BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

Nº 9. **Novembre** **1903.**

Séance du lundi 9 Novembre 1903.

Présidence de M. E. GODLEWSKI.

47. M. C. RUSSJAN. **Metoda Pfaffa całkowania równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego. Część druga.** ***(Die Pfaffsche Methode der Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. O. Zweite Mitteilung).*** *(Méthode de Pfaff pour l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles du 1-er ordre).* Mémoire présenté par M. K. Żorawski m. c. à la Séance du 12 Octobre.

§ 1.

Wir verdanken Herrn G. Morera die ersten Untersuchungen über die Pfaffsche Methode der Integration des Systems der partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \Theta_i\left((x_1 \ldots x_n \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \ldots . \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) \quad (i = 1, 2 \ldots m) \tag{I}$$

in Involution. Dieser Autor hat den Zusammenhang zwischen der Integration dieser Gleichungen und derjenigen des ersten Pfaffschen Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen für den Differentialausdruck

$$dz - \Theta_1 dx_1 - \ldots - \Theta_m dx_m - p_{m+1} dx_{m+1} - \ldots - p_n dx_n :$$

$$\left.\begin{aligned} dx_{m+j} &= -\sum_1^m {}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}} dx_\beta \;^{1)} \\ dp_{m+j} &= \sum_1^m {}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_{m+j}} dx_\beta , \end{aligned}\right\} \quad j=1, 2 \ldots n-m \tag{II}$$

[1]) Es fehlt in diesem Systeme noch die Gleichung, die dz bestimmt.

gezeigt und mit Hilfe der Mayerschen Transformation die neue Liesche Methode der Integration der partiellen Differentialgleichungen (I) in der Mayerschen Form gegeben (Rendic. de l'Instit. R. Lomb., 1883).

Saltikow hat neuerdings (Comp. Rend., 1899) die Gleichungen (II) verallgemeinert. Ich beabsichtige in dieser Abhandlung die Pfaffsche Theorie der Integration der partiellen Differentialgleichunhen in ihrer allgemeinsten Form darzustellen. Sie enthält, wie schon bemerkt ist[1]), die analytisch-geometrischen Untersuchungen von S. Lie (M. Ann., Bd. 9) und gibt seiner neuen Methode der Integration der partiellen Differentialgleichungen die analytische Form, die ihr am meisten entspricht. Sie enthält auch die Theorie der verallgemeinerten Hamiltonschen Differentialgleichungen und den Zusammenhang zwischen der Integration derselben und derjenigen der partiellen Differentialgleichungen.

Ich benutze die möglichst kleinste Anzahl der Hilfssätze über den Pfaffschen Differentialausdruck, nämlich nur die zwei, die im § 1 der ersten Mitteilung erwähnt sind.

§ 2.

1. Es sei ein System von $k \leqslant n+1$ partiellen Differentialgleichungen 1. O.

$$(1) \qquad F_i\left(x_1 \ldots\ldots x_n z \frac{\partial z}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots k),$$

welche in Bezug auf $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ unabhängig sind, vorgelegt.

Wenn ihr gemeinsames Integral

$$z = f(x_1 \ldots x_n)$$

ist, so sehen wir, wenn wir $\frac{\partial z}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_i}$ durch resp. p_i, f_i $(i=1, 2 \ldots n)$ bezeichnen, dass $n+1$ Gleichungen

$$(\alpha) \qquad z = f(x_1 \ldots x_n), \quad p_i = f_i(x_1 \ldots x_n) \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

den Gleichungen

$$(1') \qquad F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots k)$$

[1]) Erste Mitteilung, Bull. intern. l'Acad. des Sc. de Cracovie für Juli 1903.

und der Gleichung

$$\Omega = dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0$$

genüge leisten. $n+1$ Gleichungen (α) bilden also ein System von $n+1$ Integralen der Gleichung

$$\Omega = 0$$

von der Beschaffenheit, dass es den gegebenen Gleichungen (1′) genüge leistet und in Bezug auf p_i ($=1, 2 \ldots . n$) sich auflösen lässt. Wenn man umgekehrt die Differentialgleichung

$$\Omega = dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0$$

durch die kleinste Anzahl $n+1$ der Integrale integriert, die die gegebenen Gleichungen (1′) erfüllen und in Bezug auf p_i ($i=1, 2 \ldots n$) unabhängig sind, so bekommt man daraus durch Elimination dieser Variablen eine Gleichung

$$z = f(x_1 \ldots x_n),$$

die offenbar ein gemeinsames Integral der gegebenen Differentialgleichungen (1) bildet. Wenn das System der $n+1$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega = 0$, die die gegebenen Gleichungen (1′) erfüllen, sich in Bezug auf p_i ($i = 1, 2 \ldots n$) nicht auflösen lässt, so dass man nach Elimination dieser Variablen mehr als eine Relation zwischen z, x_i bekommt, so bildet ein solches System kein gemeinsames Integral der Differentialgleichungen (1) im gewöhnlichen Sinne. Wenn man aber die Definition des gemeinsamen Integrals der gegebenen Differentialgleichungen (1) verallgemeinert, so nennt man mit S. Lie ein solches System der $n+1$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega = 0$ immer ein gemeinsames Integral der gegebenen Differentislgleichungen (I). Die Integration der Differentialgleichungen (I) im allgemeinsten Sinne besteht also in der Bestimmung des Systems (A) der $n+1$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega = 0$, die die gegebenen Gleichungen (1′) erfüllen. Da wir dieses Problem in der allgemeinsten Form betrachten werden, so setzen wir voraus, dass die gegebenen Differentialgleichungen (1) überhaupt in Bezug auf irgend welche k Grössen $x_i, z, \frac{\partial z}{\partial x_i}$ unabhängig sind.

2. Wir wollen vor allem die notwendigen Bedingungen für die Existenz des gemeinsamen Integrals der gegebenen Differential-

gleichungen (1) suchen. Wir können hierbei immer voraussetzen, dass jede der gegebenen Gleichungen (1′) die Variablen p_i enthält. Das gemeinsame Integral der Differentialgleichungen (1) bildet gleichzeitig ein Integral jeder von diesen Gleichungen z. B. der Gleichung

$$F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0 .$$

Das nichtsinguläre Integral dieser letzten lässt sich in folgender Weise (Satz II, erste Mitteilung) bestimmen: Man soll die Differentialgleichung

$$\Omega_0 = dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \ldots p_n^0 dx_n^0 = 0$$

durch $n + 2$ Integrale

$$\Phi_\alpha(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n), \quad F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0,$$

$$\text{(b)} \qquad \varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0,$$

wo $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ kein Integral des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F_i}{\partial p_1}} = \ldots\ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F_i}{\partial p_n}} = \frac{dz}{\sum p \frac{\partial F_i}{\partial p}} =$$

$$\text{(B}_1\text{)} \qquad = -\frac{dp_1}{\frac{\partial F_i}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F_i}{\partial z}} = \ldots\ldots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial F_i}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F_i}{\partial z}}$$

bildet, integrieren und dann die Grössen x_i^0, z_0, p_i^0 aus den Gleichungen (b) und aus den Gleichungen

$$\text{(c)} \qquad \begin{aligned} x_i &= x_i(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0) \quad i = 1, 2 \ldots n \\ z &= z\,(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0) \\ p_i &= p_i(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0) \quad i = 1, 2 \ldots n, \end{aligned} \qquad \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_1} \mid= 0\right)$$

die das System der Hauptintegrale des Systems (B$_1$) darstellen, eliminieren. Die erhaltenen $n + 1$ Gleichungen

$$\text{(d)} \qquad \vartheta_\alpha(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n), \quad F_i(x_1 \ldots p_n) = 0,$$

stellen ein nichtsinguläres Integral der Differentialgleichung

$$F_i\left(x_1 \ldots\ldots x_n z, \frac{\partial z}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$$

dar. Die Gleichungen (d) sind offenbar ein System der $n + 1$ Integrale des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen (B$_1$).

Wir können dieses System (d) noch in folgender Weise erhalten. Wir können aus den Gleichungen (c) $n+2$ der Grössen $x_i^0 z_0 p_i^0$ mit Hilfe der Gleichungen (b) eliminieren. Mann bekommt dann das System

$$\begin{aligned} x_i &= x_i'\,(x_1 a_1 \ldots a_{n-1}) \quad i = 1,\ 2 \ldots n \\ z &= z'\ (x_1 a_1 \ldots a_{n-1}) \\ p_i &= p_i'\,(x_1 a_1 \ldots a_{n-1}) \quad i = 1,\ 2 \ldots n, \end{aligned} \tag{c'}$$

wo $a_1 \ldots . a_{n-1}$ die $n-1$ übrig gebliebenen Grössen der Grössen $x_i^0 z_0 p_i^0$ bedeuten. Diese Gleichungen stellen offenbar ein System der Integrale des Systems (B_1) dar.

Wenn wir aus diesen letzten Gleichungen die Grössen $a_1 \ldots a_{n-1}$ eliminieren, so bekommen wir dann die Gleichungen (d). Wir können also das Integral (d) der Differentialgleichung

$$F_i\left(x_1 \ldots . x_n z \frac{\partial z}{\partial x_1} \ldots . \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$$

in der Form (c′) darstellen, wo $a_1 \ldots a_{n-1}$ die Parameter sind.

Es folgt daraus, dass jedes gemeinsame Integral der gegebenen Differentialgleichungen (1), das kein singuläres Integral der Differentialgleichung

$$F_i\left(x_1 \ldots . x_n z \frac{\partial z}{\partial x_1} \ldots . \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$$

ist, die Gestalt (c′) besitzen soll. Da das gemeinsame Integral der Differentialgleichungen (1) der Differentialgleichung

$$F_j\left(x_1 \ldots . x_n z \frac{\partial z}{\partial x_1} \ldots . \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$$

genügt, so sollen die Gleichungen (c′) der Gleichung

$$F_j\,(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$$

genüge leisten. Es folgt daraus, das infolge derselben Gleichungen

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_1} + \sum_2^n{}_\alpha \frac{\partial F_j}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial F_j}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x_1} + \sum_1^n{}_\alpha \frac{\partial F_j}{\partial p_\alpha}\,\frac{\partial p_\alpha}{\partial x_1} = 0 \tag{f}$$

ist; da aber die Gleichungen (c′), wo $a_1 \ldots a_{n-1}$ konstant sind, die Integrale des Systems (B_1) sind, so ist infolge dieser Gleichungen und der Gleichung (f)

$$\sum_{1}^{n}{}_{\alpha}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_\alpha}+p_\alpha\frac{\partial F_j}{\partial z}\right)\frac{\partial F_i}{\partial p_\alpha}-\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_\alpha}+p_\alpha\frac{\partial F_i}{\partial z}\right)\frac{\partial F_j}{\partial p_\alpha}=0 \quad (i,j=1,2..k).$$

Wir haben also den Satz I: Das gemeinsame Integral der Differentialgleichungen (1)

$$F_i\left(x_1\ldots\ldots x_n z \frac{\partial z}{\partial x_1}\ldots\ldots\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0 \quad (i=1,\ 2\ldots k)$$

erfüllt die Differentialgleichungen

$$[F,\ F_i]=\sum_{1}^{n}{}_{\alpha}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_\alpha}+p_\alpha\frac{\partial F_i}{\partial z}\right)\frac{\partial F_i}{\partial p_\alpha}-\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_\alpha}+p_\alpha\frac{\partial F_i}{\partial z}\right)\frac{\partial F_j}{\partial p_\alpha}=0$$
$$(j,i=1,2\ldots k).$$

Jede der neuen Gleichungen

$$[F_j,\ F_i]=0 \quad (j,\ i=1,\ 2\ldots q),$$

wo p_α durch $\frac{\partial z}{\partial x_\alpha}$ ersetzt ist, stellt die Differentialgleichung dar, die das gemeinsame Integral der gegebenen Differentialgleichungen (1) besitzt. Wenn man die unabhängigen aus diesen Gleichungen und die unabhängigen von den Gleichungen (1) zu diesen letzten hinzufügt, so reduciert sich unser Problem auf die Integration der $k_1 \geqslant k$ Differentialgleichungen. Wir verfahren mit diesem letzten Systeme in derselben Weise, wie mit der gegebenen. Wir kommen in dieser Weise zu einem der folgenden drei Fälle: Wenn die erhaltenen k_1 Differentialgleichungen unverträglich sind, so haben die vorgelegten Differentialgleichungen (I) kein gemeinsames Integral. Wenn zweitens die Anzahl der so erhaltenen unabhängigen Differentialgleichungen, die das gemeinsame Integral des Systems (1) besitzen, grösser als $n+1$ ist, so schliessen wir wiederum daraus, dass die gegebenen Differentialgleichungen (1) infolge der Definition ihres gemeinsamen Integrals kein solches Integral haben.

Im dritten Falle überschreitet die Anzahl der so erhaltenen Gleichungen eine gewisse Zahl $m \leqslant n+1$ nicht, wenn man dieses Verfahren fortsetzt, d. h. in diesem Falle erhalten wir $m \leqslant n+1$ Differentialgleichungen

$$\text{(I)} \qquad F_i\left(x_1\ldots\ldots x_n z\frac{\partial z}{\partial x_1}\ldots\ldots\frac{\partial z}{\partial x_u}\right)=0 \quad (i=1,\ 2\ldots m)$$

von der Beschaffenheit, dass die Gleichungen

$$[F_j, F_i] = 0 \quad (i, j = 1, 2 \ldots m),$$

wo $p_\alpha = \dfrac{\partial z}{\partial x_\alpha}$ ist, die Folge der ersten sind.

Die m erhaltenen Gleichungen

$$F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m), \tag{I'}$$

stellen in der grössten Anzahl m die Integrale aus dem Systeme (A) der $n + 1$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega = 0$ dar, die ohne die Integration erhalten werden können, da, wie wir uns später überzeugen werden, die übrigen $n + 1 - m$ Integrale aus diesem Systeme (A) nur durch die Integration erhalten werden können. Wir sehen daraus, dass die notwendige Bedingung dafür, dass die gegebenen k Differentialgleichungen ein gemeinsames Integral haben, darin besteht, dass die Anzahl m der so erhaltenen Differentialgleichungen (I) die Zahl $n + 1$ nicht überschreite. Wir werden sehen, dass diese Bedingung auch hinreichend ist.

3. Wollen wir jetzt übergehen zur Bestimmung der übrigen $n + 1 - m$ Integrale aus dem Systeme (A) im Falle $m < n + 1$, und zum Beweise, dass die Gleichungen (I') im Falle $m = n + 1$ schon das gemeinsame Integral der Differentialgleichungen (1) bilden.

Wir sehen, dass die Integration der gegebenen Differentialgleichungen (1) auf die Integration der m $(k \leqslant m \leqslant n + 1)$ Differentialgleichungen (I) von der Beschaffenheit, dass die Gleichungen

$$[F_j, F_i] = 0 \quad (j, i = 1, 2 \ldots m),$$

wo $p_\alpha = \dfrac{\partial z}{\partial x_\alpha}$ ist, die Folge der Gleichungen (I) sind, hinauskommt.

Das System der Differentialgleichungen (I) von dieser Beschaffenheit heisst ein vollständiges. Jedes System der Differentialgleichungen (1) kann nur dann ein gemeinsames Integral haben, wenn es ein vollständiges ist oder wenn es sich auf ein solches in der oben gezeigten Weise reducieren lässt

Wir werden zuerst einige Eigenschaften des vollständigen Systems (I) angeben. Wir werden dabei immer voraussetzen, dass die in Betracht kommenden Lösungen des Systems (I) einfach sind.

a) Das vollständige System (I') geht nach der Auflösung in Bezug auf irgend welche m der Grössen x_i, z, p_i wiederum in ein vollständiges System über. Es sei das vorgelegte System (I′) in der aufgelösten Form:

(f) $\quad x_i - \varphi_i = 0 \quad p_j - \psi_j = 0 \quad (i = \alpha \ldots \beta,\ j = \gamma \ldots \delta)$

wo z durch x_{n+1} ersetzt ist. Wir können die Gleichungen (I′) in der Form

$$F_i(x_1 \ldots \varphi_\alpha + y_\alpha, \ldots \varphi_\beta + y_\beta, \ldots p_1 \ldots \psi_\gamma + u_\gamma, \ldots \psi_\delta + u_\delta, \ldots p_n) =$$
$$= F_i'(x_1 \ldots y_\alpha \ldots u_\delta \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

darstellen, wo

$$y_\alpha = x_\alpha - \varphi_\alpha, \ldots y_\beta = x_\beta - \varphi_\beta,\ u_\gamma = p_\gamma - \psi_\gamma, \ldots u_\delta = p_\delta - \psi_\delta \text{ ist.}$$

Wenn wir der Bequemlichkeit halber $y_\alpha \ldots y_\beta$, $u_\gamma \ldots u_\delta$ durch $v_1 \ldots v_m$ bezeichnen, so ist

$$[F_i, F_k] = [F_i', F_k'] = [(F_i'), (F_k')] +$$
$$\sum_s \frac{\partial F_i'}{\partial v_s}[v_s, (F_k')] + \sum_\sigma \frac{\partial F_k'}{\partial v_\sigma}[(F_i'), v_\sigma] + \sum_s \sum_\sigma \frac{\partial F_i'}{\partial v_s}\frac{\partial F_k'}{\partial v_\sigma}[v_s, v_\sigma],$$

wo das Zeichen (F') bedeutet, dass die Funktionen v als Konstanten zu betrachten sind. Setzen wir jetzt statt $x_\alpha \ldots x_\beta$, $p_\gamma \ldots p_\delta$ ihre Werte aus den Gleichungen (f) ein. Die linke Seite verschwindet, da das System (I′) ein vollständiges ist; was die rechte Seite betrifft, so reduciert sich diese Substitution in den Funktionen F' auf die Substitution $v = 0$ und kann diese letztere in den Klammerausdrücken vor der Differentiation ausgeführt sein, wodurch die Funktionen (F') identisch gleich Null werden.

Wir erhalten also

$$\sum_{s,\sigma}\left(\frac{\partial F_i'}{\partial v_s}\frac{\partial F_k'}{\partial v_\sigma} - \frac{\partial F_i'}{\partial v_\sigma}\cdot\frac{\partial F_k'}{\partial v_s}\right)\Big[v_s, v_\sigma\Big]_{x_\alpha = \varphi_\alpha, \ldots p_\delta = \psi_\delta} = 0$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots m).$$

Wir haben $\dfrac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$ Gleichungen, welche linear, homogen in Bezug auf $\dfrac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$ Unbekannten $[v_s, v_\sigma]$ sind. Die Determinante dieser Gleichungen

$$\left|\frac{\partial (F_1' \ldots F_m')}{\partial (v_1 \ldots v_m)}\right|_{v=0}^{\frac{(m-1)(m-2}{1.2}} = \left|\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (x_\alpha \ldots x_\beta\, p_\gamma \ldots p_\delta)}\right|_{x_\alpha = \varphi_\alpha, \ldots p_\delta = \psi_\delta}^{\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}}$$

ist von Null verschieden. Wir erhalten also

$$\Big[v_S,\, v_\sigma\Big]_{x_\alpha = \varphi_\alpha, \ldots p_\delta = \psi_\delta} = 0 \quad (S,\, \sigma = 1,\, 2 \ldots m),$$

d. h. die Gleichungen (f) bilden ein vollständiges System.

b) Wenn die Gleichungen des vollständigen Systems (I′) sich in Bezug auf m der Grössen p_i nicht auflösen lassen, so lassen sie sich in Bezug auf $x_\alpha \ldots x_\beta$, $p_\gamma \ldots p_\delta$ auflösen, wo $z = x_{n+1}$ ist und wo $\alpha, \ldots \beta$, $\gamma, \ldots \delta$ m verschiedene Zahlen der Reihe $1.2 \ldots n+1$ sind.

Es folgen nämlich aus den Gleichungen (I′) q Relationen zwischen $x_1 \ldots x_{n+1}$. Wir können aus den übrigen $m-q$ Gleichungen (I′) $m-q$ der Grössen p_i z. B. $p_\gamma \ldots p_\delta$ bestimmen. Man kann beweisen, dass die erwähnten q Relationen zwischen $x_1 \ldots x_{n+1}$ sich in Bezug auf q der Grössen $x_\alpha \ldots x_\omega$ auflösen lassen, wo $\alpha \ldots \omega$ und $\gamma \ldots \delta$ $n+1$ verschiedene Zahlen der Reihe $1.2 \ldots . n+1$ sind. Wenn nämlich das nicht der Fall ist, so müssen wir voraussetzen, dass aus diesen q Relationen zwischen $x_1 \ldots x_{n+1}$ eine oder mehrere Relationen zwischen $x_\gamma \ldots x_\delta$ allein folgen. Wenn wir eine derselben in der Form. z. B.

$$x_\gamma - \varphi(x_\varepsilon \ldots x_\delta) = 0$$

darstellen und wenn der Wert von p_γ

$$p_\gamma = \psi(x_1 \ldots x_{n+1} p_\alpha \ldots p_\omega)$$

ist, so soll die Gleichung

$$[x_\gamma - \varphi,\, p_\gamma - \psi] = 0$$

infolge der Gleichungen (I′) erfüllt werden; was aber unmöglich ist, da die linke Seite dieser Gleichung 1 ist. Also lassen sich q Relationen zwischen $x_1 \ldots x_{n+1}$ in Bezug auf q der Grössen $x_\alpha, \ldots x_\omega$ z. B. in Bezug auf $x_\alpha \ldots\ldots x_\beta$ auflösen und die gegebenen Gleichungen (I′) des vollständigen Systems bestimmen die Grössen $x_\alpha \ldots x_\beta$, $p_\gamma \ldots p_\delta$, wo $\alpha \ldots \beta$, $\gamma \ldots \delta$ m verschiedene Zahlen der Reihe $1.2 \ldots n+1$ sind [1]).

[1]) S. Lie, M. Ann. Bd. 9, p. 277.

c) Die Gleichungen des vollständigen Systems (I′) ($m \leqslant n$) können durch ein aequivalentes System der Gleichungen

$$\Phi_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

von der Beschaffenheit, dass

$$[\Phi_i, \Phi_k] \equiv 0 \quad (i, k = 1, 2 \ldots m)$$

identisch ist, ersetzt werden. Man nennt mit S. Lie dieses letzte System ein System in Involution Wir werden zu diesem Zwecke eine gewisse Transformation benutzen. Es seien k partielle Differentialgleichungen

$$(\alpha) \qquad f_i\left(x_1 \ldots\ldots x_n z \frac{\partial z}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots k)$$

gegeben. Die Integration dieses Systems reduciert sich auf die Integration der Differentialgleichung $\Omega = 0$ durch $n+1$ Integrale, die die gegebenen Gleichungen erfüllen. Wir wollen nun die Gleichung $\Omega = 0$ und die gegebenen Gleichungen auf die neuen Variablen mit Hilfe der Formel

$$z = H + x_1 p_1 + \ldots + x_q p_q, \quad x_i = p_i', \quad p_i = -x_i' \quad (i = 1, 2 \ldots q)$$

transformieren. Wir werden die Gleichungen

$$\Omega = dH - p_1' dx_1' - \ldots\ldots - p_q' dx_q' - p_{q+1} dx_{q+1} - \ldots\ldots - p_n dx_n = 0,$$

$$(\alpha') \quad f_i'\left((x_1' \ldots x_q' x_{q+1} \ldots x_n, H, \frac{\partial H}{\partial x_1'} \ldots \frac{\partial H}{\partial x_q'} \frac{\partial H}{\partial x_{q+1}} \ldots \frac{\partial H}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (i = 1, 2 .. k)$$

erhalten. Wir sehen daraus, dass die Integration der gegebenen Differentialgleichungen (α) sich auf die Integration der Differentialgleichungen (α') reduciert. Es erhellt weiter aus den Formeln der Transformation, dssa

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} + p_\alpha \frac{\partial f_i}{\partial z} = \frac{\partial f_i'}{\partial p_\alpha'}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial p_\alpha} = -\left(\frac{\partial f_i'}{\partial x_\alpha'} + p_\alpha' \frac{\partial f_i'}{\partial H}\right), \quad (\alpha = 1, 2 \ldots q)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_{q+j}} = \frac{\partial f_i'}{\partial x_{q+j}}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial p_{q+j}} = \frac{\partial f_i'}{\partial p_{q+j}} \quad (j = 1, 2 \ldots n - q)$$

ist, woraus folgt, dass

$$[f_i, f_j] = [f_i', f_j']$$

ist, d. h., dass das neue System vollständig oder in Involution ist, wenn das ursprüngliche ein solches ist.

Wir wollen uns jetzt zu den Gleichungen (I′) wenden.

Wir setzen zuerst voraus, dass diese Gleichungen in Bezug auf m der Grössen p_i z. B. in Bezug auf $p_1 \ldots p_m$ auflösbar sind, und transformieren mit Hilfe der Formel:

$$z = H + x_1 p_1 + \ldots + x_m p_m, \quad x_i = p_i', \quad p_i = - x_i' \quad (i = 1, 2 \ldots m).$$

So erhalten wir die Gleichungen

$$F_i(p_1' .. p_m', x_{m+1} .. x_n, H - x_1' p_1' - .. - x_m' p_m', -x_1', .. - x_m', p_{m+1} .. p_n)$$
$$= F_i'(x_1' \ldots x_m' x_{m+1} \ldots x_n, H, p_1' \ldots p_m' p_{m+1} \ldots p_n) = 0 \qquad (\mathrm{I}'')$$
$$(i = 1, 2 \ldots m),$$

die ein vollständiges System bilden. Da die Determinante

$$\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)} = (-1)^m \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1'}{\partial x_1'} + p_1' \frac{\partial F_1'}{\partial H}, & \ldots & \frac{\partial F_m'}{\partial x_1'} + p_1' \frac{\partial F_m'}{\partial H} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_1'}{\partial x_m'} + p_m' \frac{\partial F_1'}{\partial H}, & \ldots & \frac{\partial F_m'}{\partial x_m'} + p_m' \frac{\partial F_m'}{\partial H} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, so erhalten wir durch die Entwickelung derselben

$$\frac{\partial (F_1' .. F_m')}{\partial (x_1' .. x_m')} + \sum_1^m {}_\alpha \, p_\alpha' \frac{\partial (F_1' \ldots F_m')}{\partial (x_1' \ldots x'_{\alpha-1} H, x'_{\alpha+1} \ldots x_m')} \neq 0.$$

Es folgt daraus, dass nicht alle Determinanten

$$\frac{\partial (F'_1 .. F'_m)}{\partial (x_1' .. x_m')}, \quad \frac{\partial (F_1' \ldots F_m')}{\partial (x_1' .. x'_{\alpha-1}, H, x'_{\alpha+1} .. x_m')}$$

gleich Null sind. Setzen wir zuerst voraus, dass

$$\frac{\partial (F_1' .. F'_m)}{\partial (x_1' .. x_m')} \neq 0$$

ist. Die Gleichungen (I″) lösen sich in Bezug auf $x_1' \ldots x_m'$ in der Form z. B.

$$x_i' = \varphi_i(x_{m+1} .. x_n, H, p_1' .. p_m' p_{m+1} .. p_n) \quad (i = 1, 2 .. m). \qquad (\mathrm{I}''')$$

Dieses letztes System ist ein vollständiges und die Gleichungen

$$[x_i' - \varphi_i, x_k' - \varphi_k] = 0 \quad (i, k = 1, 2 \ldots m)$$

sind durch die Gleichungen (I‴) erfüllt. Diese letzten Gleichungen enthalten keine der Veränderlichen $x_1' .. x_m'$. Sie sind die blossen Identitäten und das System (I‴) ist in Involution. Wenn wir das auf die ursprünglichen Variablen $x_i z p_i$ transformieren, so bekommen wir das System

$$p_i + \varphi_i\,({}_{m+1}\ldots x_n,\ z - p_1x_1 - \ldots - p_mx_m,\quad x_1\ldots x_m p_{m+1}\ldots p_n) = 0$$
$$(i = 1,\ 2\ldots m),$$

wo $[p_i + \varphi_i,\ p_k + \varphi_k] = [x_i' - \varphi_i,\ x_k' - \varphi_k'] \equiv 0$ ist. Das System

$$p_i + \varphi_i\,(x_{m+1}\ldots x_n,\ z - p_1x_1 - \ldots - p_mx_m,\quad x_1\ldots x_m p_{m+1}\ldots p_n) = 0$$
$$(i = 1,\ 2\ldots m),$$

dass mit dem gegebenen (I′) aequivalent ist, ist in Involution.

Setzen wir jetzt voraus, dass

$$\frac{\partial\,(F_1'\ldots F_m')}{\partial\,(x_\alpha'\ldots x_{\alpha-1}',\ H,\ x_{\alpha+1}'\ldots x_m')} \neq 0$$

ist. Die Gleichungen (I″) lassen sich in Bezug auf $x_\alpha', \ldots x_{\alpha-1}'$, H, $x_{\alpha+1}, \ldots x_m'$ auflösen. Seien sie in der aufgelösten Form

$$x_i' - \psi_i\,(x_\alpha',\ x_{m+1}, \ldots x_n,\ p_1', \ldots p_m',\quad p_{m+1}, \ldots p_n) = 0$$
$$(i = 1,\ 2\ldots a - 1,\ a + 1, \ldots m),$$
$$H - \varphi\,(x_\alpha',\ x_{m+1}, \ldots x_n,\ p_1', \ldots p_m',\ p_{m+1}, \ldots p_n) = 0. \qquad \text{(I‴)}$$

Das letzte System ist wiederum ein vollständiges und die Gleichungen

$$[x_i' - \varphi_i,\ x_k' - \varphi_k] = 0,$$
$$[x_i' - \varphi_i,\ H - \varphi] \quad (i,\ k = 1,\ 2\ldots a - 1,\ a + 1\ldots m)$$

sind durch die Gleichungen (I‴) erfüllt; da aber diese Gleichungen die Variablen $x_1, \ldots x_{\alpha-1},\ x_{\alpha-1}\ldots x_m,\ H$ nicht enthalten, so sind sie blosse Identitäten und ist das System (I‴) in Involution.

Wenn wir das auf die ursprünglichen Variablen transformieren, so bekommen wir das System

$$p_i + \varphi_i\,(-p_\alpha,\quad x_{m+1}\ldots x_n,\quad x_1\ldots x_m,\quad p_{m+1}, \ldots p_n) = 0$$
$$(i = 1,\ 2\ldots a - 1,\ a + 1\ldots m),$$
$$z - x_1p_1 - \ldots - x_mp_m - \varphi\,(-p_\alpha,\ x_{m+1}, \ldots x_n,$$
$$x_1, \ldots x_m,\ p_{m+1}\ldots p_n) = 0.$$

Da

$$[p_i + \varphi_i,\ p_k + \varphi_k] = [x_i' - \varphi_i,\ x_k' - \varphi_k] \equiv 0,$$
$$[p_i + \varphi_i,\ z - x_1p_1 - \ldots - x_mp_m - \varphi] = [x_i' - \varphi_i,\ H - \varphi] \equiv 0$$

ist, so ist dieses System in Involution. Wenn man diese zwei Fälle zusammennimmt, so hat man solchen Satz II: Um das vollständige System der m Gleichungen (I′), die in Bezug auf $p_1\ldots p_m$ unabhängig sind, durch ein aequivalentes System in Involution zu ersetzen, soll man in diesen letzten z durch $H + x_1 p_1 + \ldots + x_m p_m$ ersetzen. Die erhaltenen Gleichungen lösen sich immer in Bezug auf $p_1, \ldots p_m$, oder in Bezug auf $p_1 \ldots p_{\alpha-1}$, H, $p_{\alpha+1}, \ldots p_m$. Wenn man diese Gleichungen in dieser Weise auflöst, und H durch $z - x_1 p_1 - \ldots - x_m p_m$ ersetzt, so bekommt man ein aequivalentes System in Involution [1].

Gehen wir jetzt zu dem Falle über, wenn die gegebenen Gleichungen (I′) in Bezug auf m der Grössen p_i sich nicht auflösen lassen.

Man kann beweisen, dass das vollständige System (I′) sich auf ein vollständiges System von der Eigenschaft reducieren lässt, dass seine Gleichungen in Bezug auf m der Grössen p_i sich auflösen, so dass es auch in diesem Falle durch ein aequivalentes System in Involution ersetzt werden kann.

Wir wissen, dass man in diesem Falle das System (I′) in Bezug auf $x_\alpha \ldots x_\beta$, $p_\gamma \ldots p_\delta$ auflösen kann, wo $\alpha \ldots \beta\, \gamma \ldots \delta$ m verschiedenen Zahlen der Reihe $1, 2 \ldots n+1$ sind, und $x_{n+1} = z$ ist

Setzen wir voraus, dass die gegebenen Gleichungen (I′) in Bezug auf $x_1 \ldots x_q p_{q+1} \ldots p_m$ sich lösen, d. h. dass

$$\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (x_1 \ldots x_q,\ p_{q+1} \ldots p_m)} \neq 0$$

ist. Es seien diese Gleichungen in der aufgelösten Form

$$x_i = \varphi_i (x_{q+1} \ldots x_n,\ z) \quad (i = 1, 2 \ldots q),$$

$$p_{q+j} = \psi_{q+j} (x_{q+1} \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_q,\ p_{m+1} \ldots p_n) \quad (j = 1, 2 \ldots m - q).$$

Man kann beweisen, dass die Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F_1}{\partial z}, & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F_m}{\partial z} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_q} + p_q \frac{\partial F_1}{\partial z}, & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_q} + p_q \frac{\partial F_m}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_{q+1}}, & \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_{q+1}} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_m}, & \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m} \end{vmatrix}$$

[1]) Im Falle, wenn die Gleichungen (I′) z nicht enthalten, so geht dieses Verfahren in die Auflösung der Gleichungen (I′) in Bezug auf $p_1 \ldots p_m$ über, was wolbekannt ist.

von Null verschieden ist. Setzen wir voraus, dass sie gleich Null ist. Wir haben nach der Entwickelung

$$\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (x_1 \ldots x_q\, p_{q+1} \ldots p_m)} + \sum_1^q{}^{\alpha}\, p_\alpha\, \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (x_1 \ldots x_{\alpha-1}\, z\, x_{\alpha+1} \ldots x_q\, p_{q+1} \ldots p_m)} \equiv 0.$$

Wenn wir durch die erste Determinante dividieren und $x_1 \ldots x_q$ $p_{q+1} \ldots p_m$ durch ihre Werte ersetzen, so bekommen wir

$$1 - \sum_1^q{}^{\alpha}\, p_\alpha\, \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z} \equiv 0\,.$$

Diese Identität ist offenbar unmöglich.

Wir wollen jetzt das System (I′) auf die neuen Variablen mit Hilfe der Formel

$$z = H + x_1 p_1 + \ldots + x_q p_q, \quad x_i = p_i', \quad p_i = -x_i' \quad (i=1, 2 \ldots q)$$

transformieren. Wir bekommen die Gleichungen

$$F_i'(x_1' \ldots x_q'\, x_{q+1} \ldots x_n,\ H,\ p_1' \ldots p_q',\ p_{q+1} \ldots p_n) = 0 \quad (i=1, 2 \ldots m) \quad (\mathrm{I}'')$$

des vollständiges Systems. Wir erhalten infolge der Formel der Transformation

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1'}{\partial p_1'}, & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial F_m'}{\partial p_1'} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_1'}{\partial p_q'}, & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial F_m'}{\partial p_q'} \\ \frac{\partial F_1'}{\partial p_{q+1}}, & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial F_m'}{\partial p_{q+1}} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_1'}{\partial p_m}, & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial F_m'}{\partial p_m} \end{vmatrix}$$

und die Gleichungen (I″) sind in Bezug auf $p_1 \ldots p_q'\, p_{q+1} \ldots p_m$ auflösbar. Wir können dieses System durch ein System in Involution ersetzen, und wenn man dieses letzte auf die ursprünglichen Variablen transformiert, so erhält man ein System in Involution, dass das gegebene vollständige System (I′) ersetzen kann.

