

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 6.

Juin

1903.

- Sommaire:** 27. M. ÉMILE GODLEWSKI père. Sur la formation des matières albuminoïdes dans les plantes.
28. M. ST. ZAREMBA. Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité.
29. M. ST. ZAREMBA. Sur un problème d'hydrodynamique lié à un cas de double réfraction accidentelle dans les liquides et sur les considérations théoriques de M. Natanson relatives à ce phénomène.
30. PUBLICATIONS DE LA CLASSE.

Séance du lundi 6 Juin 1903.

PRÉSIDENCE DE M. E. GODLEWSKI.

27. M. ÉMILE GODLEWSKI père m. t. **O powstawaniu materij białkowych w roślinach.** (*Zur Kenntnis der Eiweissbildung in den Pflanzen*). (*Sur la formation des matières albuminoïdes dans les plantes*).

Im Jahre 1897 publizierte ich im „Bulletin“ eine vorläufige Mitteilung über Untersuchungen, welche hauptsächlich den Einfluss des Lichtes auf die Assimilation des Stickstoffs aus Nitraten¹⁾ und auf die Eiweissbildung in höheren Pflanzen zum Gegenstand hatten.

Als Ausgangspunkt diente mir die bekannte Arbeit Schimpers, in welcher derselbe durch eine mikrochemische Methode nachzuweisen suchte, dass Licht und Chlorophyll für die Zersetzung der Nitrate in den höheren Pflanzen unentbehrlich sind.

Als Objekt dienten mir Weizenkeimlinge, welche ich in den üblichen Nährstofflösungen teils im Dunkeln teils am Lichte, aber in einer kohlenstofffreien Atmosphäre sich entwickeln liess, um durch eine quantitative Analyse festzustellen, ob unter solchen Bedingungen, d. h. unter Ausschluss der Kohlensäureassimilation eine Zunahme des organischen Stickstoffs respekt. des Eiweissstickstoffs auf Kosten der Nitrate stattfinden kann. Der Vergleich der

¹⁾ Unter Assimilation verstehe ich hier nicht die Aufnahme der Nitrate selbst, sondern ihre Umarbeitung in organische Stickstoffverbindungen.



im Dunkeln und im Lichte erlangten Resultate sollte über den unmittelbaren vom Assimilationsprozesse unabhängigen Einfluss des Lichtes auf die Zersetzung der Nitrates und auf die Eiweissbildung Auskunft geben.

Aus diesen Untersuchungen ergab sich das Resultat, dass die Bildung der organischen Stickstoffverbindungen auf Kosten der Nitrates und der stickstofffreien Reservestoffe auch ohne Mitwirkung der Assimilation möglich ist, und zwar nicht nur im Lichte, sondern auch im Dunkeln, dass aber diese Bildung im Lichte oft mehr als dreimal so stark ist als im Dunkeln.

Dieses Resultat modifizierte insofern die Ansichten Schimpers, als es bewies, dass Licht und Chlorophyll für die Zersetzung des Salpeters in den höheren Pflanzen nicht absolut notwendig, sondern nur in hohem Grade förderlich sind.

Ausserdem hat sich aus meinen damaligen Untersuchungen gezeigt, dass eine Zunahme an Eiweissstickstoff im Verhältnis zu dem der Samen nur bei den im Lichte kultivierten Weizenkeimlingen zu konstatieren war, bei den Pflanzen, welche sich im Dunkeln entwickelten, fand immer eine bedeutende Abnahme des Eiweissstickstoffs statt.

Einige Wochen vor meiner damaligen Mitteilung erschien bekanntlich im gleichen Jahre 1897 auch eine Arbeit von Laurent Marchal und Carpiaux¹⁾, in welcher die Autoren zu dem gleichen Resultate gelangten, dass nämlich das Licht in hohem Grade die Umwandlung des anorganischen Stickstoffs (Ammoniak und Nitrates) in organischen beeinflusst. Ja die Autoren glaubten aus ihren Versuchen den Schluss ziehen zu müssen, dass bei höheren Pflanzen die Bildung der organischen Stickstoffverbindungen aus anorganischen ohne Lichtwirkung überhaupt nicht möglich sei und dass nur eine geringe Menge Ammoniaks aus Nitraten im Dunkeln sich bilden kann.

Zwar haben die Autoren bei den Versuchen im Lichte die Assimilation nicht auszuschliessen gesucht, so dass man bei ihren Versuchen eine indirekte Lichtwirkung voraussetzen konnte, dass aber wenigstens der Hauptsache nach nicht eine indirekte, sondern eine

¹⁾ Laurent Marchal et Carpiaux „Recherches expérimentales sur l'assimilation de l'azote ammoniacal et nitrique par les plantes supérieures“ Extrait du Bulletin de l'Académie royale de Belgique, T. XXXII, 1896.

direkte Wirkung des Lichtes im Spiele war, folgt aus den Versuchen im farbigen Lichte, welche ergeben haben, dass nicht die wenig brechbaren Strahlen, von denen die Assimilation abhängt, sondern eben die allerbrechbarsten, ultravioletten, welche an der Assimilation der Kohlensäure sich kaum beteiligen, bei der Umarbeitung der anorganischen Stickstoffverbindungen in organische am kräftigsten gewirkt haben.

In einem wesentlichen Punkte differierten jedoch die Resultate von Laurent Marchal und Carpiaux von den meinigen. Die Autoren glaubten nämlich, bei ihren Salpeterversuchen nur eine geringe Ammoniakbildung im Dunkeln beobachtet zu haben, nie aber einen Zuwachs an organischem Stickstoff; ich habe dagegen bei allen Weizenkeimlingen, welche Salpeter enthielten und im Dunkeln kultiviert wurden, eine deutliche, wenn auch viel schwächere Zunahme an organischen, nicht eiweissartigen Stickstoffverbindungen als im Lichte, konstatiert zu haben geglaubt.

Diese Differenz sollte aufgeklärt werden. Wie ich das schon in meiner ersten Mitteilung hervorgehoben habe, war die Methode der Ammoniakbestimmung, welcher sich L. M. u. C. bedienten (Destillation der gepulverten und im Wasser suspendierten Substanz mit Magnesia) nicht einwurfsfrei, und zwar musste bei ihrer Anwendung das Ammoniak zu hoch und der organische Stickstoff zu niedrig bestimmt werden; andererseits aber habe ich bei meinen damals publizierten Weizenversuchen das Ammoniak gar nicht bestimmt, falls dasselbe also da war, wurde sein Stickstoff dem organischen zugezählt, was eine zu hohe Bestimmung desselben zur Folge haben musste. Um also meinen Schluss, dass auch in den im Dunkeln vegetierenden Weizenkeimlingen eine gewisse Menge Salpeterstickstoffs in organische, wenn auch nicht proteinartige Verbindungen übergeführt wird, mit Bestimmtheit aufrecht erhalten zu können, musste konstatiert werden, ob der aus der Vernachlässigung der Ammoniakbestimmung möglicherweise entstandene Fehler nicht so gross war, dass er die Richtigkeit dieses Schlusses beeinträchtigen konnte. Ausserdem war es wünschenswert, über die Natur der bei der Assimilation des Stickstoffes aus Salpeter sich bildenden nichtproteinartigen Stickstoffverbindungen, eine nähere Auskunft zu erhalten. Dies waren die Gründe, weshalb ich seit der Veröffentlichung meiner ersten Mitteilung noch wiederholt auf die Versuche über die Assimilation des Stickstoffs aus Nitraten durch

die Keimpflanzen von Weizen und in dem letzt verflossenen Jahre auch von Gerste zurückkam. Sonstige Arbeiten und Berufspflichten haben es bewirkt, dass diese meine Untersuchungen nur langsam fortschreiten konnten und dass ihre Veröffentlichung erst jetzt zustande kam.

Unterdessen sind aber zahlreiche wertvolle Arbeiten erschienen, welche die von mir behandelten Fragen betreffen; bevor ich also zur Auseinandersetzung meiner eigenen Untersuchungen schreite, bin ich verpflichtet diese Arbeiten zu erörtern.

Übersicht der neuesten Literatur.

In meiner ersten Mitteilung habe ich unter anderem zwei Sätze aufgestellt, welche zu gewissen Missverständnissen Anlass gaben:

Satz 3. Die Bildung der Eiweissstoffe auf Kosten der Nitrate ist bei den Weizenkeimlingen unter gewöhnlichen Bedingungen ohne Lichtwirkung unmöglich.

Satz 5. „Diese intermediären, nicht proteinartigen Stickstoffverbindungen können sich in den Weizenkeimlingen auf Kosten der Nitrate auch im Dunkeln bilden, ihre Umbildung zu Proteinstoffen erfolgt aber nur im Lichte“.

Diese Sätze wurden von manchen Autoren so verstanden, als ob ich der Ansicht wäre, dass die Eiweissbildung bei den höheren Pflanzen überhaupt nur im Lichte stattfinden könne. Das ist aber nicht der Fall. In Berücksichtigung der schon damals erschienenen und von mir zitierten Arbeit Hansteens, habe ich die obigen Schlüsse ausschliesslich auf das Objekt, mit welchem ich experimentierte, d. h. auf Weizenkeimlinge, welche unter gewöhnlichen Bedingungen vegetieren, beschränkt und von künftigen Untersuchungen die Entscheidung erwartet, wie die Resultate meiner Versuche mit denjenigen Hansteens in Übereinstimmung zu bringen sind.

Diese Erwartung ist nun teilweise erfüllt worden. Durch eine Reihe von Untersuchungen wurde in den letzten Jahren von verschiedenen Autoren festgestellt, dass auch bei den höheren Pflanzen die Eiweissbildung im Dunkeln sowohl auf Kosten der Nitrate wie der nicht proteinartigen Stickstoffverbindungen möglich ist.

Diese Eiweissbildung im Dunkeln wurde an sehr verschiedenen Objekten konstatiert, aber immer nur dann, wenn den be-

treffenden Objekten neben der entsprechenden Stickstoffquelle auch stickstofffreie organische Verbindungen sehr reichlich zu Gebote standen.

So hat Zaleski¹⁾ eine Zunahme des Eiweissstickstoffs beobachtet, wenn er die Blätter von *Helianthus annuus* in Knop'scher Nährlösung unter Zusatz von 4% Lävulose 6 bis 39 Stunden im Dunkeln hielt. Dagegen fand er unter solchen Bedingungen immer eine Abnahme des Eiweissstickstoffs, wenn der Versuch in der Knop'schen Lösung ohne Zusatz der Lävulose ausgeführt wurde.

Derselbe Autor²⁾ stellte fest, dass bei der Keimung der Zwiebel von *Alium Cepa* im Dunkeln die Menge der Eiweissstoffe auf Kosten des Nichteiweissstickstoffs zunimmt. Bemerkenswert ist, dass diese Eiweissbildung hier weder auf Kosten des Asparagins oder Glutamins, noch auf Kosten der mit Phosphorwolframsäure fällbaren Stickstoffverbindungen stattfindet, da die Menge des Asparagins während der Keimung der Zwiebel eher zu- als abnimmt und die Menge des mit Phosphorwolframsäure fällbaren Stickstoffs fast unverändert bleibt. Demnach erfolgt hier die Eiweissbildung auf Kosten der Aminosäuren oder anderer nicht näher bestimmbarer Stickstoffverbindungen.

Dass bei der Keimung der Zwiebel die Eiweissbildung über die Eiweisszersetzung überwiegt, während bei der Keimung der Samen das Gegenteil zu beobachten ist, erklärt sich einerseits dadurch, dass die Zwiebel verhältnismässig wenig Eiweissstickstoff und viel Stickstoff des Nichteiweisses enthält, andererseits dadurch, dass der grosse Reichtum der Zwiebel an zuckerartigen Kohlenhydraten günstige Bedingungen für die Umwandlung des Nichteiweisses in Eiweiss schafft.

Die Resultate Zaleski's wurden später durch Prianischnikow³⁾ bestätigt, wobei sich derselbe zur Eiweissbestimmung der Kontrolle wegen neben der Stutzer'schen Methode auch der Fällung des Eiweisses mit Phosphorwolframsäure, mit Bleiessig und mit Tannin bedient hat. Alle diese Fällungsmethoden haben hinreichend überein-

¹⁾ Zaleski: Zur Kenntniss der Eiweissbildung in den Pflanzen; Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft., B. XV. 1897.

²⁾ Zaleski: Zur Keimung der Zwiebel von *Alium Cepa* und Eiweissbildung; Berichte der deuts. bot. Gesell., B. XVI. 1898.

³⁾ Prianischnikow: Eiweisszerfall und Eiweissrückbildung in den Pflanzen; Berichte der deuts. bot. Gesell., B. XVII J. 1899.

stimmende Resultate gegeben, wodurch die Eiweissbildung bei der Keimung der Zwiebeln im Dunkel vollkommen sichergestellt wurde.

Anschliessend an diese Versuche Zaleski's und Prianischnikow's haben Iwanoff, Schreder und Schulow nachgewiesen, dass nicht nur bei der Keimung der gewöhnlichen Zwiebel, sondern auch bei der Keimung anderer pflanzlichen Speicherorgane Eiweissbildung auf Kosten anderer nichteiweissartigen Stickstoffverbindungen stattfindet. So konstatierte dies Iwanoff¹⁾ für Kartoffelknollen und Mohrrüben, Schreder²⁾ für Kartoffelknollen und knollige Dahliawurzeln und Schulow³⁾ für Runkelrüben.

Palladin⁴⁾ konstatierte eine Zunahme der Eiweissstoffe auf Kosten anderer stickstoffhaltigen Verbindungen bei den etiolierten Blättern von *Vicia Faba*, nachdem er dieselben auf einer 10% resp. 5% Rohruckerlösung 3 bis 4 Tage im Dunkeln gehalten hatte. Indessen war diese Zunahme doppelt so gross, wenn dasselbe Experiment im Lichte ausgeführt wurde.

Gettlinger⁵⁾ knüpfte an die Untersuchung von Richards und Stich über die Wirkung der Verwundungen der Pflanzenteile auf ihre Atmung an und untersuchte, wie sich der Umsatz der Stickstoffverbindungen, infolge der Verwundungen gestaltet. Er zerschnitt Zwiebeln von *Allium Cepa* oder Kartoffelknollen in mehrere Stücke, analysierte einen Teil dieser Stücke sofort, einen anderen, nachdem sie etwa 5 bis 7 Tage im Dunkeln in feuchter Luft verweilt hatten. Ausnahmslos erfolgte dabei eine starke Vermehrung der Eiweissstoffe offenbar auf Kosten anderer Stickstoffverbindungen.

