hypothèse des surfaces de discontinuité de vitesse, qui nous paraît inadmissible pour des raisons expliquées au commencement. En général, la théorie de Helmholtz est très intéressante, sans doute, au point de vue théorique, puisqu'elle démontre la possibilité de tels phénomènes dans les liquides idéals, mais son application aux liquides réels n'est nullement justifiée, même pour des vitesses aussi grandes que celles que l'on a concédées, ce que démontre le fait de l'intermittence ²⁾ du phénomène et le désaccord du calcul des vitesses et de l'observation directe.

Il semble que c'est un cas analogue à celui du mouvement des corps plongés dans un liquide, où les calculs basés sur l'hypothèse des liquides parfaits, et ne tenant compte ni de la dissipation de l'énergie ni de l'adhésion aux parois, aboutissent à des conclusions tout-à-fait incorrectes.

Quant à la formation des veines d'efflux, les expériences ont prouvé que les lois de la similitude dynamique s'y appliquent parfaitement, ce qui est un argument important en faveur de notre explication, qui réduit ce phénomène aux lois ordinaires des liquides visqueux, notamment aux effets d'inertie s'accroissant à mesure de la rapidité du mouvement par rapport aux effets de la viscosité du liquide.

Cette similitude dynamique donne le moyen de prédire la forme des lignes de flux d'après les fig. 3, 4, 5, 6, pour des liquides à densité et viscosité quelconques; de même il est facile d'en déduire l'influence des dimensions de l'orifice, à savoir: les vitesses

¹⁾ Sans doute des vitesses beaucoup plus grandes encore seront nécessaires dans de l'eau purgée d'air.

²⁾ En connexion, sans doute, avec les „mouvements turbulents“ et la formation du son dans les tuyaux.

correspondantes seront en proportion inverse aux dimensions et par conséquent, la veine se formera plutôt avec un orifice grand que petit¹⁾.

Cependant, l'explication donnée ne peut pas encore être considérée comme complète. Ce qui reste à faire, c'est le calcul théorique des lignes de flux au moyen de cette théorie, et c'est là un problème sur lequel j'espère revenir dans l'avenir.

Laboratoire de physique à l'université de Léopol.

35. M. STANISLAS LORIA. *Badania nad bocznem widzeniem. (Untersuchungen über das seitliche Sehen).* (*Recherches sur la vision oblique*). (Vorläufige Mitteilung). Mémoire présenté par M. N. Cybulski m. t.

I. In der Abhandlung „Die Aufmerksamkeit und die Funktion der Sinnesorgane“²⁾ hat W. Heinrich den lange geltenden Satz von Helmholtz, „die Aufmerksamkeit sei ganz von der Stellung der Akkommodation des Auges, überhaupt von einer bekannten Veränderung in und an diesem Organe unabhängig“ auf Grund unmittelbarer Messungen der Pupillengrösse und des Krümmungsradius der vorderen Linsenfläche als unrichtig umgestossen. Die Untersuchung ergab nämlich folgendes:

1. Bei der Anschauung der Objekte in den seitlichen Teilen des Gesichtsfeldes ändert sich die Akkommodation, trotzdem der Abstand der angeschauten Objekte derselbe bleibt wie derjenige der zentral gesehenen. Die Änderung offenbart sich in der Abflachung der Linse und in der Vergrößerung der Pupille.

2. Der Krümmungsradius nimmt beim seitlichen Sehen mit dem Winkel, unter welchem sich das Objekt zur Achse befindet, anfangs zu, von dem Winkel von 50° an ab. Diese Änderungen sind relativ gering.

Es wurde dann die Frage aufgeworfen, ob die Linse für alle Entfernungen des paraxial liegenden Objektes dieselbe Krümmung behält oder ob sich diese mit der Entfernung des Objektes ändert,

¹⁾ Il est probable que l'épaisseur de la paroi et la forme du vaisseau seront indifférentes, jusqu'à une certaine limite.

²⁾ Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane Bd. IX. u. XI.

mit einem Worte, ob eine paraxiale Akkommodation des Auges existiert oder nicht.