Setzen wir jetzt voraus, dass die gegebenen Gleichungen (I′) in Bezug auf z, $x_\alpha \ldots x_\beta$, $p_\gamma \ldots p_\delta$ auflösbar sind. Es seien diese

Gleichungen z. B. in Bezug auf $z, x_1, \ldots x_q, p_{q+2}, \ldots p_m$ auflösbar, so dass

$$\frac{\partial(F_1 \ldots F_m)}{\partial(x_1 \ldots x_q z p_{p+2} \ldots p_m)} \neq 0$$

ist, und seien die Werte dieser Variablen

$$z = \varphi(x_{q+1}, \ldots x_n), \quad x_\alpha = \varphi_\alpha(x_{q+1} \ldots x_n) \quad (\alpha = 1, 2 \ldots q),$$

$$p_{q+j} = \psi_{q+j}(x_{q+1} \ldots x_n p_1 \ldots p_q \ldots p_n) \quad (j = 2, 3 \ldots m-q).$$

Die Determinante

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F_1}{\partial z}, \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F_m}{\partial z} \\ \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_q} + p_q \frac{\partial F_1}{\partial z}, \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_q} + p_q \frac{\partial F_m}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_S} + p_S \frac{\partial F_1}{\partial z}, \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_S} + p_S \frac{\partial F_m}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_{q+2}}, \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_{q+2}} \\ \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_m}, \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m} \end{vmatrix} \quad (S = q+1, m+1, \ldots n)$$

ist von Null verschieden, da wir sonst

$$\frac{\partial(F_1 \ldots F_m)}{\partial(x_1 \ldots x_q x_S p_{q+2} \ldots p_m)} + \sum_1^q p_\alpha \frac{\partial(F_1 \ldots F_m)}{\partial(x_1 \ldots x_{\alpha-1} z x_{\alpha+1} \ldots p_m)} +$$

$$+ p_S \frac{\partial(F_1 \ldots F_m)}{\partial(x_1 \ldots x_q z p_{q+2} \ldots p_m)} \equiv 0$$

hätten. Wenn man durch die letzte Determinante dividiert und statt $z, x_1 \ldots x_q p_{q+2} \ldots p_m$ ihre Werte einsetzt, so bekommt man

$$p_S + \sum_1^q {}^\alpha \, p_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_S} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_S} \equiv 0.$$

Diese letzte Identität ist offenbar unmöglich. Wir erhalten also z. B. $\Delta_{q+1} \neq 0$. Wir wollen jetzt die gegebenen Gleichungen (I′) auf die neuen Variablen mit Hilfe der Formel

$$z = H + x_1 p_1 + \ldots + x_{q+1} p_{q+1}, \quad x_i = p_i', \quad p_i = -x_i'$$
$$(i = 1, 2 \ldots q+1)$$

transformieren. Wir werden ein vollständiges System

(I″) $F_i'(x_1' \ldots x'_{q+1} x_{q+2} \ldots x_n, H, p_1' \ldots p'_{q+1} p_{q+2} \ldots p_n) = 0 \quad (i=1, 2 \ldots m)$

erhalten. Es folgt aus der Formeln der Transformation, dass

$$\Delta_{q+1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1'}{\partial p_1'}, & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial F_m'}{\partial p_1'} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_1'}{\partial p'_{q+1}}, & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial F_m'}{\partial p'_{q+1}} \\ \frac{\partial F_1'}{\partial p_{q+2}}, & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial F_m'}{\partial p_{q+2}} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_1'}{\partial p_m}, & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial F_m'}{\partial p_m} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist und also die Gleichungen (I″) in Bezug auf $p_1' \ldots p_{q+1}' p_{q+2} \ldots p_m$ auflösbar sind. Man kann dieses System und also auch das gegebene System (I′) in der oben gezeigten Weise durch ein System in Involution ersetzen.

§ 3.

1. Wir wollen jetzt zur Integration des vollständigen Systems der Differentialgleichungen (I)

(I) $$F_i\left(x_1 \ldots\ldots x_n z \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots\ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

übergehen; die Integration dieses Systems reduciert sich auf die Integration der Differentialgleichung $\Omega = 0$ mit Hilfe der $n+1$ Integrale (A), die den gegebenen Gleichungen

(I′) $$F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

genüge leisten. Wenn $m = n+1$ ist so stellen die $n+1$ gegebenen Gleichungen (I′) schon das gemeinsame Integral der Differentialgleichungen (I) dar. Man soll zu diesem Zwecke nur beweisen, dass das System der Gleichungen (I′) der Differentialgleichung $\Omega = 0$ genüge leistet.

Setzen wir voraus, dass die Gleichungen (I′) im allgemeinen in Bezug auf $z, x_\alpha \ldots x_\beta, p_\gamma, \ldots p_\delta$ auflösbar sind, wo $\alpha \ldots \beta, \gamma \ldots \delta$

die Zahlen der Reihe $1, 2 \dots n$ sind, und wo die Anzahl der Veränderlichen $x_\alpha \dots x_\beta$ auch Null sein kann. Wenn wir die Gleichungen (I′) mit Hilfe der Formeln

$$z = H + x_\alpha p_\alpha + \dots + x_\beta p_\beta, \quad x_i = p_i', \quad p_i = -x_i' \quad (i = \alpha, \dots \beta)$$

transformieren, so bekommen wir die Gleichungen

$$F_k'(x_\alpha' \dots x'_\beta x_\gamma \dots x_\delta, H, p_\alpha' \dots p'_\beta p_\gamma \dots p_\delta) = 0 \quad (k = 1, 2 \dots n+1), \quad (\mathrm{I}'')$$

die in Bezug auf $H, p_\alpha', \dots p'_\beta, p_\gamma, \dots p_\delta$ auflösbar sind, da

$$\frac{\partial(F_1 \dots F_{n+1})}{\partial(z x_\alpha \dots x_\beta p_\gamma \dots p_\delta)} = \frac{\partial(F_1' \dots F'_{n+1})}{\partial(H, p_\alpha' \dots p'_\beta p_\gamma \dots p_\delta)} \neq 0 \quad \text{ist.}$$

Wenn wir der Bequemlichkeit halber die Grössen $x_\alpha' \dots x'_\beta$, $x_\gamma \dots x_\delta$ und $p_\alpha' \dots p'_\beta$, $p_\gamma \dots p_\delta$ durch resp. y_i, q_i bezeichnen, so haben die Gleichungen (I″) in der aufgelösten Form die Gestalt

$$H = \varphi(y_1 \dots y_n), \quad q_i = \varphi_i(y_1 \dots y_n) \quad i = 1, 2 \dots n, \qquad (\mathrm{I}''')$$

und stellen ein vollständiges System dar, so, dass die Gleichungen

$$[H - \varphi, \; q_i - \varphi_i] = 0, \quad [q_i - \varphi_i, \; q_k - \varphi_k] = 0,$$

infolge der Gleichungen (I‴) erfüllt sind. Da aber φ_i, φ_k die Grössen H, q_i nicht enthalten, so ist

$$[q_i - \varphi_i, \; q_k - \varphi_k] \equiv 0$$

identisch, oder ist

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}.$$

Es folgt weiter aus der Gleichung

$$[H - \varphi, \; q_i - \varphi_i] = 0,$$

dass

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + q_i = 0,$$

infolge der Gleichungen (I‴) ist, oder dass

$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \quad \text{ist.}$$

Es folgt daraus, dass

$$H = \varphi, \quad q_i = \varphi_i$$

der Differentialgleichung

$$\Omega = dH - q_1 dy_1 - \dots - q_n dy_n = 0$$

genügen, und die Gleichungen (I'') das System der $n+1$ Integrale dieser letzten Gleichung darstellen. Wenn man diese letzten auf die ursprünglichen Variablen transformiert, so erhält man, dass die Gleichungen (I') $n+1$ Integrale der Differentialgleichung

$$\Omega = dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = 0$$

darstellen. Wir werden daher im folgenden immer voraussetzen, dass $m \leqq n$ ist.

Da wir m gegebene Gleichungen (I') als m Integrale des Systems (A) betrachten können, so können wir die Aufgabe in folgender anderer Form ausdrücken: wir sollen die Differentialgleichung

$$\Omega' = dz - p_1\,dx_1 - \ldots p_n\,dx_n = 0,$$

wo die Veränderlichen $x_i\,z\,p_i$ durch m gegebenen Relationen (I') schon verbunden sind, durch die kleinste Anzahl $n+1-m$ der Integrale integrieren. Wir können nach dem oben bewiesenen immer voraussetzen, dass die gegebenen Gleichungen (I') in Bezug auf m der Grössen p_i z. B. in Bezug auf $p_1 \ldots . p_m$ auflösbar sind.

Wenn diese letzten in der aufgelösten Form die Gestalt

$$p_i - \Theta_i\,(x_1 \ldots x_n\,z\,p_{m+1} \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1,\ 2 \ldots m)$$

haben, so hat die Differentialgleichung $\Omega' = 0$ die Gestalt

$$\Omega' = dz - \Theta_1\,dx_1 - \ldots - \Theta_m\,dx_m - p_{m+1}\,dx_{m+1} - \ldots p_n\,dx_n = 0,$$

wo

$$\Big[p_i - \Theta_i,\ p_k - \Theta_k\Big]_{\substack{p_i = \Theta_i \\ p_k = \Theta_k}} = 0$$

ist. Wir können den Differentialausdruck Ω' auf die neuen Veränderlichen so transformieren, dass m der neuen Variablen höchstens im gemeinschaftlischen Faktor μ der Koeffizienten eintreten werden. Es seien die Formel dieser Transformation

$$x_i = \varphi_i\,(y_1 \ldots y_{2n+1-m}) \quad (i = 1,\ 2 \ldots n), \quad z = \varphi\,(y_1 \ldots y_{2n+1-m}),$$
$$p_{m+j} = \psi_{m+j}\,(y_1 \ldots y_{2n+1-m}) \quad j = 1,\ 2 \ldots n-m.$$

Setzen wir voraus, dass nämlich die Veränderlichen $y_1 \ldots y_m$ nach dieser Transformation nur im gemeinschaftlichen Faktor μ enthalten sind $(j = 1,\ 2 \ldots n-m)$.

Es ist klar, dass diese Transformation die Pfaffsche Transformation ist, nach der die Veränderliche y_i $(i = 1, 2 \ldots m)$ nur im gemeinschaftlichen Faktor μ bleibt. Wenn wir die Gleichungen (A) der ersten Mitteilung, denen die Formel der Pfaffschen Transformation genügen, auf den Differentialausdruck Ω' anwenden, indem wir der Reihe nach statt y_1 y_i $(i = 1, 2 \ldots m)$, und statt λ, λ_i, wo $\lambda_i = \dfrac{\partial \, lg \, \mu}{\partial y_i}$ ist, setzen, so bekommen wir m Systeme der gewöhnlichen Differentialgleichungen, denen die Formeln dieser Transformation genügen:

$$\frac{\partial z}{\partial y_i} - \Theta_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_i} - \ldots - \Theta_m \frac{\partial x_m}{\partial y_i} - p_{m+1} \frac{\partial x_{m+1}}{\partial y_i} - \ldots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial y_i} = 0,$$

$$\sum_1^m {}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i} = \lambda_i,$$

$$\frac{\partial \Theta_\alpha}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_i} + \sum_1^m {}_\beta \left(\frac{\partial \Theta_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i} + \sum_1^{n-m} {}_j \frac{\partial \Theta_\alpha}{\partial x_{m+j}} \frac{\partial x_{m+j}}{\partial y_i} +$$

$$+ \sum_1^{n-m} {}_j \frac{\partial \Theta_\alpha}{\partial p_{m+j}} \frac{\partial p_{m+j}}{\partial y_i} - \lambda_i \Theta_\alpha = 0 \quad \alpha = 1, 2 \ldots m,$$

$$\left. \begin{aligned} - \sum_1^m {}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_{m+j}} \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i} + \sum_1^{n-m} {}_\beta \frac{\partial p_{m+j}}{\partial p_{m+\beta}} \frac{\partial p_{m+\beta}}{\partial y_i} - \lambda_i p_{m+j} = 0 \\ \sum_1^m {}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}} \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i} + \sum_1^m {}_\beta \frac{\partial p_{m+\beta}}{\partial p_{m+j}} \frac{\partial x_{m+\beta}}{\partial y_i} = 0 \end{aligned} \right\} j = 1, 2 \ldots n - m.$$

Da aber $\dfrac{\partial p_{m+j}}{\partial p_{m+\beta}} = 0$ $(j \neq \beta)$, $\dfrac{\partial p_{m+j}}{\partial p_{m+\beta}} = 1$ $(j = \beta)$ ist, so haben die $2(n-m)$ letzten Gleichungen die Gestalt

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p_{m+j}}{\partial y_i} &= \sum_1^m {}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_{m+j}} \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i} + \lambda_i p_{m+j} \\ \frac{\partial x_{m+j}}{\partial y_i} &= - \sum_1^m {}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}} \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i} \end{aligned} \right\} j = 1, 2 \ldots n - m$$

oder nach Einsetzung des Wertes von λ_i aus der zweiten Gleichung, die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p_{m+j}}{\partial y_i} &= \sum_1^m {}_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i}\left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j}\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z}\right)\\ \frac{\partial x_{m+j}}{\partial y_i} &= -\sum_1^m {}_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i}\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}}\end{aligned}\right\} j = 1,\ 2\,..\,n-m.$$

Wenn wir die Werte $\frac{\partial p_{m+j}}{\partial y_i}$; $\frac{\partial x_{m+j}}{\partial y_i}$, λ_i in die übrigen Gleichungen einsetzen, so bekommen wir das ganze System in der Form

$$\frac{\partial z}{\partial y_i} - \sum_1^m {}_\beta \left(\Theta_\beta - \sum_1^{n-m} {}_j\, p_{m+j}\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}}\right)\frac{\partial x_\beta}{\partial y_i} = 0,$$

$$\sum_1^m {}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z}\frac{\partial x_\beta}{\partial y_i} = \lambda_i,$$

$$\sum_1^m {}_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i}\Big[\frac{\partial \Theta_\alpha}{\partial x_\beta} + \Theta_\beta\frac{\partial \Theta_\alpha}{\partial z} - \left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_\alpha} + \Theta_\alpha\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z}\right) +$$

$$+ \sum_1^{n-m} {}_j \left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j}\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z}\right)\frac{\partial \Theta_\alpha}{\partial p_{m+j}} - \left(\frac{\partial \Theta_\alpha}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j}\frac{\partial \Theta_\alpha}{\partial z}\right)\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}}\Big] = 0$$

(A′) $$\alpha = 1,\ 2\,\ldots m,$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p_{m+j}}{\partial y_i} &= \sum_1^m {}_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i}\left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j}\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z}\right)\\ \frac{x_{m+j}}{\partial y_i} &= -\sum_1^m {}_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i}\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}}\end{aligned}\right\} j=1,2\,..\,n-m.$$

Es ist klar, dass

$$\frac{\partial \Theta_\alpha}{\partial x_\beta} + \Theta_\beta\frac{\partial \Theta_\alpha}{\partial z} - \left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_\alpha} + \Theta_\alpha\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z}\right) +$$

$$+ \sum_1^{-} {}_j \left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j}\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z}\right)\frac{\partial \Theta_\alpha}{\partial p_{m+j}} -$$

$$-\left(\frac{\partial \Theta_\alpha}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j}\frac{\partial \Theta_\alpha}{\partial z}\right)\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}} = \Big[p_\beta - \Theta_\beta,\ p_\alpha - \Theta_\alpha\Big]_{\substack{p_\alpha = \Theta_\alpha\\ p_\beta = \Theta_\beta}} \equiv 0$$

ist. Die dritte Gleichung ($\alpha = 1,\ 2\,\ldots\, m$) ist also eine Identität.

Diese m Systeme $(i = 1, 2 \ldots m)$ der gewöhnlichen Differentialgleichungen können durch ein einziges System dargestellt werden, indem wir alle Gleichungen durch dy_i $(i = 1, 2 \ldots m)$ multiplicieren und addieren.

So bekommen wir das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} dz &= \sum_1^m{}_\beta \left(\Theta_\beta - \sum_1^{n-m}{}_j \, p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}} \right) dx_\beta \\ dx_{m+j} &= - \sum_1^m{}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}} \, dx_\beta \\ dp_{m+j} &= \sum_1^m{}_\beta \left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z} \right) dx_\beta \\ d \lg \mu &= \sum_1^m{}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z} \, dx_\beta \text{ [1]} \end{aligned} \right\} j = 1, 2 .. n - m, \qquad \text{(A)}$$

denen die Formel der gesuchten Transformation bei den konstanten $y_{m+1}, \ldots y_{2n+1-m}$ genügen sollen, oder besser: denen die Relationen zwischen x_i, z, p_{m+j}, welche man nach Elimination der $y_1 .. y_m$ erhält, genügen sollen. Die Anzahl dieser Relationen ist $2n + 2 - 2m$ und ist derjenigen der Gleichungen (A) gleich. Also mus das System (A) der gewöhnlichen Differentialgleichungen ein unbeschränkt integrables sein. Wenn wir das beweisen, so wird damit bewiesen, dass die Formel der Transformation, die den Gleichungen des Systems (A) genügen, diejenigen der gesuchten Transformation sind. Wenn in der Tat das System (A) ein unbeschränkt integrables ist, so bestimmt es die Veränderlichen z, x_{m+j}, p_{m+j}, μ, als Funktionen der $x_1 \ldots x_m$. Wenn wir jetzt diese letzten als die beliebigen Funktionen der $y_1 \ldots . y_{2n+1-m}$, die in Bezug auf $y_1 \ldots . y_m$ unabhängig sind, betrachten, so zerfällt das System (A) infolge der Willkürlichkeit der $dy_1 \ldots . dy_m$ in m Systeme (A′), woraus folgt, dass die Formel der Transformation, die den Gleichungen (A) genügen, diejenigen der gesuchten Transformation sind.

Wir sollen also beweisen, dass das System (A) ein unbeschränkt integrables ist. Wir geben zu diesem Zwecke einige Hilfsformeln.

[1]) G. Morera (l. c.) hat dieses System, die erste und letzte Gleichungen ausgenommen, als das erste Pfaffsche des Ausdruckes Ω' gefunden.

a) Es sei $F(x_1 \ldots . x_n\, z\, p_{m+1} \ldots . p_n)$ eine beliebige Funktion der x_i, z, p_{m+j}.

Wenn wir durch $\frac{dF}{dx_\lambda}$ $(\lambda = 1, 2 \ldots m)$ den Koeffizienten bei dx_λ im Differentialausdrucke dF, wo dx_{m+j}, dz, dp_{m+j} durch ihre Werte aus den Gleichungen (A) eingesetzt sind, bezeichnen, so erhalten wir:

a) $$\frac{dF}{dx_\lambda} = \frac{\partial F}{\partial x_\lambda} - \sum_{1}^{n-m}{}^{j} \frac{\partial F}{\partial x_{m+j}} \frac{\partial \Theta_\lambda}{dp_{m+j}} + \frac{\partial F}{\partial z}\left(\Theta_\lambda - \sum_{1}^{n-m}{}^{j} p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\lambda}{dp_{m+j}}\right) +$$

$$+ \sum_{1}^{n-m}{}^{j} \frac{\partial F}{\partial p_{m+j}}\left(\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j}\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z}\right) = \frac{\partial F}{\partial x_\lambda} + \Theta_\lambda \frac{\partial F}{\partial z} +$$

$$+ \sum_{1}^{n-m}{}^{j} \left[\frac{\partial F}{\partial p_{m+j}}\left(\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j}\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z}\right) - \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial p_{m+j}}\left(\frac{\partial F}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j}\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right] =$$

$$= \Big[F,\ p_\lambda - \Theta_\lambda\Big]_{p_\lambda = \Theta_\lambda.}$$

b) $$\frac{\partial}{\partial x_{m+j}}\Big[p_\lambda - \Theta_\lambda,\ p_\mu - \Theta_\mu\Big]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu}} = \frac{\partial}{\partial x_{m+j}}\left[\frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x_\lambda} + \Theta_\lambda \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial z} -\right.$$

$$- \left(\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_\mu} + \Theta_\mu \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z}\right) + \sum_{1}^{n-m}{}^{j}\left(\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j}\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial \Theta_\mu}{\partial p_{m+j}} -$$

$$\left. - \left(\frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j}\frac{\partial \Theta_\mu}{\partial z}\right)\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial p_{m+j}}\right] = \Big[-\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_{m+j}},\ p_\mu - \Theta_\mu\Big]_{p_\mu = \Theta_\mu} +$$

$$+ \Big[p_\lambda - \Theta_\lambda,\ -\frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x_{m+j}}\Big]_{p_\lambda = \Theta_\lambda} + \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_{m+j}}\frac{\partial \Theta_\mu}{\partial z} - \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x_{m+j}}\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z}.$$

c) $$\frac{\partial}{\partial p_{m+j}}\Big[p_\lambda - \Theta_\lambda,\ p_\mu - \Theta_\mu\Big]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu}} = \Big[-\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial p_{m+j}},\ p_\mu - \Theta_\mu\Big] +$$

$$+ \Big[p_\lambda - \Theta_\lambda,\ -\frac{\partial \Theta_\mu}{\partial p_{m+j}}\Big]_{p_\lambda = \Theta_\lambda.}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big[p_\lambda - \Theta_\lambda,\ p_\mu - \Theta_\mu\Big]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu}} = \Big[-\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z},\ p_\mu - \Theta_\mu\Big]_{p_\mu = \Theta_\mu} +$$

d) $$+ \Big[p_\lambda - \Theta_\lambda,\ -\frac{\partial \Theta_\mu}{\partial z}\Big]_{p_\lambda = \Theta_\lambda.}$$

Wir werden jetzt zum Beweise übergehen. Was die erste Gleichung

$$dz = \sum_1^m{}^\beta \left(\Theta_\beta - \sum_1^{n-m}{}^j p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}} \right) dx_\beta$$

betrifft, haben wir, dass infolge der Formel (a)

$$A_{\lambda\mu} = \frac{d}{dx_\lambda} \left(\Theta_\mu - \sum_1^{n-m}{}^j p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial p_{m+j}} \right) - \frac{d}{dx_\mu} \left(\Theta_\lambda - \sum_1^{n-m}{}^j p_{m+s} \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial p_{m+j}} \right) =$$

$$= \left[p_\mu - \Theta_\mu,\ \Theta_\lambda - \sum_1^{n-m}{}^j p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial p_{m+j}} \right]_{p_\mu = \Theta_\mu} -$$

$$- \left[p_\lambda - \Theta_\lambda;\ \Theta_\mu - \sum_1^{n-m}{}^j p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial p_{m+j}} \right]_{p_\lambda = \Theta_\lambda} =$$

$$= \left[p_\lambda - \Theta_\lambda;\ p_\mu - \Theta_\mu \right]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu}} + \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_\mu} + \Theta_\mu \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z} +$$

$$+ \left[p_\lambda - \Theta_\lambda,\ p_\mu - \Theta_\mu \right]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu}} - \left(\frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x_\lambda} + \Theta_\lambda \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial z} \right) +$$

$$+ \sum_1^{n-m}{}^j p_{m+j} \left\{ \left[p_\lambda - \Theta_\lambda, \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial p_{m+j}} \right]_{p_\lambda = \Theta_\lambda} - \right.$$

$$\left. - \left[p_\mu - \Theta_\mu, \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial p_{m+j}} \right]_{p_\mu = \Theta_\mu} \right\} + \sum_1^{n-m}{}^j \left\{ \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial p_{m+j}} \left(\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial p_{m+j}} \left(\frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z} \right) \right\} = \left[p_\lambda - \Theta_\lambda,\ p_\mu - \Theta_\mu \right]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu}} -$$

$$- \sum_1^{n-m}{}^j p_{m+j} \left\{ \left[p_\lambda - \Theta_\lambda,\ - \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial p_{m+j}} \right]_{p_\lambda = \Theta_\lambda} + \right.$$

$$\left. + \left[- \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial p_{m+i}},\ p_\mu - \Theta_\mu \right]_{p_\mu = \Theta_\mu} \right\}.$$

Woraus infolge der Formel (d) sich ergibt

$$A_{\lambda\mu} = \Big[p_\lambda - \Theta_\lambda,\ p_\mu - \Theta_\mu\Big]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu}} -$$

$$-\sum_1^j p_{m+j} \frac{\partial}{\partial p_{m+j}} \Big[p_\lambda - \Theta_\lambda,\ p_\mu - \Theta_\mu\Big]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu .}}$$

Wir wollen jetzt die Gleichung

$$dx_{m+j} = -\sum_1^m {}^\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}} dx_\beta \quad (j = 1, 2 \ldots n - m)$$

betrachten. Infolge der Formel (a) ist

$$B_{\lambda\mu} = \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_{m+j}} - \frac{d}{dx_\lambda} \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x_{m+j}} = -\Big[p_\mu - \Theta_\mu, \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial p_{m+j}}\Big]_{p_\mu = \Theta_\mu} +$$

$$+\Big[p_\lambda - \Theta_\lambda, \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial p_{m+j}}\Big]_{p_\lambda = \Theta_\lambda .}$$

Infolge der Formel (c) ist

$$B_{\lambda\mu} = -\frac{\partial}{\partial p_{m+j}} \Big[p_\lambda - \Theta_\lambda,\quad p_\mu - \Theta_\mu\Big]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu .}}$$

Wenn wir weiter die Gleichung

$$dp_{m+j} = \sum_1^m {}^\beta \Big(\frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial z}\Big) dx_\beta \quad (j = 1, 2 \ldots n - m)$$

betrachten, so erhalten wir

$$C_{\lambda\mu} = \frac{d}{dx_\lambda}\Big(\frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial z}\Big) - \frac{d}{dx_\mu}\Big(\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z}\Big) =$$

$$= \Big[p_\mu - \Theta_\mu, \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z}\Big]_{p_\mu = \Theta_\mu} -$$

$$-\Big[p_\lambda - \Theta_\lambda, \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial z}\Big]_{p_\lambda = \Theta_\lambda} =$$

$$= \Big[p_\mu - \Theta_\mu, \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_{m+j}}\Big]_{p_\mu = \Theta_\mu} - \Big[p_\lambda - \Theta_\lambda, \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x_{m+j}}\Big]_{p_\lambda = \Theta_\lambda} -$$

$$- p_{m+j}\left\{\left[p_\lambda - \Theta_\lambda, \frac{\partial\Theta_\mu}{\partial z}\right]_{p_\lambda = \Theta_\lambda} - \left[p_\mu - \Theta_\mu, \frac{\partial\Theta_\lambda}{\partial z}\right]_{p_\mu = \Theta_\mu}\right\} +$$

$$+ \left(\frac{\partial\Theta_\lambda}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j}\frac{\partial\Theta_\lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial\Theta_\mu}{\partial z} - \left(\frac{\partial\Theta_\mu}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j}\frac{\partial\Theta_\mu}{\partial z}\right)\frac{\partial\Theta_\lambda}{\partial z}.$$

Infolge der Formel (b) ist

$$C_{\lambda\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{m+j}}\left[p_\lambda - \Theta_\lambda, p_\mu - \Theta_\mu\right]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu}} +$$

$$+ p_{m+j}\frac{\partial}{\partial z}\left[p_\lambda - \Theta_\lambda, \quad p_\mu - \Theta_\mu\right]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu}}.$$

Es bleibt endlich die Gleichung

$$d\,lg\,\mu = \sum_{1}^{m}{}_\beta \frac{\partial\Theta^\beta}{\partial z}\,dx_\beta.$$

Infolge der Formel (a) ist

$$D_{\lambda\mu} = \frac{d}{dx_\lambda}\frac{\partial\Theta_\mu}{\partial z} - \frac{d}{dx_\mu}\frac{\partial\Theta_\lambda}{\partial z} = \left[p_\mu - \Theta_\mu, \frac{\partial\Theta_\lambda}{\partial z}\right]_{p_\mu = \Theta_\mu} -$$

$$- \left[p_\lambda - \Theta_\lambda, \frac{\partial\Theta_\mu}{\partial z}\right]_{p_\lambda = \Theta_\lambda}.$$

Infolge der Formel (d) ist

$$D_{\lambda\mu} = \frac{\partial}{\partial z}\left[p_\lambda - \Theta_\lambda, \quad p_\mu - \Theta_\mu\right]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu}}.$$

Da aber das System (I′) ein vollständiges und

$$\left[p_\lambda - \Theta_\lambda, \quad p_\mu - \Theta_\mu\right]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu}} \equiv 0$$

ist, so erhalten wir

$$A_{\lambda\mu} = B_{\lambda\mu} = C_{\lambda\mu} = D_{\lambda\mu} = 0$$

und das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen (A) ist ein unbeschränkt integrables. Die Formeln der Transformation

$$x_i = \varphi_i(y_1 \dots y_{2n+1-m}) \quad (i = 1, 2 \dots n), \quad z = \varphi(y_1 \dots y_{2n+1-m}),$$

$$p_{m+j} = \psi_{m+j}(y_1 \dots y_{2n+1-m}) \quad (j = 1, 2 \dots n - m),$$

die diesen Gleichungen bei den konstanten Werten der $y_{m+1}, \dots y_{2n+1-m}$ genügen, haben die Eigenschaft, dass der Differentialausdruck

$$\Omega' = dz - \Theta_1 dx_1 - \dots - \Theta_m dx_m - p_{m+1} dx_{m+1} - \dots - p_n dx_n,$$

wo

$$\left[p_\lambda - \Theta_\lambda, \quad p_\mu - \Theta_\mu\right]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu}} = 0$$

ist, nach dieser Transformation die Variablen $y_1 \dots y_m$ höchstens im gemeinschaftlichen Faktor μ der Koeffizienten enthält.

Wir werden diese Transformation die Pfaffsche Transformation für den Differentialausdruck Ω' nennen.

Wir werden der grösseren Symmetrie halber noch diejenigen m Gleichungen hinzufügen, denen die Grössen $p_1 \dots p_m$ genügen, die mit Hilfe der Gleichungen

$$p_i - \Theta_i(x_1 \dots x_n z p_{m+1} \dots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

als Funktionen der $y_1 \dots y_{2n+1-m}$ ausgedrückt sind, vorausgesetzt, dass $y_{m+1} \dots y_{2n+1-m}$ als Konstanten zu betrachten sind.

Wir sehen, dass

$$dp_i = \sum_1^m{}_\beta \frac{d\Theta_i}{dx_\beta} dx_\beta \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

ist, wenn wir die Bezeichnung der Formel (a) benutzen.

Wir erhalten infolge dieser letzten, dass

$$dp_i = \sum_1^m{}_\beta \left[p_\beta - \Theta_\beta, -\Theta_i\right]_{p_\beta = \Theta_\beta} dx_\beta =$$

$$= \sum_1^m{}_\beta \left[p_\beta - \Theta_\beta, p_i - \Theta_i\right]_{\substack{p_\beta = \Theta_\beta \\ p_i = \Theta_i}} dx_\beta + \sum_1^m{}_\beta \left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_i} + \Theta_i \frac{\partial \Theta_\beta}{dz}\right) dz_\beta$$

ist. Da aber $\left[p_\beta - \Theta_\beta,\ p_i - \Theta_i\right]_{\substack{p_\beta = \Theta_\beta \\ p_i = \Theta_i}} = 0$, und $p_i = \Theta_i$ ist, so ist

$$dp_i = \sum_{1}^{m}{}_\beta \left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z} \right) dx_\beta \quad (i = 1,\ 2 \ldots . m)$$

Das ganze System (A) nimmt jetzt die folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned}
dz &= \sum_{1}^{m}{}_\beta \left(\Theta_\beta - \sum_{1}^{n-m}{}_j\, p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}} \right) dx_\beta \\
dx_{m+j} &= - \sum_{1}^{m}{}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}}\, dx_\beta \quad (j = 1,\ 2 \ldots n - m) \\
dp_i &= \sum_{1}^{m}{}_\beta \left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z} \right) dx_\beta \quad (i = 1,\ 2 \ldots n) \\
d\, lg\, \mu &= \sum_{1}^{m}{}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z}\, dx_\beta .
\end{aligned}\right\} \quad (A_0)$$

Die Formel der gesuchten Transformation

$$x_i = \varphi_i (y_1 \ldots y_{2n+1-m}) \quad (i = 1, 2 \ldots n), \quad z = \varphi (y_1 \ldots y_{2n+1-m}),$$
$$p_i = \psi_i (y_1 \ldots y_{2n+1-m}) \quad (i = 1, 2 \ldots, n),$$

wo $p_i - \Theta_i = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, sollen diesen Gleichungen (A_0) genügen. Dieses System ist auch ein unbeschränkt integrables. Wir werden zu diesem Zwecke nur beweisen, dass die Gleichungen

$$dp_i = \sum_{1}^{m}{}_\beta \left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z} \right) dx_\beta \quad (i = 1,\ 2 \ldots m)$$

erfüllt sind, wenn man $p_i = \Theta_i$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ setzt, wo x_{m+j}, p_{n+j}, z durch ihre Werthe aus den übrigen $2(n-m)+1$ Gleichungen des Systems (A_0), d. h. des unbeschränkt integrablen Systems (A), ersetzt sind. Wir erhalten nach der Einsetzung

$$d\Theta_i = \sum_{1}^{m}{}_\beta \left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_i} + \Theta_i \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z} \right) dx_\beta ,$$

woraus infolge der Gleichungen (A_0) oder (A)

$$\sum_{1}^{m}{}_\beta \frac{d\Theta_i}{dx_\beta}\, dx_\beta = \sum_{1}^{m}{}_\beta \left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_i} + \Theta_i \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z} \right) dx_\beta ,$$

oder infolge der Formel (a)

$$\sum_{1}^{m}{}_{\beta}\,[\Theta_i,\ p_\beta - \Theta_\beta]_{p_\beta = \Theta_\beta}\, dx_\beta = \sum_{1}^{m}{}_{\beta}\left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_i} + \Theta_i \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z}\right) dx_\beta,$$

oder endlich

$$\sum_{1}{}_{\beta}\,[p_i - \Theta_i,\ p_\beta - \Theta_\beta]_{\substack{p_i = \Theta_i \\ p_\beta = \Theta_\beta}}\, dx_\beta = 0 \text{ ist.}$$

Da aber

$$[p_i - \Theta_i,\ p_\beta - \Theta_\beta]_{\substack{p_i = \Theta_i \\ p_\beta = \Theta_\beta}} = 0$$

ist, so haben wir die Identität erhalten.

Es folgt daraus, dass das System (A_0) nach der Einsetzung $p_i = \Theta_i$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ins System (A) übergeht.

Wenn wir also solche Formel der Transformation der Grösse x_i, z, p_i $(i = 1, 2 \ldots. n)$ auf die neuen $y_1 \ldots. y_{2n+1-m}$, die den Gleichungen (A_0) und den Gleichungen $p_i - \Theta_i = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ bei den konstanten Werten der $y_{m+1} \ldots y_{2n+1-m}$ genügen, bestimmen, so erhalten wir die Formel der Pfaffschen Transformation für den Differentialausdruck Ω'.