Diese Resultate Gettlinger's wurden später durch Zaleski⁶⁾ an verschiedenen fleischigen Pflanzenorganen, wie den Wurzeln von *Beta vulgaris*, *Daucus carota*, *Apium graveolens*, Knollen von Kar-

¹⁾ Iwanoff. „Versuche über die Frage, ob in den Pflanzen bei Lichtabschluss Eiweissstoffe sich bilden“, Landwirtschaftliche Versuchsstationen B. 55, S. 78, 1901.

²⁾ Schreder: Извѣстія Московскаго сѣльскохозійскаго Института. Zitiert von Schulow.

³⁾ Schulow „Образованіе бѣлковъ высшими растеніями въ темнотѣ“ Separatabd. aus „Извѣстія Московск. сѣльскохоз. Института“ Kw. IV 1902.

⁴⁾ Palladin „Influence de la lumière sur la formation de matières protéiques actives etc“, extrait de la Revue générale de Botanique. T. II 1899.

⁵⁾ Геттлингеръ „Вліяніе раненій на образованіе бѣлковыхъ веществъ въ растеніяхъ“.

⁶⁾ Zaleski „Beiträge zur Kenntnis der Eiweissbildung in der Pflanze“. Ber. d. deutsch. Bot. Gesellsch. B. XIX 1901.

toffeln und von *Dahlia variabilis* bestätigt, wobei die wichtige und von Gettlinger, wie es scheint, vernachlässigte Vorsicht der Sterilisation der Objekte und des Versuchsraumes beobachtet wurde. Ob nach dem Versuche das Sterilbleiben der Versuchsobjekte kontrolliert wurde, wird nicht angegeben. Der Umstand des Sterilbleibens ist sehr wichtig, da es möglich wäre, dass die konstatierte Eiweissvermehrung nicht von den Versuchsobjekten selbst, sondern von den an denselben vegetierenden Mikroorganismen stammen könnte. Einige seiner Versuche mit Zwiebeln führte Zaleski auch in einem mit Wasserstoff erfüllten Raume aus und fand, wie es zu erwarten war, dann keine Eiweissvermehrung.

Einen sicheren Nachweis für die Bildung der Eiweissstoffe im Dunkeln glaubt Goldberg¹⁾ dadurch erbracht zu haben, dass er bei den 3-, 8- und 14-tägigen Weizenkeimlingen die Pflänzchen von dem Endosperm trennte, und beide getrennt auf ihren Eiweissgehalt untersuchte. Es hat sich natürlich gezeigt, dass in den nacheinander folgenden Keimungsstadien die Menge des Eiweissstickstoffes in den Pflänzchen stetig zu-, im Endosperm aber konstant abnahm. Dieses Resultat war vorauszusehen, da ja die Eiweissstoffe im Endosperm bekanntlich eben dazu bestimmt sind, um nach den Keimlingen zu wandern und dort als Material für Plasmabildung zu dienen. In wie weit nun diese Wanderung in Form von Eiweiss selbst und in wie weit in Form von Zersetzungsprodukten desselben stattfindet, das lässt sich ohne weiteres nicht beurteilen, doch ist angesichts dessen, dass die Protoplasten benachbarter Zellen untereinander bekanntlich durch Plasmodesmen verbunden sind, die Wanderung der Eiweissstoffe als solcher von Zelle zu Zelle durchaus nicht ausgeschlossen. Deswegen führen die Versuche Goldberg's über die Bildung der Eiweissstoffe im Dunkeln zu keiner Entscheidung.

Viel wichtiger für die uns interessierende Frage sind die Versuche Suzuki's²⁾, namentlich diejenigen, welche dieser Forscher mit etiolierten Gerstepflanzen ausgeführt hat.

Etiolierte 15 cm. hohe Gerstekeimlinge wurden eine Woche lang

1) Гольдбергъ „Образованіе бѣлковыхъ веществъ во время проростанія пшеницы въ темнотѣ“.

2) Suzuki „On the formation of proteids and the assimilation of nitrates by phanerogams in the absence of light“ Bulletin of the College of Agriculture of the Imperial University, Vol. III, N. 5. 3484 Tokyo, Japan, 1898.

in einer 0.2% Lösung von salpetersaurem Natron gehalten, ein Teil derselben wurde dann sofort getrocknet und analysiert, ein anderer in eine 10% Rohrzuckerlösung gesetzt, 7 Tage lang im dunkeln Raume gehalten und erst dann getrocknet und analysiert.

Die Analyse ergab folgendes:

| | 100 Keimlinge enthielten: | |
|----------------------|-----------------------------|--------------------------|
| | am Anfange des Versuches | am Ende des Versuches |
| | mgr. | mgr. |
| Gesamtstickstoff | 57.6 | 58.2 |
| Eiweissstickstoff | 25.2 | 30.5 |
| Asparaginstickstoff | 17.2 | 16.6 |
| Salpeterstickstoff | 4.4 | 0.0 |
| Sonstiger Stickstoff | 10.8 | 11.2 |

Es unterliegt also keinem Zweifel, dass hier die Bildung der Eiweissstoffe auf Kosten des Salpeterstickstoffs stattgefunden hat. Bemerkenswert ist, dass bei einem anderen Versuche, welcher ganz ähnlich ausgeführt wurde mit dem einzigen Unterschiede, dass anstatt einer 10% nur 1% Zuckerlösung angewendet wurde, keine Eiweissbildung konstatiert werden konnte. Es zeigte sich demnach, dass die Eiweissbildung nur bei Anwesenheit eines grossen Überschusses von Zucker im Dunkeln möglich war.

Endlich möge noch die ausführliche Publikation der Arbeit Hansteens¹⁾ kurz besprochen werden. Derselbe hat hier neben seinem bekannten Lemnaversuche noch einige Versuche mit etiolierten Keimlingen von *Vicia Faba* und *Ricinus communis* beschrieben. Er injizierte direkt in den Stengel der zuvor durch Entfernung der Kotyledonen ausgehungerten etiolierten Keimlinge der genannten Pflanzen unter allen Kautelen der Asepsis Lösungen von Trauben- oder Rohrzucker einerseits und von Asparagin oder Glutamin andererseits, und, nachdem die so behandelten Objekte neben anderen ähnlichen Vergleichsobjekten, welche keine oder eine nur aus reinem Wasser bestehende Injektion erhalten hatten, einige Tage im Dunkeln verblieben waren, unterzog er beide (Versuchs- und Vergleichsobjekte) einer mikrochemischen Untersuchung. Dieselbe erstreckte sich auf Zucker, Asparagin

¹⁾ Hansteen „Ueber Eiweissynthese in grün en Phanerogamen“. Jahrbücher für wissenschaftliche Botanik B. 33, S. 417—486.

resp. Glutamin und Eiweiss. Es zeigte sich, dass die Injektion des Traubenzuckers das Verschwinden oder wenigstens eine Abnahme der Asparagin- resp. Glutaminreaktion und eine verstärkte Eiweissreaktion zur Folge hatte, während die Injektion des Rohrzuckers ohne jeden Einfluss auf diese Reaktionen blieb. Daraus ist zu folgern, dass in Übereinstimmung mit den Resultaten der Lemnaversuche auch in diesen Pflanzen Asparagin resp. Glutamin bei Anwesenheit einer reichlichen Menge von Traubenzucker, nicht aber von Rohrzucker auch im Dunkeln in Eiweissstickstoff sich umbilden kann.

Auf Grund aller seiner Versuche sowie der oben besprochenen Zaleski's, Suzuki's und anderer stellt Hansteen in dem Abschnitt „Hauptresultate“¹⁾ den Satz auf: „Das Licht spielt jedenfalls im allgemeinen keine direkte Rolle bei der Eiweissynthese in grünen phanerogamen Pflanzen“. An einer anderen Stelle²⁾ spricht er sich folgendermassen aus: „Die Pfeffer'sche Anschauung, dass das Licht in der angedeuteten Weise nur eine indirekte Rolle spiele, scheint demnach jetzt als eine festgestellte Tatsache betrachtet werden zu können“. Dass Hansteen in dieser Äusserung viel zu weit geht, wird später dargetan werden.

Die letzte Arbeit, welche über die uns interessierende Frage erschienen ist, ist die neueste Publikation von Laurent und Marchal³⁾, in welcher die Autoren ihre frühere Ansicht, dass das Licht bedeutungsvoll für die Eiweissynthese ist, aufrecht erhalten. Die Versuche wurden hauptsächlich mit Keimlingen von Kresse und Senf, aber auch mit abgeschnittenen Sprossen von Kartoffeln, Spargeln, Senf, Birnen, Cichorien und Riesenklee ausgeführt.

Im Gegensatz zu ihren früheren Versuchen und in Übereinstimmung mit den Resultaten meiner Versuche mit Weizenkeimlingen haben die Verfasser gefunden, dass Keimpflanzen von Kresse und Senf auch im Dunkeln eine, wenn auch nur kleine Menge des Salpeterstickstoffs in organische, nicht proteinartige Verbindungen umzuarbeiten vermögen. In Bestätigung der Versuchsergebnisse Suzuki's mit Gerstenpflanzen fanden die Autoren, wenn auch nur in einem einzigen Versuche, dass grüne Kressekeimlinge ein ziemlich

¹⁾ Hansteen l. c. S. 485.

²⁾ Hansteen l. c. S. 430.

³⁾ Laurent u. Marchal „Recherches sur la synthèse des substances albuminoïdes par les végétaux“. Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique. 1903.

bedeutendes Anwachsen des Proteinstickstoffs zeigten, wenn sie in einer salpeterhaltigen Nährlösung, welcher 4% Rohrzucker zugefügt wurde, 10 Tage lang im Dunkeln gehalten wurde. Indessen war das Anwachsen der Proteinstoffe in Vergleichspflanzen, welche in einer gleichen Lösung am Licht geblieben waren, mehr als dreimal so hoch. Bei allen übrigen Versuchen war der Zuwachs an Proteinstoffen immer nur im Lichte, nicht aber im Dunkeln zu beobachten. Auch war der Zuwachs an gesamtem organischen Stickstoff auf Kosten des anorganischen (sei es Ammoniak oder Salpetersäure) im Lichte immer unvergleichlich grösser als in der Dunkelheit, was den bedeutungsvollen Einfluss des Lichtes auf die Bildung der stickstoffhaltigen organischen Verbindungen bei den höheren Pflanzen klar zu Tage bringt. Leider haben die Verfasser nicht dafür gesorgt, bei den dem Lichte ausgesetzten Pflanzen die Assimilation auszuschliessen, so dass man nicht beurteilen kann, in wie weit die Lichtwirkung auf die Eiweissbildung und auf die Umarbeitung des anorganischen Stickstoffs in organischen eine direkte und in wie weit sie nur eine indirekte war. Doch finden wir in der neuesten Arbeit von Laurent und Marchal zwei Versuche, aus welchen man auf eine direkte Lichtwirkung auf die Eiweiss-synthese schliessen darf. Der eine betrifft die Keimlinge der Kresse, welche in einer Nährlösung, welche 4% Rohrzucker enthielt, 1 Woche lang teils im Lichte, teils im Dunkeln, gehalten wurden. Es stellte sich heraus, dass auch im Dunkeln eine Neubildung der Eiweissstoffe stattfand, aber dreimal schwächer war als im Lichte. Da es nun wegen der reichlichen Ernährung mit Zucker auch den Dunkelpflanzen an stickstofffreien Material nicht gefehlt hat, so ist wenigstens sehr wahrscheinlich, dass der günstige Einfluss, welchen das Licht auf die Eiweissbildung ausgeübt hat, nicht durch Assimilation, sondern durch die direkte Lichtwirkung bedingt wurde.

Gegen diese Schlussfolgerung könnte man aber einwenden, dass, wie Hansteen gezeigt hat, Rohrzucker kein günstiges Material für Eiweiss-synthese ist und dass also die Eiweissbildung aus dem Grunde im Lichte energischer als im Dunkeln vor sich ging, weil die Kohlenhydrate, welche sich durch Kohlensäureassimilation bildeten, für Eiweiss-synthese geeigneter waren als Rohrzucker.

Mehr entscheidend für die Annahme einer direkten Lichtwirkung auf Eiweiss-synthese ist der Versuch der Autoren, welcher sich auf Eiweissbildung in verschiedenfarbigem Lichte bezieht. 5 gleich

Portionen von Keimpflanzen von Senf wurden in einer salpeterhaltigen Nährlösung unter doppelwandigen, mit verschiedenfarbigen Flüssigkeiten gefüllten Gläsglocken 4 Tage lang gehalten und auf Eiweissstickstoff untersucht, in der sechsten Portion wurde der Eiweissstickstoff am Anfange des Versuches bestimmt. Die Analyse ergab:

| | Eiweissstickstoff mgr. |
|---|---------------------------|
| Portion analysiert am Anfange des Versuches | 156·7 |
| „ im Dunkeln | 143·4 |
| „ unter der Glocke mit Wasser | 172·3 |
| „ „ „ „ „ Doppelchromsäurekalilösung | 151·4 |
| „ „ „ „ „ Kupferoxydammoniaklösung | 158·4 |
| „ „ „ „ „ Schwefelsäurechininlösung | 145·8 |

Diese Zahlen bestätigen vollkommen den schon in der ersten Arbeit der Autoren aufgestellten Satz, dass die allerwichtigste Rolle bei der Eiweissbildung den unsichtbaren ultravioletten Strahlen, welche sich bei der Kohlensäureassimilation kaum beteiligen, zukommt, dass dagegen die sichtbaren die Kohlensäurezersetzung bewirkenden Strahlen fast bedeutungslos für die Eiweiss-synthese sind. Diesen Versuch über die Wirkung des farbigen Lichtes auf Eiweiss-synthese betrachte ich als den wichtigsten aus der ganzen Arbeit der Autoren, weil derselbe allein auf eine direkte, von der Assimilation unabhängige Lichtwirkung bei der Eiweiss-synthese mit Sicherheit schliessen lässt.

Auf Grund dieses Versuches kann man den Autoren nur beipflichten, wenn sie die Meinung aussprechen, dass bei den phanerogamen grünen Pflanzen die für Eiweiss-synthese nötige Energie der Regel nach vom Lichte geliefert wird, während sie bei den chlorophyllfreien Pflanzen von den chemischen Spannkraften der Reservestoffe gewonnen wird.