Zu diesem Zwecke wurde das seitliche Objekt konstant unter einem Winkel von 45° gehalten und nur seine Entfernung vom Auge wie auch die Entfernung des zentral liegenden Fixierzeichens geändert. Die Ergebnisse der Messungen des Krümmungsradius der vorderen Linsenfläche illustriert im nachfolgenden eine der Tabellen ¹⁾.

Herr D. (Refr. 3·5 DM.)

(Jede Zahl bildet einen Mittelwert aus 16 Messungen).

	S_0	S_{15}	S_{20}	S_{25}
C_{15}	11·62	13·37	14·00	15·14
C_{25}	15·80	14·90	15·44	16·05

In dieser Tabelle bezeichnet S die Entfernung des paraxial gestellten Objektes,
C die Entfernung des axial liegenden Fixierzeichens.

Die horizontalen Reihen geben die Änderung der Krümmungen bei konstanter Entfernung des Fixierzeichens und einer variablen Entfernung des paraxialen Objektes; die vertikalen dagegen die Krümmungen bei konstanter Lage des paraxialen Objektes und bei variabler Änderung des axialen Fixierzeichens.

Die Untersuchung der geometrisch-optischen Verhältnisse ergab, dass die beobachteten Veränderungen als Akkommodationserscheinungen aufzufassen sind. W. Heinrich formuliert daher seine Ergebnisse u. a. in folgenden zwei Sätzen:

1. „Das Auge besitzt im allgemeinen die Fähigkeit auf Entfernungen paraxial liegender Objekte zu akkommodieren“.
2. „Die Akkommodation war in den beobachteten Fällen keine vollständige, sondern mit von der Lage des axial liegenden Fixierzeichens abhängig“.

II. Hat die erwähnte Untersuchung die Existenz einer Akkommodationsänderung der Linse bei Betrachtung der seitlich liegen-

¹⁾ Bd. XI. 411.

den Objekte durch unmittelbare Messungen zweifellos erwiesen, so kann man sie andererseits nicht als eine abschliessende betrachten. Erstens wurden ja nur die Krümmungsradien derjenigen Formen der Linse, die zwei Linien im Gesichtsfelde entsprechen, gemessen. Man hat nämlich 1) die Änderungen der Linse bei konstanter Entfernung des paraxial liegenden Objektes und variablem Bogenabstand vom zentralen Fixierzeichen, 2) die Änderungen der Linse bei konstantem Winkel von 45° und variabler Entfernung des Objektes untersucht. Das ganze übrige Gesichtsfeld blieb ausserhalb der Untersuchung. Zweitens war die Frage, ob die paraxiale Akkommodation eine approximative oder eine genaue ist, einer näheren Untersuchung bedürftig. Es war ja sehr möglich, dass die Ungenauigkeit der paraxialen Akkommodation, wie sie Heinrich gefunden hat, darauf zurückzuführen ist, dass das Auge infolge der Untersuchungsanordnung von der Seite durch das Licht einer elektrischen Bogenlampe stark beleuchtet war. Es ist ja ohne weiteres verständlich, dass ein sehr starker von der Seite kommender Reiz die Genauigkeit der Einstellung der Linse auf seitliche Objekte beeinflussen musste.

Ich habe mir daher auf Anregung des Herrn Dr. Heinrich zur Aufgabe gemacht, die Erscheinungen des seitlichen Sehens zu untersuchen, und zwar habe ich mir vor allem die Frage gestellt, ob die Einstellung der Linse bei Betrachtung der paraxial liegenden Objekte eindeutig durch die Lage des Objektes bestimmt ist oder nicht.