2. Die Gleichungen (A_0) haben die Unbequemlichkeit, dass man bei der Bildung derselben nicht nur voraussetzt, dass die gegebenen Gleichungen (I′) in Bezug auf $p_1 \ldots p_m$ auflösbar sind, sondern auch die Werte derselben einführen soll. Wir wollen uns jetzt von dieser Unbequemlichkeit frei machen. Wir wissen dass

$$\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_i} = -\left|\frac{\dfrac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1} x_i p_{\beta+1} \ldots p_m)}}{\dfrac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)}}\right|_{p_\lambda = \Theta_\lambda} \quad \lambda = 1, 2 \ldots m;$$

$$\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}} = -\left|\frac{\dfrac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1} p_{m+j} p_{\beta+1} \ldots p_m)}}{\dfrac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)}}\right|_{p_\lambda = \Theta_\lambda} \quad \lambda = 1, 2 \ldots m;$$

$$\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z} = -\left|\frac{\dfrac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1}\, z\, p_{\beta+1} \ldots p_m)}}{\dfrac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)}}\right|_{p_\lambda = \Theta_\lambda \quad \lambda = 1, 2 \ldots m}$$

$$(i = 1, 2 \ldots n, \quad j = 1, 2 \ldots n - m),$$

Das System (A_0) hat also die Gestalt

$$\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)}\, dz =$$

$$\sum_1^m {}^\beta \left\{ \Theta_\beta \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)} + \sum_1^{n-m} {}^j\, p_{m+j} \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1}\, p_{m+j}\, p_{\beta+1} \ldots p_m)} \right\} dx_\beta$$

$$\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)}\, dx_{m+j} = \sum_1^m {}^\beta \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1}\, p_{m+j}\, p_{\beta+1} \ldots p_m)}\, dx_\beta$$

$$\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)}\, dp_i =$$

$$-\sum_1^m {}^\beta \left\{ \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1}\, x_i\, p_{\beta+1} \ldots p_m)} + p_i \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1}\, p_i\, p_{\beta+1} \ldots p_m)} \right\} dx_\beta$$

$$\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)}\, d\,lg\,\mu = -\sum_1^m {}^\beta \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1}\, z\, p_{\beta+1} \ldots p_m)}\, dx_\beta,$$

wo in den Determinanten statt p_i ihre Werte Θ_i $(i = 1, 2 \ldots m)$ eingesetzt sein sollen.

Wir schliessen daraus, dass die Formel der gesuchten Transformation den Gleichungen $p_i = \Theta_i$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ und den Gleichungen

$$\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)}\, dz =$$

$$= \sum_1^m {}^\beta \left(p_\beta \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)} + \sum_1^{n-m} {}^\beta\, p_{m+j} \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1}\, p_{m+j}\, p_{\beta+1} \ldots p_m)} \right) dx_\beta,$$

$$\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)}\, dx_{m+j} = \sum_1^m {}^\beta \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1}\, p_{m+j}\, p_{\beta+1} \ldots p_m)}\, dx_\beta,$$

$$(A_1) \quad \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)} dp_i =$$

$$-\sum_1^m{}_\beta \left\{ \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1} x_i p_{\beta+1} \ldots p_m)} + p_i \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1} p_i p_{\beta+1} \ldots p_m)} \right\} dx_\beta,$$

$$\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)} d\,lg\,\mu = -\sum_1^m{}_\beta \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1}\, z\, p_{\beta+1} \ldots p_m)} dx_\beta$$

genügen sollen.

Dieses System geht nach der Einsetzung $p_i = \Theta_i$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ins System (A_0) mit derselben Einsetzung und also ins System (A) über. Dieses System ist also ein unbeschränkt integrables, und die Formeln der Transformation der Grössen $x_i\, z\, p_i$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ auf die neuen $y_1 \ldots\ldots y_{2n+1-m}$, die diesen Gleichungen und den Gleichungen $p_i = \Theta_i$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ bei den konstanten Werten der $y_{m+1} \ldots y_{2n+1-m}$ genügen, sind die Formel der Pfaffschen Transformation für den Differentialausdruck Ω'.

Wir können diese Gleichungen in der folgenden bequemeren Form darstellen. Wir wollen nämlich die Matrix

$$(B) \quad \left\| \begin{array}{lll} dx_1 & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_1}, \ldots\ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial p_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ dx_n & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_n}, \ldots\ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial p_n} \\ dz & \sum_1^n{}_i\, p_i \dfrac{\partial F_1}{\partial p_i}, \ldots\ldots & \sum_1^n{}_i\, p_i \dfrac{\partial F_m}{\partial p_i} \\ dp_1, & -\left(\dfrac{\partial F_1}{dx_1} + p_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\right), \ldots\ldots & -\left(\dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial F_m}{\partial z}\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ dp_n, & -\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\right), \ldots\ldots & -\left(\dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial F_m}{\partial z}\right) \\ d\,lg\,\mu, & -\dfrac{\partial F_1}{\partial z}, \ldots\ldots & -\dfrac{\partial F_m}{\partial z} \end{array} \right\|$$

betrachten.

Setzen wir voraus, dass wir alle Determinanten $m+1$ Grades dieser Matrix gleich Null setzen. Wir erhalten dann eine Reihe der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Unabhängig von einander sind nur diejenigen zwischen ihnen, die durch Hinzufügung zur Matrix der von Null verschiedenen Determinante $\frac{\partial (F_1 \dots F_m)}{\partial (p_1 \dots p_m)}$ der ersten Kolonne und je einer der übrigen Reihen gebildet sind. Diese Gleichungen sind, wie man leicht ersieht, mit den Gleichungen (A_1) identisch. Wir werden diese Gleichungen die Gleichungen der Matrix (B) nennen. Die Formeln der Transformation der Grössen x_i, z, p_i $(i = 1, 2 \dots m)$ auf die neuen $y_1 \dots y_{2n+1-m}$, die den Gleichungen der Matrix (B), wo $\frac{\partial (F_1 \dots F_m)}{\partial (p_1 \dots p_m)} \neq 0$ ist, bei den konstanten Werten der $y_{m+1} \dots y_{2n+1-m}$ und wo $p_1 \dots p_m$ den Gleichungen (I′)

$$F_i (x_1 \dots x_n \, z \, p_1 \dots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

des vollständigen Systems genügen, sind diejenigen der Pfaffschen Transformation für den Differentialausdruck

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n,$$

wo $p_1 \dots p_m$ den Gleichungen (I′) genügen.

Um noch ein allgemeineres Ergebnis zu erhalten, wollen wir uns noch von dieser Voraussetzung frei machen, dass die gegebenen Gleichungen (I′) in Bezug auf $p_1 \dots p_m$ unabhängig sind.

Wir setzen nämlich voraus, dass die Gleichungen des vollständigen Systems (I′) in Bezug auf z. B. $x_1 \dots x_q p_{q+1} \dots p_m$ unabhängig sind. Wir transformieren die Gleichungen (I′) mit Hilfe der Formel

$$z = H + x_1 p_1 + \dots + x_q p_q, \quad x_i = p_i', \quad p_i = - x_i' \quad (i = 1, 2 \dots q)$$

auf die neuen

$$F_i' (x_1' \dots x_q' \, x_{q+1} \dots x_n, H, p_1' \dots p_q' \, p_{q+1}, \dots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots m), \qquad (\mathrm{I}'')$$

die in Bezug auf $p_1' \dots p_q' \, p_{q+1} \dots p_m$ auflösbar sind, und auch den Differentialausdruck Ω', wo $x_1 \dots x_q p_{q+1} \dots p_m$ den Gleichungen (I′) genügen, auf den neuen

$$\Omega'' = dH - p_1' dx_1' - \dots - p_q' dx_q' - p_{q+1} dx_{q+1} - \dots - p_n dx_n,$$

wo die Veränderlichen $p_1' \dots p_q' \, p_{q+1} \dots p_m$ den neuen Gleichungen (I″) genügen. Da die Gleichungen (I″) ein vollständiges System bilden, so können wir zum Ausdruck Ω'' den vorigen Schluss anwenden.

Die Matrix (B′) hat in diesem Falle dieselbe Gestallt, wie (B), nur müssen wir statt $F_i, x_j\, p_j$ $(i = 1, 2 \,.\,.\, m,\ \ j = 1, 2 \,.\,.\, q)$ $F_i'\ x_j'\ p_i'$ setzen.

Die Gleichungen dieser Matrix bestimmen die Formeln der Pfaffschen Transformation für den Differentialausdruck Ω''. Wenn wir diese letzten auf die ursprünglichen Variablen transformieren, so erhalten wir offenbar die Gleichungen für die Formeln dieser Transformation für den Differentialausdruck Ω'. Wir wollen jetzt sehen, wie die Gleichungen der Matrix (B′) in den ursprünglichen Veränderlichen $x_i\, z\, p_i$ sich darstellen. Offenbar ist

$$\frac{\partial F'}{\partial p'_\alpha} = \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} + p_\alpha \frac{\partial F}{\partial z}, \quad -\left(\frac{\partial F'}{\partial x'_\alpha} + p'_\alpha \frac{\partial F'}{\partial H}\right) = \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \qquad (\alpha = 1,\ 2 \ldots q)$$

$$\frac{\partial F'}{\partial x_{q+j}} = \frac{\partial F}{\partial x_{q+j}}, \quad \frac{\partial F'}{\partial p_{q+j}} = \frac{\partial F}{\partial p_{q+j}}, \quad \frac{\partial F'}{\partial H} = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Also ist die Matrix (B′):

$$
\begin{array}{llll}
-\,dp_1, & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}+p_1\dfrac{\partial F_1}{\partial z} & ,\ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}+p_1\dfrac{\partial F_m}{\partial z} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
-\,dp_q, & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_q}+p_q\dfrac{\partial F_1}{\partial z} & ,\ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_q}+p_q\dfrac{\partial F_m}{\partial z} \\
dx_{q+1}, & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_{q+1}} & ,\ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial p_{q+1}} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
dx_n, & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_n} & ,\ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial p_n} \\
dz-d(x_1p_1+\ldots+x_qp_q), & \displaystyle\sum_1^q \alpha\, x_\alpha\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_\alpha}+p_\alpha\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)+\sum p_{q+j}\frac{\partial F_1}{\partial p_{q+j}}, & & \displaystyle\sum \alpha\, p_\alpha\left(\frac{\partial F_m}{\partial x_\alpha}+p_\alpha\frac{\partial F_m}{\partial z}\right)+\sum p_{q|j}\frac{\partial F_1}{\partial p_{q|j}} \\
dx_1, & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_1} & ,\ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial p_1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
dx_q, & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_q} & ,\ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial p_q} \\
dp_{q+1},\ldots & -\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x_{q+1}}+p_{q+1}\dfrac{\partial F_1}{\partial z}\right) & ,\ldots & -\left(\dfrac{\partial F_m}{\partial x_{q+1}}+p_{q+1}\dfrac{\partial F_m}{\partial z}\right) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
dp_n,\ \ldots & -\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}+p_n\dfrac{\partial F_1}{\partial z}\right) & ,\ldots & -\left(\dfrac{\partial F_m}{\partial x_n}+p_n\dfrac{\partial F_m}{\partial z}\right) \\
d\,lg\,\mu, & -\dfrac{\partial F_1}{\partial z} & ,\ldots & -\dfrac{\partial F_m}{\partial z}
\end{array}
$$

oder nach der einfachen Umformung

$$\left\|\begin{array}{lll}
dp_1, & -\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial F_1}{\partial z}\right), \ldots\ldots & -\left(\frac{\partial F_m}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial F_m}{\partial z}\right) \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
dp_q, & -\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_q}+p_q\frac{\partial F_1}{\partial z}\right), \ldots\ldots & -\left(\frac{\partial F_m}{\partial x_q}+p_q\frac{\partial F_m}{\partial z}\right) \\
dx_{q+1}, & \frac{\partial F_1}{\partial p_{q+1}}, \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_{q+1}} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
dx_n, & \frac{\partial F_1}{\partial p_n}, \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_n} \\
dz, & \sum_1^n {}_i\, p_i\frac{\partial F_1}{\partial p_i}, \ldots\ldots & \sum_1^n {}_i\, p_i\frac{\partial F_m}{\partial p_i} \\
dx_1, & \frac{\partial F_1}{\partial p_1}, \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_1} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
dx_q, & \frac{\partial F_1}{\partial p_q}, \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_q} \\
dp_{q+1}, & -\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_{q+1}}+p_{q+1}\frac{\partial F_1}{\partial z}\right), \ldots\ldots & -\left(\frac{\partial F_m}{\partial x_{q+1}}+p_{q+1}\frac{\partial F_m}{\partial z}\right) \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
dp_n, & -\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_n}+p_n\frac{\partial F_1}{\partial z}\right), \ldots\ldots & -\left(\frac{\partial F_m}{\partial x_n}+p_n\frac{\partial F_m}{\partial z}\right) \\
d\,lg\,\mu, & -\frac{\partial F_1}{\partial z}, \ldots\ldots & -\frac{\partial F_m}{\partial z}.
\end{array}\right\|$$

Wir sehen, dass die Matrix (B′) in den Veränderlichen $x_i\, z\, p_i$ mit der Matrix (B) identisch ist; der Unterschied besteht darin, dass die nicht verschwindende Determinante m^{es} Grades ist:

$$\left|\begin{array}{ccc} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial F_1}{\partial z}, & \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial F_m}{\partial z} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_q}+p_q\frac{\partial F_1}{\partial z}, & \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_y}+p_q\frac{\partial F_m}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_{q+1}}, & \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_{q+1}} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_m}, & \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m}, \end{array}\right|$$

wie es sein soll, da

$$\frac{\partial(F_1\ldots F_m)}{\partial(x_1\ldots x_q\, p_{q+1}\ldots p_m)} \neq 0$$

ist (§ 2, 3). Wir können den folgenden allgemeinen Satz III aussprechen: Man kann den Differentialausdruck

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n,$$

wo die Variablen $x_i\, z\, p_i$ durch m Relationen

$$F_i(x_1\ldots x_n\, z\, p_1\ldots p_n) = 0, \tag{I'}$$

die ein vollständiges System bilden, verbunden sind, immer auf die neuen Variablen $y_1\ldots y_{2n+1-m}$ so transformieren, dass m der neuen Variablen z. B. $y_1\ldots y_m$ höchstens im gemeinschaftlichen Faktor μ der Koeffizienten enthalten sein werden. Die notwendige und hinreichende Bedingung ist, dass die Formeln der Transformation zusammen mit μ den Differentialgleichungen der Matrix (B) bei den konstanten Werten der $y_{m+1}\ldots y_{2n+1-m}$ und den Gleichungen (I′) genüge leisten.

3. Wir gehen jetzt zur Bestimmung der Formeln der Pfaffschen Transformation über.

Wir setzen von jetzt ab voraus, dass das gegebene System der Differentialgleichungen in Involution ist. Die Differentialgleichungen der Matrix (B_1)

$$
(\mathrm{B}_1)\qquad
\left\| \begin{array}{llll}
dx_1 & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_1} & ,\ldots\ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial p_1} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
dx_n & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_n} & ,\ldots\ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial p_n} \\
dz & \sum\limits_1^n{}_i\, p_i \dfrac{\partial F_1}{\partial p_i} & ,\ldots\ldots & \sum\limits_1^n{}_i\, p_i \dfrac{\partial F_m}{\partial p_i} \\
dp_1 & -\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\right) & ,\ldots\ldots & -\left(\dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial F_m}{\partial z}\right) \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
dp_n & -\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\right) & ,\ldots\ldots & -\left(\dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial F_m}{\partial z}\right)
\end{array} \right\|
$$

und folglich der Matrix (B) haben m Integrale der Form

$$F_i\,(x_1 \ldots x_n\, z\, p_1 \ldots p_n) = C_i \quad (i = 1, 2 \ldots m).$$

In der Tat es folgen aus den Gleichungen der Matrix (B_1), die Gleichungen der Matrix

$$
\left\| \begin{array}{llll}
dx_1 & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_1} & ,\ldots\ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial p_1} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
dx_n & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_n} & ,\ldots\ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial p_n} \\
dz & \sum p_i \dfrac{\partial F_1}{\partial p_i} & ,\ldots\ldots & \sum p_i \dfrac{\partial F_m}{\partial p_i} \\
dp_1 & -\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\right) & ,\ldots\ldots & -\left(\dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial F_m}{\partial z}\right) \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
dp_n & -\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\right) & ,\ldots\ldots & -\left(\dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial F_m}{\partial z}\right) \\
dF_\alpha & [F_\alpha, F_1] & ,\ldots\ldots & [F_\alpha, F_m].
\end{array} \right\|
$$

Es folgt daraus, dass

$$dF_\alpha = 0 \quad \text{und} \quad F_\alpha = C_\alpha$$

ist, da

$$[F_\alpha F_i] = 0 \quad (\alpha, i = 1, 2 \ldots m)$$

ist und nicht alle Determinanten m^{tes} Grades der Matrix (B_1) gleich Null sind.

Wir wissen, dass die Formel der Pfaffschen Transformation des Differentialausdrucks

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n,$$

wo $F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, oder vielmehr die Relationen zwischen $x_i z p_i$, die aus ihnen nach der Elimination der Veränderlichen $y_1 \ldots y_m$ sich ergeben, den Differentialgleichungen der Matrix (B) zusammen mit der Funktion μ genügen sollen. Da die Gleichungen der Matrix (B) von den Gleichungen der Matrix (B_1) nur durch eine Gleichung, die die Funktion μ enthält, sich unterscheiden, so sollen die Formeln dieser Transformation nur den Gleichungen der Matrix (B_1) genügen. Da die oben erwähnten Relationen zwischen $x_i z p_i$ auch die Gleichungen

$$F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

und keine andere, die von $y_{m+1} \ldots y_{2n+1-m}$ frei sind, enthalten, so sind diese Relationen ein partikuläres System der Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1), das aus dem vollständigen System mit Hilfe der m gewissen Relationen zwischen den Integrationskonstanten sich ergibt. Setzen wir voraus, dass ein solches System der Integrale der Gleichungen der Matrix (B_1) gefunden ist. Diese Integrale bestimmen nur $2n + 1 - m$ der Variablen $x_i z p_i$ als die Funktionen der m übrigen; diese letzten bleiben also willkürliche Funktionen der $y_1 \ldots y_{2n+1-m}$, welche in Bezug auf $y_1 \ldots y_m$ unabhängig sind.

Wenn wir z. B. voraussetzen, dass die gegebenen Gleichungen (I′) in Bezug auf $p_1 \ldots p_m$ unabhängig sind, so bestimmen die Gleichungen der Matrix (B_1) die Veränderlichen x_{m+j}, z, p_i als die Funktionen der $x_1 \ldots x_m$ und sind diese letzten willkürliche Funktionen der $y_1 \ldots y_{2n+1-m}$, welche in Bezug auf $y_1 \ldots y_m$ unabhängig sind. Was die Wahl dieser letzten betrifft, so werden wir sie in folgender Weise wählen: wir setzen voraus, dass wir auch diese Funktionen aus den gewöhnlichen unbeschränkt integrablen Differentialgleichungen

$$dx_k = A_k dy_1 + \ldots + B_k dy_m \quad (k = 1, 2 \ldots m)$$

bestimmen. Wir werden in dieser Weise zusammen mit den $2n+1-m$ Differentialgleichungen der Matrix (B_1) ein unbeschränkt integrables System der $2n+1$ Differentialgleichungen haben. Wir wollen jetzt ein System der Hauptintegrale desselben in Bezug auf $y_i = y_i^0$ $(i=1, 2 \dots m)$ wählen, wo y_i^0 die willkürlich gewählten Zahlen, die nur die Integrale des Systems nicht illusorisch machen, sind.

Es sei dieses System

$$\begin{aligned} x_i &= x_i' \, (y_1 \dots y_m \, x_1^0 \dots p_n^0) \quad i = 1, 2 \dots n \\ p_i &= p_i' \, (y_1 \dots y_m \, x_1^0 \dots p_n^0) \\ z &= z' \, (y_1 \dots y_m \, x_1^0 \dots p_n^0), \end{aligned}$$

wo $x_1^0 \dots p_n^0$ die Anfangswerte der Variablen $x_i \, p_i \, z$ sind. Wir können dieses System noch in der Form

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} x_{m+j} &= x_{m+j} \, (x_1 \dots x_m \, x_1^0 \dots p_n^0) \quad (j = 1, 2 \dots n-m) \\ p_i &= p_i \, (x_1 \dots x_m \, x_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 1, 2 \dots n) \\ z &= z \, (x_1 \dots x_m \, x_1^0 \dots p_n^0), \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \qquad x_i = x_i' \, (y_1 \dots y_m \, x_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

darstellen, wo $2n+1-m$ Gleichungen (a) die vollständigen Integrale der Gleichungen der Matrix (B_1) mit $2n+1$ Konstanten sind. Dieses System hat die Eigenschaft, dass es bei $x_i = x_i^0$ $(i = 1, 2 \dots m)$ die Form

$$x_{m+j} = x_{m+j}^0, \quad p_i = p_i^0, \quad z = z_0$$

annimmt. Wir können es ein System der Hauptintegrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) nennen. Die gesuchten Formeln der Pfaffschen Transformation haben diese Form, wo nur die Grössen $x_i^0 \, z_0 \, p_i^0$ gewisse Funktionen der $y_{m+1} \dots y_{2n+1-m}$ sind. Da die Anzahl der Grössen $x_i^0 \, z_0 \, p_i^0$ grösser, als die Anzahl der $y_{m+1} \dots y_{2n+1-m}$ um $2m$ Einheiten ist, so sollen zwischen $x_i^0 \, z_0 \, p_i^0$ $2m$ Relationen stattfinden. Da die Veränderlichen $x_i \, z \, p_i$ den Gleichungen

$$\text{(I')} \qquad F_i \, (x_1 \dots x_n \, z \, p_1 \dots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

genügen sollen und da aus den Gleichungen (a) die Gleichungen

$$F_i \, (x_1 \dots x_n \, z \, p_1 \dots p_n) = F_i \, (x_1^0 \dots x_n^0 \, z_0 \, p_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

sich ergeben, so muss

$$F_i \, (x_1^0 \dots x_n^0 \, z_0 \, p_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

sein, damit die Veränderlichen $x_i\, z\, p_i$ den Gleichungen (I′) genügen. Was aber die übrigen m Relationen zwischen $x_i^0\, z_0\, p_i$ betrifft, so bleiben diese letzten ganz willkürlich, nur sollen sie keine Relationen zwischen $x_i\, z\, p_i$ nach sich ziehen, da diese Veränderlichen nur den Relationen (I′) genügen sollen; mit anderen Worten diese m übrigen Relationen

$$\varphi_i(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0 p_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

sollen keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sein. Wenn wir jetzt voraussetzen, dass die $2n + 1 - 2m$ unabhängigen von der Veränderlichen $x_i^0\, z_0\, p_i^0$ gerade $y_{m+1}, \ldots y_{2n+1-m}$ sind, so erhalten wir die Formeln der Pfaffschen Transformation

$$\begin{aligned}
x_{m+j} &= x_{m+j}(x_1 \ldots x_m x_1^0 \ldots p_n^0) \quad (j = 1, 2 \ldots n - m) \\
p_i &= p_i(x_1 \ldots x_m x_1^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 1, 2 \ldots n) \qquad \text{(a)} \\
z &= z(x_1 \ldots x_m x_1^0 \ldots p_n^0),
\end{aligned}$$

$$x_i = x_i'(y_1 \ldots y_m x_1^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 1, 2 \ldots m), \qquad \text{(b)}$$

wo $F_i(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0 p_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi_i(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0 p_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ ist.

Die Veränderlichen $x_i\, z\, p_i$ genügen in der Tat den Differentialgleichungen der Matrix (B_1), da die Gleichungen (a) ihre Integrale sind, und sie erfüllen die m gegebenen Gleichungen

$$F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m).$$

Wenn wir jetzt die Funktion μ hinzufügen, die aus der Gleichung

$$\frac{\partial(F_1 \ldots F_m)}{\partial(p_1 \ldots p_m)}\, dlg\mu = -\sum_1^m{}_\beta \frac{\partial(F_1 \ldots F_m)}{\partial(p_1 \ldots p_{\beta-1}\, z\, p_{\beta+1} \ldots p_m)}\, dx_\beta \qquad \text{(c)}$$

bestimmt ist, so werden wir alle Bedingungen des Satzes III erfüllen, und sind die Formeln (a), (b) diejenigen der Pfaffschen Transformation.

Was die Funktion μ betrifft, so erhalten wir, im Falle, dass

$$\frac{\partial(F_1 \ldots F_m)}{\partial(p_1 \ldots p_{\beta-1}\, z\, p_{\beta+1} \ldots p_m)} = 0 \quad (\beta = 1, 2 \ldots m)$$

ist und nur in diesem Fall, d. h. im Falle, dass $\frac{\partial F_i}{\partial z} = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist und nur in diesem Falle, $dlg\mu = 0$, d. h. $lg\mu$ enthält nicht die Veränderlichen $y_1 \ldots y_m$ und diese Veränderlichen verschwinden nach der Pfaffschen Transformation des Ausdruckes Ω'.

Wenn aber nicht alle $\frac{\partial F_i}{\partial z}$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ Null sind, so enthält $lg\,\mu$ die Veränderlichen $y_1 \ldots y_m$ und folglich $x_1 \ldots x_m$.

Wir können in diesem Falle zwischen den m Differentialgleichungen

$$dx_k = A_k dy_1 + \ldots + B_k dy_m \quad (k = 1, 2 \ldots m)$$

die Gleichung (c) wählen. Wir können dann $lg\,\mu$ willkürlich wählen und die Gestalt der Funktionen $x_1 \ldots x_m$ hängt von der Gestalt des $lg\,\mu$ ab. Wir können z. B. $lg\,\mu = y_1$ wählen.

Wir haben also den allgemeinen Satz IV: Um die allgemeinsten Formeln der Transformation des Ausdruckes

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n$$

zu erhalten, wo $F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$, $[F_i, F_k] = 0$ $(i, k = 1, 2 \ldots m)$ ist, nach der m der neuen Veränderlichen z. B. $y_1 \ldots y_m$ höchstens im gemeinschaftlichen Faktor μ der Koeffizienten des transformierten Ausdruckes bleiben, so soll man das System der $2n + 1 - m$ Hauptintegrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) bestimmen, und zwischen den Anfangswerten $x_i^0 z_0 p_i^0$ der Veränderlichen $x_i z p_i$ $2m$ Relationen

$$F_i(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0 p_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad \varphi(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0 p_1^0 \ldots p_n^0) = 0$$
$$(i = 1, 2 \ldots m)$$

aufstellen, wo die m letzten Gleichungen nur keine Integrale der Gleichungen der Matrix (B_1) sein sollen. Wenn man die m unabhängigen der Veränderlichen $x_i z p_i$ als willkürliche Funktionen der $y_1 \ldots y_{2n+1-m}$, welche in Bezug auf $y_1 \ldots y_m$ unabhängig sind, und wenn man die $2n + 1 - 2m$ unabhängigen der Grössen $x_i^0 z_0 p_i^0$ für $y_{m+1} \ldots y_{2n+1-m}$ nimmt, so bekommt man dann die Formeln der gesuchten Transformation auf die neuen Variablen $y_1 \ldots y_{2n+1-m}$.

Im Falle wenn nicht alle $\frac{\partial F_i}{\partial z}$ verschwinden, so kann man die Wahl der willkürlichen Funktionen der $y_1 \ldots y_{2n+1-m}$ so einrichten, dass $lg\,\mu$ eine von vornherein gegebene Funktion ist.

Wenn aber $\frac{\partial F_i}{\partial z} = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ sind, so verschwinden $y_1 \ldots y_m$ nach dieser Transformation.

Da die Gleichungen

$$\varphi_i(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0 p_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

fast willkürlich sind, so hat man unendlich viele Pfaffsche Transformationen. Es seien die Formeln zweier solchen Transformationen vorgelegt:

$$\begin{aligned} x_{m+j} &= x_{m+j}(x_1 \ldots x_m x_1^0 \ldots p_n^0) & j &= 1, 2 \ldots n - m \\ p_i &= p_i(x_1 \ldots x_m x_1^0 \ldots p_n^0) & i &= 1, 2 \ldots n \\ z &= z(x_1 \ldots x_m x_1^0 \ldots p_n^0), \end{aligned} \tag{a}$$

wo $F_i(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0 p_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi_i(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0 p_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist und $x_1 \ldots x_m$ gewisse Funktionen der $y_1 \ldots y_{2n+1-m}$, unabhängige in Bezug auf $y_1 \ldots y_m$ sind; und

$$\begin{aligned} x_{m+j} &= x_{m+j}(x_1 \ldots x_m x_1^{00} \ldots p_n^{00}) & j &= 1, 2 \ldots n - m \\ p_i &= p_i(x_1 \ldots x_m x_1^{00} \ldots p_n^{00}) & i &= 1, 2 \ldots n \\ z &= z(x_1 \ldots x_m x_1^{00} \ldots p_n^{00}), \end{aligned} \tag{a'}$$

wo $F_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$, $\psi_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, und $x_1 \ldots x_m$ gewisse Funktionen der $t_1 \ldots t_{2n+1-m}$ unabhängige in Bezug auf $t_1 \ldots t_m$ sind. Es ist klar, dass es die Formeln der Transformation der Veränderlichen $y_1 \ldots y_{2n+1-m}$ auf die Variablen $t_1 \ldots t_{2n+1-m}$ gibt.

Die Gleichungen (a), wo nur $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$, und die Gleichungen (a′) wo nur $\psi_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, sind zwei Systeme der $2n + 1 - m$ vollständigen Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1). Da das unbeschränkt integrable System der gewöhnlichen Differentialgleichungen nur ein System der vollständigen Integrale besitzt, so sind $2n + 1 - m$ unabhängigen der Grössen $x_i^0 z_0 p_i^0$ die Funktionen der $2n + 1 - m$ unabhängigen der Grössen $x_i^{00} z_0 p_i^{00}$. Diese Relationen bleiben auch dann, wenn wir $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $F_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ setzen, da aus der Gleichungen $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ die Gleichungen $F_i(x_1 \ldots p_n) = 0$ und also $F_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ folgen. Es folgt daraus, dass $y_{m+1} \ldots y_{2n+1-m}$ die Funktionen nur $t_{m+1}, \ldots t_{2n+1-m}$ sind.

§ 4.

1. Wir wollen jetzt den Differentialausdruck

$$\Omega' = dz - p_1 dz_1 - \ldots - p_n dx_n$$

wo $F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$, $[F_i, F_k] = 0$ $(i, k = 1, 2 \ldots m)$ ist, mit Hilfe der Formeln der Pfaffschen Transformation transformieren. Wir werden

$$\Omega' = \mu M$$

erhalten, wo der Differentialausdruck M die Variablen $y_1 \ldots . y_m$ nicht enthält. Wir sehen, dass der Differentialausdruck

$$\frac{1}{\mu}\Omega'$$

nach der Pfaffschen Transformation die Veränderlichen $y_1 \ldots . y_m$ nicht enthält. Wir können also vor der Transformation in den Formeln der Transformation $y_i = y_i^0$ setzen. Wir bekommen dann, dass

$$\frac{1}{\mu}\Omega' = \frac{1}{\mu^0}\Omega'_0 = \frac{1}{\mu^0}(dz_0 - p_1^0\,dx_1^0 - \ldots . - p_n^0\,dx_n^0)$$

ist, wo $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist Wir haben also, dass

$$\Omega' = \frac{\mu}{\mu^0}(dz_0 - p_1^0\,dx_1^0 - \ldots . - p_n^0\,dx_n^0)$$

ist, wo $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist Wenn $F_i(i = 1, 2 \ldots . m)$ z nicht enthalten, so enthält μ die Veränderlichen $y_1 \ldots y_m$ nicht, und ist $\mu = \mu_0$, d. h. $\frac{\mu}{\mu_0} = 1$, so dass in diesem Falle

$$\Omega' = dz_0 - p_1^0\,dz_1^0 - \ldots - p_n^0\,dx_n^0$$

ist, wo $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist.

Um die Gleichung $\Omega' = 0$, wo $F_i(x_1 \ldots . x_n\, z\, p_1 \ldots . p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, zu integrieren, so sollen wir entweder

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 0,$$

oder

$$dz_0 - p_1^0\,dx_1^0 - \ldots - p_n^0\,dx_n^0 = 0,$$

wo $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ ist, setzen. Wir können $\frac{\mu}{\mu_0} = 0$ nur dann setzen, wenn nicht alle $\frac{\partial F_i}{\partial z}$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ verschwinden.

Wir wollen also

$$\Omega_0' = dz^0 - p_1^0\,dx_1^0 - \ldots - p_n^0\,dx_n^0 = 0,$$

wo $F_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$, $\varphi_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \dots m)$ ist, setzen. Wir sollen die Gleichung $\Omega' = 0$ und also die Gleichung $\Omega_0' = 0$ durch $n + 1 - m$ Integrale integrieren, oder anders gesagt, wir sollen die Gleichung

$$\Omega_0 = dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

durch $n + 1 + m$ Integrale

$$\Theta_\alpha(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \dots n + 1 - m),$$

$$F_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad \varphi_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots m) \qquad \text{(f)}$$

integrieren, zwischen denen es m gegebenen Gleichungen

$$F_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots m),$$

die die Integrale der Gleichungen der Matrix (B_1) sind, und m Gleichungen

$$\varphi_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots m),$$

die nur keine Integrale der Gleichungen dieser Matrix sind, gibt. Wenn wir umgekehrt ein solches System der $n + 1 + m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ finden, so können wir daraus $n + 1 - m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega' = 0$ und folglich $n + 1$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega = 0$, d. h. das gemeinsame Integral der partiellen Differentialgleichungen (I) und also der partiellen Differentialgleichungen (1) finden. In der Tat es sei

$$\Theta_\alpha(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \dots n + 1 - m),$$

$$F_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad \varphi_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots m) \qquad \text{(f)}$$

ein solches System der $n + 1 + m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$. Es ist unmöglich, dass es infolge dieser Gleichungen

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \infty$$

wäre. In der Tat, im Falle wenn $\frac{\partial F_i}{\partial z} = 0$ $(i = 1, 2 \dots m)$ ist, ist

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1.$$

Wenn aber nicht alle $\frac{\partial F_i}{\partial z}$ $(i = 1, 2 \dots m)$ verschwinden, so können wir die Formel der Transformation (b) so wählen, dass

$lg\,\mu$ eine von vornherein gegebene Form z. B. $lg\,\mu = y_1$ haben wird. Dann wird

$$\frac{\mu}{\mu_0} = e^{y_1 - y_1^0}$$

sein und infolge der Unabhängigkeit der Veränderlichen $y_1 \ldots\ldots y_{2n+1-m}$ einen ganz willkürlichen Wert haben. Wenn wir also die Gleichungen

$$\Theta_\alpha\,(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m),$$

wo $F_i\,(x_1^0 \ldots\ldots p_n^0) = 0$, $\varphi_i\,(x_1^0 \ldots\ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, mit Hilfe der Formel der Pfaffschen Transformation auf die ursprünglichen Variablen $x_i\,z\,p_i$ transformieren, so bekommen wir $n + 1 - m$ Gleichungen

$$\vartheta_\alpha\,(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m),$$

wo $F_i\,(x_1 \ldots p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, die $n + 1 - m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega' = 0$ sind. Die $n + 1$ Gleichungen

$$\vartheta_\alpha\,(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m),$$
$$F_j\,(x_1 \ldots p_1) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

sind also ein gemeinsames Integral der partiellen Differentialgleichungen (I) und (1). Wenn wir noch darauf aufmerksam machen, dass wir bei der Transformation nur die Formel (a), die das System der Hauptintegrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, benutzen, so können wir den Satz V aussprechen, indem wir das in dieser Weise erhaltene gemeinsame Integral nichtsingulär nennen:

Satz V. Um das gemeinsame nichtsinguläre Integral der $m < n + 1$ partiellen Differentialgleichungen (I) in Involution zu erhalten, bestimme man ein System $n + 1 + m$ Integrale der Differentialgleichung

$$\Omega_0 = dz_0 - p_1^0\,dx_1^0 - \ldots - p_n^0\,dx_n^0 = 0:$$

$$\Theta_\alpha\,(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m),$$

$$\text{(f)} \quad F_i\,(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad \varphi_i\,(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m),$$

das m gegebenen Gleichungen (I')

$$F_i\,(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m),$$

und m Gleichungen

$$\varphi_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots m),$$

die nur keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, enthält. Wenn man aus diesen $n+1+m$ Gleichungen (f) und aus den $2n+1-m$ Hauptintegralen der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) die Grössen $x_i^0\, z_0\, p_i^0$ eliminiert, so bekommt man $n+1$ Gleichungen, die das gemeinsame nichtsinguläre Integral der partiellen Differentialgleichungen (I) bilden.

Wenn aus diesen $n+1$ Gleichungen nur eine Relation zwischen $x_i\, z$ folgt, so stellen diese das gemeinsame nichtsinguläre Integral im gewöhnlichen Sinne dar; sie stellen im entgegengesetzten Falle ein gemeinsames nichtsinguläres Integral im erweiterten Sinne von S. Lie dar.