Untersuchungsmethode.

Die Methode der Untersuchung war im allgemeinen dieselbe wie bei meinen früheren Versuchen, sie bestand nämlich darin, dass Weizen respective Gerstesamen von annähernd gleichem Gewichte in Schönjahn'schen Keimapparaten ausgesät wurden. Nachdem die Wurzeln eine Länge von etwa 1 bis 2 ctm. erreicht hatten, wurden die Apparate mit vollständiger resp. stickstofffreier Nährlösung ge-

füllt. Die Pflänzchen wurden etwa 3 Wochen lang, sei es im Dunkeln, sei es im Lichte, aber in einer kohlenstofffreien Atmosphäre kultiviert und dann geerntet, getrocknet, gewogen und einer Analyse auf die verschiedenen Stickstoffformen unterworfen. Während ich mich bei den früheren Versuchen auf die Bestimmung des Gesamtstickstoffs, des Eiweißstickstoffs nach Stutzer und des Salpeterstickstoffs beschränkte, habe ich bei meinen weiteren Versuchen auch Ammoniakstickstoff, Amidstickstoff nach Sachse, Aminosäurestickstoff nach Sachse-Böhmer und oft auch den Stickstoff der durch Phosphorwolframsäure fällbaren Verbindungen bestimmt. In einer umfangreichen Arbeit über den Stoffwechsel der Eiweißstoffe in der Pflanze¹⁾ bezweifelt Prianschnikow bei der Besprechung meiner Arbeit die Beweiskraft meiner Versuche in Bezug auf die Bildung der amidartigen organischen Stickstoffverbindungen auf Kosten des Salpeters im Dunkeln aus dem Grunde, weil zu geringe Quantitäten der Pflanzensubstanz zu den Einzelbestimmungen verwendet wurden, wodurch die analytischen Fehler für die Beurteilung der Resultate sehr bedenklich sein sollen.

Um diesem Einwand zu begegnen und auch ein beweiskräftiges Material für die Beurteilung meiner weiteren Versuche zu liefern, halte ich es für angezeigt, einige Analysenresultate, welche zur Kontrolle der Methode ausgeführt wurden, hier etwas ausführlicher samt den analytischen Belegen mitzuteilen.

Bei meinen ersten Versuchen im Jahre 1896, wurden von den für die Versuche bestimmten Weizensamen etwa 30 gr. auf einer Excelsiormühle gemahlen und zunächst auf den gesamten Stickstoffgehalt analysiert.

Die Stickstoffbestimmungen nach Kjeldahl ergaben:

| | | | | |
|-----------------------|-----|------------------------|-------------|---------------------|
| 2·6306 gr. Weizenmehl | gab | 0·04049 gr. Stickstoff | = | 1·536% |
| 1·6032 gr. | " | " | 0·02513 gr. | " = 1·567% |
| 1·4316 gr. | " | " | 0·02233 gr. | " = 1·560% |
| | | | | Mittelzahl = 1·554% |

Um den Gehalt an Protein und Nichtproteinstickstoff in den Weizensamen zu bestimmen, wurden 2·3045 gr. Weizenmehl mit

¹⁾ Приянишниковъ „Бѣлковыя вещества и ихъ превращенія въ растеніи въ связи съ дыханіемъ и ассимиляціей“. Москва 1899.

200 c. c. Wasser 6 Stunden lang bei Zimmertemperatur unter öfterem Schütteln digeriert und dann $\frac{3}{4}$ dieser Flüssigkeit abfiltriert.

75 c. c. des Filtrates wurde zum Kochen erhitzt und mit Kupferoxydhydrat nach Stutzer versetzt, der Niederschlag abfiltriert, gewaschen und mit Schwefelsäure verbrannt. Die Bestimmung ergab 0.00249 gr. Stickstoff, also für 200 c. c. 0.0066 gr. Stickstoff der löslichen Eiweissstoffe.

Das Filtrat von dem Niederschlage mit $\text{Cu}(\text{OH})_2$ wurde zur Trockene abgedampft und mit Schwefelsäure verbrannt. Die Bestimmung ergab 0.00097 gr. Stickstoff, also für 200 c. c. 0.0026 gr. des Nichtproteinstickstoffs.

Demnach erhielt die ganze Lösung $0.0066 + 0.0026 = 0.0092$ des Gesamtstickstoffs.

Weitere 65 c. c. Lösung durch Verdampfung eingeengt und mit Schwefelsäure verbrannt, gaben 0.00311 gr. Stickstoff, also für 200 c. c. 0.0083 gr.

Der Unterschied zwischen beiden Bestimmungen betrug also 0.0009 gr.

Der unlösliche Rückstand mit den restierenden 50 c. c. Lösung nach Kjeldahl verbrannt, ergab 0.0297 gr. Stickstoff. Zieht man davon 0.0023 bez. 0.0020 gr. als Stickstoff der 50 c. c. Lösung ab, so ergibt sich für den Stickstoff der unlöslichen Eiweissstoffe 0.0274 bez. 0.0277 gr.

Demnach ergab die Analyse für 2.3045 gr. Weizenmehl:

| | | | | |
|---|------------|------|------------|--------------|
| Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe | 0.0274 gr. | bez. | 0.0277 gr. | |
| „ „ löslichen Proteinstoffe | 0.0066 gr. | „ | | } 0.0083 gr. |
| „ „ nicht proteinartigen Verbindungen | 0.0026 gr. | „ | | |
| | | | | |

Im ganzen: 0.0366 gr. bez. 0.0360 gr.

Nach der direkten Gesamtstickstoffbestimmung enthielt das Weizenmehl 1.554% Stickstoff, demnach in 2.3045 gr. 0.0358 gr.

Nimmt man diese Zahl als richtig an, so betrug der Fehler bei der Bestimmung des Gesamtstickstoffs aus der Summierung der Einzelbestimmungen seiner verschiedener Formen in der eben angeführten Analyse nur 0.0008 bez. 0.0002 gr.

Berechnet man nach dieser Analyse den prozentischen Gehalt des Weizenmehls an verschiedenen Stickstoffformen, so erhält man:

| | |
|--|---------------|
| Für Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe | 1·187% |
| „ „ der löslichen Proteinstoffe | 0·286% |
| „ „ sonstiger nicht proteinartigen Verbindungen | <u>0·113%</u> |
| | 1·586% |

Diese Zahlen wurden bei der Berechnung des Stickstoffs verschiedener Verbindungen in den für die Versuche verwendeten Samen zu Grunde gelegt.

Zur Kontrolle der Analysenmethode der Versuche von 1896 wurde noch eine Analyse folgender Mischung ausgeführt:

| | |
|---|-----------------------|
| 2·569 gr. desselben Weizenmehls mit 0·0407 gr. Stickstoff | |
| 0·1300 „ Asparagin | „ 0·0241 gr. „ |
| 0·1773 „ Kalisalpeter | „ <u>0·0245 gr. „</u> |
| | 0·0893 gr. „ |

Dieses Gemenge wurde bei Zimmertemperatur 6 Stunden lang unter häufigem Schütteln mit 200 c. c. Wasser digeriert, die Lösung abfiltriert und portionsweise analysiert.

50 c. c. Lösung gab nach Stutzer 0·00238 gr., demnach in der ganzen Lösung (200 c. c.) 0·0095 gr. Eiweissstickstoff.

Das Filtrat im Glycerinbade zur Trockene abgedampft und nach Förster für Gesamtstickstoff verbrannt, ergab 0·01151 gr., also für die ganze Lösung 0·0464 gr. Stickstoff.

Der ganze Stickstoffgehalt der Lösung war demnach $0·0095 + 0·0460 = 0·0555$ gr.

50 c. c. Lösung wurden im ganzen zur Trockene abgedampft und nach Förster verbrannt. Man erhielt 0·01421 gr., also für die ganze Lösung 0·0568 gr. des Gesamtstickstoffs der Lösung.

Der Unterschied zwischen beiden Bestimmungen des Gesamtstickstoffs der Lösung beträgt also 0·0013 gr.; der Durchschnitt aus beiden Bestimmungen des Gesamtstickstoffs 0·0562 gr.

50 c. c. wurden zur Bestimmung des Salpeters nach Pfeiffer benutzt. Man erhielt 0·00614 gr., also für die ganze Lösung 0·0246 gr. Salpeterstickstoff.

Nach diesen Bestimmungen berechnet sich der Stickstoff des Asparagins samt den nichtproteinartigen Stickstoffverbindungen des Weizenmehls:

$$0·0562 \text{ gr.} - 0·0095 \text{ gr.} - 0·0246 \text{ gr.} = 0·0221 \text{ gr.}$$

Die letzten 50 c. c. der Lösung samt dem unlöslichen Rückstande wurden im Glycerinbade abgedampft und nach Förster verbrannt. Man fand darin 0·0439 gr. des Gesamtstickstoffs. Zieht man davon 0·041 gr. als Stickstoff der Lösung ab, so erhält man: 0·0439 gr. — 0·0141 gr. = 0·0298 gr. für den Stickstoff der unlöslichen Proteinverbindungen.

Wenn wir nun die aus der Zusammensetzung der Mischung berechneten Zahlen mit den wirklich gefundenen vergleichen, so erhalten wir folgendes:

TABELLE I.

| | Berechnete Zahlen. | Gefundene Zahlen. |
|---|-----------------------|----------------------|
| N der unlöslichen Proteinstoffe im Weizenmehl | 0·0305 gr. | 0·0298 gr. |
| „ der löslichen Proteinstoffe im Weizenmehl | 0·0073 „ | 0·0095 „ |
| „ der Nichtproteinstoffe | | |
| im Weizenmehl 0·0029 | } 0·0270 „ | 0·0221 „ |
| im Asparagin . 0·0241 | | |
| „ des Salpeters | 0·0245 „ | 0·0246 „ |
| Gesamtstickstoff: | 0·0893 gr. | 0·0860 gr. |

Die Analyse ergab demnach ein Manko von etwa 3 mgr. Stickstoff. Es ist bemerkenswert, dass die Bestimmungen des Salpeterstickstoffs und des Stickstoffs der unlöslichen Proteinstoffe ganz vorzüglich mit den berechneten übereinstimmen und ein bedenklicher Fehler bezieht sich nur auf die Bestimmungen der löslichen organischen Stickstoffverbindungen. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass bei der Bestimmung des Gesamtstickstoffs der Lösung nach der Methode von Förster geringe Stickstoffverluste bei dem Abdampfen der Lösungen eintreten, sei es durch Zerlegung eines Teils des Asparagins und Entweichen des daraus entstandenen Ammoniaks, sei es durch Verlust eines kleinen Teils des Salpeterstickstoffs. Dass das Manko hier einzig und allein von den üblichen schwankenden Fehlern der Analyse herrühre, ist insofern wenig wahrscheinlich, als die aus zwei Bestimmungen in verschiedenen Portionen der Lösung berechneten Mengen des Gesamtstickstoffs dieser Lösung nur um 1·3 mgr. von einander differierten.

Wenn es auch zu wünschen wäre, dass der Analysenfehler we-

niger als 3 mgr. betrüge, so unterliegt es doch keinem Zweifel, dass die Zahlen + 6.5 mgr. und + 7.5 mgr., welche ich in meinen Versuchen vom Jahre 1896 für den Gewinn des organischen Stickstoffs im Dunkeln gefunden habe, die Fehlergrenze der Analyse überschreiten und also auf die tatsächliche Verarbeitung des Nitratstickstoffs durch die Weizenkeimlinge hinweisen. Die Beweiskraft dieser Versuche ist um so grösser, als bei den Pflänzchen, welche in einer salpeterfreien Lösung vegetierten, ähnlich wie in der Kontrollanalyse, ein Manko von etwa 2 mgr. Stickstoff sich bei der Analyse ergeben hat.

Bemerkenswert ist bei der oben angegebenen Kontrollanalyse, dass die Menge des Stickstoffs der löslichen Proteinstoffe zu hoch, die des Asparagins zu niedrig ausgefallen ist. Da dieses Ergebnis sich auch bei anderen weiter mitzuteilenden Kontrollanalysen wiederholte, also nicht zufällig war, so kann das nur darin seinen Grund haben, dass bei der Stutzer'schen Methode der Eiweissbestimmung durch $\text{Cu}(\text{OH})_2$ samt Eiweissstoffen etwas Asparagin mitgefällt wird.

Die Analysenmethode, welche ich bei meinen weiteren erst in der vorliegenden Arbeit mitzuteilenden Versuchen angewendet habe, möge durch folgende Kontrollanalyse erläutert werden.

Zur Analyse wurde folgendes Gemisch bereitet:

| | |
|-------------------------|-----------|
| Weizenmehl | 2.2648 gr |
| Asparagin | 0.1811 " |
| schwefelsaures Ammoniak | 0.1627 " |
| Salpeter | 0.1253 " |

Das Weizenmehl wurde aus dem Weizen, welcher zu den Versuchen des Jahres 1897 diente, bereitet. Er stammte aus der Ernte vom 1896 und enthielt 1.507% Stickstoff, und zwar:

| | |
|--|--------|
| Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe | 1.089% |
| " " löslichen Proteinstoffe | 0.300% |
| " " nichtproteinartigen Verbindungen | 0.118% |

Dieses Gemisch wurde mit 300 c. c. Wasser 8 Stunden lang unter öfterem Schütteln digeriert, die Lösung abfiltriert und portionsweise für Einzelbestimmungen verwendet.

1. Bestimmung des Ammoniaks und der Salpetersäure. 50 c. c. wurden mit MgO bei stark vermindertem Drucke

bei einer 50°C nicht übersteigenden Temperatur destilliert und das entweichende Ammoniak in $\frac{1}{10}$ Normalschwefelsäure aufgenommen. In der Vorlage fand sich 0·00596 gr. Ammoniakstickstoff, also für die ganze Lösung 0·0356 gr.

Der von der Ammoniakbestimmung zurückgebliebene Rückstand wurde in derselben Druckflasche, aus welcher man Ammoniak unter vermindertem Drucke destilliert hat, mit KHO bei 120°C mehrere Stunden erhitzt und in üblicher Weise zur Bestimmung der Salpetersäure nach der Methode von Pfeiffer benutzt. Man erhielt 0·00287 gr. Salpeterstickstoff, also für die ganze Lösung 0·01722 gr.