III. Die Methode der vorgenommenen Untersuchung basiert auf der Überlegung, welche bei der Bestimmung des „punctum proximum“ gemacht wird. Sie lautet bekannterweise folgendermassen: Nähert man das Objekt dem Auge, so vergrössert sich die Krümmung der Linse immer mehr und mehr, bis sie endlich ihr „maximum“ erreicht. Nimmt man nun das kleinste Objekt, das noch erkennbar ist, so wird die Entfernung, in welcher dieses Objekt noch erkannt war, diejenige sein, auf welche die Linse noch akkommodieren kann. Würde das Objekt noch näher gerückt werden, so würde sich sein Bild — da die Linse ihre maximale Krümmung hat — als Zerstreungskreis auf der Retina abbilden. War es so klein, dass es nur bei genauer Akkommodation erkannt werden konnte, so wird es jetzt nicht mehr distinkt gesehen.

Ein analoges Verfahren habe ich bei der Untersuchung des seitlichen Sehens eingeschlagen. Es wurde das kleinste Objekt,

welches eben noch zu erkennen war, gewählt — ich habe mich hierzu paralleler schwarzer Striche auf weissem Grunde bedient — und das ganze Feld, auf welchem dieses Objekt bei gegebener Lage des zentralen Fixierzeichens erkennbar war, ermittelt. Dann wurde die Lage des zentralen Zeichens geändert und das neue Feld aufgesucht. Würde die Einstellung der Linse von der Lage des zentralen Fixierzeichens mit abhängig sein, so müssten die jedesmal ermittelten Felder als verschieden sich nicht decken. Die Grenzlinien müssten bei jeder Änderung der Lage des zentralen Zeichens auch eine Änderung erfahren. Diese Notwendigkeit ist klar. Man braucht nur dieselbe Überlegung, welche bei der Bestimmung des punctum proximum gemacht wird, auf den Fall, wo das zu erkennende Objekt seitlich gelegen ist, anzuwenden. Denn hier wie dort sind die physiologisch-optischen Bedingungen dieselben. Wird bei gegebener Form der Linse und bei gegebener Entfernung des Objektes das kleinste erkennbare Objekt gewählt, so fällt die Erkennbarkeit weg, wenn caeteris paribus, die Krümmung der Linse und mithin die Lage des Bildes in Bezug auf die Retina sich ändert.

Speziell bei den Grenzlinien, d. h. denjenigen Entfernungen, welche der minimalen und maximalen Krümmung entsprechen, müsste diese Erscheinung deutlich zu Tage treten. Deswegen wurde auf die Ermittlung der beiden Grenzlinien des Gesichtsfeldes, auf welchem das minimale seitliche Objekt bei jeder Lage des Fixierzeichens erkannt war, besonders Gewicht gelegt. Als Objekt des seitlichen Sehens waren Streifen von 2 mm Dicke und 2 mm Abstand verwendet, da es sich gezeigt hat, dass von 10° seitlich ab diese Breite der Streifen die Grenze der Erkennbarkeit, und zwar im allgemeinen auf dem ganzen Felde, speziell aber auf der oberen und unteren Grenzlinie des Feldes bildete.

IV. In der praktischen Ausführung gestaltete sich die Untersuchung folgendermassen: Auf einer grossen Tischplatte wurde eine Reihe konzentrischer Kreise in Abständen von je 10 cm. gezeichnet; die Kreise waren noch in Abständen von je 10° durch Radien geteilt. Das verkleinerte Bild hievon reproduzieren die beigelegten Zeichnungen.

Das Fixierzeichen bestand aus einem schwarzen Punkt auf weissem Karton. Drei parallele Striche von 2 mm. Breite, 2 mm. Abstand und 2 cm. Länge in vertikaler Richtung stellten das zu

betrachtende seitliche Objekt dar. Das Fixierzeichen und die Streifen waren auf verschiebbaren Stativen befestigt und befanden sich mit dem Auge in der horizontalen Hauptebene, auf welche sich auch sämtliche Untersuchungen beziehen. Die ganze Untersuchung wurde in einem hellen, gleichmässig beleuchteten Saal bei Tage ausgeführt. Die Untersuchungsperson sass — den Kopf wie üblich in einer Kinnstütze befestigt — mit dem Rücken gegen das Fenster gewandt, so dass die aufgestellten Objekte gleichmässig hell beleuchtet waren. Untersucht wurde das linke Auge, das rechte war während der Untersuchung zugedeckt. Die untersuchte Person richtete das Auge auf den zentralen Fixationspunkt und „lenkte ihre Aufmerksamkeit“ nach dem seitlichen Teile des Gesichtsfeldes. Sobald sich das Auge ruhig verhielt, wurde der vor dem seitlich gestellten Objekte stehende Schirm weggenommen und der Beobachter aufgefordert, ohne das Auge bewegt zu haben, über das, was er gesehen hat, zu entscheiden. Dabei kontrollierte der vor dem Beobachter stehende Experimentator, ob das Auge wirklich unbeweglich blieb.