Was solches System der $n+1+m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ betrifft, das m gegebene Gleichungen (I′) und m Gleichungen, die nur keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, enthält, so bestimmen wir, offenbar ein solches ohne die Integration in folgender Weise: Wir bestimmen ein System der $n+1$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$, das $k\,(0 \leqslant k \leqslant m)$ von der gegebenen Gleichungen $F_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \dots m)$ und $m - q\;(q \leqslant k)$ Gleichungen $\varphi_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$, die keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, enthält. Wenn wir noch die $m-k$ übrigen der Gleichungen (I′) und $k\,(\geqslant q)$ willkürliche Gleichungen, die q Gleichungen erhalten, die keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, hinzufügen, so bekommen wir das gewünschte System der $n+1$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$. Jedes solches System der Integrale kann in dieser Weise erhalten werden.

Man kann beweisen, dass alle gemeinsamen nichtsingulären Integrale der gegebenen partiellen Differentialgleichungen (I) in Involution aus denjenigen Systemen der $n+1+m$ Integrale der Differentialgleichungen $\Omega_0 = 0$ erhalten werden können, die dieselben m Gleichungen $\varphi_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \dots m)$, die keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, enthalten. Es sei das gemeinsame nichtsinguläre Integral

$$\vartheta_\alpha(x_1 \dots p_n = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \dots n+1-m),$$
$$F_i(x_1 \dots p_n\, z\, p_1 \dots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

der Differentialgleichungen (I) vorgelegt. Wir setzen voraus, dass wir dasselbe aus dem System der $n+1+m$ Integrale

$$\Theta_\alpha'(x^{00}, \ldots p_n^{00}) = 0 \ (\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m),$$
$$F_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0, \quad \psi_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0 \ (i = 1, 2 \ldots m)$$

der Differentialgleichung $\Omega_{00} = 0$. erhalten haben. Wenn wir also die Gleichungen

$$\Theta_\alpha'(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0 \ (\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m)$$

wo $F_i x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$, $\psi_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, mit Hilfe der Formel der Pfaffschen Transformation z. B.

$$\begin{array}{lll} & x_{m+j} = x_{m+j}(x_1 \ldots x_m\, x_1^{00} \ldots p_n^{00}) & j = 1, 2 \ldots n-m \\ & p_i = p_i(x_1 \ldots x_m\, x_1^{00} \ldots p_n^{00}) & i = 1, 2 \ldots n \\ (\mathrm{a}') & z = z(x_1 \ldots x_m\, x_1^{00} \ldots p_n^{00}) & \end{array}$$

wo $F_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $\psi_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, auf Variable $x_i\, z\, p_i$ transformieren, so bekommen wir die Gleichungen

$$\vartheta_\alpha(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m),$$

wo $F_i(x_1 \ldots p_n)$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist. Wir können dieses Integral aus dem System der $n+1+m$ Integrale der Differentialgleichung

$$\Omega_0 = dz_0 - p_1^0\, dx_1^0 - \ldots - p_n^0\, dx_n^0 = 0\,;$$
$$\Theta_\alpha(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \ (\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m),$$
$$F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad \varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \ (i = 1, 2 \ldots m),$$

erhalten, das die von vornherein gegebenen Gleichungen

$$\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \ (i = 1, 2 \ldots m),$$

die keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, enthält. In der Tat sind die Gleichungen

$$\begin{array}{lll} & x_{m+j} = x_{m+j}(x_1 \ldots x_m\, x_1^{00} \ldots p_n^{00}) & j = 1, 2 \ldots n-m \\ (\mathrm{a}') & p_i = p_i(x_1 \ldots x_m\, x_1^{00} \ldots p_n^{00}) & i = 1, 2 \ldots n \\ & z = z(x_1 \ldots x_m\, x_1^{00} \ldots p_n^{00}) & \\ (\mathrm{b}') & x_i = x_i''(t_1 \ldots t_m\, x_1^{00} \ldots p_u^{00}) & i = 1, 2 \ldots m \end{array}$$

wo $F_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $\psi_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, und die Gleichungen

$$\begin{array}{lll} & x_{m+j} = x_{m+j}(x_1 \ldots x_m\, x_1^0 \ldots p_n^0) & j = 1, 2 \ldots n-m \\ (\mathrm{a}) & p_i = p_i(x_1 \ldots x_m\, x_1^0 \ldots p_n^0) & i = 1, 2 \ldots n \\ & z = z(x_1 \ldots x_m\, x_1^0 \ldots p_n^0) & \\ (\mathrm{b}) & x_i = x_i'(y_1 \ldots y_m\, x_1^0 \ldots p_n^0) & i = 1, 2 \ldots m \end{array}$$

wo $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $\varphi_i(x_1^0 \ldots = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist zwei Systeme der Formeln der Pfaffschen Transformation des Differentialausdruckes Ω', so dass

$$\Omega' = \frac{v}{v_{00}}(dz_{00} - p_1^{00}\,dx_1^{00} - \ldots - p_n^{00}\,dx_n^{00})$$

wo $F_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $\psi_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, und

$$\Omega' = \frac{\mu}{\mu_0}(dz_0 - p_1^0\,dx^0 - \ldots - p_n^0\,dx_n^0),$$

wo $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$. $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, ist. Es existieren offenbar die Formeln der Transformation der neuen Variablen des einen Systems auf die neuen Variablen des anderen. Wenn wir mit $t_{m+1} \ldots t_{2n+1-m}$ die unabhängigen Grössen aus den $x_i^{00}\, z_{00}\, p_i^{00}$ und mit $y_{m+1}, \ldots y_{2n+1-m}$ diejenigen aus den $x_i^0\, z_0\, p_i^0$ bezeichnen, so wissen wir, dass $t_{m+1}, \ldots t_{2n+1-m}$ die Funktionen der $y_{m+1}, \ldots y_{2n+1-m}$ sind. Diese letzten Formeln transformiren die Gleichung

$$dz_{00} - p_1^{00}\,dx_1^{00} - \ldots - p_n^{00}\,dx_n^{00} = 0,$$

wo $F_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$, $\psi_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, auf die neue

$$dz_0 - p_1^0\,dx_1^0 - \ldots - p_n^0\,dx_n^0 = 0$$

wo $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist. Es folgt daraus, dass $n + 1 - m$ Integrale

$$\Theta_\alpha'(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m)$$

wo $F_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$, $\psi_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, der ersten in die $n + 1 - m$ Integrale $\Theta_\alpha(x_1^0 \ldots . p_n^0) = 0$, wo $F_i(x_1^0 \ldots . p_n^0) = 0$, $\varphi_i(x_1^0 \ldots . p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots . m)$ ist, der zweiten mit Hilfe dieser Formel übergehen. Es ist klar, dass wenn wir diese letzten auf die ursprünglichen Variablen $x_i\, z\, p_i$ transformieren, so bekommen wir die Gleichungen

$$\vartheta_\alpha(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m),$$

wo $F_i(x_1 \ldots p_n) = 0$ ist, die $n + 1 - m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega' = 0$ bilden. Wir schliessen daraus, dass das nichtsinguläre Integral der partiellen Differentialgleichungen (I)

$$\vartheta_\alpha(x_1 \ldots p_n) = 0,\ F_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m,\ i = 1, 2 \ldots m)$$

aus demjenigen Systeme der $n+1+m$ Integrale

$$\Theta_\alpha (x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \dots n+1-m),$$
$$F_i (x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \;\; \varphi_i (x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \;\; (i = 1, 2 \dots m)$$

der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$, das die m gegebenen Gleichungen $\varphi_i (x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ enthält, erhalten werden kann. Wir können diesen Schluss auch in anderer Weise aussprechen: Die Nichtsingularität des Integrales der partiellen Differentialgleichungen (I) ist eine invariante Eigenschaft hinsichtlich auf alle Pfaffsche Transformationen.

2. Wir wollen jetzt eine Bemerkung über den Zusammenhang zwischen den Gleichungen

$$\text{(f)} \qquad \Theta_\alpha (x_1 \dots p_n) = 0, \;\; F_i (x_1 \dots p_n) = 0,$$
$$\varphi_i (x_1 \dots p_n) = 0 \;\; (\alpha = 1, 2 \dots n+1-m, \;\; i = 1, 2 \dots m)$$

und den Gleichungen

$$\text{(g)} \quad \vartheta_\alpha (x_1 .. p_n) = 0 \;\; F_i (x_1 .. p_n) = 0 \;\; (\alpha = 1, 2 .. n+1-m \;\; i = 1.2 .. m)$$

machen. Wir erhalten das gemeinsame nichtsinguläre Integral (g) der Differentialgleichungen (I) durch Elimination der Grössen $x_i^0 \, z_0 \, p_i^0$ aus den Gleichungen

$$\text{(f}'\text{)} \qquad \Theta_\alpha (x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \;\; F_i (x_1^0 \dots p_n^0) = 0,$$
$$\varphi_i (x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \dots n+1-m, \; i = 1, 2 \dots m)$$

die $n+1+m$ Integrale der Differentialgleichungen $\Omega_0 = 0$ bilden, und aus den $2n+1-m$ Hauptintegralen der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) z. B.

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} x_{m|j} &= x_{m|j} (x_1 \dots x_m \, x_1^0 \dots p_n^0) & j &= 1, 2 \dots n-m \\ p_i &= p_i (x_1 \dots x_m \, x_1^0 \dots p_n^0) & i &= 1, 2 \dots n \\ z &= z (x_1 \dots x_m \, x_1^0 \dots p_n^0), \end{aligned}$$

oder anders gesagt: wir erhalten das gemeinsame Integral (g) der Differentialgleichungen (I) durch die Transformation der Gleichungen

$$\Theta_\alpha (x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \; F_i (x_1^0 .. p_n^0) = 0 \;\; \alpha = 1, 2 .. n+1-m, \; i = 1, 2 .. m),$$

wo $\varphi_i (x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \;\; (i = 1, 2 \dots m)$ ist, auf die neuen Variablen $x_i \, z \, p_i$ mit Hilfe der Formeln

$$\text{(a}'\text{)} \qquad \begin{aligned} x_{m|j} &= x_{m|j} (x_1 \dots x_m \, x_1^0 \dots p_n^0) \\ p_i &= p_i (x_1 \dots x_m \, x_1^0 \dots p_n^0) \\ z &= z (x_1 \dots x_m \, x_1^0 \dots p_n), \end{aligned}$$

wo $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist. Wenn wir umgekert in die Gleichungen (g) statt x_{m+j}, p_i, z ihre Werte (a′) einführen, so bekommen wir die Gleichungen (f′), wo $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ ist. Wir können diese letzte Transformation in folgender Weise ausführen: da die Gleichungen (g) nach der Transformation die Veränderlichen $x_1 \ldots x_m$ nicht enthalten, so können wir diesen letzten in den Gleichungen (g), sowie in den Formeln der Transformation (a′), willkürliche Werte beilegen. Wir wollen statt $x_1 \ldots x_m$ diese Werte der $x_1^0 \ldots x_m^0$ einsetzen, die den Gleichungen

$$\varphi_i(x_1^0 \ldots x^0_m \, x^0_{m+1} \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

genügen. Die Formel der Transformation gehen dann in

$$x_{m+j} = x^0_{m+j}, \quad p_i = p_i^0 \quad z = z_0$$

über. Wenn wir also in den Gleichungen (g) statt $x_1 \ldots p_n$ die Werte $x_1^0 \ldots p_n^0$, wo $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, einsetzen, so bekommen wir die Gleichungen

$$\vartheta_\alpha(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \qquad \text{(g′)}$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m, \; i = 1, 2 \ldots m)$$

wo $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist. Wir sehen also, dass die Gleichungen (f′) und (g′) identisch sind. Dieser Schluss ist richtig, insofern wir die oben erwähnte Substitution der Werte von $x_1^0 \ldots p_m^0$ ausführen können, d. h. insofern die Gleichungen (g) und die Gleichungen

$$\varphi_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

verträglich sind. Es folgt daraus, dass die Gleichungen

$$\Theta_\alpha(x_1 \ldots p_n) = 0, \quad F_i(x_1 \ldots p_n) = 0, \quad \varphi_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \qquad \text{(f)}$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots m + 1 - m, \; i = 1, 2 \ldots m)$$

und die Gleichungen

$$\vartheta_\alpha(x_1 \ldots p_n) = 0, \quad \bar{F}_i(x_1 \ldots p_n) = 0, \quad \varphi_i(x_1 \ldots p_n) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m, \; i = 1, 2 \ldots m)$$

identisch sind, insofern die Gleichungen

$$\vartheta_\alpha(x_1 \ldots p_n) = 0 \;\; F_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \;\; (\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m, \; i = 1, 2 \ldots m)$$

infolge der Gleichungen $\varphi_i(x_1 \ldots p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ nicht illusorisch werden. Wir gehen nach dieser Bemerkung zu den Integralen im gewöhnlichen Sinne des Systems in Involution (I) über.

Wenn die Glechungen

(g) $$\vartheta_\alpha(x_1 \ldots p_n) = 0, \quad F_i(x_1 \ldots p_n) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m, \; i = 1, \ldots m)$$

das gemeinsame Integral im gewöhnlichen Sinne des Systems (I) darstellen, so folgt aus ihnen nur eine Relation zwischen $x_i\, z$. Dieses Integral ist nur dann möglich, wenn aus den gegebenen Gleichungen (I′) höchsten eine Relation zwischen $x_i\, z$ folgt. Wenn es eine solche gibt und z den gegebenen Gleichungen genüge leistet, so ist diese ein einziges gemeinsames Integral im gewöhnlichen Sinne. Wir werden im folgenden voraussetzen, dass die gegebenen Gleichungen (I′) in Bezug auf m der p_i unabhängig sind. Das gemeinsame nichtsinguläre Integral im gewöhnlichen Sinne kann aus diesem System der $n + 1 + m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ erhalten werden, das nie mehr als $m + 1$ Relation zwischen $x_i\, z$ enthält. In der Tat wenn die Gleichungen $\varphi_i(x_1 \ldots p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind und wenn die Gleichungen (g) infolge dieser nicht illusorisch werden, so können wir das Integral im gewöhnlichen Sinne (g) aus dem Systeme der $n + 1 + m$ Integrale der Differentialgleichungen $\Omega_0 = 0$ erhalten, das die Gleichungen $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ enthält. Dieses System hat infolge der oben gemachten Bemerkung die Gestalt:

$$\vartheta_\alpha(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad \varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m, \; i = 1, 2 \ldots m),$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist. Da die $n + 1$ ersten Gleichungen die Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, so sehen wir, dass die in letzten Gleichungen, die keine Integrale dieser Differentialgleichungen sind, ohne diese Eigenschaft zu verlieren, frei von $p_1^0 \ldots p_m^0$ gemacht werden können.

Umgekehrt, man erhält mit Hilfe des Verfahrens des Satzes V ein gemeinsames Integral im gewöhnlichem Sinne aus dem Systeme (f) der $n + 1 + m$ Integrale der Differentialgleichungen $\Omega_0 = 0$, das nie mehr als $m + 1$ Relationen zwischen $x_i^0\, z_0$, deren m keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, enthält. Vor allem sei noch bemerkt: wir können $n + 1$ Integrale des Systems (f)

$$\Theta_\alpha(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad F_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \tag{f}$$
$$(\alpha = 1, 2 \dots n + 1 - m,\ i = 1, 2 \dots m)$$

mit Hilfe der in letzten

$$\varphi_i(x_1^0 \dots x_n^0 z_0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

so umformen, dass sie die $n+1$ Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sein werden. Wir wissen in der Tat, dass die Grössen $x_i^0 z_0 p_i^0$ in die $2n+1-m$ Integrale dieser Gleichungen nur mit Hilfe der $2n+1-m$ unabhängigen Funktionen $C_i(x_1^0 \dots p_n^0)$ eintreten. Wir können also $2n+1-m$ dieser Grössen z. B. x^0_{m+j}, z_0, p_i^0 durch $C_1 \dots C_{2n+1-m}$ und durch die m übrigen dieser Grössen $x_1^0 \dots x^0_m$ bestimmen. Wenn man diese Werte ins System (f) der Integrale einsetzt, so ergibt sich, dass die m letzten Gleichungen $\varphi_i = 0$ $(i = 1, 2 \dots, m)$ die Grössen $x_1^0 \dots x_m$ enthalten und in Bezug auf dieselben unabhängig sind, da diese Gleichungen keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind. Wenn die übrigen $n+1$ Gleichungen des Systems (f) $x_1^0 \dots x^0_m$ enthalten werden, so können wir dieselben mit Hilfe der m letzten Gleichungen eliminieren, und werden diese $n+1$ Gleichungen nur C_1, C_{2n-1-m} enthalten, d. h. sie werden zu Integralen der Differentialgleichungen der Matrix (B_1). Es sei das System (f) in dieser neuen Form

$$\vartheta_\alpha(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad F_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad \varphi_i(x_1^0 \dots x_n^0 z_0) = 0 \tag{f'}$$
$$(\alpha = 1, 2 \dots n + 1 - m,\ i = 1, 2 \dots m)$$

dargestellt. Wenn wir jetzt die Grössen $x_i^0 z_0 p_i^0$ aus den Gleichungen (f′) und den Gleichungen

$$\begin{aligned} x_{m+j} &= x_{m+j}(x_1 \dots x_m x_1^0 \dots p_n^0) & j &= 1, 2 \dots n - m \\ p_i &= p_i(x_1 \dots x_m x_1^0 \dots p_n^0) & i &= 1, 2 \dots n \\ z &= z(x_1 \dots x_m x_1^0 \dots p_n^0) \end{aligned} \tag{a}$$

eliminieren, so bekommen wir offenbar die Gleichungen

$$\vartheta_\alpha(x_1 \dots p_n) = 0, \quad F_i(x_1 \dots p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \dots n + 1 - m,\ i = 1, 2 \dots m)$$

die das gemeinsame Integral im gewöhnlichen Sinne der partiellen Differentialgleichungen (I) darstellen, da die Gleichungen (f′) nur $m+1$ Relationen zwischen $x_i^0 z_0$ enthalten. Wir können das System (f′) noch in der Form

4*

$$\vartheta'_\alpha(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \ (\alpha = 1, 2 \ldots n - m), \ F_i(x_i^0 \ldots p_n^0) = 0 \ (i = 1, 2 \ldots m)$$
$$\varphi(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0) = 0, \quad \varphi_i(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m) \qquad (f'')$$

darstellen. Mann kann beweisen, dass die $m+1$ letzten Gleichungen ganz willkürlich gewählt werden können, nur sollen m von ihnen keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix sein. Wenn wir in der Tat diese Gleichungen in dieser Weise wählen, und mit Hilfe derselben $m+1$ der Grössen $x_i^0 \, z_0$ aus der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ eliminieren, so bekommen wir die Gleichung mit nur $n-m$ Differentialen. Wenn man die $n-m$ Koeffizienten derselben gleich Null setzt und noch die Gleichungen $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \ (i = 1, 2 \ldots m)$ hinzufügt, so bekommt man das gewünschte System der Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$. Wenn das Integral im gewöhnlichem Sinne der Differentialgleichungen (I), dass wir aus den $n+1+m$ Integralen des Systems (f'') erhalten, die Gestalt

$$z = f(x_1 \ldots x_n)$$

hat, und wenn diese infolge der Gleichungen $\varphi_i(x_1 \ldots x_n z) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$, die keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, nicht illusorisch wird, so kann man das System (f'') noch in der Form

$$z = f(x_1^0 \ldots x_n^0), \quad p_\alpha^0 = \frac{\partial f}{\partial x_\alpha^0}, \quad \varphi_i(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n, \quad i = 1, 2 \ldots m)$$

darstellen. Es folgt daraus, dass die Gleichung $\varphi(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0) = 0$ die Folge der Gleichungen $z_0 = f(x_1^0 \ldots x_n^0)$, $\varphi_i(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, d. h. das Integral

$$z = f(x_1 \ldots x_n)$$

im gewöhnlichen Sinne genügt der von vornherein gegebenen Gleichung

$$\varphi(x_1 \ldots x_n z) = 0$$

infolge der m von vornherein gegebenen Relationen

$$\varphi_i(x_1 \ldots x_n z) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m),$$

die nur keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sein sollen.

Wir können also den folgenden Satz VI aussprechen:

Um ein gemeinsames nichtsinguläres Integral im gewöhnlichen Sinne der partiellen Differentialgleichungen (I), die in Bezug auf m der Veränderlichen $p_1 \dots . p_n$ unabhängig sind zu bekommen, soll man ein solches System der $n + 1 + m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ bestimmen, dass nie mehr als $m + 1$ Relationen zwischen $x_i^0 z_0$, die von vornherein gewählt werden können, und von denen m keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sein sollen, enthält, und hiermit nach dem Satze V verfahren.

Man kann in dieser Weise alle gemeinsamen nicht singulären Integrale im gewöhnlichen Sinne bestimmen. Dieses Integral hat die Eigenschaft, dass es infolge der m Relationen zwischen $x_i z$, die keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, der $m + 1^{ten}$ Relation zwischen $x_i z$ genügt.

3. Wir nennen das gemeinsame nichtsinguläre Integral der Differentialgleichungen (I) ein vollständiges, wenn es die Form

$$\vartheta_\alpha (x_1 \dots p_n C_1 \dots C_{n+1-m}) = 0, \quad F_i (x_1 \dots p_n) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2 \dots n + 1 - m, \quad i = 1, 2 \dots m) \tag{g}$$

hat, wo die $n + 1 - m$ ersten Gleichungen $n + 1 - m$ willkürliche Konstanten, von denen die gegebenen $F_i (x_1 \dots . p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \dots m)$ frei sind, enthalten und in Bezug auf dieselben unabhängig sind.

Jedes vollständige Integral kann aus diesem Systeme der $n + 1 + m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$:

$$\Theta_\alpha (x_1^0 \, . \, . \, p_n^0 \, C_1 \, . \, . \, C_{n+1-m}) = 0, \; F_i (x_1^0 \, . \, . \, p_n^0) = 0, \; \varphi_i (x_1^0 \, . \, . \, p_n^0) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2 \, . \, . \, n + 1 - m, \quad i = 1, 2 \, . \, . \, m) \tag{f}$$

erhalten werden, dessen $n + m - 1$ ersten Gleichungen die $n + 1 - m$ willkürlichen Konstanten $C_1, \dots . C_{n+1-m}$, von denen die übrigen $2m$ Gleichungen frei sind, enthalten und in Bezug auf dieselben unabhängig sind. Es ist klar, dass die Gleichungen $\varphi_i = 0$, die keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, keine willkürlichen Konstanten enthalten dürfen, da sie die Relationen zwischen den Integrationskonstanten $x_i^0 z_0 p_i^0$ bilden. Setzen wir nun voraus, dass die Gleichungen (g) und $\varphi_i (x_1 \, . \, . \, p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \dots m)$ verträglich sind. Das System der $n + 1 + m$ Integrale (f) der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$, das das System (g) gibt, hat die Form

$$\vartheta_\alpha(x_1^0 \,.\,.\, p_1^0\, C_1 \,.\,.\, C_{n+1-m}) = 0,\ F_i(x_1^0 \,.\,.\, p_n^0) = 0,\ \varphi_i(x_1^0 \,.\,.\, p_n^0) = 0,$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m, \quad i = 1, 2 \ldots m),$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist. Wenn wir umgekehrt ein System der $n + 1 + m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ mit den oben erwähnten Eigenschaften bestimmt haben, so erhalten wir daraus nach dem Satze V das vollständige Integral der partiellen Differentialgleichungen (I). Es sei dieses System der $n + 1 + m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$:

$$\Theta_\alpha(x_1^0 \,.\,.\, p_n^0\, C_1 \,.\,.\, C_{n+1-m}) = 0,\ F_i(x_1^0 \,.\,.\, p_n^0) = 0,\ \varphi_i(x_1^0 \,.\,.\, p_n^0) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2 \,.\,.\, n + 1 - m, \quad i = 1, 2 \,.\,.\, m). \tag{f}$$

Wir wissen, dass wir mit Hilfe der Gleichungen $\varphi_i = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ die ersten $n + 1 - m$ Gleichungen so umformen können, dass sie $n + 1 - m$ Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sein werden. Setzen wir nun voraus, dass das schon ausgeführt ist. Wenn wir also die Grössen $x_i^0\, z_0\, p_i^0$ aus den Gleichungen (f) und aus dem Systeme der $2n + 1 - m$ Hauptintegrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) eliminieren, so erhalten wir offenbar die Gleichungen

$$\Theta_\alpha(x_1 \ldots p_n\, C_1 \ldots C_{n+1-m}) = 0, \quad F_i(x_1 \ldots p_n) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m, \quad i = 1, 2 \ldots m),$$

die das vollständige gemeinsame Integral der partiellen Differentialgleichungen (I) bilden.

Wir haben also den Satz VII.

Um das gemeinsame vollständige Integral der partiellen Differentialgleichungen (I) zu erhalten, ist es hinreichend solches System der $n + 1 + m$ Integrale der Differentialgleichungen $\Omega_0 = 0$:

$$\Theta_\alpha(x_1^0 \,.\,.\, p_n^0\, C_1 \,.\,.\, C_{n+1-m}) = 0,\ F_i(x_1^0 \,.\,.\, p_n^0) = 0,\ \psi_i(x_1^0 \ldots p_1^0) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m, \quad i = 1, 2 \ldots m),$$

wo bei der Bezeichnung der vorigen Sätze nur $n + 1 - m$ ersten Gleichungen $n + 1 - m$ willkürlichen Konstanten, in Bezug auf welche sie unabhängig sind, enthalten, zu bestimmen und damit nach dem Satze V zu verfahren. Alle vollständigen Integrale können in dieser Weise erhalten werden.

Wenn das vollständige Integral es im gewöhnlichen Sinne sein soll, so soll das System der $n + 1 + m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ nicht nur den Bedingungen des Satzes VII, sondern auch denjenigen des Satzes VI genüge leisten. Wir erhalten das vollständige Integral, wenn wir diesem Systeme der $n+1+m$ Integrale die Form

$$z_0 = C, \quad x_i^0 = C_i \quad (i = 1, 2 \ldots n), \quad F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m),$$

wo $f_k(z_0\, x_1^0 \ldots x_n^0) = 0 \quad (k = 1, 2 \ldots m)$ ist, geben vorausgesetzt, dass die Gleichungen $f_k(z_0\, x_1^0 \ldots x_n^0) = 0$ keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind.

4. Fassen wir nun noch den Fall ins Auge, wenn die gegebenen Gleichungen (I′) in Involution in Bezug auf m der Grössen p_i z. B. in Bezug auf $p_1 \ldots p_m$ unabhängig sind. Die Differentialgleichungen der Matrix (B_1) bestimmen in diesem Falle die Veränderlichen x_{m+j}, p_i, z und haben kein Integral der Form $x_i =$ const. $(i = 1, 2 \ldots m)$. Wir können daher voraussetzen, dass die Gleichungen $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \ (i = 1, 2 \ldots m)$ des Systems der $n+1+m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ die Gestalt

$$x_i^0 = h_i \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

haben, wo h_i willkürlich gewählte Zahlen sind, die nur das System der Hauptintegrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) nicht illusorisch machen sollen. Alle vorigen Sätze lassen sich einfacher aussprechen:

Der Satz V hat die Form: Um das gemeinsame nichtsinguläre Integral der partiellen Differentialgleichungen (I) in Involution, die in Bezug auf $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_m}$ unabhängig sind, zu bestimmen, soll man die Differentialgleichung

$$dz_0 - p_{m+1}^0\, dx_{m+1}^0 - \ldots - p_n^0\, dx_n^0 = 0$$

durch $n+1-m$ Integrale

$$\Phi_\alpha(x_{m+1}^0 \ldots x_n^0\, z_0\, p_{m+1}^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m) \quad \text{(f)}$$

integrieren und die Grössen $x_{m+1}^0 \ldots x_n^0\, z_0\, p_{m+1}^0 \ldots p_n^0$ aus den Gleichungen (f) und den Gleichungen

$$F_i(h_1 \ldots h_m\, x_{m+1}^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m),$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_{m+j} = x_{m+j}(x_1 \ldots x_m\, h_1 \ldots h_m\, x_{m+1}^0 \ldots p_n^0) & j = 1, 2 \ldots n-m \\ p_i = p_i(x_1 \ldots x_m\, h_1 \ldots h_m\, x_{m+1}^0 \ldots p_n^0) & i = 1, 2 \ldots n \\ z = z(x_1 \ldots x_m\, h_1 \ldots h_m\, x_{m+1}^0 \ldots p_n^0), & \end{array}\right\} \quad \text{(a)}$$

wo die Gleichungen (a) das System der Hauptintegrale in Bezug auf $x_i = h_i$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) bilden, eliminieren.

Da die Gleichungen $x_i^0 = h_i$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ die Grössen p_j nicht enthalten, so enthält der Satz VI die Form: Wenn wir die Differentialgleichung

$$dz_0 - p_{m+1}^0 dx_{m+1}^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

durch $n + 1 - m$ Integrale

(f) $$\Phi_\alpha (x_{m+1}^0, \ldots p_n^0) = 0 \quad (\alpha = 1. 2 \ldots n + 1 - m),$$

die nur eine Relation zwischen $x_{m+j}^0 z_0$

$$\varphi (x_{m+1}^0 \ldots x_n^0 z_0) = 0,$$

die von vornherein gewählt werden kann enthalten. integrieren, und wenn wir die Grössen $x_{m+j}^0 z_0 p_i^0 p_i$ aus den Gleichungen (f) und den Gleichungen

$$F_i (h_1 \ldots h_m x_{m+1}^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m),$$
$$x_{m+j} = x_{m+j} (x_1 \ldots x_m h_1 \ldots h_m x_{m+1}^0 \ldots p_n^0) \quad j = 1, 2 \ldots m$$
$$p_i = p_i (x_1 \ldots x_m h_1 \ldots h_m x_{m+1}^0 \ldots p_n^0) \quad i = 1, 2 \ldots n$$
$$z = z (x_1 \ldots x_m h_1 \ldots h_m x_{m+1}^0 \ldots p_n^0)$$

eliminieren, so erhalten wir das gemeinsame nichtsinguläre Integral im gewöhnlichen Sinne der gegebenen Differentialgleichungen (I).

Sie hat die Eigenschaft bei den gegebenen Werten der Variablen $x_i = h_i$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ der gegebenen Gleichung

$$\varphi (x_{m+1} \ldots x_n z) = 0$$

zu genügen. Alle gemeinsamen Integrale im gewöhnlichen Sinne können in dieser Weise erhalten werden.

Endlich der Satz VII hat die Form: Wenn man die Differentialgleichung

$$dz_0 - p_{m+1}^0 dx_{m+1}^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

durch $n + 1 - m$ Integrale

(f) $$\Phi_\alpha (x_{m+1}^0 \ldots x_n^0 z_0 p_{m+1}^0 \ldots p_n^0, \; C_1 \ldots C_{n+1-m}) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m),$$

die in Bezug auf die $n+1-m$ willkürlichen Konstanten $C_1 \ldots C_{n+1-m}$ unabhängig sind, integriert und die Veränderlichen $x_{m+j}^0\, z_0\, p_{m+j}^0$ aus den Gleichungen

$$\Phi_\alpha\,(x_{m+1}^0 \ldots x_n^0\, z_0\, p_{m+1}^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad F_i\,(h_1 \ldots h_m\, x_{m+1}^0 \ldots p_n^0) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m, \quad i = 1, 2 \ldots m)$$

und den $2n+1-m$ Hauptintegralen in Bezug auf $x_i = p_i\ (i = 1, 2 \ldots m)$ der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) eliminiert, so wird man das gemeinsame vollständige Integral der partiellen Differentialgleichungen (I) erhalten. Alle vollständigen Integrale können in dieser Weise erhalten werden. Wenn dieses Integral es im gewöhnlichen Sinne sein soll, so soll aus den Gleichungen (f) nur eine Relation zwischen $x_i^0\, z_0$ folgen.

Diese Methode kann die Cauchysche Methode der Integration der partiellen Differentialgleichungen genannt werden.

5. Wir sehen, dass die Bedingung, dass $k\ (\leqslant n+1)$ partielle Differentialgleichungen (1) ein vollständiges System bilden oder zu einem solchen von $m \leqslant n+1$ Gleichungen sich reducieren lassen, nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist, damit sie ein gemeinsames Integral besitzen; wobei das vollständige System der m partiellen Differentialgleichungen ein vollständiges Integral mit $n+1-m$ willkürlichen Konstanten besitzt. Diese Theorie zeigt, dass es bei der Integration der Differentialgleichung

$$\Omega = dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = 0$$

$m \leqslant n+1$ Integrale

$$F_i\,(x_1 \ldots x_n\, z\, p_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

willkürlich anzunehmen möglich ist, die nur die Bedingung erfüllen, dass sie ein vollständiges System bilden oder zu einem solchen von $m \leqslant n+1$ Gleichungen sich reducieren lassen. Es ist klar, dass $n+1$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega = 0$ ein vollständiges System bilden. Es folgt leicht daraus die Jacobische Methode der Integration einer oder des Systems der partiellen Differentialgleichungen.

6. Diese Theorie enthält in der rein analytischen Form die Ergebnisse der analytisch-geometrischen Untersuchungen von S. Lie (M. Ann. Bd. 9). Wir werden uns beschränken, die hauptsächlichsten Sätze in der Form von S. Lie darzustellen.

Wir setzen voraus, dass die Definition des Elements des $n+1$ dimensionalen Raumes, des Elementvereins und der Integralmannigfaltigkeit M_q von q Dimensionen der gegebenen partiellen Differentialgleichungen (I) in Involution bekannt sind.

Man nennt eine charakteristische Mannigfaltigkeit von m Dimensionen des gegebenen Systems (I′) in Involution eine solche m-dimensionale Mannigfaltigkeit, deren Elemente den $2n+1-m$ Integralen der Differentialgleichungen der Matrix (B_1), zwischen denen m gegebene Gleichungen (I′)

$$F_i(x_1 \dots x_n\, z\, p_1 \dots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

sind, genügen. Das gegebene System (I′) in Involution besitzt $\infty^{2n+1-2m}$ charakteristische Mannigfaltigkeiten [1]).

Der Satz IV kann zweierlei geometrische Bedeutung haben:

a) Wenn $x_i^0\, z_0\, p_i^0$ konstant sind $(F_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \;\; i = 1, 2 \dots m)$, so ist dann

$$dz - p_1\, dx_1 - \dots - p_n\, dx_n = \frac{\mu}{\mu_0}(dz_0 - p_1^0\, dx_1^0 - \dots - p_n^0\, dx_n^0) = 0$$

d. h. jedes Element der charakteristischen Mannigfaltigkeit liegt mit allen benachbarten derselben Mannigfaltigkeit vereinigt.

b) Wenn $(x_i^0\, z_0\, p_i^0)$, $(x_i^0 + dx_i^0,\; z_0 + dz_0,\; p_i^0 + dp_i^0)$ zwei benachbarte Elemente zweier benachbarten charakteristischen Mannigfaltigkeiten sind, so erhalten wir, dass wenn zwei benachbarte Elemente zweier charakteristischen Mannigfaltigkeiten vereinigt liegen, alle benachbarten Elemente derselben Mannigfaltigkeiten vereinigt liegen.

Satz V. Um die Integralmannigfaltigkeit M_n der gegebenen Gleichungen (I′) in Involution zu bestimmen, so soll man die Integralmannigfaltigkeit M_{n-m} bestimmen und durch jedes Element derselben die charakteristische Mannigfaltigkeit führen, vorausgesetzt, dass diese Integralmannigfaltigkeit M_{n-m} so gewählt ist, dass keine der oben erwähnten charakteristischen Mannigfaltigkeiten mit der Integralmannigfaltigkeit M_{n-m} unendliche viele gemeinsame Elemente hat [2]).

[1]) S. Lie definirt (l. c.) die charakteristische Mannigfaltigkeit mit Hilfe des Systems der linearen Differentialgleichungen $[F, F_i] = 0$ $(i = 1, 2 \dots m)$, deren Integration zur Integration der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sich reduciert.