2. Bestimmung des Gesamtstickstoffs der Lösung. 75 c. c. wurden leicht mit Weinsäure angesäuert, zur Trockene im Glycerinbade abgedampft und nach Förster verbrannt. Man erhielt 0·02366 gr. des Gesamtstickstoffs, also für die ganze Lösung 0·0946 gr.

3. Bestimmung des Stickstoffs der löslichen Eiweissstoffe und Wiederholung der Bestimmung des Gesamtstickstoffs der Lösung. 75 c. c. wurden in der Hitze unter Zusatz von Alaun mit $\text{Cu}(\text{OH})_2$ versetzt, der Niederschlag nach dem Erkalten abfiltriert, gewaschen und mit Schwefelsäure verbrannt. Man erhielt 0·00238 gr. Eiweissstickstoff, also für die ganze Lösung 0·0095 gr.

Das Filtrat schwach mit Weinsäure angesäuert, zur Trockene abgedampft und nach Förster verbrannt, gab 0·0215 gr. Stickstoff, also für die ganze Lösung 0·0860 gr (Gesamt-Eiweissstickstoff). Der Gesamtstickstoff der Lösung berechnet sich demnach nach dieser Bestimmung auf $0·0095 + 0·0860 = 0·0955$ gr. Unterschied zwischen beiden Bestimmungen 0·9 mgr. Mittelzahl 0·0950 gr.

4. Bestimmung des Eiweissstickstoffs der Lösung und des Amid- und Aminosäurestickstoffs des Asparagins. 75 c. c. in der Hitze mit $\text{Cu}(\text{OH})_2$ unter Zusatz von Alaun versetzt, noch heiss filtriert, gewaschen und mit Schwefelsäure verbrannt, ergaben 0·00224 gr, also für die ganze Lösung 0·0090 gr Eiweissstickstoff. Man versuchte hier das Heissfiltrieren in der Hoffnung, dass damit der Fällung des Asparagins vorgebeugt werden wird. Die Verminderung des Ergebnisses der Eiweissstickstoffbestimmung betrug aber nur 0·5 mgr für die ganze Lösung, so dass auch hier etwas Asparagin durch $\text{Cu}(\text{OH})_2$ samt dem Eiweiss mitgefällt wurde.

Das Filtrat vom Kupferhydroxydniederschlage wurde mit verdünnter Schwefelsäure gekocht, annähernd mit Natronlauge neutralisiert und das durch Inversion des Asparagins abgespaltene Ammoniak samt dem fertigen mit MgO abdestilliert. Man erhielt in der Vorlage 0.01243 gr, also für die ganze Lösung 0.04973 gr Ammoniakstickstoff. Zieht man davon die unter 1. gefundene Menge des fertigen Ammoniaks ab, so erhält man $0.04973 - 0.0356 = 0.01413$ gr Amidstickstoffs des Asparagins.

Der Rückstand von dem abdestillierten Ammoniak wurde in einer Kohlensäureatmosphäre mit salpetriger Säure nach Sachse-Böhmer behandelt und der ausgetriebene Stickstoff über kalihydrathaltige Lösung von übermangansaurem Kalium gesammelt.

Das auf 0° und 76 cm Quecksilberdruck reduzierte Stickstoffvolumen betrug 7.12 c. c. = 0.0089 gr, also für die ganze Lösung 0.03576 gr. Die Hälfte davon, also 0.01788 repräsentiert den Aminosäurestickstoff der Lösung.

5. Die restierenden 25 c. c. der Lösung samt dem unlöslichen Rückstande des Weizenmehls wurden nach Ansäuern mit Weinsäure im Glycerinbade zur Trockene abgedampft und nach Förster verbrannt. Man erhielt 0.0339 gr Stickstoff. 25 c. c. Lösung enthielten laut den Bestimmungen unter 3. und 4., 0.0079 gr (Mittelzahl). Zieht man diese Zahl von der obigen ab, so erhält man $0.0339 - 0.0079 = 0.0260$ gr als Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe des Weizenmehls.

Stellt man nun zur Vergleichung die aus der Zusammensetzung der Mischung berechneten und durch die Analyse gefundenen Zahlen zusammen, so bekommt man folgendes:

Siehe TABELLE II auf Seite 331.

Auch bei dieser Kontrollanalyse lässt die Asparaginbestimmung am meisten zu wünschen übrig und namentlich die Bestimmung des Amidstickstoffs desselben. Wir haben hier ein Manko von 2.7 mgr. hinter der richtigen Zahl zu notieren. Wollte man, wie das üblich ist, den ganzen Asparaginstickstoff durch Verdoppelung der für den Stickstoff des absplaltbaren Ammoniaks gefundenen Zahl berechnen, so würde das Minus 5.4 mgr. betragen. Der Grund dieser Ungenauigkeit ist in einer doppelten Fehlerquelle zu suchen: einerseits darin, dass auch bei der Destillation unter vermindertem Drucke sich doch ein kleiner Teil Asparagin zersetzen kann, wodurch zu

TABELLE II.

| | Aus der Zusam- mensetzung der Mischung berechnet gr. | Durch die Analyse gefunden gr. | Differenz |
|---|---|---|-----------|
| Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe des Mehls | 0·0246 | 0·0260 | + 0·0014 |
| Stickstoff der löslichen Proteinstoffe des Mehls | 0·0068 | 0·0092 | + 0·0024 |
| Stickstoff des Ammoniaks | 0·0345 | 0·0356 | + 0·0011 |
| „ „ Salpeters | 0·0174 | 0·0172 | — 0·0002 |
| Amidstickstoff des Asparagins (durch Inversion abspaltbares Ammoniak) | 0·0168 | 0·0141 | — 0·0027 |
| Aminosäurestickstoff des Asparagins (durch N ₂ O ₃ nach Inversion ab- spaltbar) | 0·0168 | 0·0179 | + 0·0011 |
| Stickstoff der nichtproteinartigen Ver- bindungen des Weizenmehls (sonsti- ger Stickstoff) | 0·0027 | 0·0010 | — 0·0017 |
| | 0·1196 | 0·1210 | + 0·0014 |

viel Ammoniak gefunden und dann bei der Bestimmung des Amidstickstoffs in Abzug gebracht wird, andererseits in dem bereits erwähnten Umstande, dass ein Teil des Asparagins samt den löslichen Eiweissstoffen durch $\text{Cu}(\text{OH})_2$ mitgefällt wird. In der vorliegenden Analyse decken die Fehler bei der Bestimmung des löslichen Eiweissstickstoffs und des Ammoniaks fast genau den Fehler der Amidstickstoffbestimmung. Nimmt man an, dass die + 2·4 mgr bei der Bestimmung des Eiweissstickstoffs aus der Fällung des Asparagins herühren und dass die + 1·1 mgr bei der Bestimmung des Ammoniaks durch Inversion des Asparagins bei dem Abdestillieren mit MgO bedingt sind, so beträgt die Summe beider dieser Fehler in Bezug auf Amidstickstoff des Asparagins $\frac{2\cdot4}{2} + 1\cdot1 = 2\cdot3$ mgr, während der wirkliche Fehler bei der Bestimmung des Amidstickstoffs des Asparagins — 2·7 mgr betrug.

Dass die Bestimmung des Aminosäurestickstoffs kein Manko, sondern ein + 1·1 mgr ergeben hat, erklärt sich einerseits daraus, dass diese Bestimmung durch den Fehler der Ammoniakbestimmung nicht beeinflusst wird und andererseits, dass ein Teil des gefunde-

nen Aminosäurestickstoffs aus den nichtproteinartigen Verbindungen des Weizenmehls stammen konnte. Mit dieser letzten Voraussetzung stimmt der Umstand, dass man für den Stickstoff unbestimmter Form nur 1.0 mgr erhielt, während auf die Nichtproteinverbindung des Weizenmehls = 2.7 mgr Stickstoff entfallen, 1.7 mgr Stickstoff konnte also im Weizenmehl in der Form von Aminosäuren enthalten sein.

Der Gesamtstickstoff, welcher aus der Summierung einzelner Stickstoffformen erhalten wurde, differiert nur um 1.4 mgr von dem berechneten, die Genauigkeit ist also in dieser Beziehung vollkommen befriedigend.

Nicht bei allen, aber bei vielen Versuchen wurde ausser den angegebenen Bestimmungen auch noch der Stickstoff der mit Phosphorwolframsäure fällbaren Verbindungen bestimmt. Die Fällung unternahm man entweder in einer besonderen Portion der Lösung und zog dann von dem im Niederschlage gefundenen Stickstoff den Ammoniakstickstoff und den durch die Stutzer'sche Fällung gefundenen Eiweissstickstoff ab oder in derselben Portion der Lösung, aus welcher durch $\text{Cu}(\text{OH})_2$ Eiweissstickstoff bestimmt worden ist, nachdem vorher das Kupfer aus der Lösung mit H_2S entfernt worden war. In diesem letzten Falle zog man von dem im Niederschlage gefundenen Stickstoff nur noch den Ammoniakstickstoff ab. Den so gefundenen Stickstoff hat man in den Tabellen als Stickstoff der Peptone und der organischen Basen angegeben. In einigen Versuchen hat man den durch Phosphorwolframsäure hervorgebrachten Niederschlag nicht sofort nach Kjeldahl verbrannt, sondern ihn zunächst in Wasser suspendiert, mit MgO fast bis zur Trockene zum Zwecke der Ammoniakbestimmung abdestilliert und erst dann in demselben Kolben, aus welchem das Ammoniak abdestilliert wurde, nach Kjeldahl verbrannt. In einem Versuche wurde die Ammoniakbestimmung in der eben angegebenen Weise und durch Abdestillieren bei vermindertem Drucke vorgenommen. Mit beiden Methoden wurden recht übereinstimmende Resultate erzielt.

Im Filtrate von dem durch Phosphorwolframsäure gefällten Niederschlage hat man gewöhnlich auch Amidstickstoff und Aminosäurestickstoff nach Sachse und Sachse-Böhmer bestimmt. Wo dies geschehen ist, sind die gefundenen Zahlen in den Tabellen neben den aus der Bestimmung nach der Fällung mit $\text{Cu}(\text{OH})_2$ gefundenen angegeben und zur Unterscheidung in [] eingeklammert. Selbstver-

ständiglich wurde bei der Bestimmung des Amidstickstoffs im Filtrate von der Fällung mit Phosphorwolframsäure der Ammoniakstickstoff von den gefundenen Zahlen nicht mehr abgezogen, da ja das Ammoniak im Niederschlage und nicht im Filtrate geblieben ist.

Bei den Versuchen aus dem Jahre 1902 mit Gerste wurde für die Gesamtstickstoffbestimmung nicht die Förster'sche, sondern eine viel einfachere und sehr empfehlenswerte Methode angewandt. Diese Methode, welcher sich schon früher Rogóyski in meinem Laboratorium in seiner Arbeit über Denitrifikation¹⁾ bedient hat, beruht darauf, dass man in der salpeterhaltigen Flüssigkeit, in welcher die Gesamtstickstoffbestimmung auszuführen ist, zunächst Salpeter nach Ulsch in Ammoniak überführt, d. h. stark mit Schwefelsäure ansäuert und mit Ferrum hydrogenio reductum einige Zeit sieden lässt, dann das überschüssige Wasser abdampft und nach Hinzufügen hinreichender Menge konzentrierter Schwefelsäure und eines Tropfens Quecksilber in üblicher Weise verbrennt. Bei dem Abdestillieren des Ammoniaks aus der so verbrannten Flüssigkeit würden wegen der Anwesenheit von einigen Grammen Eisen recht viel Schwefelkalium für die Ausfällung des Quecksilbers erforderlich sein, deswegen habe ich es vorgezogen, diese Ausfällung mit pulverförmigem Zink vorzunehmen. Bei Erwärmung der Flüssigkeit mit Zinkpulver wird das Quecksilber in metallischem Zustand ausgefällt und das Zinkpulver amalgamiert.

Um mittels dieser Methode genaue Resultate zu erhalten, ist es notwendig eine Korrektur einzuführen.

Das Ferrum hydrogenio reductum des Handels (das meinige war von Merk bezogen) ist nicht stickstofffrei. Wendet man es ohne weiteres an, so erhält man immer etwas zu hohe Resultate. Deswegen habe ich einige blinde Bestimmungen mit 4 gr des Präparates unter Hinzufügen von 0.5 gr Traubenzucker ausgeführt, welche durchschnittlich eine 1.3 cc. einer $\frac{1}{10}$ Normalschwefelsäure entsprechenden Ammoniakmenge ergeben haben. Da nun zu meinen Einzelbestimmungen eben 4 gr Ferrum h. r. verwendet wurden, so wurden immer von der Menge der neutralisierten $\frac{1}{10}$ Normalschwefelsäure 1.3 cc. in Abzug gebracht.

¹⁾ Rogóyski „Zur Kenntnis der Denitrifikation und der Zersetzungserscheinungen der tierischen Excremente in der Ackererde. Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie 1899.

Zur Kontrolle dieser letztbesprochenen Methode wurde eine Mischung von Gerstemehl, schwefelsaurem Ammoniak, Asparagin und Salpeter hergestellt und analysiert. Das aus der Gerste, welche auch für die Versuche diente, hergestellte Gerstenmehl enthielt nach einer besonderen Analyse folgende Stickstoffmengen:

| | |
|--|----------|
| Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe | . 1.577% |
| " " löslichen " | . 0.188% |
| " " Nichtproteinverbindungen | . 0.093% |
| Gesamtstickstoff | . 1.858% |

Die zur Analyse verwendete Mischung hatte folgende Zusammensetzung:

TABELLE III.

| | enthielt Stickstoff | |
|--|----------------------------|-------------------------|
| | nach der Berechnung mgr | nach der Analyse mgr |
| Gerstenmehl 1.9456 gr darin | | |
| Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe . . . | 30.68 | 30.39 |
| " " löslichen " . . . | 3.66 | 9.89 |
| " " Nichtproteinverbindungen . . . | 1.81 | 3.94 |
| Schwefelsaures Ammoniak 0.2440 gr darin . . . | 51.79 | 51.79 ¹⁾ |
| Salpetersaures Kalium 0.3013 " " . . . | 41.70 | 41.30 |
| Asparagin 0.2606 " " . . . | 48.70 | 42.18 ²⁾ |
| | <u>178.34</u> | <u>179.49</u> |

Wir sehen, dass auch hier wie bei der vorigen Kontrollanalyse die Bestimmung des Gesamtstickstoffs, des Salpeterstickstoffs und des Stickstoffs der unlöslichen Proteinstoffe vollkommen befriedigend ausgefallen sind, indessen lässt wieder die Genauigkeit der Asparaginbestimmung und die Bestimmung des Stickstoffs der löslichen Eiweissstickstoffe etwas zu wünschen übrig. Der Grund dieser Ungenauigkeit wurde schon oben angegeben. Wegen dieses Fehlers ist anzunehmen, dass bei allen meinen Analysen der Eiweissstickstoff etwas zu hoch, der Aminosäureamide-Stickstoff etwas

¹⁾ Die Ammoniakbestimmung misslang durch Zufall, in der Zusammensetzung der Analyse wurde also die berechnete Zahl aufgenommen.