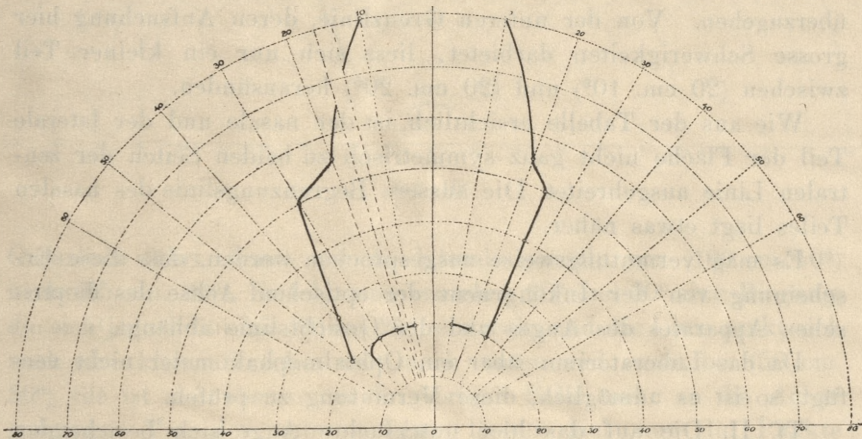
Der Gang der Untersuchung war folgender:

Bei einer gegebenen Lage des zentralen Fixierzeichens rückte man das seitliche Objekt längs der Radien aus der Ferne dem Auge näher. Es wurde zuerst der entfernteste Punkt, in welchem das Objekt erkannt war, ermittelt; dann wurden der Reihe nach die Schnittpunkte des Radius mit dem Kreise auf die Erkennbarkeit des Objektes geprüft und endlich der dem Auge am nächsten liegende Punkt gesucht, wo das Objekt eben noch erkennbar ist. Besondere Sorgfalt wurde der Ermittlung der Grenzpunkte zugewendet. Die Zahl der gemachten Beobachtungen betrug gewöhnlich in jedem Punkte vier, an den Grenzen jedoch in der Regel mehr, so dass die Gesamtzahl der zur Bestimmung des Feldes, auf welchem das Objekt erkannt war, bei einer bestimmten Lage des Fixationspunktes gemachten Beobachtungen sich ungefähr auf 2400 beläuft. Die ganze Reihe von Beobachtungen wurde bei jeder neuen um je 10 cm. von der früheren sich unterscheidenden Entfernung des Fixationszeichens wiederholt. Zu bemerken sei noch, dass die Versuchspersonen sich anfangs zwei Wochen lang im seitlichen Sehen geübt haben und dass während der Beobachtung nach je 5—8 Bestimmungen eine Pause gemacht wurde. An den Untersuchungen haben die Herrn: stud. phil. Kołodziejski, stud. phil. Preger und stud. phil. Stein teilgenommen. Ich benutze die Gelegenheit,

um ihnen für ihre Geduld und Aufopferung meinen verbindlichsten Dank auszusprechen. Ich schulde auch Herrn Dr. Brudzewski Dank, der mit bereitwilliger Liebenswürdigkeit die Augen der Herren untersucht hat.

V. Die nach dem geschilderten Verfahren ausgeführten Untersuchungen haben ergeben: dass das Feld, auf welchem das seitlich gestellte Objekt erkannt wird, vollkommen unabhängig von der Lage des Fixationszeichens ist. Daraus muss man schliessen, dass die paraxiale Akkommodationseinstellung der Linse nur durch die Lage des paraxial liegenden Punktes bestimmt und von der Entfernung des zentralen Fixierzeichens unabhängig ist.