[2]) Solche geometrische Bedeutung hat der Umstand, dass m Gleichungen $\varphi_i = 0$ keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind.

Satz VI. Wenn mann die Integralmannigfaltigkeit M_{n-m} des gegebenen Systems (I′) in Involution, die als Punktmannigfaltigkeit betrachtet $n-m$-dimensional ist, bestimmt hat und, wenn man durch jedes Element derselben die charakteristische Mannigfaltigkeit führt, so erhält man eine Integralmannigfaltigkeit M_n des gegebenen Systems (I′), die als Punktmannigfaltigkeit aufgefasst n-dimensional ist, vorausgesetzt, dass die Integralmannigfaltigkeit M_{n-m} so gewählt ist, dass keine der erwähnten charakteristischen Mannigfaltigkeiten mit der Mannigfaltigkeit M_{n-m} unendlich viele gemeinsame Punkte hat.

Der Inbegriff der ∞^{n+1-m} Integralmannigfaltigkeiten M_{n-m} heisst ein vollständiges Integral des Systems (I′) in Involution.

Man kann ein solches erhalten, indem man durch jeden Punkt der Punktmannigfaltigkeit von $n+1-m$ Dimensionen [1]) die charakteristischen Mannigfaltigkeiten führt, vorausgesetzt, dass diese Punktmannigfaltigkeit mit keiner der charakteristischen Mannigfaltigkeiten unendlich viele gemeine Punkte hat.

§ 5.

Wir wollen jetzt zur Theorie der singulären Integrale übergehen.

Wir haben die Differentialgleichung

$$\Omega' = \frac{\mu}{\mu_0}\left(dz_0 - p_1{}^0\, dx_1{}^0 - \ldots - p_n{}^0\, dx_n{}^0\right) = 0$$

wo $F_i(x_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0$, $\varphi_i(x_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, durch die Null-Setzung des Ausdruckes

$$dz_0 - p_1{}^0\, dx_1{}^0 - \ldots - p_n{}^0\, dx_n{}^0$$

integriert. Wir können diese Gleichung, im Falle, wenn nicht alle $\frac{\partial F_i}{\partial z}$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ Null sind, durch die Null-Setzung

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 0$$

integrieren. Wir haben gesehen, dass wir in diesem Falle die Wahl der Formel der Transformation so einrichten können, dass $lg\,\mu$

[1]) S. Lie hat beim Beweise dieses Satzes (nur für den Fall zweier Gleichungen) irthümlicherweise statt der $n-1$ dimensionalen Punktmannigfaltigkeit die n dimensionale genommen. (M. Ann., Bd. 9, p. 271).

eine von vornherein gewählte Function der $y_1 \dots y_{2n+1-m}$ z. B. $lg\,\mu = y_1$ sein wird. Wir werden dann

$$\frac{\mu}{\mu_0} = e^{y_1 - y_1^0} = 0$$

haben. Wenn wir diese Gleichung auf die ursprünglichen Variablen $x_i\, z\, p_i$ transformieren, so folgt aus derselben und aus den Formeln der Transformation infolge der Unabhängigkeit der Variablen $y_1 \dots y_{2n+1-m}$ noch $n - m$ Gleichungen, die zusammen mit der Gleichung

$$e^{y_1 - y_1^0} = 0$$

und den Gleichungen $F_i(x_1 \dots p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \dots m)$ ein System der $n + 1$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega = 0$ d. h. ein gemeinsames Integral des gegebenen Systems in Involution (I) bilden. Wenn dieses Integral durch die Null-Setzung

$$dz^0 - p_1^0\, dx_1^0 - \dots - p_n^0\, dx_n^0 = 0,$$

wo $F_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$, $\varphi_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \dots m)$ nicht erhalten werden kann, so nennt man das singuläre Integral des Systems (I) in Involution. Das System (I) kann höchstens ein singuläres Integral besitzen. Die Eigenschaft der Singularität ist invariant gegen alle Pfaffschen Transformationen.

2. Alle gemeinsamen Integrale des gegebenen Systems in Involution (I) können aus einem vollständigen Integrale derselben erhalten werden. Es sei das vollständige Integral des Systems (I)

$$\text{(g)} \quad \begin{gathered} \vartheta_\alpha(x_1 \dots x_n\, z\, p_1 \dots p_n\, C_1 \dots C_{n+1-m}) = 0, \quad F_i(x_1 \dots p_n) = 0 \\ (i = 1, 2 \dots m, \quad \alpha = 1, 2 \dots n + 1 - m) \end{gathered}$$

vorgelegt. Es folgt aus diesen Gleichungen eine oder mehrere Relationen zwischen $x_i\, z$ z. B.

$$z = f(x_{k+1} \dots x_n), \quad x_i = f_i(x_{k+1} \dots x_n) \quad (i = 1, 2 \dots k).$$

Wir können dann das Integral (g) in der Form

$$\text{(g')} \quad \begin{gathered} H = f - p_1 f_1 - \dots - p_k f_k = z - x_1 p_1 - \dots - x_k p_k, \\ x_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p_{k+j} = \frac{\partial H}{\partial x_{k+j}} \quad (i = 1, 2 \dots k, \; j = 1, 2 \dots n - k), \end{gathered}$$

darstellen. Wenn wir $C_1 \ldots C_{n+1-m}$, als die neuen Veränderlichen betrachten, so bekommen wir

$$\Omega' = \frac{\partial H}{\partial C_1} dC_1 + \ldots + \frac{\partial H}{\partial C_{n+1-m}} dC_{n+1-m}$$

oder

$$\Omega' = \frac{\partial H}{\partial C_1} (dC_1 + U_2\, dC_2 + \ldots + U_{n+1-m}\, dC_{n+1-m}),$$

wo $U_i = \frac{\partial H}{\partial C_i} : \frac{\partial H}{\partial C_1}$ ist. Alle Veränderlichen $C_1 \ldots C_{n+1-m}$, $U_2 \ldots U_{n+1-m}$ sind unabhängig. Wir wissen in der Tat, dass die Gleichung

$$dC_1 + U_2\, dC_2 + \ldots + U_{n+1-m}\, dC_{n+1-m} = 0$$

durch die kleinste Anzahl $n + 1 - m$ der Gleichungen sich integrieren lässt. Setzen wir nun voraus, dass zwischen den Variablen $C_1, \ldots U_{n+1-m}$ die Relation $\Theta = 0$ stattfindet. Wenn wir für einen Augenblick annehmen, dass diese Veränderlichen unabhängig sind, so kann man bei der Integration der Differentialgleichung

$$dC_1 + U_2\, dC_2 + \ldots + U_{n+1-m}\, dC_{n+1-m} = 0$$

durch $n + 1 - m$ Integrale eines derselben willkürlich annehmen. Wenn wir diese letztes in der Form $\Theta = 0$ wählen und statt $C_1 \ldots U_{n+1-m}$ ihre Werte einsetzen, so sehen wir, dass die Gleichung

$$dC_1 + U_2\, dC_2 + \ldots + U_{n+1-m}\, dC_{n+1-m}$$

durch $n - m$ Gleichungen integriert werden kann, was offenbar unmöglich ist.

Da der Differentialausdruck Ω' nach der Transformation auf die Variablen $C_1, \ldots C_{n+1-m}$, $U_2, \ldots U_{n+1-m}$ die Form

$$\Omega' = \frac{\partial H}{\partial C_1} (dC_1 + U_2\, dC_2 + \ldots + U_{n+1-m}\, dC_{n+1-m})$$

annimmt, so ist diese die Pfaffsche Transformation. Wir bekommen die gemeinsamen nichtsingulären Integrale des gegebenen Systems (I) in Involution, indem wir die Gleichung

$$dC_1 + U_2\, dC_2 + \ldots U_{n+1-m}\, dC_{n+1-m} = 0$$

durch $n + 1 - m$ Integrale integrieren, dieselben auf die ursprünglichen Variablen $x_i\, z\, p_i$ transformieren und die Gleichungen

$$F_i (x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

hinzufügen. Man erhält das singuläre Integral im Falle, wenn ein solches existiert, wenn man

$$\frac{\partial H}{\partial C_1} = 0$$

setzt, vorausgesetzt, dass nicht alle $\frac{\partial F_i}{\partial z}$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ verschwinden und also $\frac{\partial H}{\partial C_1}$, $C_1 \ldots C_{2n+1-m}$, $U_2, \ldots U_{2n+1-m}$ unabhängig sind. Es folgt aus den Formeln der Transformation

$$U_i = \frac{\partial H}{\partial C_i} : \frac{\partial H}{\partial C_1}$$

infolge der Unabhängigkeit der Variablen $\frac{\partial H}{\partial C_1}$, $C_1 \ldots\ldots C_{n+1-m}$ $U_2 \ldots . U_{n+1-m}$, dass $\frac{\partial H}{\partial C_i} = 0$ $(i = 1, 2 \ldots . n + 1 - m)$ ist. Das singuläre Integral des Systems (I) in Involution genügt den Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial C_i} = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n + 1 - m) \quad F_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

wo die Grössen $C_1 \ldots C_{n+1-m}$ mit Hilfe der Gleichungen (g′) eliminiert sein sollen. Wenn das vollständige Integral ein im gewöhnlichen Sinne ist und die Form

$$z = f(x_1 \ldots x_n C_1 \ldots C_{n+1-m}), \quad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

hat, so genügt das singuläre Integral den Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial C_i} = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n + 1 - m, \quad F_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m),$$

wo $C_1 \ldots C_{n+1-m}$ mit Hilfe der Gleichungen des vollständigen Integrals eliminiert sein sollen.

3. Da die Formeln

$$C_i = C_i(x_1 \ldots . p_n), \quad \frac{\partial H}{\partial C_j} : \frac{\partial H}{\partial C_1} = U_j$$

$$(i = 1, 2 \ldots n + 1 - m, \quad j = 2, 3 \ldots n + 1 - m),$$

wo $F(x_1 \ldots p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, diejenigen der Pfaffschen Transformation für den Differentialausdruck Ω' sind, so stellen die Gleichungen

$$C_i(x_1 \ldots p_n) = \text{const.}, \quad \frac{\partial H}{\partial C_j} : \frac{\partial H}{\partial C_1} = \text{const.}$$

dar, wo $F_i(x_1 \ldots p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, ein System der $2n+1-2m$ Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1), wo

$$F_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad \text{ist.}$$

Also stellen die Gleichungen

$$F_i(x_1 \ldots p_n) = \text{const.}, \quad C_\alpha(x_1 \ldots p_n) = \text{const.}; \quad \frac{\partial H}{\partial C_j} : \frac{\partial H}{\partial C_1} = \text{const.},$$

$$(i = 1, 2 \ldots m, \quad \alpha = 1, 2 \ldots n+1-m, \quad j = 2, 3 \ldots n+1-m) \tag{h}$$

ein System der vollständigen Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) dar. Wenn das vollständige Integral im gewöhnlichem Sinne ist, so hat dieses System die Form:

$$F_i(x_1 \ldots p_n) = \text{const.}, \quad C_\alpha(x_1 \ldots p_n) = \text{const.}, \quad \frac{\partial f}{\partial C_j} : \frac{\partial f}{\partial C_1} = \text{const.}$$

$$(i = 1, 2 \ldots m, \quad \alpha = 1, 2 \ldots n+1-m, \quad j = 2, 3 \ldots n+1-m).$$

Die Gleichungen $z = f$, $p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ (α) genügen den Gleichungen $F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$. Wenn wir voraussetzen, dass diese letzten in Bezug auf $p_1 \ldots p_m$ auflösbar sind, so können wir das System (α) in der Form

$$z = f, \quad p_{m+j} = \frac{\partial f}{\partial x_{m+j}}, \quad F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$$

$$(i = 1, 2 \ldots n), \quad (j = 1, 2 \ldots n-m)$$

darstellen. Da weiter die Gleichungen (α) $C_1 \ldots C_{n+1-m}$ bestimmen so schliessen wir, dass die Gleichungen

$$z = f, \quad p_{m+j} = \frac{\partial f}{\partial x_{m+j}} \quad (j = 1, 2 \ldots n-m)$$

in Bezug auf $C_1 \ldots C_{n+1-m}$ unabhängig sind. Man kann also das vorige System (h) der vollständigen Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) in der Form

$$F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = \text{const.}, \quad z = f, \quad p_{m+j} = \frac{\partial f}{\partial x_{m+j}}, \tag{k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial C_\alpha} : \frac{\partial f}{\partial C_1} = \text{const.}, \quad (i = 1, 2 \ldots m, \; j = 1, 2 \ldots n-m, \; \alpha = 2, 3 \ldots n+1-m)$$

darstellen[1]). Die Differentialgleichungen der Matrix (B_1) stellen die Verallgemeinerung der kanonischen Hamiltonschen Differentialgleichungen, und die Formeln (h), (k) stellen die Verallgemeinerung der bekannten Sätze von Jacobi über den Zusammenhang zwischen einer partiellen Differentialgleichung und dem Systeme der kanonischen Differentialgleichungen dar.

§ 6.

S. Lie hat eine neue Methode der Integration des Systems der partiellen Differentialgleichungen (I) in Involution gegeben, die darin besteht, dass man die Integration dieses Systems auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung mit nur $n+1-m$ unabhängigen Variablen reduziert. Wir wollen diese in der analytischen Form darstellen. Wir können immer voraussetzen, dass die gegebenen Gleichungen (I′) in Bezug auf m der Grössen $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ z. B. in Bezug auf $\frac{\partial z}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial z}{\partial x_m}$ aufgelöst sind:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial z}{\partial x_i} = \Theta_i\left(x_1, \ldots x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) \quad i = 1, 2 \ldots m$$

Die Integration dieses Systems besteht in der Integration der Differentialgleichung

$$\Omega' = dz - \Theta_1\, dx_1 - \ldots - \Theta_m\, dx_m - p_{m+1}\, dx_{m+1} - \ldots - p_n\, dx_n = 0$$

mit Hilfe $n+1-m$ Integrale. Die Formeln der Pfaffschen Transformation genügen dem Systeme der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$dx_{m+j} = -\sum_1^m{}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}}\, dx_\beta$$

$$\text{(M)} \qquad dp_{m+j} = \sum_1^m{}_\beta \left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j}\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z}\right) dx_\beta$$

$$dz = \sum_1^m{}_\beta \left(\Theta_\beta - \sum_1^{n-m}{}_j\, p_{m+j}\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}}\right) dx_\beta .$$

[1]) Diese Gleichungen für den Fall

$$\frac{\partial F_i}{\partial z} = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

sind von Sałtikow (l. c.) gegeben.

Das System der Hauptintegrale derselben in Bezug auf $x_i = h$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist:

$$\left. \begin{aligned} x_{m+j} &= x_{m+j}(x_1 \ldots x_m x_{m+1}{}^0 \ldots p_n{}^0) \\ p_{m+j} &= p_{m+j}(x_1 \ldots x_m x_{m+1}{}^0 \ldots p_n{}^0) \end{aligned} \right\} \; j = 1, 2 \ldots n - m \qquad (\alpha)$$
$$z = z(x_1 \ldots x_m x_{m+1}{}^0 \ldots p_n{}^0).$$

Wenn wir $x_{m+j}{}^0$, z_0, $p_{m+j}{}^0$ für die neuen Variablen $y_{m+1} \ldots y_{2n+1-m}$, nehmen und $x_i = y_i$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ setzen, so bekommen wir die Formel (α) der Pfaffschen Transformation des Ausdruckes Ω', nach der die Variablen $y_1 \ldots y_m$ höchstens im gemeinschaftlichen Faktor bleiben, so dass wir nach der Transformation

$$\Omega' = \frac{\mu}{\mu_0}(dz_0 - p_{m+1}{}^0 dx_{m+1}{}^0 - \ldots - p_n{}^0 dx_n{}^0)$$

haben, wo

$$d\,l\,g\,\mu = \sum_1^m{}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z} dx_\beta$$

ist. Wenn wir die Differentialgleichung

$$dz_0 - p_{m+1}{}^0 dx_{m+1}{}^0 - \ldots - p_n{}^0 dx_n{}^0 = 0$$

durch $n + 1 - m$ Integrale (c) integrieren, diese letzten auf die ursprünglichen Variablen $x_i\, z\, p_{m+j}$ transformieren und endlich zu den erhaltenen Gleichungen (D) die Gleichungen (I′), hinzufügen, so bekommen wir das System der $n + 1$ Gleichungen die das gemeinsame Integral des gegebenen Systems der partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \Theta_i\left(x_1 \ldots x_n\, z\, \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

darstellen.

Es ist klar, dass wenn wir mit denselben Formeln (α) den Differentialausdruck

$$\Omega'' = dz - \Theta_1 dx_1 - p_{m+1} dx_{m+1} - \ldots - p_n dx_n,$$

wo $x_2 \ldots x_m$ die Parameter sind, transformieren, so bekommen wir denselben Ausdruck

$$\frac{\mu}{\mu_0}(dz_0 - p_{m+1}{}^0 dx_{m+1}{}^0 - \ldots - p_n{}^0 dx_n{}^0),$$

wo nur $x_2 \dots x_m$ die Parameter sind. Wenn wir die Gleichung

$$dz_0 - p_{m+1}{}^0 dx_{m+1}{}^0 - \dots - p_n{}^0 dx_n{}^0 = 0$$

mit denselben $n+1-m$ Integralen (c), wie im vorigen Falle, d. h. mit den $n+1-m$ Integralen, die die Parameter $x_2 \dots x_m$ nicht enthalten, integrieren und mit den Formeln der Pfaffschen Transformation (α), wo nur $x_2 \dots x_m$ Parameter sind, auf die ursprünglichen Variablen transformieren, so bekommen wir dieselben $n+1-m$ Gleichungen (D), wie im vorigen Falle, wo nur $x_2 .. x_m$ die Parameter sind, und diese $n+1-m$ Gleichungen sind die $n+1-m$ Integrale der Differentialgleichung

$$\Omega'' = dz - \Theta_1 dx_1 - \dots - p_{m+1} dx_{m+1} - \dots - p_n dx_n = 0.$$

Wenn wir zu diesen $n+1-m$ Gleichungen noch die Gleichung

$$p_1 = \Theta_1$$

hinzufügen, so bekommen wir offenbar das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \Theta_1 \left(x_1 \dots x_n \, z \, \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}} \dots \frac{\partial z}{\partial x_n} \right),$$

wo $x_2 \dots x_m$ die Parameter sind, oder kurz gesagt, jedes gemeinsame Integral der partiellen Differentialgleichungen (I) gibt, wenn man $x_2 \dots x_m$ als Parameter betrachtet, das Integral einer den Differentialgleichungen (I):

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \Theta_1 \left(x_1 \dots x_n \, z \, \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \dots \frac{\partial z}{\partial x_n} \right),$$

was selbstverständlich ist. Das umgekehrte trifft aber im allgemeinen nicht zu d. h. wenn man die Formel der Pfaffschen Transformation der Differentialausdruck

$$\Omega'' = dz - \Theta_1 dx_1 - p_{m+1} dx_{m+1} - \dots - p_n dx_n,$$

wo $x_2 \dots x_m$ die Parameter sind, mit Hilfe der Integration des Systems der Differentialgleichungen

$$\frac{dx_{m+j}}{dx_1} = -\frac{\partial \Theta_1}{\partial p_{m+j}}, \quad \frac{dp_{m+j}}{dx_1} = \frac{\partial \Theta_1}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{d\Theta_1}{dz},$$

(N) $$\frac{dz}{dx_1} = \Theta_1 - \sum_{1}^{n-m}{}^j p_{m+j} \frac{\partial \Theta_1}{\partial p_{m+j}}$$

in der Form

$$\left.\begin{array}{l} x'_{m+j} = x'_{m+j}(x_1 \,.\,. x_m x_{m+1}{}^0 \,.\,. p_n{}^0) \\ p'_{m+j} = p'_{m+j}(x_1 \,.\,. x_m x_{m+1}{}^0 \,.\,. p_n{}^0) \\ z = z'(x_1 \ldots x_m x_{m+1}{}^0 \ldots p_n{}^0) \end{array}\right\} j = 1, 2 \ldots n - m \qquad (\alpha')$$

bestimmt hat, wo diese, $2(n-m)+1$ Gleichungen die Hauptintegrale der Differentialgleichungen (N) in Bezug auf $x_1 = h_1$ und $x_2 \ldots x_m$ die Parameter sind, und wenn man nach der Transformation der Differentialgleichung $\Omega'' = 0$ in der Form

$$\Omega'' = \frac{v}{v_0}(dz_0 - p_{m+1}{}^0 dx_{m+1}{}^0 - \ldots - p_n{}^0 dx_n{}^0) = 0$$

die Gleichung

$$dz_0 - p_{m+1}{}^0 dx_{m+1}{}^0 - \ldots - p_n{}^0 dx_n{}^0 = 0$$

mit $n+1-m$ Integralen integriert hat, so geben diese letzten nach der Transformation auf die ursprünglichen Variablen

$$x_1 x_{m+1} \ldots x_n z p_{m+1} \ldots p_n$$

und nach der Hinzufügung der Gleichungen (I'), wo überall $x_2 \,.\,. x_m$ als die Veränderlichen betrachtet sind, noch im Allgemeinen kein gemeinsames Integral der gegebenen Differentialgleichungen (I). Es soll ausser der Bedingung, dass die $n+1-m$ Integrale der Differentialgleichung

$$dz_0 - p_{m+1}{}^0 dx_{m+1}{}^0 - \ldots - p_n{}^0 dx_n{}^0 = 0$$

keine Parameter $x_2 \ldots . x_m$ enthalten, noch diese notwendige und hinreichende Bedingung erfüllt sein, dass die Gleichungen (α) und (α') identisch sind, d. h. das System der vollständigen Integrale des ersten Systems (N) der Differentialgleichungen (M), dass durch die Voraussetzung $x_2 =$ const., $x_m =$ const. entstanden ist, soll bei den Variablen $x_2 \ldots x_m$ dasjenige für das System (M) sein. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall, aber wir können dies mit Hilfe der Transformation von A. Mayer[1]) immer erreichen, wenn wir nämlich

$$x_j = h_i + (x_1 - h_1)\, y_i, \quad q_1 = p_1 + y_2 p_2 + \cdots + y_m p_m, \qquad \text{(P)}$$
$$q_i = (x_1 - h_1)\, p_i \quad (i = 2, 3 \ldots m)$$

setzen.

[1]) M. Ann. Bd. V. („Ueber unbeschr. int. Syst.", § 5).

Die Gleichung $\Omega' = 0$ und die gegebenen Gleichungen (I′) werden:

$$\Omega' = dz - \vartheta_1\, dx_1 - \vartheta_2\, dy_2 - \ldots - \vartheta_m\, dy_m - \\ - p_{m+1}\, dx_{m+1} - \ldots - p_n\, dx_n = 0$$

und

$$q_i = \vartheta_i\,(x_1\, y_2 \ldots y_m\, x_{m+1} \ldots x_n\, z\, p_{m+1} \ldots p_n), \quad (i = 1, 2 \ldots m),$$

wo

$$\vartheta_1 = \Theta_1 + y_2'\, \Theta_2 + \ldots + y_m\, \Theta_m,$$
$$\vartheta_i = (x_1 - h_1)\, \Theta_i \quad (i = 2, 3 \ldots m)$$

ist. Das System der Differentialgleichungen (M) ist:

$$dx_{m+j} = -\sum_2^m{}_\beta \frac{\partial \vartheta_\beta}{\partial p_{m+j}}\, dy_\beta - \frac{\partial \vartheta_1}{\partial p_{m+j}}\, dx_1$$

$$dp_{m+j} = \sum_2^m{}_\beta \left(\frac{\partial \vartheta_\beta}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \vartheta_\beta}{\partial z} \right) dy_\beta + \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial z} \right) dx_1$$

$$dz = \sum_2^m{}_\beta \left(\vartheta_\beta - \sum_1^{n-m}{}_j\, p_{m+j} \frac{\partial \vartheta_\beta}{\partial p_{m+j}} \right) dy_\beta + \left(\vartheta_1 - \sum_1^{n-m}{}_j\, p_{m+j} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial p_{m+j}} \right) dx_1$$

und, wie es bekannt ist, ist das System der Hauptintegrale dieses Systems identisch mit demjenigen der Hauptintegrale für $x_1 = h_1$ des ersten Systems

$$dx_{m+j} = -\frac{\partial \vartheta_1}{\partial p_{m+j}}\, dx_1$$
$$dp_{m+j} = \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial z} \right) dx_1$$
$$dz = \left(\vartheta_1 - \sum p_{m+j} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial p_{m+j}} \right) dx_1 .$$

Wenn das System der Hauptintegrale für $x_1 = h_1$ des letzten die Form

$$\begin{aligned} x_{m+j} &= x_{m+j}\,(x_1\, y_2 \ldots y_m\, x_{m+1}{}^0 \ldots p_n) \\ p_{m+j} &= p_{m+j}\,(x_1\, y_2 \ldots y_m\, x_{m+1}{}^0 \ldots p_n{}^0) \\ z &= z\,(x_1\, y_2 \ldots y_m\, x_{m+1}{}^0 \ldots p_n{}^0) \end{aligned} \qquad (\alpha'')$$

hat, wo $y_2 \ldots y_m$ die Parameter sind, so bekommt man nach der Integration der Differentialgleichung

$$dz_0 - p_{m+1}{}^0 dx_{m+1}{}^0 - \ldots - p_n{}^0 dx_n{}^0 = 0$$

mit Hilfe der $n+1-m$ Integralen, die die Parameter $y_2, \ldots y_m$ nicht enthalten, und nach der Transformation mit den Formeln (α''), wenn man noch die Gleichung

$$q_1 = \vartheta_1$$

hinzufügt, das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \Theta_1 + y_2 \Theta_2 + \cdot + y_m \Theta_m.$$

Wenn man darin $y_2 \ldots y_m$ als die Variablen betrachtet und noch die Gleichungen

$$q_i = \vartheta_i \quad (i = 2 \ldots m)$$

hinzufügt, so bekommt man das gemeinsame Integral des Systems

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \vartheta_1, \quad \frac{\partial z}{\partial y_i} = \vartheta_i \quad (i = 2 \ldots m).$$

Wenn man endlich das letzte auf die ursprünglichen Variablen $x_i\, z\, p_i$ mit Hilfe der Formel (P) transformiert, so bekommt man dann das gemeinsame Integral des Systems der partiellen Differentialgleichungen (I). Wenn das System der $n+1-m$ der Integrale der Differentialgleichung

$$dz_0 - p_{m+1}{}^0 dx_{m+1}{}^0 - \ldots - p_n{}^0 dx_n{}^0 = 0$$

die Eorm

$$\Theta_\alpha (x_{m+1}{}^0 \ldots x_n{}^0\, z_0\, p_{m+1}{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m),$$

und das System der $n+1-m$ Integrale der Differentialgleichung

$$dz - \vartheta_1 dx_1 - p_{m+1} dx_{m+1} - \cdot - p_n dx_n = 0$$

die Form

$$\vartheta_\alpha (x_1\, y_2 \ldots y_m\, y_{m+1} \ldots p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m),$$

hat, so ist klar, dass die Gleichungen

$$\vartheta_\alpha (x_1\, y_2 \ldots y_m\, x_{m+1} \ldots p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m)$$

bei $x_1 = h_1$ die Form

$$\Theta_\alpha (x_{m+1} \ldots x_n\, z.\, p_{m+1} \ldots p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m)$$

annehmen, und also die Parameter $y_2 \ldots y_m$ verschwinden. Wir können endlich den Satz aussprechen:

Wenn wir die partiellen Differentialgleichungen (I) auf die neuen Variablen mit Hilfe der Formel

$$x_i = h_i + (x_1 - h_1)\, y_i \quad (i = 2, 3 \ldots m)$$

transformieren, so dass sie die Form

$$\text{(II)} \quad \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_1} &= \Theta_1 + y_2\, \Theta_2 + \ldots + y_m\, \Theta_m \\ \frac{\partial z}{\partial x_i} &= (x_1 - h_1)\, \Theta_i \quad (i = 2 \ldots m) \end{aligned}$$

annehmen, und wenn wir die Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \Theta_1 + y_2\, \Theta_2 + \ldots + y_m\, \Theta_m$$

mit $n + 2 - m$ Gleichungen

$$\vartheta_\alpha\, (x_1\, y_2 \cdot\cdot\, y_m\, x_{m+1} \cdot\cdot\, p_n) = 0,\; q_1 = \Theta_1 + y_2\, \Theta_2 + \ldots + \Theta_m\, y_m$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m),$$

die die Eigenschaft haben, dass die $n + 1 - m$ ersten Gleichungen bei $x_1 = h_1$ keine der Grössen $y_2 \ldots y_m$ enthalten, integrieren so bekommen wir bei den Veränderlichen $y_2 \ldots y_m$ und also nach der Hinzufügung der Gleichungen

$$q_i = (x_1 - h_1)\, \Theta_i \quad (i = 2, 3 \ldots m)$$

das gemeinsame Integral der Differentialgleichungen (I).

Wenn wir dasselbe auf die ursprünglichen Variablen mit Hilfe der Formel

$$\begin{aligned} x_i &= h_i + (x_1 - h_1)\, y_i \quad (i = 2, 3 \ldots m) \\ q_1 &= p_1 + y_2\, p_2 + \ldots + p_m\, y_m \\ q_i &= (x_1 - h_1)\, p_i \quad (i = 2, 3 \ldots m) \end{aligned}$$

transformieren, so bekommen wir das gemeinsame Integral des vorgelegten Systems in Involution der partiellen Differentialgleichungen (I).

48. M. W. STEKLOFF. **O teoryi szeregów trygonometrycznych.** ***(Sur la théorie des séries trigonométriques).*** Mémoire présenté par M. St. Zaremba m. c.

1. Le but principal des recherches qui vont suivre consiste à donner une démonstration nouvelle d'un théorème qui a été établi pour la première fois par M. Liapounoff en 1896, démontré ensuite par M. Hurwitz dans son Mémoire récent: „Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier“ [1]), et qui ne présente qu'un cas particulier du théorème beaucoup plus général énoncé dans ma Note du 6 mars 1903 (Comptes-rendus).

La méthode que nous allons développer peut présenter un intérêt non seulement parce qu'elle conduit à une démonstration nouvelle du théorème important, tout à l'heure mentionné, mais parce qu'elle permet en même temps d'établir d'une manière assez simple et directe d'autres propositions intéressantes, concernant la théorie des séries de Fourier. Je mentionnerai, par exemple, un théorème nouveau, analogue aux théorèmes connus de M. Picard et Weierstrass, et conduisant, comme ceux-ci, à des propositions importantes sur la représentation approchée des fonctions et sur le développement des fonctions continues en séries des polynômes.

C'est pourquoi je me permets de publier mes recherches.

2. Démontrons d'abord un lemme préliminaire.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle x, bornée et intégrable à l'intérieur d'un intervalle (a, b), a et b étant des nombres donnés.

Supposons, pour fixer les idées, que $b > a$.

Soit $\varphi(x, n)$ une autre fonction de deux variables x et n pouvant d'ailleurs contenir d'autres paramètres $\alpha, \beta, \ldots$.

Supposons que $\varphi(x, n)$ reste bornée et intégrable par rapport à x dans l'intervalle (a, b), quelle que soit la valeur réelle de n, et pour toutes les valeurs des variables réelles $\alpha, \beta, \ldots$ comprises respectivement dans certaines domaines $(A), (B), \ldots$, déterminés pour chacune de ces variables.

Supposons que $\varphi(x, n)$ tende vers une fonction $\varphi_0(x)$, bornée et intégrable par rapport à x dans l'intervalle (a, b), lorsque n croît indéfiniment, $\alpha, \beta, \ldots$ restant compris dans les domaines $(A), (B), \ldots$

[1]) Annales de l'Ecole Normale, T. XIX, 1902.

Supposons encore qu'on peut, le nombre positif ε étant donné à l'avance, trouver un nombre ν, ne dépendant ni de x, ni de $\alpha, \beta, \ldots$ assez grand et tel qu'on ait pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle (a, b) et de $\alpha, \beta, \ldots$, compris dans les domaines $(A), (B), \ldots$,

$$(1) \qquad |\varphi(x, n) - \varphi_0(x)| < \varepsilon \quad \text{pour } n \geqq \nu.$$

On dira dans ce cas que la fonction $\varphi(x, n)$ converge, pour $n = \infty$, uniformément vers sa limite $\varphi_0(x)$.

Décomposons maintenant l'intervalle (a, b) en intervalles partiels Δx_s dont le nombre soit égal à μ $(s = 1, 2, \ldots \mu)$, désignons par x_s une valeur quelconque de x dans l'intervalle Δx_s et formons la somme

$$(1) \qquad \overset{(\mu)}{S_n} = \sum_{s=1}^{\mu} f(x_s)\, \varphi(x_s, n)\, \Delta x_s.$$

Comme $f(x)$ et $\varphi(x, n)$ sont intégrables dans l'intervalle (a, b), le produit $f(x)\, \varphi(x, n)$ le sera aussi.

Supposant que μ croisse indéfiniment et en passant à la limite, on a

$$(2) \qquad \lim_{\mu=\infty} \overset{(\mu)}{S_n} = \lim_{\mu=\infty} \sum_{s=1}^{\mu} f(x_s)\, \varphi(x_s, n)\, \Delta x_s = \int_a^b f(x)\, \varphi(x, n)\, dx.$$

Formons ensuite la somme

$$\overset{(\mu)}{S} = \sum_{s=1}^{\mu} f(x_s)\, \varphi_0(x_s)\, \Delta x_s.$$

On aura, en passant, comme précédemment, à la limite

$$(3) \qquad \lim_{\mu=\infty} \overset{(\mu)}{S} = \int_a^b f(x)\, \varphi_0(x)\, dx = \int_a^b f(x) \lim_{n=\infty} \varphi(x, n)\, dx,$$

car

$$\varphi_0(x) = \lim_{n=\infty} \varphi(x, n).$$

Cela posé, considérons la différence

$$\overset{(\mu)}{S_n} - \overset{(\mu)}{S} = \sum_{s=1}^{\mu} f(x_s)\, [\varphi(x_s\, n) - \varphi_0(x_s)]\, \Delta x_s.$$

Choisissant convenablement le nombre ν, on trouve, en vertu de (1),

$$\left| S_n^{(\mu)} - S^{(\mu)} \right| < \varepsilon \sum_{s=1}^{\mu} f(x_s)\, \Delta x_s \leqq \varepsilon M(b-a) \quad \text{pour } n \geqq \nu,$$

M désignant le maximum de $|f(x)|$ dans l'intervalle (a, b).

Cette inégalité a lieu, quel que soit le nombre μ.

Supposant que μ croisse indéfiniment et en passant à la limite, on obtient, en tenant compte de (2) et de (3), l'inégalité suivante

$$\left| \int_a^b f(x)\, \varphi(x, n)\, dx - \int_a^b f(x) \lim_{n=\infty} \varphi(x, n)\, dx \right| < \varepsilon M(b-a) = \varepsilon',$$

ayant lieu pour toutes les valeurs de n, plus grandes que ν.

On peut donc écrire

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(x)\, \varphi(x, n)\, dx = \int_a^b f(x) \lim_{n=\infty} \varphi(x, n)\, dx,$$

ce qui démontre le lemme suivant:

Lemme. Soit $f(x)$ une fonction bornée et intégrable dans l'intervalle quelconque (a, b); soit $\varphi(x, n)$ une autre fonction de x, de n et d'un certain nombre de paramètres $\alpha, \beta, \ldots$

La fonction $\varphi(x, n)$ satisfait aux conditions suivantes:

Elle reste bornée et intégrable par rapport à x dans l'intervalle (a, b) pour toutes les valeurs de n et pour les valeurs des paramètres $\alpha, \beta, \ldots$, compris dans certains domaines $(A), (B), \ldots$, bien déterminés pour chacun de ces paramètres.

Elle tend uniformément, lorsque n croît indéfiniment, vers une fonction $\varphi_0(x)$, bornée et intégrable par rapport à x dans l'intervalle (a, b), les paramètres $\alpha, \beta, \ldots$ étant compris dans les domaines $(A), (B),$[1]...