²⁾ Es wurde nur der durch Inversion abspaltbare Amidstickstoff bestimmt und daraus durch Verdoppelung der ganze Asparaginstickstoff berechnet. Der durch N_2O_3 austreibbare Aminosäurereststickstoff wurde nicht bestimmt.

zu niedrig bestimmt wurde. Als sehr genau hat sich die Methode der Salpetersäurebestimmung nach Pfeiffer in diesen Kontrollanalysen erwiesen.

Zusammenstellung der Versuche.

I. Versuche mit Weizen.

Versuch 1.

Am 13 März hat man in 6 Schönjahn'schen Keimapparaten je 50 Weizensamen ausgesät. Die Apparate waren zunächst mit destilliertem Wasser gefüllt und erst, als die Wurzelchen eine Länge von etwa 2 ctm erreicht hatten, wurde das Wasser durch die Nährlösung ersetzt. Die Zusammensetzung der Lösung war dieselbe wie bei meinen früheren Versuchen, d. h. pro Liter 1 gr $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$ resp. in nitratfreier Lösung 1 gr $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, 0.25 gr KCl, 0.25 gr KH_2PO_4 und 0.25 gr MgSO_4 . Drei Apparate erhielten eine nitrathaltige, drei andere eine nitratfreie Lösung. Die Vegetation dauerte bis zum 3 April, also volle 3 Wochen. Während der ganzen Zeit standen die Kulturen in einem dunklen Schrank.

Die Gewichtsbestimmungen der Pflänzchen ergaben folgendes:

TABELLE IV.

| | salpeterfreie Lösung | | | salpeterhaltige Lösung | | |
|--|----------------------|-------|-------|------------------------|-------|-------|
| | I | II | III | IV | V | VI |
| Frischgewicht 1 Samens in mgr | 46.40 | 46.67 | 46.27 | 45.87 | 45.92 | 46.14 |
| Trockengewicht 1 Samens in mgr | 40.63 | 40.87 | 40.52 | 40.17 | 40.21 | 40.46 |
| Frischgewicht 1 Pflänzchens in mgr | 263 | 271 | 262 | 323 | 326 | 335 |
| Trockengewicht 1 Pflänzchens in mgr | 27.84 | 27.32 | 26.76 | 26.66 | 27.67 | 27.52 |
| Darin: Stengel und Blätter | 17.40 | 17.21 | 17.43 | 17.96 | 19.50 | 19.76 |
| Wurzeln | 3.06 | 3.94 | 3.93 | 3.53 | 3.32 | 2.88 |
| Samenüberreste | 7.38 | 6.17 | 5.40 | 5.17 | 4.86 | 4.88 |
| veratmet in mgr | 12.79 | 13.55 | 13.76 | 13.51 | 12.54 | 12.94 |
| veratmet in % der Trockensubstanz des Samens | 31.5% | 33.5% | 34.0% | 33.7% | 31.2% | 32.0% |

Die Zahlen, welche die veratmete organische Substanz angeben, sind insofern zu niedrig, als sämtliche Pflänzchen in Nährstofflösun-

gen vegetierten, sie haben also eine gewisse Menge von Mineralstoffen aufgenommen, welche bei der Bestimmung der Trockensubstanz mitgewogen wurden und also die Menge derselben vergrösserten. Die Trockensubstanz der Pflänzchen, welche in salpeterhaltiger Lösung vegetierten, wurde ausserdem noch um das Gewicht der N_2O_5 , welche die Pflänzchen enthielten, vergrössert.

Um einmal zu bestimmen, wie gross die Menge der wirklich von den Pflänzchen veratmeten organischen Substanz ist, und ob diese Menge durch die Anwesenheit des Salpeters beeinflusst wird, habe ich aus dem Gefässe V 5 Pflanzen und aus dem Gefässe I 6 Pflanzen getrocknet, gewogen, verascht und wieder gewogen. Es zeigte sich, dass eine Pflanze aus der salpeterhaltigen Lösung 4·7 mgr und eine Pflanze aus der salpeterfreien Lösung 3·47 mgr Asche erhielt. Die Menge N_2O_5 in den Pflänzchen aus salpeterhaltigen Lösung berechnet sich nach den unten zusammengestellten Analysen zu 1·12 mgr. Um also die wirkliche Menge der organischen Substanz eines Pflänzchens zu erhalten, muss man von der Trockensubstanz der Pflänzchen aus salpeterfreier Lösung 3·47 mgr, von der Trockensubstanz der Pflänzchen aus salpeterhaltiger Lösung $4·7 + 1·12 = 5·82$ mgr abziehen. Der Aschegehalt der Samen wurde nicht bestimmt, er kann aber ohne merklichen Fehler zu 2% angenommen werden (der Aschegehalt der Weizensamen schwankt nach zahlreichen Analysen nur zwischen 1·5—2·5%), was pro 1 Samen ungefähr 0·8 mgr ausmacht. Wenn man unter Berücksichtigung dieser Daten die von den Pflänzchen veratmete organische Substanz berechnet, so erhält man folgendes:

TABELLE V.

| | | Gewicht der organischen Substanz | | veratmete Substanz pro Pflanze | |
|--------------------------|-----|----------------------------------|--------------|--------------------------------|--|
| | | 1 Samen | 1 Pflänzchen | in mgr | in % der ursprünglichen organischen Substanz |
| salpeterfreie Substanz | I | 39·82 | 24·37 | 15·45 | 38·8% |
| | II | 40·05 | 23·85 | 16·20 | 40·4% |
| | III | 39·71 | 23·29 | 16·42 | 41·5% |
| salpeterhaltige Substanz | IV | 39·37 | 20·85 | 18·52 | 47·0% |
| | V | 39·40 | 21·85 | 17·55 | 44·5% |
| | VI | 39·65 | 27·70 | 17·95 | 45·3% |

Wir sehen, dass die Pflänzchen aus salpeterfreier Lösung 38·8 bis 41·5%, die Pflänzchen aus salpeterhaltiger Lösung 44·5—47% der ursprünglichen organischen Substanz der Samen veratmet haben, dass somit die Anwesenheit der Nitrate in der Nährlösung eine nicht unbedeutende Verstärkung der Atmung nach sich zieht.

Bei der Bestimmung der verschiedenen Stickstoffformen wurden Pflänzchen aus zwei resp. drei Gefässen vereinigt und gemeinsam analysiert. Nur die Pflänzchen aus dem Gefässe IV wurden für sich gesondert analysiert.

Bei der Analyse wurde ganz in derselben Weise vorgeschritten, wie dies bei der Beschreibung der zur Kontrolle der Genauigkeit der analytischen Methode ausgeführten Analysen angegeben wurde. Die Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Siehe TABELLE VI, Seite 338.

Setzt man die Menge des Gesamtstickstoffs der Samen = 100, so berechnet sich die Menge der einzelnen Stickstoffformen der Samen und der Pflänzchen wie folgt:

Siehe TABELLE VII, Seite 339.

Ausser den Bestimmungen, deren Resultate in den obigen Tabellen zusammengestellt sind, hat man noch eine Fällung mit Phosphorwolframsäure vorgenommen und in dem Niederschlage Stickstoff bestimmt. Eine besondere Portion von 50 cc. des Auszuges aus den Pflanzen aus der salpeterfreien Lösung (Gefäss I, II, III) mit Phosphorwolframsäure gefällt, ergab im Niederschlage 2·24 mgr Stickstoff, also für die ganze Lösung 11·2 mgr. Zieht man von dieser Zahl die Menge des Stickstoffs der löslichen Proteinstoffe und des fertigen Ammoniaks ab, so erhält man $11·2 - 7·46 - 2·10 = 1·64$ mgr für den Stickstoff der Peptone und organischen Basen, also eine innerhalb der Fehlergrenze liegende Zahl.

Dasselbe Resultat zeigte sich bei der Analyse der Pflänzchen aus der salpeterhaltigen Nährlösung. In einer Portion des Auszuges wurden zunächst die Eiweissstoffe mit $\text{Cu}(\text{OH})_2$ gefällt, das Kupfer im Filtrate mit H_2S entfernt und zu dem neuen Filtrate Phosphorwolframsäure zugefügt. Es entstand ein nur spärlicher Niederschlag, welcher nach Kjeldahl verbrannt unter Berechnung auf den ganzen Auszug nur 2·66 mgr Stickstoff ergab, also fast nur soviel als dem in der Substanz gefundenen Ammoniak entspricht.

TABELLE VI.

Sämtliche Pflanzen sind im Dunkeln kultiviert. — Der Stickstoff ist in mgr angegeben.

| | salpeterfreie Lösung | | salpeterhaltige Lösung | | | |
|--|---|-------------------------------|----------------------------------|------------------------------|--|-------------------------------|
| | 87 Pflänzchen aus den Gefässen I II III | | 30 Pflänzchen aus dem Gefässe IV | | 70 Pflänzchen aus den Gefässen V u. IV | |
| | Samen | Pflänzchen | Samen | Pflänzchen | Samen | Pflänzchen |
| Gesamtstickstoff | 60·89 | 67·13 | 21·26 | 37·16 | 48·65 | 88·97 |
| Salpeterstickstoff | 0·00 | 0·00 | 0·00 | 8·40 | 0·00 | 20·30 |
| Stickstoff der unlöslichen Protein- stoffe | 44·00 | 31·08 | 15·74 | 13·50 | 35·20 | 31·15 |
| Stickstoff der löslichen Protein- stoffe | 12·12 | 7·46 | 3·97 | 3·30 | 9·67 | 7·00 |
| Ammoniakstickstoff | — | 2·10 | — | 1·12 | — | 2·45 |
| Aus Amidn abspaltbarer Ammoniak- stickstoff ($\frac{1}{2}$ Asparagin und Glutaminstickstoff) | — | 5·98 (11·96) ¹⁾ | — | 2·91 (5·82) ¹⁾ | — | 7·20 (14·40) ¹⁾ |
| Durch N ₂ O ₃ aus Aminosäure ab- spaltbarer Stickstoff ($\frac{1}{2}$ Aspa- ragin + Glutam. Sticks. + N der Aminosäuren) | — | 8·08 (2·10) ²⁾ | — | 5·52 (2·61) ²⁾ | — | 9·52 (2·32) ²⁾ |
| Stickstoff sonstiger organischen Verbindungen | — | 12·43 | — | 2·41 | — | 11·35 |
| Gesamtproteinstickstoff | 56·12 | 38·54 | 19·71 | 16·80 | 44·87 | 38·15 |
| Gesamtstickstoff aller organi- schen Verbindungen | 4·77 | 26·49 | 1·55 | 10·84 | 3·78 | 28·07 |
| Gesamtstickstoff aller organi- schen Verbindungen | 60·89 | 65·03 | 21·26 | 27·64 | 48·65 | 66·22 |
| Gewinn an organischem Sticks. | — | + 4·14 | — | + 6·38 | — | + 17·65 |

¹⁾ Die in () eingeklammerten Zahlen dieser Rubrik in dieser und allen anderen Tabellen sind durch Verdoppelung der nicht eingeklammerten gewonnen und geben also den ganzen Stickstoff der Aminosäureamide an.

²⁾ Die in () eingeklammerten Zahlen dieser Rubrik in dieser und allen anderen Tabellen sind durch Abziehen der Zahlen der vorhergehenden Rubrik von den nicht eingeklammerten Zahlen dieser Rubrik gewonnen (z. B. 8·08—5·98=2·10) und geben also den Stickstoff der wirklichen Aminosäuren an.

TABELLE VII.

Sämtliche Pflanzen sind im Dunkeln kultiviert.

| | Stickstoff der Samen | Stickstoff der Pflänzchen | | | |
|--|----------------------------|-----------------------------------|----------------|--------------------------------|------------------|
| | | aus salpe- terfreier Lösung | | aus salpeterhaltiger Lösung | |
| | | I | II III | Gefäß IV | Gefäß V u. VI |
| Gesamtstickstoff | 100 | 110·3 | 175·6 | 181·1 | |
| Salpeterstickstoff | 0·0 | 0·0 | 39·5 | 41·1 | |
| Stickstoff der unlöslichen Protein- stoffe | 72·3 | 51·0 | 63·5 | 64·1 | |
| Stickstoff der löslichen Protein- stoffe | 19·9 | 12·2 | 16·0 | 14·4 | |
| Stickstoff des fertigen Ammoniaks | — | 3·4 | 5·3 | 5·0 | |
| „ aus Amidien abspaltbar ($\frac{1}{2}$ Asparagin u. Glutaminstickstoff) | — | 9·8 (19·6) | 13·6 (27·2) | 13·8 (27·6) | |
| Stickstoff aus Aminosäuren durch $N_2 O_3$ abspaltbar ($\frac{1}{2}$ Asparagin u. Glutaminstickstoff + Amino- säurestickstoff) | — | 13·5 (3·7) | 25·8 (12·2) | 18·6 (4·8) | |
| Stickstoff sonstiger organischen Verbindungen | — | 20·4 | 11·8 | 23·4 | |
| Gesamtproteinstickstoff | 92·2 | 63·2 | 79·5 | 78·5 | |
| Gesamtstickstoffproteinstickstoff orga- nischer Verbindungen | 7·8 | 43·7 | 51·2 | 55·8 | |
| Gesamtstickstoff aller organischen Verbindungen | 100 | 106·9 | 130·7 | 134·3 | |
| Gewinn an organischem Stickstoff | — | + 6·9 | + 30·7 | + 34·3 | |

Diese beiden Bestimmungen ergaben also, dass weder Peptone noch organische Basen in sicher bestimmbarer Mengen in den Pflänzchen vorhanden waren.

Versuch 2.