Ich gebe hier die Untersuchungsergebnisse in graphischer Form



Taf. I.

wieder. Die ausführliche Wiedergabe der Aussagen der Beobachter wird später erfolgen. Es soll besonders hervorgehoben werden, dass der Verlauf der gezeichneten Kurven speziell an den Biegungen sorgfältig untersucht war.

A). Tf. I. Die vom Herrn Dr. Brudzewski mitgeteilten Daten lauten: „Beiderseitige Emmetropie; das Innere des Auges ohne Veränderung; die Sehschärfe links $V=1$, rechts etwas grösser $V=6/5$. Punctum proximum 7.8 cm.

Laterale Seite des Gesichtsfeldes: Wir sehen die

obere Grenzlinie von dem Punkte (80 cm. 10°) in leichter Wölbung bis zur Sphäre des blinden Flecks und weiter nach unten bis zum Punkt (55 cm. 20°) hinuntergehen. Jetzt folgt zwischen den Winkeln 20° und 30° eine leichte Biegung, die sich bis zum Punkt (50 cm. 30°) erstreckt, wonach die Linie geradeaus über den Punkt (27 cm. 40°) hindurch an den Punkt (20 cm. 50°) gelangt. Die untere Grenzlinie beginnt bei (20 cm. 10°) geht über den blinden Fleck, dann weiter über den Punkt (20 cm. 20°) bis (20 cm. 30°), biegt nach unten um und endet bei (15 cm. 40°).

Nasale Seite des Gesichtsfeldes: Die äussere Grenzlinie ebenso wie die frühere ein wenig gewölbt führt vom Punkt (80 cm. 10°) bis (55 cm. 20°) hinunter. Jetzt folgt wieder zwischen 20° und 30° eine leichte Biegung, die sich aber nur bis (50 cm. 25°) erstreckt, um weiter in eine fast gerade Linie, die durch den Punkt (40 cm. 25°—27°) hindurch bis nach (20 cm. 30°) führt, überzugehen. Von der unteren Grenzlinie, deren Aufsuchung hier grosse Schwierigkeiten darbietet, liess sich nur ein kleiner Teil zwischen (20 cm. 10°) und (20 cm. 20°) herausfinden.

Wie aus der Tabelle ersichtlich, ist der nasale und der laterale Teil der Fläche nicht ganz symmetrisch zu beiden Seiten der zentralen Linie ausgebreitet. Die äussere Begrenzungslinie des nasalen Teiles liegt etwas näher.

Es mag vermutungsweise ausgesprochen werden, dass diese Erscheinung von der Inkongruenz der optischen Achse des dioptrischen Apparates des Auges und der Gesichtslinie abhängt.¹⁾

Da das Laboratorium über ein Ophthalmometer nicht verfügt, so ist es unmöglich, diese Vermutung zu prüfen.

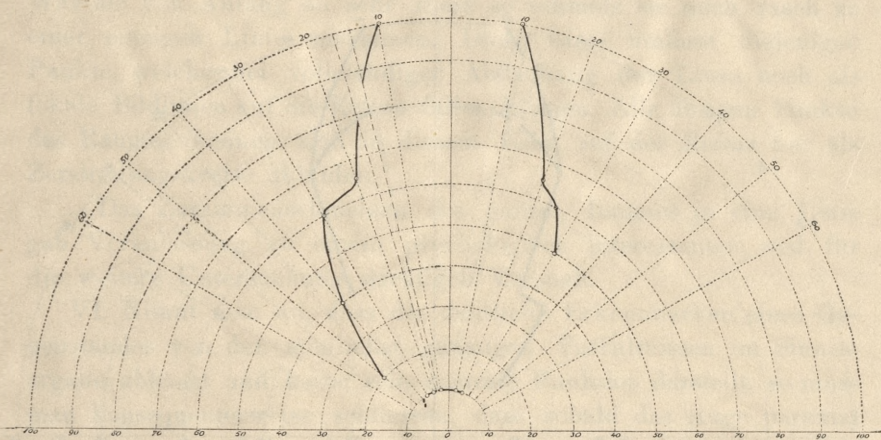
Tf. II. Die auf das hier untersuchte Auge sich beziehenden Bestimmungen lauten folgendermassen:

„Beiderseitige Emmetropie; vorzügliche Sehschärfe, links $V = \frac{6}{6}$, rechts $V = \frac{6}{5}$, Punctum proximum 10 cm.