[1]) La fonction $\varphi_0(x)$ peut dépendre, en général, de $\alpha, \beta, \ldots$.

Ces conditions étant remplies, on a toujours

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(x)\,\varphi(x,n)\,dx = \int_a^b f(x) \lim_{n=\infty} \varphi(x,n)\,dx. \tag{4}$$

On peut ajouter que ce lemme reste vrai dans le cas beaucoup plus général, où la fonction $f(x)$ peut cesser d'être intégrable aux environs de certains points isolés. Pour que le lemme soit vrai, il suffit seulement que les intégrales

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^b \left| f(x) \right| dx,$$

définies au sens général de M. Jordan (Cours d'Analyse, T. II, p. 49 etc. Paris, 1894), existent.

Mais ici je n'insiste pas sur ce point.

3. Posons maintenant

$$a = o, \; b = 2\pi.$$

Soit η_0 un nombre donné, positif, assez petit et nécessairement plus petit que π [2]).

Prenons un autre nombre positif η, plus petit que η_0. Désignons par x_0 une valeur quelconque de la variable x, prise dans l'intervalle $(\eta,\ 2\pi - \eta)$.

Considérons la fonction

$$\varphi(\xi, n) = \int_{x_0 - \eta}^{x_0 + \eta} \frac{\sin \dfrac{2n+1}{2}(x - \xi)}{2 \sin \dfrac{x - \xi}{2}}\,dx, \tag{5}$$

n étant un entier positif, ξ une variable variant entre les limites 0 et 2π.

On voit que $\varphi(\xi, n)$ est une fonction de ξ, de n et des paramètres x_0, η, bornée et intégrable par rapport à ξ dans l'intervalle $(0,\ 2\pi)$, quel que soit le nombre positif n et les valeurs des paramètres x_0, η, compris dans les ntervalles $(\eta,\ 2\pi - \eta)$, $(0,\ \eta_0)$.

Quelle que soit la position du point x_0 à l'intérieur de l'intervalle $(\eta,\ 2\pi - \eta)$, l'intervalle $(x_0 - \eta,\ x_0 + \eta)$ ne sortira pas de l'intervalle $(0,\ 2\pi)$.

[2]) Pour que l'on ait $\eta_0 < 2\pi - \eta_0$.

Cinq cas différents peuvent se présenter, lorsque la variable ξ varie de $\xi = 0$ à $\xi = 2\pi$:

1⁰ $\quad 0 < \xi < x_0 - \eta$,

2⁰ $\quad \xi = x_0 - \eta$,

3⁰ $\quad x_0 - \eta < \xi < x_0 + \eta$,

4⁰ $\quad \xi = x_0 + \eta$,

5⁰ $\quad x_0 + \eta < \xi < 2\pi$.

Posons maintenant

$$\frac{x - \xi}{2} = z,$$

z étant une nouvelle variable, et

$$\alpha = \frac{x_0 - \eta - \xi}{2}, \quad \beta = \frac{x_0 + \eta - \xi}{2}.$$

On a toujours, quelle que soit la position de ξ dans l'intervalle $(0, 2\pi)$,

$$|\alpha| < \pi, \quad |\beta| < \pi.$$

L'égalité (5) se réduit à

$$\varphi(\xi, n) = \int_\alpha^\beta \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz.$$

Supposons d'abord que ξ se trouve dans l'intervalle $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ [3-me cas]. On a $\alpha < 0$, $\beta > 0$, et

$$\varphi(\xi, n) = \int_\alpha^0 \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz + \int_0^\beta \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz =$$

$$= \int_0^{-\alpha} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz + \int_0^\beta \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz.$$

Chacune de ces dernières intégrales n'est qu'un cas particulier de l'intégrale de Dirichlet

$$\int_0^g f(z) \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz, \qquad 0 < g \leqq \pi,$$

correspondant à

$$f(z) = 1.$$

En appliquant la méthode connue de Dirichlet, qui se simplifie essentiellement dans le cas considéré, nous démontrerons sans peine que $\varphi(\xi, n)$ tend uniformément vers la limite π, lorsque n croît indéfiniment[1]).

Supposons ensuite que ξ se trouve en dehors de l'intervalle $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ [cas 1° et 5°] et considérons, pour fixer les idées, le cas 1°.

On aura

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

$$\varphi(\xi, n) = \int_0^\beta \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} dz - \int_0^\alpha \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} dz,$$

d'où l'on conclut que $\varphi(\xi, n)$ tend uniformément vers zéro pour $n = \infty$, si

$$0 < \xi < x_0 - \eta.$$

On démontrera de la même manière que $\varphi(x, n)$ tend aussi vers zéro pour $n = \infty$, lorsque ξ se trouve dans l'intervalle $(x_0 + \eta, 2\pi)$ [cas 5°], et cela indépendamment de la position de ξ dans cet intervalle.

Il est aisé de s'assurer enfin que dans les cas 2° et 4° on a

$$\lim_{n=\infty} \varphi(\xi, n) = \frac{\pi}{2}.$$

On voit donc que la fonction $\varphi(\xi, n)$, définie par la relation (5), tend uniformément vers la fonction bien déterminée $\varphi_0(\xi)$, lorsque n croît indéfiniment.

Quant à la fonction limite $\varphi_0(\xi)$, on peut la définir par les conditions suivantes:

$$\begin{array}{llll} & \varphi_0(\xi) = 0 & \text{pour} & 0 < \xi < x_0 - \eta, \\ & \varphi_0(\xi) = \frac{\pi}{2} & \text{pour} & \xi = x_0 - \eta, \\ (8) & \varphi_0(\xi) = \pi & \text{pour} & x_0 - \eta < \xi < x_0 + \eta, \\ & \varphi_0(\xi) = \frac{\pi}{2} & \text{pour} & \xi = x_0 + \eta, \\ & \varphi_0(\xi) = 0 & \text{pour} & x_0 + \eta < \xi < 2\pi. \end{array}$$

[1]) Compar., par exemple, E. Picard: „Traité d'Analyse" Paris, 1901, T. I' p. 238 etc.

Ce résultat a lieu pour tout nombre donné $\eta < \eta_0$ et pour chaque valeur donnée de x_0, prise dans l'intervalle $(\eta,\ 2\pi - \eta)$.

4. Soit maintenant $F(x)$ une fonction quelconque, bornée et intégrable dans l'intervalle $(0,\ 2\pi)$.

Envisageons l'identité connue, fondamentale dans la théorie des séries de Fourier,

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\,(x - \xi) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-\xi)}{2 \sin \frac{x-\xi}{2}},$$

n désignant un entier quelconque (positif).

Multiplions cette identité par $F(\xi)\,d\xi$ et intégrons-la, en étendant l'intégration à l'intervalle $(0,\ 2\pi)$.

On obtient l'égalité bien connue

$$(9)\quad \frac{\pi a_0}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k x + b_k \sin k x) = \int_0^{2\pi} F(\xi) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-\xi)}{2 \sin \frac{x-\xi}{2}} d\xi,$$

où l'on a posé

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\xi) \cos k\xi\, d\xi, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\xi) \sin k\xi\, d\xi \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Reprenons les nombres η et x_0, définis dans le n^0 précédent.

Multiplions (9) par dx et intégrons-la entre les limites $x_0 - \eta$ et $x_0 + \eta$. On trouve

$$\frac{\pi a_0}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\eta}{k\eta} (a_k \cos k x_0 + b_k \sin k x_0) =$$

$$= \frac{1}{2\eta} \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \left\{ \int_0^{2\pi} F(\xi) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-\xi)}{2 \sin \frac{x-\xi}{2}} d\xi \right\}, \tag{10}$$

puisque

$$\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx = 2\eta, \quad \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \cos k x\, dx = \frac{2 \sin k\eta}{k} \cos k x_0,$$

$$\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \sin k x\, dx = \frac{2 \sin k\eta}{k} \sin k x_0 \,.$$

Remarquant maintenant que, d'après l'hypothèse faite au sujet de $F(\xi)$, on peut changer l'ordre des intégrations dans l'intégrale double du second membre de l'égalité (10), on obtient

$$(11)\quad \frac{\pi a_0}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\eta}{k\eta} (a_k \cos k x_0 + b_k \sin k x_0) = \frac{1}{2\eta} \int_0^{2\pi} F(\xi)\, \varphi(\xi, n)\, d\xi,$$

où

$$\varphi(\xi, n) = \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \frac{\sin \dfrac{2n+1}{2}(x-\xi)}{2 \sin \dfrac{x-\xi}{2}}\, dx$$

est précisément la fonction $\varphi(\xi, n)$, que nous avons considérée dans le numéro précédent [l'égalité (5)].

L'égalité (11) a lieu, évidemment, quelle que soit la position du point $x = x_0$ dans l'intervalle $(\eta,\ 2\pi - \eta)$.

5. Posons maintenant

$$(12)\qquad S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\eta}{k\eta} (a_k \cos k x_0 + b_k \sin k x_0)$$

et considérons la série

$$(13)\qquad S = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\eta}{k\eta} (a_k \cos k x_0 + b_k \sin k x_0).$$

Cette série sera convergente et sa somme sera égale à la limite de S_n pour $n = \infty$, si cette limite existe.

On a, d'après (11),

$$S_n = \frac{1}{2\pi\eta} \int_0^{2\pi} F(\xi)\, \varphi(\xi, n)\, d\xi.$$

Par conséquent,

$$(14)\qquad S = \lim_{n=\infty} S_n = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi\eta} \int_0^{2\pi} F(\xi)\, \varphi(\xi, n)\, d\xi.$$

Or, les fonctions $F(\xi)$ et $\varphi(\xi, n)$ satisfont à toutes les conditions du lemme du numéro 2, comme nous l'avons déjà montré dans le numéro 3.

En appliquant ce lemme au cas considéré, on trouve

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi} F(\xi)\,\varphi(\xi,n)\,d\xi = \int_0^{2\pi} F(\xi)\lim_{n=\infty}\varphi(\xi,n)\,dx =$$
$$= \int_0^{2\pi} F(\xi)\,\varphi_0(\xi)\,d\xi\,. \tag{15}$$

Désignant maintenant par ε, ε', ε'', ε''' quatre quantités infiniment petites, on peut écrire

$$\int_0^{2\pi} F(\xi)\,\varphi_0(\xi)\,d\xi = \lim_{\varepsilon=o}\int_0^{x_0-\eta-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon',\varepsilon''=o}\int_{x_0-\eta+\varepsilon'}^{x_0+\eta-\varepsilon''} + \lim \int_{x_0+\eta+\varepsilon'''}^{2\pi}\,.^{1)} \tag{16}$$

Mais, en vertu de (8), on a

$$\int_0^{x_0-\eta-\varepsilon} = 0\,.\quad \int_{x_0+\eta+\varepsilon'''}^{2\pi} = 0$$

pour toutes les valeurs positives de ε, ε''', quelque petites qu'elles soient. On a donc

$$\lim_{\varepsilon=o}\int_0^{x_0-\eta-\varepsilon} = 0\,,\quad \lim_{\varepsilon'''=o}\int_{x_0+\eta+\varepsilon'''}^{2\pi} = 0\,. \tag{17}$$

D'autre part, on trouve, en tenant compte de (8),

$$\int_{x_0-\eta+\varepsilon'}^{x_0+\eta-\varepsilon''} = \pi\int_{x_0-\eta+\varepsilon'}^{x_0+\eta-\varepsilon''} F(\xi)\,d\xi,$$

l'égalité ayant lieu pour toutes les valeurs infiniment petites de ε', ε''.

On a donc

$$\lim_{\varepsilon',\varepsilon''=o}\int_{x_0-\eta+\varepsilon'}^{x_0+\eta-\varepsilon''} = \pi\lim_{\varepsilon',\varepsilon''=o}\int_{x_0-\eta+\varepsilon'}^{x_0+\eta+\varepsilon''} F(\xi)\,d\xi = \pi\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F(\xi)\,d\xi\,. \tag{18}$$

Les égalités (13), (14), (15), (16), (17) et (18) donnent

$$S = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\eta}{k\eta}(a_k\cos kx_0 + b_k\cos kx_0) = \frac{1}{2\eta}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F(\xi)\,d\xi. \tag{19}$$

[1]) Nous omettons l'expression $F(\xi)\,\varphi_0(\xi)$ sous le signe des intégrales, pour simplifier l'écriture.

Mais, quels que soient les nombres η et x_0, choisis de la manière indiquée plus haut (numéro 3), l'intégrale

$$\frac{1}{2\eta}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F(\xi)\, d\xi \tag{20}$$

a un sens bien déterminé, car $F(\xi)$ reste bornée et intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

Il s'ensuit que la série (13) converge en tous les points de l'intervalle $(\eta, 2\pi-\eta)$ et que sa somme est égale à la valeur de l'intégrale (20).

6. Démontrons maintenant que la série (13) converge uniformément dans l'intervalle $(\eta, 2\pi-\eta)$.

Pour cela considérons la différence

$$S_n - S = \frac{1}{2\pi\eta}\int_0^{2\pi} F(\xi)\left[\varphi(\xi, n) - \varphi_0(\xi)\right] d\xi .$$

En vertu des propriétés de la fonction $\varphi(\xi, n)$, indiquées dans le numéro 3, on peut affirmer qu'il existe un nombre ν tel qu'on aura pour $n \gtreqless \nu$ et pour toutes les valeurs de ξ dans l'intervalle $(0, 2\pi)$

$$|\varphi(\xi, n) - \varphi_0(\xi)| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.

On aura donc

$$|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2\pi\eta}\int_0^{2\pi} |F(\xi)|\, d\xi \leqq \varepsilon\frac{M}{\eta},$$

M désignant le maximum de $|F(\xi)|$ dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

Pour chaque valeur de $\eta < \eta_0$, fixée d'une manière quelconque, on peut, par conséquent, donner à l'avance un nombre positif ε' et puis, choisir le nombre ν de façon que l'on ait

$$|S_n - S| < \varepsilon' \qquad \text{pour } n \gtreqless \nu, \tag{21}$$

et cela pour toute position du point x_0 dans l'intervalle $(\eta, 2\pi-\eta)$.

Cette inégalité démontre la proposition énoncée au début de ce n°.

7. On peut maintenant déduire de l'égalité (19) quelques conséquences intéressantes que nous allons indiquer avant de passer à la démonstration du théorème de MM. Liapounoff et Hurwitz.

Faisons une hypothèse particulière au sujet de la fonction $F(\xi)$:

supposons que pour un point x, pris à l'intérieur de l'intervalle $(0, 2\pi)$, l'expression

$$\frac{F(x+h)+F(x-h)}{2} \tag{22}$$

tende vers une limite déterminée, lorsque la variable positive h tend vers zéro, n'importe de quelle manière.

Dans ce cas on peut donner à l'avance un nombre positif ε et puis, trouver un autre membre δ tel qu'on aura

$$\left|\frac{F(x+h)+F(x-h)}{2}-A\right|<\varepsilon \quad \text{pour } h<\delta, \tag{23}$$

où A désigne la limite vers laquelle tend l'expression (22), lorsque h tend vers zéro, c'est-à-dire, selon les notations usuelles,

$$A=\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}. \tag{24}$$

Considérons maintenant l'intégrale [voir l'égalité (19)]

$$\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\,d\xi.$$

Prenons pour nouvelle variable h en posant

$$\xi=x+h.$$

On trouve:

$$\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\,d\xi=\int_{-\eta}^{+\eta} F(\xi+h)\,dh=\int_{-\eta}^{0} F(x+h)\,dh+\int_{0}^{\eta} F(x+h)\,dh=$$

$$=\int_{0}^{\eta}\Big[F(x+h)+F(x-h)\Big]\,dh.$$

Prenons pour η un nombre positif plus petit que δ; l'inégalité (23) aura lieu pour toutes les valeurs de h comprises dans l'intervalle $(0, \eta)$.

On peut donc poser

$$F(x+h)+F(x-h)=2A+\vartheta,$$

où ϑ est une fonction de h satisfaisant à la condition

$$|\vartheta|<2\varepsilon.$$

On a donc

$$\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi = \int_0^{\eta} 2A\, dh + \int_0^{\eta} \vartheta\, dh,$$

d'où l'on tire aisément

$$(25) \qquad \left| \frac{1}{2\eta} \int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi - A \right| < \varepsilon.$$

D'autre part, le nombre η étant fixé de la manière que nous venons d'indiquer, on peut trouver, en vertu de (21), un nombre ν, dépendant de η, tel qu'on ait

$$(26) \qquad | S_\nu - S | < \varepsilon.$$

En rapprochant les inégalités (25) et (26) et en tenant compte de (19) et (24), on trouve

$$(27) \qquad \left| S_\nu - \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2} \right| < 2\varepsilon,$$

où [l'égalité (12)]

$$S_\nu = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\sin k\eta}{k\eta} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\ ^{1)}.$$

L'inégalité (27) démontre le théorème suivant:

Théorème. Pour chaque point x, intérieur à l'intervalle $(0, 2\pi)$, où l'expression

$$(28) \qquad \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}$$

a une valeur déterminée, on peut trouver un nombre positif η, suffisamment petit et puis, un entier positif ν, suffisamment grand, et construire une suite trigonométrique finie de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\sin k\eta}{k\eta} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

qui représentera la valeur approchée de l'expression (28) avec une approximation donnée à l'avance 2ε.

[1]) Nous remplaçons pour plus de simplicité, la variable x_0 par x.

8. Supposons maintenant que la fonction $F(x)$ soit continue en tous les points de l'intervalle $(0, 2\pi)$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif δ tel qu'on ait pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ et pour toutes les valeurs de h dont le module reste inférieur à δ

$$|F(x+h) - F(x)| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif, donné à l'avance.

Appliquons le théorème précédent à ce cas particulier.

Dans l'hypothèse, faite par rapport à $F(x)$, on peut choisir le nombre η indépendamment de la position du point x dans un intervalle quelconque (α, β) intérieur à l'intervalle $(0, 2\pi)$; il en sera de même, par conséquent, du nombre ν.

D'autre part, dans le cas considéré, on a

$$\frac{F(x+0) + F(x-0)}{2} = F(x).$$

L'inégalité (27) se réduit à

$$|S_\nu - F(x)| < 2\varepsilon, \tag{29}$$

où le nombre positif η, assez petit, et le nombre ν, assez grand, restent les mêmes pour tous les points de l'intervalle (α, β).

On peut donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. Si $F(x)$ est une fonction continue en tous les points de l'intervalle $(0, 2\pi)$, on peut, le nombre positif ε étant donné à l'avance, trouver un autre nombre positif η, suffisamment petit, et un entier ν, suffisamment grand, et construire ensuite une série trigonométrique finie

$$S_\nu = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\sin k\eta}{k\eta} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

telle que la fonction $F(x)$ puisse être représentée par S_ν avec l'approximation donnée à l'avance 2ε en tous les points de tout intervalle (α, β) intérieur à l'intervalle $(0, 2\pi)$.

C'est un théorème analogue aux théorèmes de M. Picard et de Weierstrass.

Si nous remplaçons dans S_ν le facteur $\frac{\sin k\eta}{k\eta}$ par r^k $(0 < r < 1)$, nous obtiendrons le théorème de M. Picard; si nous le remplaçons par e^{-k^2t} $(0 < t < 1)$, nous retrouvons le théorème de Weierstrass [1]).

9. Du théorème que nous venons d'établir, il résulte presque immédiatement le théorème sur la représentation approchée des fonctions continues à l'aide des polynômes.

En développant $\cos kx$ et $\sin kx$ en séries des puissances de x et s'arrêtant aux termes convenablement choisis, on trouve

$$|S_\nu - P_m(x)| < \varepsilon,$$

$P_m(x)$ étant un polynôme en x de degré m, m désignant un entier, convenablement choisi.

Cette inégalité et (29) donnent

$$|F(x) - P_m(x)| < 3\varepsilon,$$

ce qui démontre ce théorème, bien connu:

Théorème. Toute fonction $F(x)$, continue dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ peut être représentée à l'aide d'un polynôme $P_m(x)$, convenablement choisi, avec l'approximation donnée à l'avance 3ε en tous les points intérieurs à l'intervalle $(0, 2\pi)$.

Nous n'avons considéré que l'intervalle $(0, 2\pi)$, mais il est évident que le théorème reste vrai pour tout intervalle (a, b), a et b étant des nombres quelconques.

De ce théorème se déduit immédiatement le théorème de M. Picard sur le développement d'une fonction continue en une série de polynômes. Il est inutile de reproduire la démonstration bien connue (Voir E. Picard: „Traité d'Analyse". T. I, p. 278, Paris, 1901).

10. Envisageons de nouveau l'égalité (19), en y remplaçant x_0 par x,

$$(19) \quad S = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\eta}{k\eta}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{2\eta}\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi.$$

Soit x_0 une valeur quelconque de x dans l'intervalle $(\eta, 2\pi - \eta)$.

Multiplions l'égalité (19) par dx et intégrons-la entre les limites $x_0 - \eta$ et $x_0 + \eta$.

On trouve [comparez le n° 4]

[1]) Comparez encore: Leopold Tejer, Comptes rendus, 1900.

$$(30)\ S' = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k\eta}{k\,\eta^2}(a_k \cos k x_0 + b_k \sin k x_0) = \frac{1}{4\eta^2}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi\right),$$

car la série (19) converge uniformément [voir n^0 6].

Supposons que la série de Fourier

$$\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k x + b_k \sin k x)$$

converge pour $x = x_0$.

En employant la méthode de Riemann (Gesammelte Werke, Leipzig, 1876, p. 232), nous démontrons que dans le cas considéré

$$\lim_{\eta=0} S' = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k x_0 + b_k \sin k x_0).$$

D'autre part, l'égalité (30) ayant lieu pour toutes les valeurs positives de η, plus petites qu'un nombre donné $\eta_0 < \pi$, donne

$$\lim_{\eta=0} S' = \lim_{\eta=0} \frac{1}{4\eta^2}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi\right).$$

On a donc

$$\Phi(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k x_0 + b_k \sin k x_0 = \lim_{\eta=0} \frac{1}{4\eta^2}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi\right),$$

ce qui nous permet d'énoncer ce théorème général:

Théorème. Pour que la série de Fourier correspondant à une fonction $F(x)$ bornée et intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, converge en un point quelconque x_0, intérieur à l'intervalle $(0, 2\pi)$, il est nécessaire que l'expression

$$K = \frac{1}{4\eta^2}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi\right) \tag{31}$$

ait une limite bien déterminée pour $\eta = 0$.

D'autre part, si cette limite existe et si la série de Fourier converge pour $x = x_0$, elle a

$$\lim_{\eta=0} \frac{1}{4\eta^2}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi\right)$$

pour somme.

11. Considérons maintenant l'intégrale

$$I = \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi \right).$$

Posons $\xi = x + h$, h étant une nouvelle variable; il viendra

$$I = \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \left(\int_{-\eta}^{+\eta} F(x+h)\, dh \right) =$$

$$= \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \int_{o}^{\eta} \Big[F(x+h) + F(x-h) \Big] dh ,$$

d'où l'on tire, en changeant l'ordre des intégrations,

$$(32) \qquad I = \int_{o}^{\eta} dh \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \Big[F(x+h) + F(x-h) \Big] dx .$$

Supposons maintenant que les expressions

$$F(x_0 + h) \text{ et } F(x_0 - h)$$

tendent vers les limites bien déterminées

$$F(x_0 + 0) \text{ et } F(x_0 - 0),$$

lorsque la variable positive h tend vers zéro.

On pourra alors trouver un nombre positif δ tel qu'on ait pour tous les points u de l'intervalle $(x_0 - \delta,\ x_0)$

$$(33) \qquad F(u) = F(x_0 - 0) + \varphi_1(u)\,, \quad |\, \varphi_1(u) \,| < \varepsilon$$

et, pour tous les points de l'intervalle $(x_0,\ x_0 + \delta)$,

$$(34) \qquad F(u) = F(x_0 + 0) + \varphi_2(u)\,, \quad |\, \varphi_2(u) \,| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif, donné à l'avance.

Considérons maintenant les intégrales

$$\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F(x+h)\, dx \quad \text{et} \quad \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F(x-h)\, dx.$$

On peut écrire

$$\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F(x+h)\, dx = \int_{x_0-\eta+h}^{x_0+\eta+h} F(u)\, du = \int_{x_0-\eta+h}^{x_0} F(u)\, du + \int_{x_0}^{x_0+\eta+h} F(u)\, du .$$

Prenons pour η un nombre positif plus petit que $\frac{\delta}{2}$.

En remarquant que $h-\eta \leqq 0$, on trouve, en tenant compte de (33)

$$\int_{x_0-\eta+h}^{x_0} F(u)\,du = \int_{x_0-\eta+h}^{x_0}\Big[F(x_0-0)+\varphi_1(u)\Big]du = F(x_0-0)(\eta-h)+\int_{x_0-\eta+h}^{x_0}\varphi_1(u)\,du.$$

D'autre part, on a, en vertu de (34),

$$\int_{x_0}^{x_0+\eta+h} F(u)\,du = \int_{x_0}^{x_0+\eta+h}\Big[F(x_0+0)+\varphi_2(u)\Big]du = F(x_0+0)(\eta+h)+\int_{x_0}^{x_0+\eta+h}\varphi_2(u)\,du.$$

Par conséquent,

$$I_1 = \int_o^{\eta} dh \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F(x+h)\,dx =$$

$$= \int_o^{\eta} dh\,\Big[F(x_0+0)(\eta+h)+F(x_{,}-0)(\eta-h)\Big]+Q_1,$$

où

$$Q_1 = \int_o^{\eta} dh \left\{\int_{x_0}^{x_0+\eta+h}\varphi_2(u)\,du + \int_{x_0-\eta+h}^{x_0}\varphi_1(u)\,du\right\}.$$

Il est évident que

$$|\,Q_1\,| < 3\,\varepsilon\,\eta^2, \quad \text{si} \quad \eta < \frac{\delta}{2}.$$

On a donc

$$I_1 = \frac{3}{2}\,\eta^2\,F(x_0+0)+\frac{\eta^2}{2}\,F(x_0-0)+Q_1, \quad |\,Q_1\,| < 3\,\varepsilon\,\eta^2.$$

En appliquant les mêmes raisonnements à l'intégrale

$$\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F(x-h)\,dx$$

et puis à l'intégrale

$$I_2 = \int_o^{\eta} dh \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F(x-h)\,dx.$$

nous trouverons aisément, en tenant compte de (33) et (34),

$$I_2 = \frac{3}{2}\,\eta^2\,F(x_0-0)+\frac{\eta^2}{2}\,F(x+0)+Q_2,$$

où

$$Q_2 = \int_0^{\eta} dh \left\{ \int_{x_0-\eta-h}^{x_0} \varphi_1(u)\, du + \int_{x_0}^{x_0+\eta-h} \varphi_2(u)\, du \right\}$$

et

$$|\, Q_2 \,| < 3\,\varepsilon\,\eta^2, \quad \text{si} \quad \eta < \frac{\delta}{2}.$$

On trouve donc finalement

$$I = I_1 + I_2 = 2\,\eta^2 \Big[F(x_0 + 0) + F(x_0 - 0) \Big] + Q_1 + Q_2$$

avec la condition

$$(35) \qquad |\, Q_1 + Q_2 \,| < 6\,\varepsilon\,\eta^2 \quad \text{pour} \quad \eta < \frac{\delta}{2}.$$

Formons maintenant l'expression K (31):

$$K = \frac{I}{4\,\eta^2} = \frac{F(x_0 + 0) + F(x_0 - 0)}{2} + \frac{Q_1 + Q_2}{4\,\eta^2}.$$

De cette égalité on tire, en tenant compte de (35),

$$\left| K - \frac{F(x_0 + 0) + F(x_0 - 0)}{2} \right| < \frac{3}{2}\,\varepsilon \quad \text{pour} \quad \eta < \frac{\delta}{2}.$$

On voit donc que l'expression (31) tend vers une limite déterminée, lorsque η tend vers zéro, pour chaque point $x = x_0$ de l'intervalle $(0, 2\pi)$ où les expressions

$$F(x_0 + 0), \quad F(x_0 - 0)$$

ont des valeurs déterminées et cette limite est égale à

$$\frac{F(x_0 + 0) + F(x_0 - 0)}{2}.$$

Cette proposition combinée avec le théorème précédent, nous conduit au théorème suivant:

Théorème. Si la série de Fourier converge en un point $x = x_0$, intérieur à l'intervalle $(0, 2\pi)$, où les expressions

$$F(x + 0), \quad F(x_0 - 0)$$

ont des valeurs déterminées[1]), elle convergera toujours vers

[1]) Nous pouvons remplacer cette condition par une condition plus générale que voici: „où l'expression $\frac{F(x_0 + 0) + F(x_0 - 0)}{2}$ a une valeur déterminée“.

$$\frac{F(x_0+0)+F(x_0-0)}{2}.$$

C'est le théorème de Riemann [compar. A. Harnack, Bulletin des Sciences Mathém., 1882, p. 293].

12. Passons maintenant à la démonstration du théorème de M. Liapounoff.

Reprenons l'égalité (19) [en y remplaçant x_0 par x]

$$S=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\eta}{k\eta}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\frac{1}{2\eta}\int_{x-\eta}^{x+\eta}F(\xi)\,d\xi. \tag{19}$$

Soit η' un autre nombre positif satisfaisant aux conditions

$$\eta<\eta'<\pi,$$

et considérons l'intervalle $(\eta', 2\pi-\eta')$.

L'égalité (19) a lieu pour tous les points de cet intervalle.

Multiplions cette égalité par $F(x)\,dx$ et intégrons-la en étendant l'intégration à l'intervalle $(\eta', 2\pi-\eta')$.

On trouve, en se rappelant que la série S converge uniformément (nº 6),

$$\frac{\pi a_0 a'_0}{2}+\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\eta}{k\eta}(a_k a_k'+b_k b_k')=\frac{1}{2\eta}\int_{\eta'}^{2\pi-\eta'}F(x)\Big(\int_{x-\eta}^{x+\eta}F(\xi)\,d\xi\Big)dx, \tag{36}$$

où l'on a posé

$$a_k'=\frac{1}{\pi}\int_{\eta'}^{2\pi-\eta'}F(x)\cos kx\,dx,\quad b_k'=\frac{1}{\pi}\int_{\eta'}^{2\pi-\eta'}F(x)\sin kx\,dx.$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots)$$

Soit maintenant $f(x)$ une fonction donnée, bornée et intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

Définissons la fonction $F(x)$, qui figure dans la formule (36), de la manière suivante:

$$\begin{aligned} F(x)&=0, && \text{si } -\eta<x<\eta', \\ F(x)&=f(x), && \text{si } \eta'\leqq x\leqq 2\pi-\eta', \\ F(x)&=0, && \text{si } 2\pi-\eta'<x<2\pi+\eta. \end{aligned} \tag{37}$$

On a alors

$$a_k' = b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_k' = a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin kx\,dx$$

et l'égalité (36) devient

$$(38)\qquad \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\eta}{k\eta}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{2\eta}\int_0^{2\pi} F(x)\left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\,d\xi\right)dx.$$

Or, quelle que soit la fonction $F(x)$, bornée et intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, la série de la forme

$$(39)\qquad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

est toujours convergente, comme l'a déjà remarqué M. A. Harnack (loc. cit., p. 274).

En posant, en effet,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) + \varrho_n,$$

on trouve aisément

$$\int_0^{2\pi}\varrho_n^2\,dx = \int_0^{2\pi} F^2(x)\,dx - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2).$$

Cette égalité, ayant lieu quelle que soit le nombre entier n, démontre la proposition énoncée.

Ecrivons maintenant l'égalité (38) sous la forme

$$(40)\qquad \frac{1}{2\pi\eta}\int_0^{2\pi} F(x)\left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\,d\xi\right)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k\eta}{k\eta}(a_k^2 + b_k^2) + R_n,$$

où l'on a posé

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin k\eta}{k\eta}(a_k^2 + b_k^2).$$

Désignons par R_n' le reste de la série (39).

Il est évident qu'on a toujours, indépendamment du nombre η,

$$(41)\qquad |R_n| \leqq R_n' \geqq 0,$$

car

$$\left|\frac{\sin k\eta}{k\eta}\right| \leqq 1.$$

Or, la série (39) étant convergente, on peut trouver un nombre ν tel qu'on ait

$$R_n' < \varepsilon \qquad \text{pour } n \gtreqless \nu,$$

ε étant un nombre positif, donné à l'avance.

On aura donc, en vertu de (41),

$$|R_n| < \varepsilon \qquad \text{pour } n \gtreqless \nu. \tag{42}$$

L'égalité (40) a lieu, quel que soit le nombre η, plus petit que η_0.

Supposant que η tend vers zéro et en passant à la limite, on trouve

$$\lim_{\eta=0} \frac{1}{2\pi\eta} \int_0^{2\pi} F(x) \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi \right) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) + \lim_{\eta=0} R_n.$$

Or, l'intégralité (42), ayant lieu indépendamment de η, montre que

$$\left| \lim_{\eta=0} R_n \right| < \varepsilon \qquad \text{pour } n \gtreqless \nu.$$

On obtient donc l'inégalité suivante

$$\left| \lim_{\eta=0} \frac{1}{2\pi\eta} \int_0^{2\pi} F(x) \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi \right) dx - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right) \right| < \varepsilon,$$

qu'on peut remplacer par l'égalité

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \lim_{\eta=0} \frac{1}{2\pi\eta} \int_0^{2\pi} F(x) \left(\int_{x-\eta}^{n} F(\xi)\, d\xi \right) dx. \tag{43}$$

13. Considérons maintenant le second membre de l'égalité obtenue. Posons

$$\xi = x + \zeta,$$

ζ étant une nouvelle variable.

On aura

$$\int_0^{2\pi} F(x) \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi \right) dx = \int_0^{2\pi} F(x) \left(\int_{-\eta}^{+\eta} F(x+\zeta)\, d\zeta \right) dx,$$

d'où, en changeant l'ordre des intégrations, on tire

$$(44) \qquad \int_0^{2\pi} F(x)\left(\int_{-\eta}^{+\eta} F(x+\zeta)\,d\zeta\right)dx = \int_{-\eta}^{+\eta} d\zeta\left(\int_0^{2\pi} F(x)\,F(x+\zeta)\,dx\right).$$

Posons

$$\psi(\zeta) = \int_0^{2\pi} F(x)\,F(x+\zeta)\,dx.$$

Considérons la différence

$$\varDelta = \psi(\zeta+h) - \psi(\zeta) = \int_0^{2\pi} F(x)\Big[F(x+\zeta+h) - F(x+\zeta)\Big]\,dx$$

qu'on peut présenter sous la forme suivante:

$$\varDelta = \int_{\zeta}^{2\pi+\zeta} F(u-\zeta)\Big[F(u+h) - F(u)\Big]\,du.$$

Décomposons l'intervalle $(\zeta, 2\pi+\zeta)$ en intervalles élémentaires

$$e_1,\ e_2,\ e_3, \ldots,\ e_q,$$

q étant un entier quelconque.

Désignons par e_i ceux de ces éléments particuliers, où l'oscillation O_i de la fonction $F(u)$ est plus grande qu'un nombre positif ε, donné à l'avance, par e_k — ceux, où l'oscillation de $F(u)$ ne surpasse pas ε. Comme $F(u)$ reste intégrable dans l'intervalle $(\zeta, 2\pi+\zeta)$, on peut choisir une décomposition convenable telle que l'on ait

$$(45) \qquad \sum e_i < \varepsilon,$$

la somme étant étendue à tous les éléments e_i, où l'oscillation O_i surpasse le nombre ε.

Décomposons maintenant chacun des éléments e_k en trois parties e_k', e_k'' et e_k''' de façon que l'on ait [1])

$$(46) \qquad \sum e_k' < \varepsilon, \quad \sum e_k''' < \varepsilon,$$

ce qui est toujours possible.

[1]) Compar. A. Hurwitz, Annales de l'Ecole Normale, 3-e série, T. XIX, 1902, p. 362.

Désignons maintenant par δ un nombre positif plus petit que la plus petite des parties e_k' et e_k''', et supposons que

$$|h| \leqq \delta. \tag{47}$$

Dans ce cas on aura, pour tous les points de chacun des intervalles e_k''

$$|F(u+h) - F(u)| < \varepsilon, \tag{48}$$

car les points $u+h$ et u appartiennent tous les deux, en vertu de (47), à l'élément e_k, où l'oscillation de $F(u)$ ne surpasse pas ε.