Am 9 Juli 1897 hat man in 6 Schönjahn'schen Keimapparaten je 50 Weizensamen ausgesät. Als die Wurzeln etwa 2 cm lang waren, wurde das Wasser durch vollständige Nährlösung ersetzt. Zwei Apparate wurden in einem dunklen Schrank, 4 am Ostfenster des Laboratoriums unter einer Glasglocke in kohlensäurefreier Luft gehalten. Die Vegetation dauerte vom 9 bis 29 Juli, an welchem

Tage die Ernte erfolgte. Die mangelhaft entwickelten Pflänzchen wurden wie immer von der Ernte ausgeschlossen.

Die Gewichtsbestimmungen auf 1 Pflanze in mgr berechnet sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

TABELLE VIII.

| | Pflanzen im Dunkeln Mittelzah- len aus 50 Pflänz. | Pflanzen im Lichte | |
|---|--|--|---|
| | | I Mittel- zahlen aus 68 Pflänz. | II Mittel- zahlen aus 78 Pflänz. |
| Gewicht 1 Samens in mgr | 53·16 | 53·16 | 53·16 |
| Trockensubstanz 1 Samens " " | 46·54 | 46·54 | 46·54 |
| Frischgewicht 1 Pflänzchens " " | 378·4 | 403·0 | 451·0 |
| Trockensubstanz 1 Pflänzchens " " | 31·42 | 30·85 | 32·97 |
| " der Stengel u. Blätter " " | 21·65 | 20·66 | 22·04 |
| " " Wurzel " " | 4·60 | 5·87 | 6·37 |
| " des Samenrestes " " | 5·17 | 4·32 | 4·56 |
| veratmet " " | 15·12 | 15·69 | 14·17 |
| " in % der Trockensubstanz des Samens | 32·5% | 33·7% | 30·5% |

Diese Zahlen zeigen, dass auch bei den Lichtpflanzen die Assimilation vollständig ausgeschlossen war, da die Abnahme des Trockengewichtes infolge der Atmung bei den Lichtpflanzen eine eben so grosse war wie bei den Dunkelpflanzen.

Die Resultate der Analyse, bei welcher bei den Lichtpflanzen auch der Stickstoff der mit Phosphorwolframsäure fällbaren Verbindungen bestimmt wurde, sind in folgender Tabelle zusammengestellt. In dieser Tabelle gibt wie in den andern die Rubrik „Stickstoff der Peptone und organischen Basen“ den Stickstoff der mit Phosphorwolframsäure fällbaren Verbindungen unter Abzug des Stickstoffs der löslichen Proteinstoffe und des Ammoniaks an.

TABELLE IX.

| | 50 Dunkel- pflanzen | | 68 Lichtpflan- zen | | 78 Lichtpflan- zen | |
|--|----------------------------|-------------------------------|----------------------------|-------------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| | Samen mgr Stickstoff | Pflanzen mgr Stickstoff | Samen mgr Stickstoff | Pflanzen mgr Stickstoff | Samen mgr Stickstoff | Pflanzen mgr Stickstoff |
| Gesamtstickstoff | 40·06 | 75·89 | 54·48 | 109·90 | 62·24 | 136·44 |
| Salpeterstickstoff | 0 00 | 22·79 | 0 00 | 35 00 | 0·00 | 45·00 |
| Stickstoff der unlöslichen Protein- stoffe | 28·95 | 16·76 | 39·37 | 28·70 | 45·15 | 35·64 |
| Stickstoff der löslichen Protein- stoffe | 7·97 | 3·92 | 10·84 | 5 13 | 12·44 | 7·00 |
| Stickstoff der Peptone und der organischen Basen | — | — | — | 3·87 | — | 5·25 |
| Stickstoff des fertigen Ammoniaks Aus Amidn bei Inversion abspalt- barer Ammoniakstickstoff ($\frac{1}{2}$ Asparagin u. Glutamin- stickstoff) | — | 1·96 | — | 3·50 | — | 3·85 |
| Durch $N_2 O_3$ aus Aminosäure ab- spaltbarer Stickstoff ($\frac{1}{2}$ Aspa- ragin u. Glutaminstickstoff + Aminosäurenstickstoff) | — | 6·81 (13·62) | — | 8·73 (17·46) | — | 10·44 (20·88) |
| Stickstoff sonstiger organischen Verbindungen | — | 13·33 (6·52) | — | 17·55 (8·82) | — | 17·72 (7·28) |
| Gesamtproteinstickstoff | — | 10·32 | — | 7·42 | — | 11·54 |
| Gesamtproteinstickstoff | 36·92 | 20·68 | 50·21 | 33·83 | 57·59 | 42·64 |
| Gesamtstickstoff aller organi- schen Verbindungen | 3·14 | 30·46 | 4·27 | 33·57 | 4·90 | 44·95 |
| Gesamtstickstoff aller organi- schen Verbindungen | 40·06 | 51·14 | 54·88 | 71·40 | 62·49 | 87·59 |
| Gewinn an organischem Stickstoff | — | + 11·07 | — | + 16·92 | — | + 25·10 |

Setzt man die Menge des Gesamtstickstoffes der Samen = 100, so berechnen sich aus den Zahlen der vorigen Tabelle die Mengen der einzelnen Stickstoffformen der Samen und der Pflänzchen, wie folgt:

TABELLE X.

| Stickstoffform | Samen | Dunkel- pflanzen | Lichtpflanzen | |
|---|-------|---------------------|----------------|----------------|
| | | | I | II |
| Gesamtstickstoff | 100 | 189·4 | 201·8 | 201·9 |
| Salpeterstickstoff | — | 56·9 | 64·3 | 72·2 |
| Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe . . . | 72·3 | 41·8 | 52·7 | 58·0 |
| " " löslichen " " " " " | 19·9 | 9·8 | 9·4 | 11·4 |
| " " Peptone u. organischen Basen . | — | — | 7·1 | 8·5 |
| " des fertigen Ammoniaks | — | 4·9 | 6·4 | 6·2 |
| Aus Amidn abspaltbarer Ammoniakstickstoff ($\frac{1}{2}$ Asparagin und Glutaminstickstoff) . . . | — | 17·0 (34·0) | 16·0 (32·0) | 17·0 (34·0) |
| Durch N_2O_3 aus Aminosäuren abspaltbarer Stickstoff ($\frac{1}{2}$ Asparagin u. Glutaminst. + Stickstoff der Aminosäure | — | 33·0 (16·0) | 32·3 (16·3) | 28·8 (11·8) |
| Stickstoff sonstiger organischen Verbindungen | — | 25·7 ¹⁾ | 13·7 | 18·8 |
| Gesamtproteinstickstoff | 92·2 | 51·6 | 62·1 | 69·4 |
| Gesamtnichtproteinstickstoff organischer Ver- bindungen | 7·8 | 75·7 | 69·1 | 73·1 |
| Gesamtstickstoff aller organischen Verbindun- gen | 100·0 | 127·3 | 131·1 | 142·5 |
| Gewinn an organischem Stickstoff | — | +27·6 | +31·1 | 42·5 |

Versuch 3.

Am 21 April 1898 hat man in zwei Schönjahn'schen Keimapparaten je 50 Weizensamen von einem durchschnittlichen Gewichte von 45·4 und 46 mgr ausgesät und dieselben unter einer Glasglocke in kohlenstofffreier Luft in einem Glashaus des botanischen Gartens aufgestellt. Nährlosung vollständig. Der Versuch dauerte bis zum 4 Mai. Die Temperatur des Glashauses hielt sich während des Versuches meistens zwischen 27 und 29° C.

Die Gewichtsbestimmung der Pflänzchen ergab folgendes:

¹⁾ Samt dem Stickstoff der Peptone und organischen Basen, welche hier nicht bestimmt wurden.

TABELLE XI.

| | I | II |
|---|--------------------|--------------------|
| | mgr | mgr |
| Frischgewicht 1 Samens . . . | 45·54 | 46·00 |
| Trockengewicht 1 Samens . . . | 39·43 | 40·27 |
| Frischgewicht 1 Pflänzchens . . | 282·0 | 278·6 |
| Trockengewicht 1 Pflänzchens . | 31·64 | 27·84 |
| „ der Stengel u. Blätter | 16·76 | 18·37 |
| „ „ Wurzeln . . . | 3·18 | 3·30 |
| „ „ Samenüberreste . | 11·70 | 6·11 |
| veratmet in mgr | 7·79 | 12·43 |
| „ in $\frac{0}{0}$ der Trockensubstanz des Samens | 19·7 $\frac{0}{0}$ | 30·8 $\frac{0}{0}$ |

Bei der Analyse wurde wegen der geringen Menge der Substanz nur der Salpetersäurestickstoff, der Stickstoff der löslichen und unlöslichen Verbindungen und der Gesamtnichtproteinstickstoff bestimmt.

Die Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Siehe TABELLE XII auf Seite 344.

Versuch 4.

Am 18 Juni 1898 hat man 4 Portionen Weizensamen zu je 50 Samen im Schönjahn'schen Keimapparate ausgesät. Nachdem die Wurzel etwa 15 mm lang geworden war, ersetzte man das Wasser in drei Apparaten durch vollständige (salpeterhaltige), in dem vierten durch salpeterfreie Nährlösung. Alle vier Apparate wurden unter Glasglocken in kohlensäurefreier Luft in ein Glashaus des botanischen Gartens gestellt und daselbst bis zum 4 Juli stehen gelassen. Die Temperatur des Glashauses schwankte während des Versuches zwischen 15—31°C, Mitteltemperatur 23°C.

Die Gewichtsbestimmungen der Ernte ergaben folgendes:

TABELLE XII.

Pflanzen im Lichte in kohlenstofffreier Atmosphäre kultiviert.

| | Stickstoff der geernteten Substanz in mgr | | | | Stickstoff d. Samen = 100 gesetzt | | |
|--|---|---------------|----------|---------------|-----------------------------------|------------|-------|
| | I | | II | | Samen | Pflänzchen | |
| | 28 Samen | 28 Pflänzchen | 30 Samen | 30 Pflänzchen | | I | II |
| Gesamtstickstoff | 18.95 | 34.50 | 20.53 | 37.59 | 100 | 182.0 | 183.1 |
| Salpeterstickstoff | 0.00 | 7.84 | 0.00 | 8.68 | 0.0 | 41.4 | 42.3 |
| Stickstoff der löslichen Protein- stoffe | 3.77 | 3.64 | 4.08 | 4.34 | 19.9 | 19.2 | 21.1 |
| Stickstoff der unlöslichen Protein- stoffe | 13.69 | 14.56 | 14.84 | 13.16 | 72.3 | 76.8 | 64.1 |
| Gesamtproteinstickstoff | 17.46 | 18.20 | 18.92 | 17.50 | 92.2 | 96.0 | 85.2 |
| Stickstoff der organischen nicht- proteinverbindungen + Am- moniak | 1.49 | 8.46 | 1.61 | 11.41 | 7.8 | 44.6 | 55.6 |
| Gesamtstickstoff der organischen Verbindungen + Ammoniak | 18.95 | 26.66 | 20.53 | 28.91 | 100 | 140.6 | 140.8 |
| Stickstoff assimiliert | | 7.71 | | 8.38 | | 40.6 | 40.8 |

TABELLE XIII.

| | salpeterfreie Lösung | salpeterhaltige Lösung | |
|--|--|--|---|
| | I Durchschnitt aus 23 Pflänzchen mgr | II u. III Durchschnitt aus 78 Pflänzchen mgr | IV Durchschnitt aus 41 Pflänzchen mgr |
| Frischgewicht 1 Samens | 50.10 | 45.15 | 51.15 |
| Trockengewicht 1 Samens | 43.85 | 39.52 | 44.77 |
| Frischgewicht 1 Pflänzchens | 263.0 | 352.5 | 384.4 |
| Trockengewicht 1 Pflänzchens | 30.85 | 28.64 | 32.08 |
| „ der Stengel u. Blätter | } 25.77 | 18.60 | 21.06 |
| „ der Wurzeln | | 5.86 | 6.14 |
| „ des Samenüberrestes | | 4.18 | 4.88 |
| veratmet in mgr | 13.00 | 10.88 | 12.49 |
| „ in % der Trockensub- stanz des Samens | 29.6% | 27.53% | 28.35% |

Die bedeutende Abnahme der Trockensubstanz der Pflänzchen im Verhältnisse zu der der Samen beweist, dass es gelungen ist, die Assimilation auszuschliessen.

Bei der Analyse wurde diesmal die Bestimmung der Amide und Aminosäuren in dieser Portion des Auszuges vorgenommen, welche mit Phosphorwolframsäure gefällt wurde, dagegen wurde diejenige Portion, aus welcher mit $\text{Cu}(\text{OH})_2$ die löslichen Eiweissstoffe gefällt wurden, nach dem Abfiltrieren des Niederschlages im Glycerinbade nach Ansäuern mit Weinsäure abgedampft und nach Förster verbrannt und es diente dieselbe auf diese Weise zur Kontrolle der Gesamtstickstoffbestimmung, welche auch wie gewöhnlich in einer besonderen Portion der Lösung vorgenommen wurde. Von den sehr wenig von einander differierenden Zahlen wurde dann der Durchschnitt genommen.

Siehe TABELLE XIV, Seite 346.

Setzt man die Menge des Gesamtstickstoffs der Samen = 100, so berechnen sich die Mengen der einzelnen Stickstoffformen der Samen und der Pflänzchen, wie folgt:

Siehe TABELLE XV, Seite 347.

Versuche mit Gerste.

Versuch 5.

Am 16 November wurden je 50 Gerstesamen in 8 Schön-jahn'schen Keimapparaten ausgesät und im Dunkeln gehalten. Am 23 November wurde das Wasser in den Apparaten durch Nährlösungen ersetzt. Die Hälfte der Apparate, nämlich die Apparate I, Ia, II und IIa haben eine stickstofffreie, die andere Hälfte, d. h. die Apparate III, IIIa, IV und IVa eine salpeterhaltige Nährlösung erhalten. Am 29 November wurden die Nährlösungen durch frische von gleicher Zusammensetzung ersetzt, wobei aber zu den Lösungen in den Apparaten II und IIa (stickstofffreie Lösungen) und in den Apparaten IV, IVa (salpeterhaltige) 2% Rohrzucker und 1% Traubenzucker hinzugefügt wurden. Man wollte nämlich durch diesen Zusatz den in der letzten Zeit viel besprochenen Einfluss des Zuckers auf die Proteinbildung und Proteinregeneration prüfen. In dieser zuckerhaltigen Flüssigkeit blieben die Pflänzchen in den Apparaten mit stickstofffreier Lösung, II und IIa, bis zum 2 Dezember, in der

TABELLE XIV.