Die Verhältnisse, denen wir hier begegnen, sind ihrem allgemeinen Charakter nach ganz dem ersten Falle ähnlich. Die obere Grenzlinie auf der lateralen Seite beginnt bei (100 cm. 10°) geht wieder leicht gewölbt durch den blinden Fleck bis zum Punkt (65 cm. 20°), erfährt hier zwischen 20° und 30° eine leichte Biegung und fällt mit kleiner Wölbung über (40 cm. 40°) auf (20 cm. 50°) ab.

¹⁾ Vergl. hierzu Tscherning, *Optique physiologique*, Paris 1898 S. 60.

Die untere Grenzlinie umschreibt hier von dem punctum proximum an einen Bogen, geht also durch die Punkte (10 cm. 10°) (10 cm. 20°) (10 cm. 30°) und wendet sich dann nach unten. Diese Strecke war aber infolge der kleinen Entfernung vom Auge schwer zu untersuchen und ist daher als unsicher mit Punkten angezeigt. Ähnlich gestalten sich die Verhältnisse auf der nasalen Seite. Die obere



Taf. II.

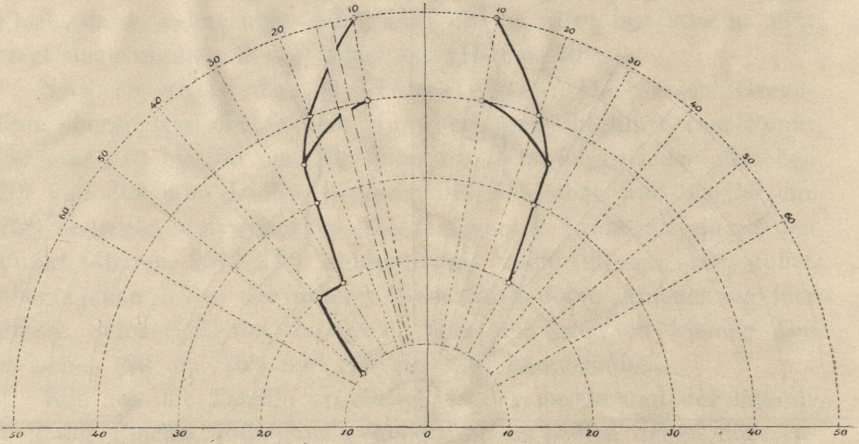
Grenzlinie führt ebenso wie die laterale gewölbt von (100 cm. 10°) nach (65 cm. 20°). Es folgt nun zwischen 20° und 30° eine Biegung, die sich jedoch nur bis (60 cm. 25°) erstreckt und die Linie senkt sich noch eine kleine Strecke weit nach unten und endet bei (50 cm. 30°). Sie ist also ebenso wie im vorigen Falle mehr an die Achse gedrängt. Von der unteren Linie liessen sich nur die Punkte (10 cm. 10°) und (10 cm. 20°) genau bestimmen.

B. Wir wenden uns der Tf. III. zu. Die Angaben des Arztes lauten:

„Beiderseitige Myopie, die sich durch 4,5 D. verbessern lässt. Man erzielt dabei am linken Auge die volle ($V = \frac{6}{6}$), am rechten nur die unvollständige ($V = \text{etwas weniger als } \frac{6}{5}$) Sehschärfe. Mit Zylindern wird keine Verbesserung erreicht. Die ophthalmoskopische Untersuchung ergab nichts Anormales. Übrigens besteht ein anscheinendes Schielen, das jedoch ohne Bedeutung und — meiner Ansicht nach — durch die negative Lage des Winkels α zu erklären ist“.