Ecrivons Δ sous la forme suivante

$$\Delta = \sum \int_{e_k'} + \sum \int_{e_k''} + \sum \int_{e_k'''} + \sum \int_{e_i}, \tag{49}$$

en entendant par

$$\int_{\omega}$$

l'intégrale étendue à l'élément ω $(\omega = e_k', e_k'', e_k''', e_i)$.

On a, en tenant compte de (46),

$$\left|\sum \int_{e_k'}\right| < \sum \left|\int_{e_k'}\right| < 2M^2 \sum e_k' < 2M^2\varepsilon,$$

$$\left|\sum \int_{e_k'''}\right| < \sum \left|\int_{e_k'''}\right| < 2M^2 \sum e_k''' < 2M^2\varepsilon,$$

M désignant le maximum de $|F(u)|$ dans l'intervalle $(\zeta, 2\pi + \zeta)$.

D'autre part, on trouve, en vertu de (48),

$$\left|\sum \int_{e_k''}\right| < M\varepsilon \sum e_k'' < 2\pi M\varepsilon,$$

et, en tenant compte de (45),

$$\left|\sum \int_{e_i}\right| < 2M^2 \sum e_i < 2M^2\varepsilon.$$

On a donc, eu égard à (49),

$$|\Delta| < 6M^2\varepsilon + 2\pi M\varepsilon = 2M(3M + \pi)\varepsilon = \varepsilon'.$$

On en conclut qu'on peut trouver un nombre positif δ tel qu'on aura pour toutes les valeurs de h, dont le module est inférieur à δ, et pour toutes les valeurs de ζ dans l'intervalle $(-\eta, +\eta)$

$$|\psi(\zeta+h)-\psi(\zeta)|<\varepsilon',$$

ε' étant un nombre positif, donné à l'avance.

La fonction $\psi(\zeta)$ est donc continue dans l'intervalle $(-\eta, +\eta)$.

14. Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_{-\eta}^{+\eta} d\zeta \left(\int_0^{2\pi} F(x) F(x+\zeta)\, dx \right) = \int_{-\eta}^{+\eta} \psi(\zeta)\, d\zeta. \tag{50}$$

Choisissons le nombre η de façon que l'on ait

$$\eta < \delta.$$

On a alors pour tous les points ζ de l'intervalle $(-\eta, +\eta)$

$$\psi(\zeta) = \psi(0) + \psi_1(\zeta),$$

où $\psi_1(\zeta)$ satisfait à la condition

$$|\psi_1(\zeta)| < \varepsilon. \tag{51}$$

On trouve donc

$$\int_{-\eta}^{+\eta} \psi(\zeta)\, d\zeta = \psi(0) \int_{-\eta}^{+\eta} d\zeta + \int_{-\eta}^{+\eta} \psi_1(\zeta)\, d\zeta,$$

d'où, en tenant compte de (51), on tire

$$\left| \int_{-\eta}^{+\eta} \psi(\zeta)\, d\zeta - 2\eta\psi(0) \right| < 2\varepsilon\eta.$$

Or

$$\psi(0) = \int_0^{2\pi} F^2(x)\, dx.$$

Par conséquent [comp. les égalités (44) et (50)],

$$\left| \frac{1}{2\pi\eta} \int_0^{2\pi} F(x) \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi \right) dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F^2(x)\, dx \right| < \varepsilon,$$

ou bien

$$\lim_{\eta=0} \frac{1}{2\pi\eta} \int_0^{2\pi} F(x) \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi \right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F^2(x)\, dx. \tag{52}$$

Cette égalité a lieu pour toute fonction $F(x)$ satisfaisant aux conditions (37) qui se réduisent maintenant, pour $\eta = 0$, aux suivantes

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \qquad \text{pour } 0 < x < \eta', \\ F(x) &= f(x) \quad \text{pour } \eta' \leqq x \leqq 2\pi - \eta' \\ F(x) &= 0 \qquad \text{pour } 2\pi - \eta' < x < 2\pi, \end{aligned}$$

où $f(x)$ est une fonction quelconque, bornée et intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

Quant à η' c'est un nombre positif arbitraire satisfaisant à une seule condition: $\eta' < \pi$.

Il s'ensuit immédiatement que l'égalité (52) a toujours lieu, pour toute fonction $f(x)$ bornée et intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

On peut donc écrire

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^{\,2}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2),$$

en entendant par a_k et b_k les expressions suivantes

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\,dx.$$

Le théorème suivant est donc démontré:

Théorème. Quelle que soit la fonction $f(x)$, bornée et intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, on a toujours

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^{\,2}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2), \tag{53}$$

comme si l'égalité

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

qui peut n'avoir aucun sens sous les suppositions générales faites par rapport à $f(x)$, représentait le développement de la fonction $f(x)$ suivant la série de Fourier, laquelle serait ici uniformément convergente.

15. Posons

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)+\varrho_n. \tag{54}$$

On a

$$\int_0^{2\pi}\varrho^2\,dx=\int_0^{2\pi}f^2(x)\,dz-\frac{\pi a_0{}^2}{2}-\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k{}^2+b_k{}^2).$$

On en conclut, en vertu de (53), que

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi}\varrho_n{}^2\,dx=0.$$

Soit maintenant $\varphi(x)$ une fonction telle que les intégrales

$$\int_0^{2\pi}\varphi(x)\,f(x)\,dx,\quad \int_0^{2\pi}\varphi(x)\cos kx\,dx,\quad \int_0^{2\pi}\varphi(x)\sin kx\,dx$$

aient un sens bien déterminé et que

$$\int_0^{2\pi}\varphi^2(x)\,dx<Q^2,$$

Q désignant un nombre assignable.

Multiplions (54) par $\varphi(x)\,dx$ et intégrons-la entre les limites α et β, α et β étant des nombres quelconques, compris dans l'intervalle $(0,\ 2\pi)$.

On trouve

$$\int_\alpha^\beta\varphi(x)f(x)\,dx=\frac{\pi a_0 a_0'}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k a_k'+b_k b_k')+\int_\alpha^\beta\varrho_n\,\varphi(x)\,dx,$$

où l'on a posé

$$a_k'=\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta\varphi(x)\cos kx\,dx,\quad b_k'=\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta\varphi(x)\sin kx\,dx.$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

Or

$$\left|\int_\alpha^\beta \varrho_n \varphi(x)\,dx\right| \leqq \left(\int_\alpha^\beta \varrho_n^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\alpha^\beta \varphi^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} <$$

$$< \left(\int_0^{2\pi} \varrho_n^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} Q.$$

Il s'ensuit, en vertu de (55), que

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta \varrho_n \varphi(x)\,dx = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x) f(x)\,dx = \frac{\pi a_0 a_0'}{2} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k a_k' + b_k b_k').$$

En posant, en particulier,

$$\varphi(x) = f(x), \quad \alpha = 0, \quad \beta = 2\pi,$$

nous retrouvons l'égalité (53).

Nous pouvons maintenant énoncer ce théorème général:

Théorème. Soient $f(x)$ une fonction bornée et intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, $\varphi(x)$ une autre fonction pour laquelle les intégrales

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \int_\alpha^\beta \varphi(x)\cos kx\,dx, \quad \int_\alpha^\beta \varphi(x)\sin kx\,dx, \quad \int_\alpha^\beta \varphi^2(x)\,dx,$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots)$$

α et β étant deux nombres quelconques, compris dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, restent finies et bien déterminées

Ces conditions étant remplies, on a toujours

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x) f(x)\,dx = \frac{\pi a_0 a_0'}{2} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k a_k' + b_k b_k'),$$

où

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx,$$

$$b_k' = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varphi(x)\cos kx\,dx,\quad b_k' = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta \varphi(x)\sin kx\,dx.$$

$$(k = 0, 1, 2\ldots).$$

Les théorèmes démontrés sont susceptibles de diverses applications intéressantes que je me permettrai d'indiquer dans un autre travail.

Kharkow, le 1 Octobre 1903.

---

49. M. L. K. GLIŃSKI. **Gruczoły trawienne w górnej części przełyku u człowieka, oraz ich znaczenie.** ***(Die Labdrüsen im oberen Teile der menschlichen Speiseröhre und ihre Bedeutung).*** *(Les glandes à pepsine dans la partie supérieure de l'oesophage).* Mémoire présenté par M. T. Browicz m. t.

Labdrüsen sind im oberen Teile der menschlichen Speiseröhre zuerst im Jahre 1879 vôm Rüdinger [1]) entdeckt worden. Diese Entdeckung geriet aber wieder in Vergessenheit, so dass diese Labdrüsen neuerdings im Jahre 1897 vom Schaffer [2]) nochmals entdeckt und unter dem Namen der oberen Cardiadrüsen genauer beschrieben wurden. Dieser von Schaffer eingeführte Namen erscheint mir unzutreffend, da er zu Verwechslungen Anlass geben kann; deshalb schlage ich vor, die im oberen Teile des Oesophagus auftretenden Rüdinger-Schafferschen Drüsen — einfach Labdrüsen der Speiseröhre zu benennen, was ebenso in dem mikroskopischen Bau wie auch aller Wahrscheinlichkeit nach in der verdauenden Wirkung ihres Sekretes gerechtfertigt sein dürfte. Mit denselben Drüsen befassten sich Krause, Lauteschläger, Eberth, Hildebrand,

[1]) Rüdinger. Beiträge zur Morphologie des Gaumensegels und des Verdauungsapparates. Stuttgart 1879.

[2]) Schaffer. *a)* Uber die Drüsen der menschl. Speiseröhre. Sitzungsber. der Wiener Akad. d. Wissensch. CVI. Bd. Abthlg. III. 1897.

b) Beiträge zur Histologie menschlicher Organe (VI. Oesophagus). Ibidem

c) Epithel und Drüsen der Speiseröhre. Wien. klinische Wochenschrift· 1898 nr. 22.

d'Hardiviller und besonders Coffey und Hewlett. Trotzdem ist die Frage der Anwesenheit, Häufigkeit, des makroskopischen Aussehens, des mikroskopischen Baues und der pathologischen Bedeutung dieser Drüsen keineswegs erledigt und dies veranlasste mich eine Reihe exakter makro- wie auch mikroskopischer Untersuchungen anzustellen.

Die makroskopische Untersuchung stützte sich auf die genauere Besichtigung der ganzen Speiseröhre und besonders ihres oberen Teiles in 1144 Sektionsfällen. In 10 Fällen, wo makroskopisch keine Labdrüsen nachweisbar waren, habe ich bis 5 cm lange Abschnitte aus dem oberen Teile der Speiseröhre mikroskopisch auf Serienschnitten untersucht. Um den Bau dieser Drüsen mikroskopisch genauer festzustellen, habe ich 8 Fälle (zum grössten Teile in Serienschnitten) untersucht, wo die Drüsen schon makroskopisch sichtbar waren. Die Untersuchungen ergaben folgendes.

Unter 1144 Sektionsfällen sind im oberen Teile des Oesophagus die Labdrüsen in 34 Fällen, das ist in circa 3% sämtlicher sezierten Fälle makroskopisch nachgewiesen worden. Ich glaube jedoch, dass die Labdrüsen hier in der Gestalt schon makroskopisch nachweisbarer Herde viel häufiger vorkommen dürften, weil ich im ersten Semester 1903 unter 290 Sektionen die Labdrüsen im oberen Teile des Oesophagus in 17 Fällen, das heisst in circa 6% aller Sektionsfälle bereits makroskopisch festgestellt habe; in meiner ersten Untersuchungsreihe sind wohl manche Fälle unbeachtet geblieben, da man früher (vor diesen Untersuchungen) mit dem makroskopischen Aussehen dieser Drüsenherde nicht genügend vertraut war, die makroskopischen Merkmale derselben von niemandem genauer geschildert worden sind und ich mich deshalb erst auf Grund meiner eigenen Untersuchungen näher darüber unterrichten musste.

In sämtlichen 34 Fällen lagen die schon makroskopisch nachweisbaren Labdrüsenherde in den Seitenbuchten des oberen Teiles der Speiseröhre zwischen dem Niveau der Cartilago cricoidea und demjenigen des 4—5 (in einem Falle bei einem 3-jährigen Knaben des 7) Knorpelringes der Luftröhre. In 27 Fällen lag je ein Herd (oder Herdenaggregat) symmetrisch in jeder Seitenbucht; in einem Falle war auf der linken Seite ein einziger, auf der rechten dagegen waren 3 getrennte schon makroskopisch nachweisbare Labdrüsenherde vorhanden (Fig. 1). In den übrigbleibenden 6 Fällen lagen die ziemlich ausgedehnten Labdrüsenherde nur in der rechten Seitenbucht, in der linken konnte trotz der genauesten Untersuchung kein Labdrüsenherd nachgewiesen werden.

Die Labdrüsen im oberen Teile des Oesophagus treten mit gleicher Häufigkeit in jedem Alter auf: sie sind z. B. bei einem

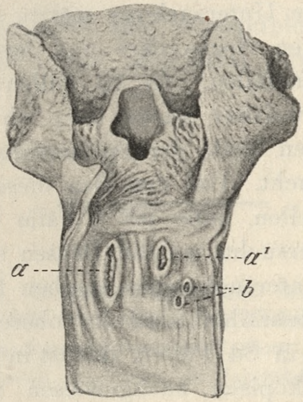

Fig. 1.

3-wöchentlichen Kinde und andererseits bei einem 73-jährigen Greise makroskopisch gefunden worden. Die Ausdehnung dieser Drüsenherde ist sehr verschieden und scheint mit dem Alter der betreffenden Individuen in keinem Zusammenhang zu stehen: in manchen Fällen habe ich bei kleinen Kindern sehr grosse (z. B. bei einem 3-jährigen Kinde $1,5 \times 0,5$ cm^2 grosse) Herde beobachtet, in anderen Fällen waren dagegen bei Erwachsenen nur kaum sichtbare (oder gar nur mikroskopisch nachweisbare) Drüsen vorhanden. Was das Geschlecht anbetrifft, so scheinen nach meinen Untersuchungen die Labdrüsen viel häufiger bei Männern als bei Frauen vorzukommen: unter den 34 Fällen betrafen 28 das männliche und nur 6 Fälle das weibliche Geschlecht.

Nach meinen Untersuchungen kommen die im oberen Teile des Oesophagus schon makroskopisch nachweisbaren Labdrüsenherde in zwei Typen vor. Es sind erstens längliche, linsenförmige Gebilde, die in einer Vertiefung der Oesophaguswand liegen und von einem vorragenden Rande begrenzt sind; während die Schleimhaut des Oesophagus sonst blass, glatt oder höchstens leicht gefaltet ist, zeigt sie in diesen Herden eine feinkörnige, rötlich graue Oberfläche; auf den ersten Blick ähnelt sie hier einer in der Vertiefung der Oesophaguswand liegenden, ganz oberflächlichen Erosion (Fig. 1 und 2). Solche Herde kommen immer getrennt vor und in den Fällen, wo auf einer Seite mehrere vorhanden sind, fliessen sie nicht zusammen. Zweitens können die Labdrüsenherde auch als kleine rundliche oder gar irreguläre über die Oberfläche der Oesophagus-

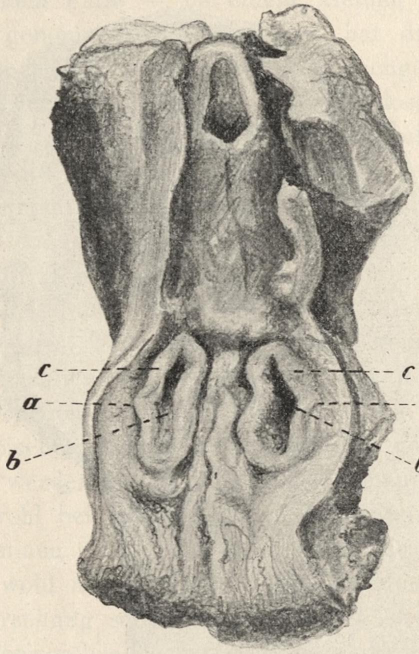

Fig 2.

schleimhaut hervorragende Gebilde erscheinen (Fig. 3, b); nur im Zentrum zeigen sie eine ganz oberflächliche, rötlichgraue, flache Vertiefung, die von ihrer Umgebung scharf abgegrenzt ist und auf den ersten Blick an eine oberflächliche auf einer kleinen Erhabenheit der Oesophagusschleimhaut liegende Erosion erinnert. Herde dieses zweiten Typus kommen nur selten vereinzelt vor, gewöhnlich sind sie in jeder der beiden Seitenbuchten in grösserer Zahl vorhanden und, da sie miteinander zusammenfliessen, bilden sie ziemlich ausgedehnte, sehr irregulär gestaltete und die Oberfläche der Speiseröhrenschleimhaut vorwölbende Gebilde (Fig. 3, a). An der Peripherie eines solchen Herdeaggregates können öfters noch vereinzelte Herde unterschieden werden. Die Oberfläche eines solchen Aggregates ist uneben, an vielen Stellen sind scheinbare Erosionen vorhanden. Es gibt unmerkliche Übergänge vom ersten zum zweiten Typus dieser Drüsenherde, so dass das makroskopische Aussehen der Labdrüsenherde kein charakteristisches Merkmal derselben ist. Der einzige mikroskopisch feststellbare

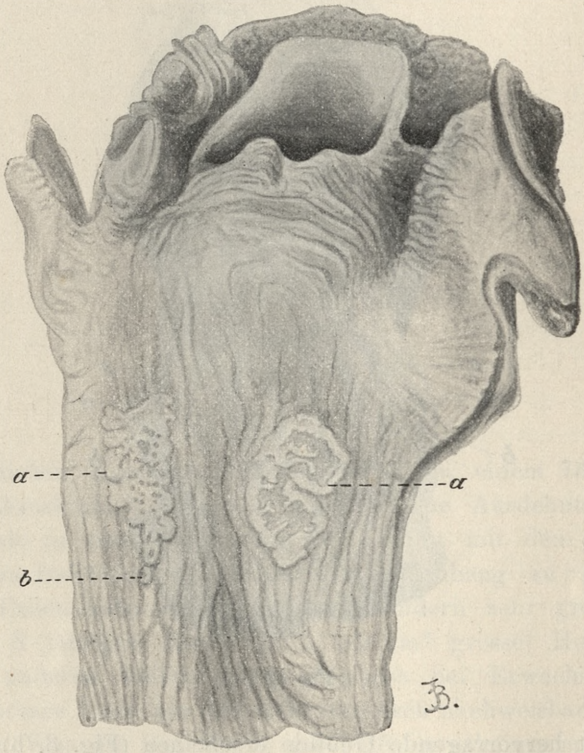

Fig. 3.

Unterschied zwischen den beiden makroskopischen Typen ist die Verschmälerung der Muscularis mucosae und manchmal ihre Ausbuchtung im ersten Typus. Ausserdem scheint das verschiedene makroskopische Aussehen der Labdrüsenherde durch die verschiedene Dicke des benachbarten mehrschichtigen Pflasterepithels, durch den tieferen oder oberflächlicheren Sitz dieser Herde u. s. w. verursacht zu sein.

Um die Angabe Schaffers, die Labdrüsen im oberen Teile der Speiseröhre seien eine konstante Erscheinung bei jedem Menschen, zu prüfen, habe ich 10 Speiseröhren von Individuen verschiedenen Alters und Geschlechtes an Querschnittsserien mikroskopisch untersucht. Zu dieser Untersuchung wurden vom oberen Teile des Oesophagus je 2—5 cm lange Stücke (zwischen der hinteren Fläche der Cartilago cricoidea und der Höhe des 5., 6., 10. und auch in einem Falle — bei einem kleinen Kinde — des 16. Trachealringes) genommen. In 6 Fällen hat die mikroskopische Untersuchung überhaupt keine Labdrüsen nachgewiesen. Zu diesen 6 Fällen gehört auch der, wo das in lückenlosen Serienschnitten untersuchte Stück bis zur Höhe des 16. Trachealringes reichte. In 2 Fällen waren die Labdrüsenherde nur in der rechten Seitenbucht vorhanden; in einem Falle lag in jeder Seitenbucht je ein Herd; im letzten Falle lagen in beiden Seitenbuchten je 2 ziemlich weit von einander entfernte Labdrüsenherde.

Aus diesem Befunde ist zu schliessen, dass das Auftreten der Labdrüsen im oberen Teile des Oesophagus keine seltene Erscheinung ist. Mit Rücksicht darauf, dass für die mikroskopische Untersuchung absichtlich nur solche Fälle gewählt wurden, wo nach dem makroskopischen Aussehen die Existenz von Labdrüsen gar nicht vermutet werden konnte, darf wohl behauptet werden, dass diese Drüsen wohl bei jedem zweiten Individuum oder gar noch häufiger vorkommen. Die Häufigkeit dieser Drüsen genauer festzustellen wird wohl unausführbar sein, weil eine exakte mikroskopische Durchforschung schon eines einzigen etwas längeren Abschnittes der Speiseröhre höchst mühsam und zeitraubend ist. Dass aber die Labdrüsen im oberen Teile des Oesophagus bei allen Menschen vorkommen sollten, wie dies vom Schaffer behauptet wurde, muss entschieden verneint werden; insbesondere liefert der zitierte Fall, in welchem die Speiseröhre in exaktester Weise bis zum 16. Trachealringe untersucht worden ist, in dieser Hinsicht einen überzeugenden Beweis.

Aus den erwähnten mikroskopischen Untersuchungen geht auch hervor, dass die Labdrüsen (im Gegensatz zu Schaffer) auch asymmetrisch, nur unilateral im oberen Teile des Oesophagus vorkommen können; es sind nämlich unter den von mir untersuchten 10 Fällen 2 Fälle mit asymmetrischen, unilateralen Drüsenherden gefunden worden. Dieser Umstand kann wohl den Meinungsunterschied zwischen den beiden Entdeckern dieser Drüsen, Rüdinger und Schaffer, erklären: während der erstere asymmetrischen, nur in einer Seitenbucht der Speiseröhre liegenden Drüsenherden begegnete, hat Schaffer lediglich symmetrisch im oberen Teile des Oesophagus liegende Drüsenherde angetroffen. Es verdient erwähnt zu werden, dass in den Fällen einer asymmetrischen Lage der Labdrüsen (6 makro- und 2 mikroskopische Fälle) die letzteren nur in der rechten Seitenbucht vorhanden waren.

Betreffs des mikroskopischen Baues dieser Drüsen, ihres Stromas und ihrer nächsten Umgebung konnte ich folgendes feststellen.

Ein charakteristisches Merkmal der Labdrüsen ist ihr Sitz in der Mucosa propria; nur selten reichen sie bis zur Muscularis mucosae, wo sie zwischen den Muskelbündeln liegen; in solchen Fällen könnten die Labdrüsen leicht mit den eigentlichen Schleimdrüsen der Speiseröhre verwechselt werden, da diese zwar meistens in der Submucosa, jedoch in einigen Fällen in der Muscularis mucosae oder gar, wenn auch nur teilweise in der Mucosa propria ihren Sitz haben [1]). Durch eine genauere Untersuchung des mikroskopischen Baues dieser Drüsen, wovon unten weiter die Rede sein wird, kann eine solche Verwechslung vermieden werden. An den den Labdrüsen entsprechenden Stellen ist die Muscularis mucosae (entgegen einer Behauptung Schaffers) nicht immer verdickt, im Gegenteil sah ich öfters, dass die Muscularis mucosae gerade an diesen Stellen viel schmäler als in den anderen Teilen desselben Oesophagusquerschnittes war. Diese relative Verschmälerung der Muscularis mucosae ist besonders oft bei dem früher erwähnten ersten makroskopischen Labdrüsenherdetypus beobachtet worden; in einigen solchen Fällen ist die Muscularis mucosae nicht nur verschmälert, sondern auch stark nach aussen ausgebuchtet (Fig. 4).

Die Oberfläche der Labdrüsenherde ist entweder wie die sonstigen Teile des Oesophagus mit einem mehrschichtigen Pflasterepithel oder auch mit einem einschichtigen, hohen, hellen Zylinderepithel, das dem Deckepithel der Magenschleimhaut gleicht, bedeckt (Fig. 5). An den mit dem Zylinderepithel bedeckten Stellen, besonders wenn dieselben etwas grösser sind, bildet die Mucosa zahl-

[1]) Eine solche Lokalisation der Schleimdrüsen soll nach Schaffer nur im untersten Teile des Oesophagus vorkommen; im Laufe meiner Untersuchungen war ich öfters im stande solche Lokalisation auch im oberen Teile der Speiseröhre festzustellen.

reiche Vertiefungen und Falten, die den Magenschleimhautfalten des Pylorusteiles oder gar den Darmzotten ähneln. In einigen Fäl-

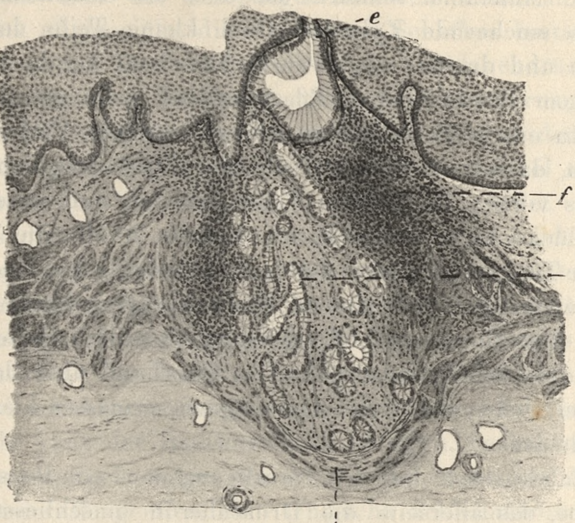

Fig. 4.

len war ein und derselbe Labdrüsenherd teilweise mit Pflaster-, theilweise mit Zylinderepithel bedeckt. Gegen dieses Zylinderepithel

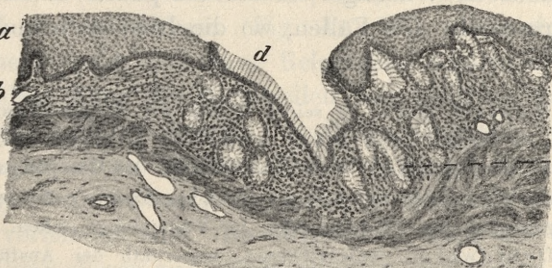

Fig 5.

setzt sich das Pflasterepithel mit scharfem Rande ab. An der Grenze dieser 2 Epitelarthen konnte ich niemals einen unmittelbaren Übergang des Zylinderepithels in die basale Keimzellenlage des geschichteten Pflasterepithels nachweisen. Im Gegenteil hatte ich öfters

Gelegenheit festzustellen, dass das von einer kleinen Menge des Bindegewebes begleitete Zylinderepithel über das Pflasterepithel herüberwuchs. Manchmal schnürte das über die Oberfläche des Pflasterepithels wuchernde Zylinderepithel kleine Teile des Pflasterepithels ab und drückte sie in die Schleimhaut herab, wo sie ganz lose und vom oberflächlichen Pflasterepithel ganz getrennte Herde bildeten. In einem Falle konnte ich ein solches Verhalten sicher nachweisen, da mir in diesem Falle eine lückenlose Serie des ganzen Herdes vorlag. In anderen Fällen, wo ich nur einzelne Präparate oder lückenhafte Serien hatte, konnte wohl eine Täuschung (infolge der Tangentialschnitte durch das Pflasterepithel einer Schleimhautfalte) eintreten. Aus diesen Beobachtungen dürfte man wohl schliessen, dass diese zwei Epithelarten feindlich gegen einander auftreten, dass das Zylinderepithel die Oberhand über das Pflasterepithel zu erreichen strebt und dass es gewissermassen hier ein fremdes Gebilde ist.

Das Labdrüsenstroma ist im allgemeinen ein loses lymphoides Gewebe, das allerseits die Drüsenherde umschliesst, so dass die Mucosa öfters noch in einer Entfernung von $^1/_2$ mm (von den Drüsen selbst ab) einen lymphoiden Bau zeigt. Dieses lymphoide Gewebe wird an manchen Stellen dichter, indem es deutliche, manchmal mit Keimzentren ausgestattete Lymphknötchen [1]) bildet. Solche Lymphfollikel beobachtete ich ebenso in den Drüsenherden selbst, wie auch noch häufiger an der Peripherie in unmittelbarer Nähe der Drüsen. In den Fällen, wo die Labdrüsen in die Muscu-

[1]) Schon Hewlett lenkte in seiner Arbeit die Aufmerksamkeit auf die Lymphknötchen im Stroma dieser Drüsen. Schaffer selbst hat sich über diesen Gegenstand nicht ausgesprochen. Von den Follikeln des Oesophagus gibt er an anderer Stelle im allgemeinen an, dass die Oesophaguslymphknötchen immer mit den Ausführungsgängen der Schleimdrüsen in Verbindung stehen. Die hauptsächlich von Dobrowolski beschriebenen, ausserhalb der Ausführungsgänge liegenden Lymphknötchen, ebenso wie die darin enthaltenen Keimzentren, betrachtet Schaffer als eine pathologische Erscheinung. Ich schliesse mich der Meinung von Dobrowolski an, da ich im Verlaufe meiner Untersuchungen manchmal im Oesophagus Lymphknötchen mit Keimzentren wie auch Follikel angetroffen habe, die in keiner Verbindung mit Schleim- und auch mit Labdrüsen standen Das Ausbleiben irgendwelcher anderer Veränderungen im Oesophagus einerseits, der Mangel einer Wucherung des lymphoiden Gewebes im Organismus andererseits macht ja die Auffassung dieser Follikel als einer pathologischen Erscheinung sehr zweifelhaft. Anm. d. Verf.

laris mucosae hineindringen, wird ihr Stroma teilweise auch von glatten Muskelfasern gebildet.

Was den Bau der Oesophaguslabdrüsen selbst anbetrifft, so kann ich im allgemeinen die Ergebnisse Schaffers bestätigen. Die Drüsen haben den Bau stark verzweigter Schlauchdrüsen, durch Vereinigung einzelner Schläuche ensteht ein Ausführungsgang, der an den mit Pflasterepithel bedeckten Stellen stets an der Spitze der Schleimhautpapille (Fig. 4), an den mit Zylinderepithel ausgestatteten Stellen in die Vertiefungen der Mucosa mündet. Manchmal münden in dieselbe Vertiefung der Schleimhaut zwei oder gar mehr Ausführungsgänge. Nahe an der Mündung sind die letzteren ebenso wie die einzelnen Drüsenschläuche ampullenartig erweitert. Die Mündungen der Ausführungsgänge sind nach abwärts gerichtet, wodurch offenbar der Ausfluss des Sekretes erleichtert wird. Die Gänge sind mit hohem einschichtigen Zylinderepithel, dessen ovale Kerne nicht ganz der Basalmembran anliegen, bedeckt; das Cytoplasma des Epithels zeigt manchmal, und zwar bei Anwendung entsprechender Reagentien, eine schwache Schleimfärbung.

In dem eigentlichen Drüsenepithel lassen sich 2 Zellenarten leicht unterscheiden, wovon die erstere den Pylorusdrüsenzellen, bzw. den Hauptzellen der Magenfundusdrüsen sehr ähnlich ist. Die Zellen der zweiten Art entsprechen ihrer Gestalt, ihrem Bau, ihrer Grösse, ihrem Sitze ebenso wie auch ihrem Verhalten gegen Anilinfarbstoffe (Eosin, Pikrinsäure, Congorot) nach den Belegzellen der Magenfundusdrüsen (Fig. 4). Wie aus meinen Untersuchungen hervorgeht, sind diese Belegzellen manchmal so zahlreich, dass zwischen ihnen die Hauptzellen fast gänzlich verschwinden; in den meisten Fällen kommt jedoch das Gegenteil vor. Manchmal ist in demselben Drüsenherde eine grosse Strecke ganz frei von Belegzellen, während an anderen Stellen dieselben höchst zahlreich vorhanden sind. Im allgemeinen muss ich betonen, dass die Verteilung dieser zwei Zellenarten in den oberen Oesophaguslabdrüsen sehr ungleichmässig ist; in allen Fällen habe ich jedoch in diesen Drüsen die beiden Zellenarten nachgewiesen. Dass Schaffer und seine Nachfölger nicht in allen Fällen Belegzellen nachzuweisen vermochten, wurde vielleicht eben durch die ungleichmässige Verteilung der beiden Zellenarten verursacht.

Aus dieser Beschreibung und aus den beigefügten Figuren ist es ersichtlich, dass diese Drüsen ihrem mikroskopischen Bau nach mit den Drüsen im untersten Teile des Oesophagus, also mit den eigentlichen Cardiadrüsen ganz identisch sind. Dies veranlasste Schaffer beide Drüsenarten Cardiadrüsen zu nennen und nur obere und untere Cardiadrüsen zu unterscheiden. Die Drüsen im oberen Teile der Speiseröhre Cardiadrüsen zu nennen, kann leicht zu Verwechslungen Anlass geben, weshalb ich für diese Drüsen den entsprechenderen, einfachen Namen Oesophaguslabdrüsen vorschlage. Da diese Drüsen gewöhnlich im oberen Teile der Speiseröhre lokalisiert sind, so wäre es auch angemessen, sie obere Oesophaguslabdrüsen zu nennen (im Gegensatz zu den unteren, d. h. den eigentlichen Oesophaguscardiadrüsen). Übrigens kommen, wie es aus dem von Eberth beobachteten Falle ersichtlich ist, diese Drüsen auch in anderen Teilen des Oesophagus vor. Diesen Drüsen den Namen Labdrüsen beizulegen, ist durch ihren Bau, der gleichzeitig auf ihre Funktion hinweist, gerechtfertigt. Die Anwesenheit zweier Zellenarten, die ganz identisch mit denen der Magenfundusdrüsen sind, beweist gleichzeitig, dass diese Zellen im Oesophagus dieselbe Funktion wie im Magen haben, d. h. dass die Hauptzellen das Pepsin, die Belegzellen Salzsäure sezernieren. Dass dem Sekrete dieser Drüsen eine verdauende Wirkung in der Tat zukommt, wird auch dadurch bestätigt, dass in den Drüsen nach dem Tode des Individuums sehr bald postmortale Veränderungen (nämlich ein Absterben und Abtrennen des Zylinderepithels oder gar eine totale Verdauung des Drüsenepithels) eintreten.

In Betracht alles dessen entsteht die Frage nach der Genese der oberen Oesophaguslabdrüsen und nach ihrer Bedeutung. Der erste Teil dieser Frage wurde schon von Schaffer selbst beantwortet: kurz gefasst sind die oberen Oesophaguslabdrüsen nach Schaffer heterotopisch entwickelte Magendrüsen, die ihren Prototypus bei niederen Tierarten finden.