Pflanzen im Lichte in kohlensäurefreier Atmosphäre kultiviert.

| | salpeterfreie Lösung | | | | | |
|---|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| | 33 Samen Stickstoff mgr | 33 Pflanz Stickstoff mgr | 75 Samen mgr Stickstoff | 75 Pflanz. mgr Stickstoff | 41 Samen mgr Stickstoff | 41 Pflanz. mgr Stickstoff |
| Gesamtstickstoff | 24·64 | 26·50 | 50·49 | 119·49 | 31·23 | 71·99 |
| Salpeterstickstoff | 0·00 | 0·00 | 0·00 | 37·10 | 0·00 | 22·28 |
| Stickstoff der unlöslichen Prote- instoffe | 17·81 | 16·42 | 36·48 | 45·99 | 22·57 | 31·81 |
| Stickstoff der löslichen Protei- nstoffe | 4·90 | 2·80 | 10·05 | 7·00 | 6·21 | 5·60 |
| Stickstoff der Peptone u. organi- schen Basen | — | — | — | 0·74 | — | 0·28 |
| Stickstoff des Ammoniaks . . . | — | — | — | 3·70 | — | 0·84 |
| Aus Amidon absplaltbarer Ammo- niakstickstoff ($\frac{1}{2}$ Asparagin und Glutaminstickstoff) . . . | — | — | — | 5·50 (11·0) | — | 3·36 (6·72) |
| Aus Aminosäuren durch N_2O_3 ausgetriebener Stickstoff ($\frac{1}{2}$ Asparagin u. Glutamin + Ami- dosäurestickstoff) | — | — | — | 10·16 (4·55) | — | 7·54 |
| Stickstoff sonstiger unbestimmten organischen Verbindungen . . . | — | — | — | 9·50 | — | |
| Gesamtproteinstickstoff | 22·71 | 19·22 | 46·53 | 52·99 | 28·78 | 37·41 |
| Gesamtlichproteinstickstoff der organischen Verbindungen . . . | 1·93 | 7·28 | 3·93 | 25·90 | 2·45 | 11·18 |
| Gesamtstickstoff der organischen Verbindungen | 24·64 | 26·50 | 50·49 | 78·89 | 31·23 | 48·59 |
| Gewinn an organischem Stickstoff | — | + 1·86 | — | + 28·40 | — | + 17·36 |

stickstoffhaltigen, IV und IVa, nur bis zum 30 November Abends, wonach die Lösungen wieder durch rein mineralische ersetzt wurden. In der salpeter- und zuckerhaltigen Lösung wurden die Pflänzchen deswegen kürzer gehalten, weil schon am zweiten Tage eine leichte Trübung der Flüssigkeit infolge von Bakterienbildung zu beobachten war. Die Ernte der Pflänzchen wurde am 7 Dezember vorgenommen.

Zur Zeit als ich diesen Versuch ausführte, untersuchte in meinem Laboratorium mein damaliger Assistent Dr. Kosiński an

TABELLE XV.

Pflanzen im Lichte in kohlenstofffreier Atmosphäre kultiviert.

| Form des Stickstoffs | Samen | Pflänzchen | | |
|---|-------|--------------------------------|-----------------------------|----------------|
| | | stickstoff- freie Lösung | stickstoffhaltige Lösung | |
| | | | I | II |
| Gesamtstickstoff | 100 | 107.5 | 236.7 | 235.0 |
| Salpeterstickstoff | 0.00 | 0.00 | 73.5 | 71.3 |
| Stickstoff der unlöslichen Protein- stoffe | 72.30 | 66.6 | 91.1 | 101.8 |
| Stickstoff der löslichen Protein- stoffe | 19.90 | 11.40 | 13.9 | 17.9 |
| Stickstoff der Peptone u. organi- schen Basen | — | — | 1.5 | 0.9 |
| Stickstoff des Ammoniaks | — | — | 6.9 | 2.7 |
| Aus Amidien abspaltbarer Ammo- niakstickstoff ($\frac{1}{2}$ Asparagin u. Glutaminstickstoff | — | — | 10.9 (21.8) | 10.8 (21.5) |
| Aus Aminosäuren durch N_2O_3 aus- getriebener Stickstoff ($\frac{1}{2}$ As- paragin u. Glutaminstickstoff + Stickstoff der Aminosäuren) | — | — | 20.1 (9.2) | 24.1 (13.3) |
| Stickstoff sonstiger unbestimmter Verbindungen | — | — | 18.8 | |
| Gesamtproteinstickstoff | 92.2 | 78.00 | 105.0 | 119.7 |
| Stickstoff der gesamten organi- schen Nichtproteinverbindungen | 7.8 | 29.54 | 51.3 | 35.8 |
| Gesamtstickstoff aller organischen Verbindungen | 100 | 107.5 | 156.3 | 155.5 |
| Gewinn an organischem Stickstoff | | + 7.5% | + 56.3% | + 55.5% |

verschiedenen Keimpflanzen den Einfluss der Stickstoffnahrung auf die entsprechende Entwicklung der Wurzeln einerseits und der Sprosse andererseits. In dieser noch nicht publizierten Arbeit, welche Dr. Kosiński in dem botanischen Institute in Jena angefangen und in meinem Laboratorium weitergeführt und zum Abschluss gebracht hat, fand er, dass die Stickstoffnahrung das Längenwachstum der Wurzeln herabsetzt und dasjenige der Stengel begünstigt. Um nun mein Versuchsmaterial gelegentlich zur Prüfung dieses Resultates Kosińskis zu verwerten, habe ich an je 10 Pflänzchen

aus jedem Apparate die Länge der Wurzel und der Sprosse (diese letzte von der Basis bis zur Spitze des längsten Blattes) genommen. Die Durchschnittszahlen aus dieser Messung waren folgende:

| | | | | | Wurzellänge mm | Sprosslänge mm | | |
|------|--------|------|------------|-----|-------------------|-------------------|------|-----|
| I | Lösung | ohne | Stickstoff | und | ohne | Zucker | 132 | 320 |
| Ia | " | " | " | " | " | " | 132 | 330 |
| II | " | " | " | " | mit | Zucker | 175 | 326 |
| IIa | " | " | " | " | " | " | 152 | 302 |
| III | " | mit | Stickstoff | und | ohne | Zucker | 84 | 366 |
| IIIa | " | " | " | " | " | " | 90 | 376 |
| IV | " | " | " | " | mit | Zucker | 93·2 | 354 |
| VIa | " | " | " | " | " | " | 108 | 369 |

Diese Zahlen bestätigen vollkommen die Beobachtungen Kosińskis und zeigen ausserdem, dass der Zusatz von Zucker das Längenwachstum der Wurzeln begünstigte. Dass diese Begünstigung in stickstofffreier Lösung deutlicher hervortrat als bei salpeterhaltiger, erklärt sich schon dadurch, dass die ersten 3 Tage, die zweiten nur 1 Tag in Zuckertlösung verweilten.

Die Frisch- und Trockensubstanzbestimmungen der Pflänzchen ergaben (durchschnittlich für 1 Pflanze) folgendes:

Siehe TABELLE XVI, Seite 349.

Diese Zahlen bestätigen die Resultate der Messungen, indem sie auch zeigen, dass bei Stickstoffmangel das Wurzelwachstum im Verhältnisse zum Sprosswachstum bevorzugt wurde.

In der Tat berechnet man die Trockensubstanz der Wurzeln in % der Trockensubstanz der Wurzeln und Sprosse zusammen, so erhält man:

| | | | | | | |
|-----------------|------|------|---|------|--------|-------|
| für Wurzeln aus | I | ohne | N | ohne | Zucker | 22·4% |
| " | Ia | " | " | " | " | 22·9% |
| " | II | " | " | mit | " | 28·3 |
| " | IIa | " | " | " | " | 28·7 |
| " | III | mit | N | ohne | Zucker | 18·1% |
| " | IIIa | " | " | " | " | 17·8% |
| " | IV | " | " | mit | " | 18·5% |
| " | IV | " | " | " | " | 18·3% |

TABELLE XVI.

| | Lösung ohne Stickstoff | | | | Lösung mit Stickstoff | | | |
|--|------------------------|-------|------------|-------|-----------------------|-------|------------|-------|
| | ohne Zucker | | mit Zucker | | ohne Zucker | | mit Zucker | |
| | I | II | III | IV | IIIa | IV | IVa | |
| | Ia | IIa | III | IV | IIIa | IV | IVa | |
| 1 Samen . . . mgr | 49.36 | 54.16 | 49.67 | 53.37 | 49.29 | 53.23 | 49.67 | 53.30 |
| 1 ganze Pflanze . . " | 407 | 415 | 405 | 466 | 440 | 495 | 455 | 415 |
| 1 Stengel u. Blätter . . " | 261 | 265 | 215 | 263 | 301 | 330 | 302 | 315 |
| 1 Wurzel " | 77 | 89 | 128 | 139 | 79 | 95 | 91 | 100 |
| 1 Samenüberreste . . . " | 69 | 61 | 62 | 64 | 60 | 66 | 62 | 65 |
| Frischgewicht | | | | | | | | |
| 1 Samen mgr | 43.42 | 47.65 | 43.69 | 46.95 | 43.36 | 46.83 | 43.69 | 46.89 |
| 1 ganze Pflanze . . . " | 30.48 | 32.67 | 34.43 | 37.33 | 30.83 | 34.49 | 33.54 | 36.24 |
| 1 Stengel u. Blätter . . " | 18.40 | 19.78 | 19.09 | 21.02 | 20.48 | 22.57 | 21.29 | 22.48 |
| 1 Wurzel " | 5.30 | 5.86 | 7.55 | 8.47 | 4.27 | 4.90 | 4.83 | 5.03 |
| 1 Samenüberreste . . . " | 6.78 | 7.03 | 7.79 | 7.84 | 6.08 | 7.02 | 7.42 | 8.73 |
| Trockengewicht | | | | | | | | |
| Verlust an Trockensubstanz durch Atmung . . . mgr | 12.94 | 14.98 | 9.26 | 9.62 | 12.53 | 12.34 | 10.15 | 10.65 |
| Verlust an Trockensubstanz durch Atmung in % der Samen-trockensubstanz mgr | 27.9 | 31.4 | 21.2 | 20.5 | 28.9 | 26.4 | 23.2 | 22.7 |

Auch aus diesen Zahlen sehen wir, dass die Wurzelbildung im Verhältnisse zur Sprossbildung besonders dann bevorzugt war, wenn der stickstofffreien Nährlösung Zucker zugesetzt wurde, wahrscheinlich deshalb, weil bei reichlicher Ernährung mit stickstofffreier Substanz der Stickstoffhunger sich noch mehr gesteigert hat. Es macht den Eindruck, als ob die nach Stickstoff hungernde Pflanze durch Verwendung möglichst grosser Mengen der disponiblen Stoffe zur Wurzelbildung eine bessere Ausnutzung der spärlichen Stickstoffquellen im Boden anstrebe. Dass der hinzugefügte Zucker von den Pflanzen aufgenommen wurde, folgt daraus, dass der Verlust

an Trockensubstanz bei den Pflanzen, denen Zucker dargeboten wurde, deutlich kleiner war als bei denjenigen, welche die ganze Zeit in rein mineraler Lösung verweilten.

Die Analyse der geernteten Pflanzen auf verschiedene Stickstoffformen ergab folgende Resultate:

Siehe TABELLE XVII, Seite 351.

Setzt man die Menge des Gesamtstickstoffs in den Samen = 100, so berechnen sich die Mengen der einzelnen Stickstoffformen in den Samen und in den Pflanzen, wie folgt:

Siehe TABELLE XVIII, Seite 352.

Versuch 6.

Am 10. Mai 1902 hat man in 6 Schönjahn'schen Keimapparaten je 50 Gerstensamen ausgesät. Nachdem die Plumulae etwa 1 m hoch waren, wurde das Wasser in den Apparaten durch Nährlösungen ersetzt. In den Apparaten I u. Ia wurde eine salpeterhaltige, in II, IIa, III und IIIa eine salpeterfreie Nährlösung gegeben. Alle Apparate wurden ins Licht ins Vegetationshaus des Laboratoriums gestellt, und zwar I, Ia, II und IIa unter Glasglocken in kohlenstoffsaurefreier Luft, III und IIIa in freier Luft. Um einer zu grossen Luftfeuchtigkeit unter den Glocken vorzubeugen, wurden in denselben Abdampfschalen mit trockenem CaCl_2 aufgehängt. Als gegen das Ende des Versuches das Chlorcalcium sich in dem absorbierten Wasser verflüssigt hatte und die Glockenwandungen stark durch den Tau beschlagen waren, wurde CaCl_2 durch frische trockene Substanz ersetzt. Da nun aber der Übergang von feuchter zu trockener Luft zu scharf war und die Pflänzchen, namentlich die aus salpeterhaltiger Lösung teilweise welk wurden, wurden die Pflänzchen am 31. Mai geerntet. Die Frisch- und Trockensubstanzbestimmungen ergaben folgendes:

Siehe TABELLE XIX, Seite 353.