Die Untersuchungen ergaben:

Lateral: Wir sehen die äussere Grenzlinie bei dem Punkt (50 cm. 10°) beginnen, mit leichter Wölbung durch den blinden Fleck und den Punkt (40 cm. 20°) bis nach (35 cm. 25°) hinuntersteigen. Von hier aus führt sie in fast gerader Richtung durch (30 cm. 25—7°) nach (20 cm. 30°) weiter, biegt zwischen 30° und



Taf. III.

40° stark um und endet bei (10 cm. 50°). Die untere Grenzlinie beginnt schon bei (40 cm. 10°), überschreitet den blinden Fleck und mündet bei (35 cm. 25°) in die äussere ein. Vollständig symmetrisch gestalten sich die Verhältnisse auf der nasalen Seite des Gesichtsfeldes.

Was an dem Verlauf der erhaltenen Linien zuerst auffällt, ist der Umstand, dass die äussere Linie so verläuft, als ob das Auge weniger myopisch wäre, als die ärztliche Untersuchung ergab. Da jedes Auge paraxial mehr myopisch ist als axial, so müsste die obere Grenzlinie in einem Punkte, der tiefer als das „punctum remotum“ des zentralen Sehens liegt, beginnen. Den 4,5 D Myopie entspricht ein punctum remotum von 22,2 cm., das also viel tiefer liegt als z. B. der durch die Beobachtung bestimmte Grenzpunkt (50 cm. 10°). Infolge der Abwesenheit des Herrn St. ist es nicht möglich, noch einmal seine Sehschärfe nach einer anderen Methode zu bestimmen. Sieht man aber von dem erwähnten Umstand ab, so gewährt diese Tafel ganz dasselbe Bild wie die vorigen. Hat

sich dort das Feld mit dem zunehmenden Winkel deutlich eingengt, so erreicht hier diese Einengung ihren maximalen Wert, so dass das Feld von dem Winkel 25° an zu einer einzigen krummen Linie wird. Dies musste auch so sein. Wird nämlich das Auge paraxial mit zunehmendem Winkel mehr und mehr myopisch, so muss sich auch seine paraxiale Akkommodationsbreite verkleinern. War sie von Anfang an sehr klein so schmolz sie auch rasch zu einer einzigen Linie zusammen. Diese Linie umfasst diejenigen Punkte, welche bei vollständiger Abflachung der Linse noch als fokale Bildlinien auf die Retina fallen können. Alle übrigen Punkte des Raumes können sich in diesem Falle auf der Retina nur als Zerstreuungskreise abbilden.

Das Zusammenschmelzen des ganzen Raumes in eine Linie gab Veranlassung zu einem psychologisch interessanten und für die weitere Untersuchung wichtigen Versuch.

VI. Nimmt man an, dass die deutliche Erkennbarkeit eines Gegenstandes von den möglichst günstigen Verhältnissen im Sinnesorgane abhängt und keine rein zentrale Funktion darstellt, so muss man konsequenterweise schliessen, dass sobald das Auge paraxial auf eine ganze Linie akkommodiert, alle auf dieser Linie in verschiedenen Punkten aufgestellten Objekte gleichzeitig deutlich erkannt werden können. Demnach sollte jeder Einstellung des Auges eine Linie der deutlichen Erkennbarkeit der Objekte entsprechen — eine Konsequenz, die mit Herrn St. experimentell untersucht und bestätigt wurde. Die auf der äusseren Linie gleichzeitig aufgestellten Objekte wurden auch gleichzeitig ebenso erkannt, wie es früher, wenn jedes einzelne in der ihm entsprechenden Lage war, der Fall gewesen ist.

Die zuletzt erwähnte Tatsache soll mir weiterhin als Grundlage zur Erörterung der Frage dienen, ob die Grenzlinien des paraxialen Gesichtsfeldes auf den Tafeln I und II auch als Grenzlinien der paraxialen Akkommodationsbreite betrachtet werden können, mit einem Wort, ob das von mir ermittelte Feld das totale Akkommodationsfeld darstellt oder nicht.