Was die Bedeutung dieser Drüsen in der Pathologie anbetrifft, so wies schon Schaffer darauf hin, dass diesen Drüsen in der Entstehung von Zylinderzellenkarcinomen, von Pulsionsdivertikeln und peptischen Geschwüren eine Rolle wohl zukommen kann. Für diese Behauptung konnte jedoch Schaffer damals keine zwingenden Gründe anführen. Meine Untersuchungen haben teilweise die Behauptungen Schaffers bestätigt, teilweise sogar erweitert. Nachdem Schaffer die Existenz der oberen Oesophaguslabdrüsen nachgewiesen hat, nimmt er die Möglichkeit des Auftretens von

Zylinderzellenkarcinomen im Oesophagus an. In der Tat sind im Oesophagus neben den gewöhnlichen Plattenzellenkarcinomen auch Zylinderzellenkarcinome wenn auch seltener gefunden werden. Diese letzteren sind manchmal ihrem Bau nach den Magenkarcinomen ganz ähnlich, wie dies unter anderen z. B. in letzterer Zeit von Kirschner in einem Falle von Adenokarcinoma scirrhoticum der Speiseröhre beobachtet wurde. Bis in die letztere Zeit wurde der Ausgangspunkt solcher Karcinome in dem Epithel der Oesophagus-

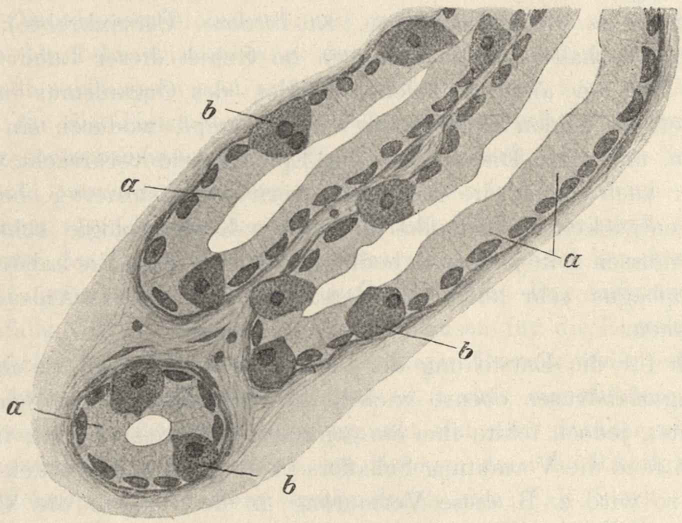

Fig. 6.

schleimdrüsen gesucht, obgleich man aus der Schilderung mancher Fälle folgern musste, dass die Geschwulst ihren Ausgangspunkt von der Schleimhaut selbst nahm. In anderen Fällen wurde die Entstehung dieser Zylinderzellenkarcinome im Oesophagus durch Metaplasie des Pflasterepithels erklärt. Da wir jedoch bestimmt wissen, dass im Oesophagus Labdrüsenherde vorkommen, so begreifen wir leicht, dass diese Drüsen auch den Ausgangspunkt für Zylinderzellenkarcinome vom Typus der Magenkrebse bilden können. Diese Geschwülste können in allen Teilen der Speiseröhre angetroffen werden, da die Labdrüsen auch in verschiedenen Teilen des Oesophagus vorkommen: diese Drüsen sind recht häufig im oberen und unteren Teile des Oesophagus zu finden, der Fall Eberths beweist jedoch, dass sie auch in anderen Teilen zu treffen sind.

Wie meine eigenen Untersuchungen zeigen, können diese Drüsenherde im Oesophagus desto leichter den Ausgangspunkt für die Entstehung maligner Geschwülste liefern, da sie beim Menschen keine typische Erscheinung sind, da sie nicht bei allen Menschen auftreten, da sie sich oft nur auf einer Seite finden, da sie bei verschiedenen Individuen verschieden stark entwickelt sind, schliesslich heterotopisch auftreten und somit in dem Oesophagus gewissermassen fremde Gebilde sind. Wie bekannt, kommen die Karcinome mit gewisser Vorliebe dort vor, wo 2 Epithelarten an einander grenzen (z. B. Lippenkrebse, Analkrebse, Cervixkrebse); ein derartiges Verhalten finden wir eben im Gebiet dieser Labdrüsenherde. Wie an anderen solchen Stellen des Organismus führen auch hier die beiden Epithelarten einen Kampf, wodurch ein Abschnüren und eine Dislokation der Epithelherde verursacht wird. Wie wir auch immer die Bedeutung verirrter, dislozierter, heterotopisch entwickelter Epithelherde für die Krebsätiologie schätzen mögen, müssen wir jedoch unbedingt gestehen, dass die Labdrüsen im Oesophagus sehr leicht zur Entstehung der Krebse Anlass geben können.

Auch für die Entstehung der Pulsionsdivertikel sind die oberen Oesophaguslabdrüsen ebenso wichtig. Dies wurde auch von Schaffer angedeutet, jedoch fehlte ihm ein genügendes Beweismaterial; infolgedessen fand die Vermutung Schaffers keine genügende Berücksichtigung; so wird z. B. diese Vermutung in der letzten die Oesophagusdivertikel betreffenden Arbeit Riebolds gar nicht erwähnt. Derweilen sprechen einige durch meine Untersuchungen nachgewiesenen Tatsachen eben für die Richtigkeit der Schafferschen Anschauung. Ich habe schon erwähnt, dass die Labdrüsenherde manchmal in Vertiefungen der Oesophaguswand liegen, die manchmal sogar eine ziemlich bedeutende Ausbuchtung bilden. Aus meinen Beobachtungen geht auch hervor, dass die Muscularis mucosae unter diesen Drüsenherden sogar bedeutend schmäler als an anderen Teilen desselben Querschnittes sein kann. Manchmal ist (wie z. B. aus der Figur 4 ersichtlich) die Muscularis mucosae nicht nur schmäler, sondern auch deutlich ausgebuchtet. Es ist verständlich, dass solche Gebilde leicht in echte Divertikel übergehen können. Da die Oesophaguswand an diesen Stellen weniger resistent ist, was einerseits durch den Mangel des Pflasterepithels, andererseits durch die Verschmälerung der Muscularis mucosae verursacht ist, so wird sie leicht dem Drucke der herabgleitenden Speisen nachgeben und sich immer mehr ausbuchtend echte Pulsionsdivertikel bilden. Durch den Umstand, dass die Pulsionsdivertikel im oberen Teile des Oesophagus, also eben auch dort, wo die Labdrüsen gewöhnlich vorkommen, scheint ja die eben ausgesprochene Meinung eine weitere Stütze zu gewinnen. Diesbezüglich kann ich als höchst überzeugenden Beweis einen schon erwähnten Fall, welcher ein 3-jähriges Kind betraf (Fig. 2), anzuführen. In diesem Falle lag ein (rechter) Labdrüsenherd 3 mm unterhalb des Niveaus der Oesophagusschleimhaut und verursachte eine makroskopisch sehr deutliche Ausbuchtung der gesamten Oesophaguswand, d. h. ein echtes Oesophagusdivertikel. Offenbar gibt es wohl auch andere für die Entstehung der Pulsionsdivertikel bestimmende Momente, wie solche in letzter Zeit von Brosch, Starck, Rosenthal, Riebold genauer diskutiert wurden. Jedenfalls geht aus den erwähnten Gründen hervor, dass die Labdrüsenherde auch zur Entstehung der Oesophaguspulsionsdivertikel Anlass geben können.

In seinen Arbeiten lenkt noch Schaffer die Aufmerksamkeit ebenfalls auf die Bedeutung der Labdrüsen für die Enstehung der peptischen Oesophagusgeschwüre. Dieser Process steht jedoch mit den unteren Oesophaguslabdrüsen (d. i. den eigentlichen Cardiadrüsen) in Verbindung; man braucht sich also darüber nicht länger aufzuhalten. Nur möchte ich betonen, dass die Richtigkeit dieser Behauptung Schaffers bereits durch den Fall Störk aus der Nothnagelschen Klinik bewiesen wurde: in diesem Falle wies der Autor innerhalb eines peptischen Oesophagusgeschwüres die Anwesenheit der heterotopisch entwickelten Labdrüsen nach. Überdies muss ich noch hinzufügen, dass das Vorkommen der Labdrüsen im oberen Teile der Speiseröhre von vornherein die Möglichkeit der Entstehung von peptischen Geschwüren nicht nur in den untersten, sondern auch in anderen Abschnitten der Speiseröhre bedingt. Dass solche Fälle wirklich vorkommen, zeigt unter anderen Rehers Fall; in diesem Falle war ausser einem frischen peptischen Geschwür in der Cardiagegend „eine ausgebreitete Narbe (scil. post. ulcus rotundum) im oberen Teile der Speiseröhre".

Noch eins verdient hervorgehoben zu werden. Wie schon erwähnt wurde, zeigt das Stroma der oberen Oesophaguslabdrüsen den Bau des lockeren Lymphoidgewebes, das hie und da dichtere Anhäufungen und sogar Lymphknötchen (manchmal mit Keimzentren) bildet. Diese Lymphknötchen können leicht, schon bei geringer Verletzung des sie bekleidenden zarten Zylinderepithels durch herabgleitende Speisen die Eintrittspforte für verschiedene Bakterien werden, was eine Geschwürbildung nach sich ziehen kann. Die Bakterien können hier um so eher eindringen, da die Labdrüsen oft in den Vertiefungen der Oesophaguswand liegen; in diesen Vertiefungen also können die mit den pathogenen Mikroorganismen verunreinigten Speisebröckel liegen bleiben. Auf diese Weise könnten wir vielleicht verschiedene perioesophageale eitrige und jauchige Processe in diesen Fällen erklären, in denen sogar die Autopsie keine andere Ursache des Leidens nachweisen kann. Wir finden zwar an diesen Stellen als natürlichen Schutz gegen Infektion ein saures Sekret von verdauender Wirkung, aber dieses fliesst herab und kann nicht in alle Lymphknötchen eindringen, besonders aber nicht in solche, die an der oberen Peripherie eines solchen Labdrüsenherdes liegen. Andererseits ist es bekannt, dass der Magensaft unter Umständen keinen hinreichenden Schutz gegen das Eindringen der Bakterien bietet, weshalb auch in den Oesophaguslabdrüsenherden eine Infektion zustande kommen kann. Für die Richtigkeit dieser Behauptung spricht überzeugend ein Fall, wo ich in einem an der Peripherie eines Labdrüsenherdes liegenden Lymphknötchen (bei einem 24-jährigen Manne mit Lungenschwindsucht) viele typische Tuberkel mit Riesenzellen fand, wo also schon die tuberkulöse Infektion stattfand.

Ich vermute, dass in manchen Fällen diese Oesophaguslabdrüsenherde, eigentlich aber das ihr Stroma bildende Lymphoidgewebe den Ausgangspunkt für die primäre Infektion mit Tuberkelbazillen bilden können, wie dies in letzter Zeit in ähnlicher Weise für Tonsillen nachgewiesen wurde. Der oben angeführte Fall spricht deutlich für die Möglichkeit eines Eindringens der Tuberkelbazillen in das Gebiet der beschriebenen Labdrüsen, wodurch an diesen Stellen sogar tuberkulöse Veränderungen eintreten können. Aller Wahrscheinlichkeit nach wurde in diesem Falle die tuberkulöse Infektion des Drüsenherdes von den Bazillen verursacht, die aus der tuberkulösen Lunge kommend mit Schleim und Speisen geschluckt wurden. Die vertiefte Lage einzelner Labdrüsenherde in der Oesophaguswand veranlasst das Anhalten der vorübergleitenden Speisebröckel; sind nun diese mit Tuberkelbazillen infiziert, so ist es in Anbetracht der Anwesenheit des Lymphoidgewebes im Stroma des Drüsenherdes und in Anbetracht des zarten Zylinderepitels leicht möglich, dass die Tuberkelbazillen eindringen. Dies muss natürlich nicht immer lokale Veränderungen hervorrufen, viel öfter können die Tuberkelbazillen von hier aus mit dem Lymphstrom in die Hals- oder gar Mediastinal- und Bronchialdrüsen gelangen, um dort erst tuberkulöse Prozesse hervorzurufen.

Selbstverständlich berechtigen mich meine bisherigen Untersuchungen nicht zu der apodiktischen Behauptung, dass die Sache sich so verhält, wie ich sie darstelle; es müsste da noch eine grössere Anzahl von Untersuchungen gemacht werden. Die von mir angeführten Momente sollen jedoch unsere Aufmerksamkeit bei der Nachforschung nach dem Orte des primären Eindringens der Tuberkelbazillen auch nach dieser Richtung hin lenken und dies umsomehr, da in letzter Zeit die Frage des Verhältnisses zwischen Tuberkulose und Perlsucht und die Frage der Fütterungstuberkulose in den Vordergrund getreten ist. Meine Untersuchungen zeigen, dass die beschriebenen Labdrüsenherde des Oesophagus die Eingangspforte für die in den Speisen sich befindenden Tuberkelbazillen bilden können, die dann mit dem Lymphstrome in die Hals- oder gar Mediastinal- und Bronchialdrüsen gebracht, daselbst primäre tuberkulöse Veränderungen hervorrufen können. Es ist möglich, dass auf diese Weise eine Anzahl primärer tuberkulöser Veränderungen in den Lymphdrüsen bei Kindern als Folge einer Infektion durch Speisen (Milch von perlsüchtigen Kühen), also als eine Fütterungstuberkulose zu erklären wäre.

Die Ergebnisse meiner Untersuchungen fasse ich folgendermassen zusammen:

1⁰ Im oberen Abschnitte des Oesophagus finden wir beim Menschen sehr häufig (denn wenigstens bei jedem zweiten Individuum) Drüsen vom Typus der Magendrüsen (die von mir sogenannten oberen Oesophaguslabdrüsen), entgegen der Annahme Schaffers jedoch finden wir diese Drüsen nicht konstant bei jedem Individuum.

2⁰ Sehr oft, denn ungefähr in 3—6% aller Sektionsfälle, treten diese Drüsen als gut sichtbare und schon makroskopisch sicher erkennbare Herde auf; in den übrigen Fällen lässt sich ihr Vorkommen nur mikroskopisch nachweisen.

3⁰ Diese Drüsen liegen gewöhnlich in den Seitenbuchten des oberen Teiles der Speiseröhre zwischen dem Niveau der Cartilago cricoidea und demjenigen des fünften Trachealringes; ausnahmsweise (Eberths Fall) kommen sie auch in anderen Teilen der Speiseröhre vor (abgesehen natürlich von der Cardiagegend, wo sie eine gewöhnliche Erscheinung sind).

4⁰ Die makroskopischen Labdrüsenherde der Speiseröhre machen gewöhnlich auf den ersten Blick den Eindruck von Erosionen und kommen in zweifacher Gestalt vor: *a)* in der Form von linsenartigen, manchmal bedeutend in die Oesophaguswand vertieften Herden mit wallartigem Rande; Herde dieser Art liegen stets vereinzelt; *b)* in Form von kleinen runden oder unregelmässigen über die Schleimhautoberfläche erhabenen Herden, die oft miteinander zusammenfliessend grössere Aggregate bilden.

5⁰ Gewöhnlich treten diese oberen Oesophaguslabdrüsen in Form von 2 symmetrischen Herden auf. von denen je einer in einer Seitenbucht liegt; nur ziemlich selten (sowohl makro- als auch mikroskopisch) kommt ein asymetrischer Herd in der rechten Seitenbucht vor; manchmal finden wir in kleinen Entfernungen voneinander mehrere Labdrüsenherde.

6⁰ Die oberen Oesophaguslabdrüsen kommen gleich häufig in jedem Alter vor; dagegen scheinen sie viel öfter beim männlichen wie beim weiblichen Geschlechte aufzutreten. Die Grösse der Drüsenherde hängt nicht vom Alter der betreffenden Individuen ab.

7⁰ Mikroskopisch liegen die Labdrüsen in der Schleimhaut selbst, manchmal dringen sie teilweise in die Muscularis mucosae hinein, niemals reichen sie jedoch in die Submucosa; öfters bildet dabei die verdünnte Muscularis mucosae divertikelähnliche Ausbuchtungen.

8⁰ Das Stroma der oberen Oesophaguslabdrüsen ist ein loses Lymphoidgewebe, welches hie und da dichter wird und Lymphknötchen sogar mit Keimzentren bildet.

9⁰ Die oberen Oesophaguslabdrüsen gehören dem Typus der verzweigten Schlauchdrüsen an; ihr Epithel ist aus zweierlei Zellen zusammengesetzt, die den Haupt- und Belegzellen der Magenfundusdrüsen entsprechen. Belegzellen scheinen in allen Drüsenherden vorzukommen, sind jedoch sehr unregelmässig verteilt.

10⁰ Die Ausführungsgänge sind mit hohem, einschichtigen, hellen Zylinderepithel bedeckt, dessen Cytoplasma manchmal leichte Schleimfärbung zeigt. Die Drüsenschläuche und besonders ihre Ausführungsgänge zeigen manchmal ampullenartige Erweiterungen.

11⁰ Das Epithel, das die Oesophaguslabdrüsenherde bedeckt, unterscheidet sich entweder vom geschichteten Pflasterepithel anderer Speiseröhrenteile nicht, oder es wird durch ein hohes Zylindepithel vertreten, das dem der Magenschleimhaut ähnlich wird; manchmal ist ein Labdrüsenherd teils mit der einen, teils mit der anderen Epithelart bedeckt. Nimmt das Zylinderepithel die grössere Oberfläche ein, so ist die Schleimhaut in Falten gelegt und macht den Eindruck eines verirrten Magenschleimhautstückes.

12⁰ Die Ausführungsgänge münden an mit Pflasterepithel bedeckten Stellen stets an der Spitze der Bindegewebspapille, an mit Zylinderepithel bedeckten Stellen in den Schleimhautvertiefungen aus.

13⁰ An der Übergangsstelle des geschichteten Pflasterepithels ins Zylinderepithel kann es manchmal zur Abschnürung und Verschiebung von Epithelteilchen kommen.

14⁰ Die Bedeutung der Drüsen vom pathologischen Standpunkte ist eine wichtige mit Rücksicht auf die Entstehung: *a)* der Oesophaguskrebse und besonders der Zylinderzellenkarcinome; *b)* der Pulsionsdivertikel; *c)* der runden Oesophagusgeschwüre; *d)* der eitrigen und jauchigen Prozesse der Perioesophagealgewebe; *e)* der tuberkulösen Prozesse in der Speiseröhre.

15⁰ In Anbetracht der ziemlich bedeutenden Anhäufung von Lymphoidgewebe im Gebiete der Oesophaguslabdrüsenherde, ferner in Anbetracht der von mir in einem Falle hier nachgewiesenen tuberkulösen Veränderungen, schliesslich in Anbetracht der bekannten anatomischen Bedingungen, scheint die Vermutung berechtigt zu sein, dass das in den Drüsenherden liegende Lymphoidgewebe manchmal den Ort des primären Eindringens von Tuberkelbazillen bilden kann, von wo dann diese mit dem Lymphstrom in die Hals-, oder gar Mediastinal- und Bronchiallymphdrüsen gelangen können. Ich glaube, dass auf diese Weise wenigstens eine gewisse Anzahl von Fällen der primären tuberkulösen Veränderungen in den Lymphdrüsen bei Kindern als eine Fütterungstuberkulose sich erklären liesse. Dies erheischt jedoch noch weiterer Untersuchungen.

Diese Arbeit wurde im pathologisch-anatomischen Institut der Krakauer Universität (Leiter Herr Prof. Dr. Browicz) ausgeführt.

Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1. Der obere Teil der Speiseröhre bei einem 10-monatlichen Knaben (natürliche Grösse). In der linken Seitenbucht sieht man einen grossen linsenartigen Labdrüsenherd (*a*) des ersten Typus; auf der rechten Seite sieht man 3 ähnliche, aber kleinere Labdrüsenherde (*a' b*).

Fig. 2. Der obere Teil der Speiseröhre (natürliche Grösse) mit grossen Labdrüsenherden des ersten Typus bei einem 3-jährigen Knaben:

a) Drüsenherde;

b) divertikelähnlich (besonders auf der rechten Seite) vertiefter Teil des Drüsenherdes;

c) vorragender Rand des Drüsenherdes.

Fig. 3. Der obere Teil der Speiseröhre (natürliche Grösse) mit den Labdrüsenherden des zweiten Typus:

a) Drüsenherdeaggregat, das durch das Zusammenfliessen der einzelnen Herde entstanden ist;

b) einzelner getrennt liegender Drüsenherd.

Fig. 4. Querschnitt durch den oberen Teil der Speiseröhre mit den Labdrüsen (Vergröss. Reichert Obj. 2. Ocul. 3; Zeiss'scher Zeichenapparat):

a) geschichtetes Pflasterepithel der Oesophagusschleimhaut;

b) Stratum proprium der Schleimhaut;

c) Muscularis mucosae; bei *c'* ist diese verschmälert, durch die Labdrüsen (*d*) divertikelähnlich ausgebuchtet;

d) Labdrüsen;

e) Mündung eines Ausführungsganges;

f) Lymphknötchen.

Fig. 5. Querschnitt durch den oberen Teil der Speiseröhre (Vergröss. wie in Fig. 4);

d) eine inmitten des geschichteten Plattenepithels liegende mit einschichtigem Zylinderepithel bedeckte Stelle;

e) die Labdrüsen in der Schleimhaut, die den lymphoiden Bau zeigt.

Fig. 6. Ein quer und zwei längs durchschnittene Labdrüsenschläuche aus dem oberen Teile der Speiseröhre (Vergrösser. Reichert. Obj. 4. Ocul. 7; Zeiss'scher Zeichenapparat):

a) Hauptzellen;

b) Belegzellen.

50. M. A. WRZOSEK. **O drogach, któremi drobnoustroje przechodzą w warunkach prawidłowych z przewodu pokarmowego do organów wewnętrznych.** ***(Recherches sur les voies de passage des microbes du tube digestif dans les organes internes à l'état normal).*** Mémoire présenté par M. T. Browicz m. t.

Les travaux exécutés pendant les quatre dernières années à l'Institut de pathologie générale et expérimentale de l'Université de Cracovie par MM. Rogoziński, Rzegociński ainsi que par l'auteur démontrent que les tissus d'animaux normaux peuvent contenir des microorganismes capables de se développer, et que ces microorganismes, au moins dans la plupart des cas, pénètrent dans les organes internes par le tube digestif.

En ce qui concerne le passage des microorganismes des intestins dans les glandes mésentériques (pancreas Asellii), il est tout à fait sûr qu'il a lieu par la voie des vaisseaux chylifères, sinon toujours, du moins très souvent. Mais on n'avait pas encore étudié ce que ces microbes deviennent ultérieurement et on ne savait pas si les microorganismes passaient plus loin, c'est-à-dire dans la lymphe du canal thoracique, ou s'ils se déposaient tous dans les glandes mésentériques.

Pour résoudre ce problème, j'ai fait plusieurs séries d'expériences. La première série fut exécutée de la manière suivante:

Je nourrissais des chiens pendant un on deux jours d'aliments gras, composés généralement de tripes et de gruau, et j'ajoutai à cette nourriture de grandes quantités (quelques centaines de centimètres cubes) de culture de bouillon de microbes inoffensifs se laissant facilement distinguer en cultures, et particulièrement le b. prodigiosum, le b. fluorescens non liquefaciens et le b. violaceus.

Le jour de l'expérience, je faisais à l'animal, quelques heures après son repas, une injection sous-cutanée de 0·01 de chlorure de de morphine par kg., et je le narcotisais par un mélange en parties égales d'alcool, d'éther et de chloroforme.

Une fois l'animal profondément endormi, je procédais à la recherche, sur le cou, du canal thoracique, en faisant des ligatures de chaque vaisseau rencontré dans le champ opératoire, pour éviter toute hémorrhagie considérable. Le canal thoracique ainsi préparé sur la longueur d'un centimètre au moins, j'établissais une ligature au point où il rejoint la veine; ensuite, après l'avoir serré avec une serre-fine, au-dessus de la ligature, je l'ouvrais avec des ciseaux tout près de la ligature, et j'introduisais dans l'ouverture une canule de verre soigneusement stérilisée. Je recueillais la lymphe 5 à 7 heures après le dernier repas de l'animal. J'ai reconnu que le moment le plus favorable pour recueillir la lymphe est à peu près 6 heures après le dernier repas; la lymphe est alors tout à fait laiteuse.

Après l'introduction de la canule thoracique, à mesure qu'il s'amassait un demi-centimètre cube de lymphe, je l'aspirais dans une pipette Pasteur stérilisée et passée plusieurs fois à la flamme. Après, j'ensemençais immédiatement la lymphe recueillie en bouillon ou gélatine liquide. Avant d'aspirer la lymphe dans la pipette, je passais à la flamme le bout de la canule.

Sur certains milieux de culture j'ensemençais la lymphe à plusieurs reprises, un demi-centimètre cube chaque fois.

Dans ces conditions, il était facile d'éviter la contamination de la lymphe par les microorganismes de l'air ou par leurs spores, en effet la lymphe était très peu de temps en contact avec l'air ambiant, car il s'écoulait tout au plus quelques dizaines de secondes avant qu'elle se fût amassée dans la canule en quantité suffisante, et l'air de la salle d'opération durant l'expérience contenait fort peu des microorganismes, grâce aux précautions prises préalablement.

Pour constater si les microorganismes ne passent pas du tube digestif dans les organes internes par les veines mésentériques, j'ai examiné le sang des veines mésentériques daus quelques-unes de mes expériences. Pour aspirer le sang de ces veines j'ai employé, outre la pipette Pasteur, une canule construite pour l'examen des voies urinaires par M. le Prof. Ch. de Klecki, qui permet de recueillir et d'ensemencer le liquide d'une manière qui exclut presque complètement la possibilité de sa contamination par les microorganismes de l'air.

Outre la lymphe et le sang (des veines mésentériques et du coeur) j'ai ensemencé aussi plusieurs fois des morceaux d'organes internes, après en avoir cautérisé la surface avec un fer rouge. Les dimensions des morceaux ensemencés variaient d'un demi-centimètre à un centimètre cube. Une fois l'ensemencement fini, je saignais l'animal et je faisais l'autopsie du cadavre en dirigeant spécialement mon attention sur le tube digestif; celui-ci ne présentait jamais de lésions.

Je transvasais immédiatement après dans des boîtes de Petri la gélatine des tubes dans lesquels j'avais ensemencé la lymphe, le sang, ou bien le morceau d'un organe quelconque.

En cultivant les microorganismes provenant des portions d'organes, j'avais souvent recours à la méthode dite d'enrichissement, c'est-à-dire que je plaçais pour plusieurs heures le bouillon contenant un morceau d'organe dans une étuve à 37°, et j'introduisais ensuite ce morceau d'organe dans une boîte de Petri contenant de la gélatine liquide.

J'observais les milieux ensemencés pendant dix jours et quelquefois davantage. Lorsque j'obtenais des microorganismes dans un des milieux de culture, je les ensemençais sur de la gélose, de la gélatine ou de la pomme de terre, pour en obtenir des cultures pures. Pour favoriser le développement des microorganismes que j'avais introduits dans le tube digestif de mes chiens, je maintenais presque toujours les cultures à la température de la chambre; dans ces conditions ces microorganismes se développent très bien et produisent leurs pigments caractéristiques à cette température.

J'examinais presque toujours la virulence des microorganismes cultivés en les injectant dans la cavité péritonéale de cobayes.

Dans la première série d'expériences, j'ai employé dix chiens dont j'ai étudié bactériologiquement 157 centimètres cubes de lymphe ensemencée en 119 parties. Jen'ai jamais obtenu dans les cultures de lymphe les microorganismes qui avaient été mélangés à la nourriture distribuée à ces animaux. Je n'ai obtenu que 6 fois des cultures d'autres microorganismes provenant de 3 chiens (deux fois des coques et quatre fois des bacilles).

J'ai aussi étudié bactériologiquement 80 centimètres cubes de sang, en 22 parties, provenant de 5 chiens. Une fois seulement j'ai cultivé des microorganismes, mais différents de ceux dont les animaux avaient été nourris. Tous les autres milieux de culture ensemencés avec du sang sont restés stériles.

Les microorganismes cultivés de la lymphe et du sang n'étaient point virulents pour le cobaye. Malgré toutes les précautions prises, il n'est pas possible de décider s'ils provenaient de la lymphe et du sang, la contamination par l'air ne pouvant être entièrement exclue.

En examinant au point de vue bactériologique les organes provenant de 6 chiens, j'ai obtenu les microorganismes dont les animaux avaient été nourris, quatre fois de la glande mésentérique, une fois de la glande bronchique, une fois du poumon et une fois du rein. Ces résultats confirment donc mes recherches antérieures qui démontrent que les microorganismes peuvent passer du tube digestif des animaux normaux dans les organes internes.

Avant mes recherches, Nocard, Porcher et Desoubry, Neisser, Opitz, Nicolas et Descos ont étudié au point de vue bactériologique le chyle et la lymphe. Ils sont arrivés à des résultats différents. D'après les auteurs allemands (Neisser, Opitz) la lymphe est toujours stérile, tandis que les auteurs français (Nocard, Porcher et Desoubry, Nicolas et Descos) sont d'un avis contraire. Les inexactitudes qu'on trouve dans tous ces travaux ne permettent guère d'en admettre les résultats sans restriction, de sorte qu'il n'existe pas, jusqu'à présent, de preuves sûres que les microorganismes passent du tube digestif de l'animal dans la lymphe et dans le sang.

Il faut supposer que la pénétration des microorganismes dans les organes internes peut s'effectuer dans les conditions normales soit par les chylifères et le canal thoracique, soit par les veines mésentériques, ou bien encore par ces deux voies à la fois.

L'examen bactériologique de la lymphe et du sang des animaux en pleine digestion m'a donné des résultats négatifs; mais on pourrait les attribuer au pouvoir bactéricide de ces humeurs.

Les propriétés bactéricides du sang ont déjà été maintes fois constatées in vitro; celles de la lymphe, au contraire, n'ont été étudiées jusqu'à présent que dans une seule recherche concernant le bacille typhique.

Pour me rendre compte si le pouvoir bactéricide pouvait influer sur le résultat de mes expériences, il fallait résoudre la question de savoir si la lymphe que j'ensemençais, c'est-à-dire la lymphe non défibrinée et prise en pleine période digestive, était en réalité bactéricide. Pour obtenir une lymphe non défibrinée et ne se cogulant pas, au moins pendant un certain temps, j'eus recours à la méthode de Freund modifiée par Bordet et Gengou, méthode dont ces auteurs se sont servis pour obtenir du sang non coagulable. Je me servais donc, pour recueillir la lymphe, de tubes enduits intérieurement de paraffine, et j'introduisais dans le canal thoracique une canule recourbée à angle droit, dont l'intérieur était également enduit de paraffine. Malgré toutes ces précautions, je n'arrivais pas toujours à obtenir une lymphe ne se coagulant pas au bout de quelques minutes. Dans les expériences réussies, la lymphe ne se coagulait que quelques heures après et même plus tard. Je prenais, pour l'examen de son pouvoir bactéricide, la lymphe de chiens affamés et celle de chiens nourris; parfois j'en défibrinais quelques portions, d'autres fois je ne le faisais pas. Je tâchais, en outre, d'obtenir du plasma de lymphe en recueillant celle-ci dans des tubes enduits intérieurement de paraffine et en la soumettant ensuite à l'action d'un centrifuge. Mais ces essais ne réussirent point, la lymphe s'étant chaque fois coagulée pendant cette opération.

Les microorganismes que j'ensemencais dans de la lymphe ou dans du bouillon additionné de lymphe, notamment le b. fluorescens non liquefaciens, b. prodigiosum, b. coli commune, staphylococcus pyogenes aureus, streptococcus pyogenes, b. pyocyaneus, provenaient dans la plupart des cas de cultures de bouillon de 24 heures. J'étudiais les propriétés bactéricides de la lymphe en me servant de la méthode de Nuttal et de Buchner. Je comptais toujours les colonies dans les boîtes de Petri trois jours après l'ensemencement des microorganismes sur la gélatine.

Il résulte de toutes mes expériences que la lymphe du canal thoracique, de chien nourri ou affamé, possède un pouvoir bactéricide in vitro tout aussi bien à l'état défibriné qu'à l'état non défibriné. On en peut donc conclure que les résultats négatifs de mes recherches ont été causés par le pouvoir bactéricide de la lymphe, agissant dans les milieux de culture.

Ces recherches n'ayant pas résolu le problème posé, j'ai tâché de l'étudier d'une autre façon.

Chez une dizaine de chiens narcotisés, je liais deux fois le canal thoracique tout près de son embouchure dans la veine, et je le tranchais entre les ligatures. Quelques jours après, je leur donnais pendant deux jours des aliments additionnés de cultures de 24 ou 48 heures du b. kiliense, b. fluorescens non liquefaciens, b. prodigiosum, et au bout de ce temps je narcotisais les animaux et j'en prélevais à l'état vivant des morceaux d'organes que je soumettais à l'examen bactériologique. Les dimensions des morceaux d'organes ensemencés variaient d'un demi-centimètre à un centimètre cube.

J'observais tous les milieux ensemencés pendant dix jours.

Dans cette série d'expériences, la culture a décelé la présence des microorganismes avalés par l'animal, une fois dans la glande bronchique et deux fois dans les glandes mésentériques. Mais il faut remarquer que ces microorganismes se sont développés dans une glande bronchique d'un sujet chez lequel la nourriture fut directement introduite dans l'estomac à l'aide d'une sonde stomacale. Si on tient compte de ce que dans ces conditions les chiens sont souvent très inquiets, il est facile de comprendre que les microorganismes peuvent alors pénétrer dans le poumon par aspiration surtout si le chien se met à aboyer. C'est probablement ce qui a eu lieu dans le cas présent.

Maintenant, si on compare les résultats d'ensemencement des fragments d'organes des chiens dont le cansl thoracique a été lié (seconde série d'expériences) à ceux provenant d'animaux normaux (première série d'expériences), on constate une différence notable.

Dans la première série d'expériences, en étudiant les organes de six chiens la culture bactériologique a décelé la présence des microorganismes dont ces animaux avaient été nourris: quatre fois dans les glandes mésentériques, une fois dans le rein, une fois dans le poumon et une fois dans la glande bronchique. Dans la seconde série d'expériences sur dix chiens dont le canal thoracique fut lié, je n'ai obtenu les microorganismes dont ces animaux avaient été nourris que deux fois dans les glandes mésentériques et une fois dans la glande bronchique. Dans la première série d'expériences, j'ai ensemencé les organes de 6 chiens; dans un travail antérieur [1]) j'ai expérimenté d'une façon analogue sur 4 chiens. Ces expériences ont donné un résultat pareil à celui des expériences du présent travail.

Nous pouvons donc comparer les résultats d'ensemencement des organes de 10 chiens normaux nourris de microorganismes avec ceux d'un même nombre d'animaux dont le canal thoracique a été lié et qui étaient nourris d'une façon analogue.

Série I (chiens normaux).

Organe examiné			Résultat positif de l'examen bactériologique
glandes mésentériques	de 10	chiens	7 fois
la rate	„ 10	„	1 „
le foie	„ 10	„	0 „

[1]) De la pénétration des microorganismes de l'appareil digestif dans les organes internes à l'état normal. (Archives polonaises des sciences biologiques et médicales, vol. II, 1903, expériences N⁰ XV, XVI, XVIII et XIX).

le rein	de 10	chiens	1	fois
le poumon	„ 6	„	1	„
la glande bronchique	„ 4	„	1	„
la moëlle des os	„ 4	„	1	„
le muscle	„ 3	„	2	„

Série II (chiens dont le canal thoracique a été lié).

Organe examiné			Résultat positif de l'examen bactériologique	
glandes mésentériques	de 10	chiens	2	fois
la rate	„ 10	„	0	„
le foie	„ 10	„	0	„
le rein	„ 10	„	0	„
le poumon	„ 10	„	0	„
la glande bronchique	„ 10	„	1	„
le moëlle des os	„ 4	„	0	„

Il faut remarquer que chez les chiens dont le canal thoracique a été lié, les microorganismes introduits dans le tube digestif ne pénétraient que relativement rarement dans les glandes mésentériques. J'ai constamment observé chez ces animaux un notable engorgement des vaisseaux chylifères. Il faut donc admettre que le passage des microorganismes, du tube digestif dans les glandes mésentériques, était entravé par une résorption à la suite d'une augmentation de pression dans les vaisseaux chylifères.

En se basant sur les résultats des expériences exposées plus haut, on peut affirmer que les microorganismes passent du tube digestif dans le sang qui les répand dans les organes internes; ce passage se fait sinon exclusivement du moins dans la majorité des cas, par l'intermédiaire des vaisseaux chylifères et du canal thoracique.

Comme je n'ai jamais trouvé dans les organes internes des chiens dont le canal thoracique avait été lié, des microorganismes introduits dans leur estomac (à l'exception d'un cas douteux), je crois pouvoir conclure qu'il n'est pas probable que la pénétration des microorganismes, du tube digestif dans les organes internes, se produise généralement par la voie des veines mésentériques.

Travail de l'Institut de pathologie générale et expérimentale de l'Université de Cracovie.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Pod redakcyą
Członka delegowanego Wydziału matem.-przyr., Dra Leona Marchlewskiego.

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

18 Grudnia 1903.