Die Frage wäre leicht zu beantworten, könnte ich die Daten über die Sehschärfe für paraxial liegende Objekte den bisher gemachten Untersuchungen entnehmen. Es ist aber dies leider nicht der Fall. Alle Bestimmungen der indirekten Sehschärfe waren ohne Berücksichtigung der Tatsache der paraxialen Akkommodation des

Auges vorgenommen. Die Unzulänglichkeit solcher Bestimmungen wird bei folgender Überlegung leicht verständlich:

Rückt man mit dem Objekte bei einem myopischen Auge über das punctum remotum hinaus, so ist die Unerkennbarkeit des Gegenstandes nicht nur durch die Verkleinerung des Winkels, sondern auch dadurch herbeigeführt, dass das Bild vor die Retina fällt. Wollte man unter solchen Bedingungen die Untersuchung über die Sehschärfe ausführen, so müsste man entweder im punctum remotum bleiben oder dem Untersuchten eine entsprechende Brille verschaffen, die seine Myopie korrigierte. Da das Auge, wie wir gesehen haben, für die paraxial gestellten Objekte myopisch wird, so muss man natürlich dieselbe Überlegung auch hier wiederholen, d. h. da die paraxiale Myopie nicht zu korrigieren ist, so muss man im paraxialen Fernpunkt bleiben.

Um zu diesem Punkte zu gelangen will ich folgendermassen verfahren:

Wenn jedem Stadium der Einstellung des Auges eine Linie der deutlichen Erkennbarkeit der Objekte entspricht, so kann man, indem man für jedes Stadium eine solche Linie ermittelt und von einem Stadium zum anderen hinübergeht, bis an die Grenze des Akkommodationsfeldes gelangen.

Das Ergebnis der nach solchem Prinzip gemachten Untersuchungen und die davon abhängende Beantwortung der angrenzenden Fragen aus dem Gebiete des seitlichen Sehens hofft der Verfasser in der ausführlichen Abhandlung mitteilen zu können.

Aus dem psychologischen Laboratorium der Universität Krakau.

35. M. HUGO ZAPALOWICZ m. c. Krytyczny przegląd roślinności Galicyi. Część III. (*Revue critique de la flore de Galicie. III partie*).

Dans cette partie de sa revue, l'auteur s'occupe des espèces du genre *Carex*. A côté d'une quantité de nouvelles variétés et formes, il y a la nouvelle forme hybride:

Carex pallescens × *pilosa* m. Planta manifeste glaucescens, omnibus in partibus rigidior; culmus 40 cm altus, folia 4—6.5 mm lata, fasciculorum sterilium numerosa, culmum subaequantia vel pro parte longiora, firma, sparse pilosa, nervo medio albido prominenti; va-

ginae infimae albido fusciscentes; spicula mascula nulla; spiculae femineae 6, densiflorae, plus minusve 15 mm longae, inferiores valde remotae, spicula feminea terminalis basi spicula feminea depauperata instructa, duae inferiores proximae remotiusculae pedunculatae, proxima inferior fere in medio culmo sita longe pedunculata, pedunculo 4.5 cm longo, infima spicula longissime pedicellata basi culmi inserta; bracteae foliaceae culmum superantes, folium bractee inferioris (fere in medio culmo sitae) 18 cm longum, 4.5 mm latum, firmum, vagina ejus circa 15 mm longa, bractea superior vix vaginans; stigmata 3; utriculi (fertiles) et glumae ut in *C. pallescenti*

Forma valde memorabilis, misandra et manifeste hybrida inter *C. pallescentem* et *C. pilosam*, cujus folia praecipue fasciculorum sterilium optime cum nostra planta congruunt.

Rozwadów, districtus Żydaczów Galiciae centralis, in silvis a Paczoski lecta.

Nakładem Akademii Umiejętności,

Pod redakcją

Członka delegowanego Wydziału matem.-przyr., Dra Leona Marchlewskiego.

Kraków, 1904. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

15 Listopada 1904.



Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.