Die Bevorzugung der Wurzelbildung gegenüber der Sprossbildung durch Stickstoffmangel im Sinne Kosińskis wird auch durch diese Zahlen bestätigt, indem z. B. das frische Durchschnittsgewicht einer Wurzel aus salpeterfreier Lösung 114 mgr, das einer Wurzel aus salpeterhaltiger Lösung nur 101 mgr betrug. Ganz besonders prägnant tritt aber diese Bevorzugung der Wurzelbildung bei den

TABELLE XVII.

| | I u. Ia 91 Pflanzen Lösung ohne N ohne Zucker | | II u. Iia 97 Pflanzen Lösung ohne Salpeter mit Zucker | | III u. Iiia 95 Pflanzen Lösung mit Salpeter ohne Zucker | | IV u. IVa Lösung mit Salpeter u. mit Zucker | |
|--|--|----------|---|----------|---|----------|---|------------------------------------|
| | Samen | Pflanzen | Samen | Pflanzen | Samen | Pflanzen | Samen | Pflanzen |
| Gesamtstickstoff | 81.94 | 80.46 | 87.68 | 84.56 | 84.78 | 149.07 | 80.20 | 138.9 |
| Salpeterstickstoff | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 50.41 | 0.00 | 43.75 |
| Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe | 69.55 | 32.0 | 74.42 | 36.26 | 71.96 | 38.54 | 68.07 | 40.25 |
| " löslichen | 8.29 | 5.7 | 8.87 | 4.55 | 8.58 | 5.95 | 8.11 | 12.95 |
| " Peptone u. organischen Basen | — | — | — | — | — | — | — | 1.51 |
| " des Ammoniaks | — | — | — | — | — | — | — | 4.20 |
| " des aus Amidn abspaltbaren Ammoniaks ($\frac{1}{2}$ Asparagin und Glutaminstickstoff) | — | 16.0 | — | 16.55 | — | 16.80 | — | 10.50 [11.33] (21.00) [(22.66)] |
| Stickstoff durch N_2O_3 aus Amidosäuren abspaltbar ($\frac{1}{2}$ Asparagin u. Glutaminstickstoff + Amido- säurestickstoff) | — | 22.7 | — | 17.41 | — | 20.27 | — | 15.25 [17.27] (4.75) [(5.94)] |
| Stickstoff sonstiger unbestimmten Verbindungen | — | 3.55 | — | 10.79 | — | 17.10 | — | 10.54 [7.69] |
| Gesamtproteinstickstoff | 77.84 | 57.70 | 83.29 | 39.81 | 80.54 | 44.59 | 76.18 | 53.20 |
| Gesamtstickstoff der organ. Verb. samt Ammoniak | 4.1 | 42.25 | 4.39 | 44.75 | 4.24 | 54.17 | 4.02 | 42.00 |
| Gesamtstickstoff aller organischen Verbindungen u. des Ammoniaks | 81.94 | 79.95 | 87.68 | 84.56 | 84.78 | 98.66 | 80.20 | 95.20 |
| Gewinn an organischem- u. Ammoniak-Stickstoff | — | 1.99 | — | 3.12 | — | 13.88 | — | +15.00 |

TABELLE XVIII.

| | Stickstoff in den Samen | Stickstoff in den Pflanzen | | | |
|---|-------------------------------|-------------------------------------|---|---------------------------------|--|
| | | I u. Ia Lösung ohne Zucker | II u. IIa Lösung ohne N mit Zucker | III u. IIIa Lösung Zucker | IV und IV Lösung mit N u. mit Zucker |
| Gesamtstickstoff | 100 | 97.5 | 96.5 | 175.5 | 173.2 |
| Salpeterstickstoff | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 59.4 | 54.5 |
| Stickstoff der unlöslichen Proteinstickstoffe | 84.9 | 39.0 | 40.2 | 45.5 | 50.2 |
| " löslichen Proteinstoffe | 10.1 | 7.0 | 5.2 | 7.0 | 16.1 |
| " Peptone u. der organischen Basen | — | — | — | — | 1.9 |
| " des Ammoniaks | — | — | — | — | 5.2 |
| " aus Amidon abspaltbaren Ammoniaks (½ Asparagin und Glutaminstickstoff) | — | 19.4 | 18.9 | 19.8 | 13.1 [14.1] ¹⁾ (26.2) [(28.2)] |
| Stickstoff durch N ₂ O ₅ aus Amidensäure abspaltbar (½ Asparagin und Glutaminstickstoff + Amino- säurenstickstoff ¹⁾) | — | 27.7 | 19.9 | 23.9 | 19.0 [21.5] (5.9) [(7.4)] |
| Stickstoff sonstiger unbestimmter Verbindungen | — | 4.3 | 12.3 | 20.2 | 13.1 [9.7] |
| Gesamtproteinstickstoff | 95.0 | 46.0 | 45.4 | 52.5 | 66.3 |
| Gesamtstickstoff der organischen Verbindungen | 5.0 | 51.5 | 51.5 | 63.9 | 52.4 |
| Gesamtstickstoff aller organischen Verbindungen und des Ammoniaks | 100 | 97.5 | 96.5 | 116.4 | 118.7 |
| Gewinn an organischem u. Ammoniakstickstoff | | — 2.5% | — 3.5% | + 16.4 | + 18.7 |

¹⁾ Die in [] eingeklammerten Zahlen stammen aus der Bestimmung nach Phosphorwolframsäurefällung.

TABELLE XIX.
Gewicht pro 1 Pflanze in mgr.

| | salpeterhaltige Lösung | | salpeterfreie Lösung | | | |
|---|-------------------------------------|--------|-------------------------------------|--------|-----------------------------------|--------|
| | kohlensäurefreie Luft Glasglocke | | kohlensäurefreie Luft Glasglocke | | freie Luft mit CO ₂ | |
| | I | Ia | II | IIa | III | IIIa |
| Frischgewicht der Samens . . . | 46·6 | 49·5 | 46·7 | 49·5 | 46·6 | 46·7 |
| „ der Pflanze . . . | 360·4 | 369·2 | 353·3 | 358·3 | 498·0 | 525·1 |
| „ „ Stengel u. Blätter | 220·4 | 226·2 | 196·3 | 193·0 | 249·5 | 256·7 |
| „ „ Wurzel . . . | 90·1 | 102·0 | 113·7 | 114·1 | 202·3 | 235·1 |
| „ des Samenrestes . . . | 40·9 | 41·0 | 43·3 | 51·2 | 46·2 | 43·3 |
| Trockengewicht des Samens . . | 41·00 | 43·5 | 41·1 | 43·5 | 41·0 | 41·1 |
| „ der ganzen Pflanze | 32·00 | 34·88 | 32·50 | 33·78 | 53·51 | 55·09 |
| „ „ Stengel u. Blätter | 19·55 | 20·97 | 18·46 | 19·43 | 29·00 | 30·12 |
| „ „ Wurzel . . . | 6·06 | 7·42 | 6·60 | 6·27 | 15·74 | 16·72 |
| „ „ Samenreste . . . | 6·39 | 6·49 | 7·44 | 8·08 | 8·77 | 8·20 |
| Verlust resp. Gewinn an Trocken- substanzen mgr. | -9·00 | -8·72 | -8·60 | -9·72 | +12·51 | 13·99 |
| Verlust resp. Gewinn an Trocken- substanzen in % | -22% | -20·2% | -20·9% | -22·6% | +30·5% | +34·0% |

Pflanzen ein, welche in freier Luft, also bei stattfindender Assimilation in stickstofffreier Lösung vegetierten. Die Zahlen zeigen nämlich, dass die unter diesen Bedingungen durch Assimilation neugebildete Substanz weit mehr zur Wurzelbildung als zur Sprossbildung verwendet wurde.

Die Trockensubstanz der assimilierender Pflänzchen war um 64% grösser als die der Pflänzchen aus kohlensäurefreier Luft. Dieser Unterschied verteilte sich aber nicht gleichmässig zwischen die Sprossen und die Wurzeln: derselbe betrug nur 50% bei den ersten und 152% bei den letzten. Man bekommt also wieder den Eindruck, als ob die an Stickstoff hungernde Pflanze durch Bevorzugung der Wurzelbildung zu einer besseren Ausnützung der vorhandenen und zur Aufsuchung neuer Stickstoffquellen strebe.

Die Analyse der Pflänzchen auf verschiedene Stickstoffformen ergab folgendes:

TABELLE XX.
mgr Stickstoff

| | salpeterhaltige Lösung | | salpeterfreie Lösung | | | |
|--|------------------------|----------------------------------|-----------------------|----------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| | kohlenstofffreie Luft | | kohlenstofffreie Luft | | freie kohlenstoffhaltige Luft | |
| | 94 Samen 4:5252 gr. | 94 Pflanzen 3:2573 gr. | Samen 4:1768 gr. | Pflanzen 2:8804 gr. | Samen 4:478 gr. | Pflanzen 5:216 gr. |
| Gesamtstickstoff | 84.08 | 160.29 | 77.60 | 74.58 | 83.20 | 89.20 |
| Salpeterstickstoff | — | 54.60 | — | 0.00 | — | — |
| Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe | 71.36 | 55.29 | 65.86 | 47.83 | 70.61 | 61.31 |
| „ „ löslichen Proteinstoffe | 8.51 | 7.00 | 7.85 | 5.74 | 8.42 | 4.77 |
| „ „ Peptone u. organischen Basen | — | 4.77 | — | 0.00 | — | 4.56 |
| „ des Ammoniaks | — | 2.83 | — | 2.59 | — | 1.26 |
| „ „ aus Amidon abspaltbar. Ammoniaks ($\frac{1}{2}$ Asparagin u. Glutaminstickstoff) | — | 13.76 [12.25] (27.52) [24.50] | — | 5.46 [6.57] (10.92) [(13.14)] | — | 3.58 [3.88] (7.16) [(7.76)] |
| „ „ aus Amidosäuren durch N_2O_3 ab- spaltbar ($\frac{1}{2}$ Asparagin u. Glutamin- stickstoff. Amidosäurereststickstoff) | — | 21.44 [19.12] (7.68) (5.87) | — | 11.45 [9.40] (5.99) [(2.83)] | — | [7.50] [(3.62)] |
| Stickstoff sonstiger organischen Verbindungen | — | [4.43] | — | 1.51 [2.45] | — | [5.92] |
| Gesamtproteinstickstoff | 79.87 | 62.29 | 73.71 | 53.57 | 79.03 | 66.08 |
| Gesamtstickstoff aller organischen Verbindungen und des Ammoniaks | 4.21 | 43.40 | 3.89 | 21.01 | 4.17 | 23.12 |
| Gewinn an Stickstoff der organischen Verbindungen und des Ammoniaks | 84.08 | 105.69 | 77.60 | 74.58 | — | 89.20 |
| Gewinn an Stickstoff der organischen Verbindungen und des Ammoniaks | — | 21.61 | — | —3.02 | — | + 6.00 |

Setzt man die Menge des Gesamtstickstoffs der Samen = 100, so berechnen sich die Mengen der einzelnen Stickstoffformen in den Samen und in den Pflanzen, wie folgt:

Siehe TABELLE XXI, Seite 356.

Versuch 7.

138 Gerstepflänzchen in stickstofffreier Nährlösung im Dunkeln gezogen, wurden getrocknet und auf verschiedene Stickstoffformen untersucht. Die Trockensubstanz der Pflänzchen wog 4·094 gr, und da die Samen 6·673 gr wogen und 5·871 gr Trockensubstanz enthielten, so betrug die Trockensubstanzabnahme 1·777 gr oder 30·3%. Die Analyse ergab folgendes:

TABELLE XXII.

| | Stickstoff in mgr | | Stickstoff der Samen = 100 gesetzt | |
|---|-------------------|--------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------|
| | Samen | Pflanzen | Samen | Pflanzen |
| Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe | 105·6 | 43·5 | 84·9 | 35·0 |
| „ der löslichen Proteinstoffe | 12·5 | 5·8 | 10·1 | 4·7 |
| „ der Peptone und organischen Basen | — | 7·9 | — | 6·3 |
| „ des fertigen Ammoniaks | — | 4·4 | — | 3·5 |
| „ des aus Amidn abspaltbaren Ammoniaks ($\frac{1}{2}$ Asparagin u. Glutaminstickstoffs) | — | 16·8 [17·7] (33·6) [(35·4)] | — | 13·5 [14·2] (27·0) [(28·4)] |
| Stickstoff durch N_2O_3 aus Amidosäuren abspaltbar ($\frac{1}{2}$ Asparagin u. Glutaminstickstoff . Amidosäurenstickstoff) | — | 24·7 [21·6] (7·9) [(3·9)] | — | 19·9 [17·4] (6·4) [(3·2)] |
| Stickstoff sonstiger organischen Verbindungen | — | 15·3 [17·5] | — | 12·0 [14·1] |
| Gesamtproteinstickstoff | 118·1 | 49·3 | 95·0 | 39·7 |
| Gesamtstickstoff | 6·2 | 69·1 | 5·0 | 55·5 |
| Gesamtstickstoff | 124·3 | 118·4 | 100 | 95·2 |
| Stickstoffverlust | — | -5·9 | — | -4·8% |

TABELLE XXI.

| | Stickstoff der Samen | Stickstoff der Pflanzen | | |
|---|----------------------------|---|---|---|
| | | salpeterhaltige Nährlösung kohlenstofffreie Luft | salpeterfreie kohlenstofffreie Luft | Nährlösung freie kohlenstoff- freie Luft |
| Gesamtstickstoff | 1·00 | 190·6 | 96·1 | 107·2 |
| Salpetersäurestickstoff | 0·00 | 64·9 | 0·00 | 0·00 |
| Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe | 84·9 | 65·7 | 61·6 | 73·7 |
| „ löslichen Proteinstoffe | 10·1 | 8·3 | 7·4 | 5·7 |
| „ der Peptone und organischen Basen | — | 5·7 | 0·0 | 5·5 |
| „ des Ammoniaks | — | 3·4 | 3·3 | 1·5 |
| „ des aus Amidn abspaltbaren Ammoniaks ($\frac{1}{2}$ Asparagin und Glutaminsäurestickstoff) | — | 16·4 [14·6] (32·8) [(29·0)] | 7·0 [8·5] (14·0) [17·0] | 4·2 [4·7] (8·4) [(9·4)] |
| „ durch $N_2 O_3$ aus Amidosäuren abspaltbar ($\frac{1}{2}$ Asparagin u. Glutaminsäurestickstoff + Stickstoff der Amidosäuren) | — | 25·5 [22·7] (9·1) [(8·1)] | 14·7 [12·1] (7·7) [(3·6)] | [9·0] [(4·3)] |
| Stickstoff sonstiger organischen Verbindungen | — | [5·3] | 1·9 [3·2] | [7·1] |
| Gesamtproteinstickstoff | 95·0 | 74·0 | 69·0 | 79·4 |
| Gesamtstickstoff der organischen Verbindungen und des Ammoniaks | 5·0 | 51·7 | 27·1 | 27·8 |
| Gesamtstickstoff aller organischen Verbindungen und des Ammoniaks | 100 | 125·7 | 96·1 | 107·2 |
| Gewinn an organischem und Ammoniakstickstoff | — | + 25·7 | — 3·7 | + 7·2 |

Schlussfolgerungen.

Überblicken wir die oben zusammengestellten Versuchsergebnisse und Analysenresultate, so können wir zunächst mit voller Sicherheit konstatieren, dass auch die höheren Pflanzen befähigt sind im Dunkeln auf Kosten der salpetersauren Salze und ihrer stickstofffreien Reservestoffe organische Stickstoffverbindungen zu bilden. Diesen Schluss habe ich schon in meiner Mitteilung im Jahre 1897 aus meinen damaligen Versuchen gezogen, er bedarf aber, wie bereits hervorgehoben wurde, einer Bestätigung aus zwei Gründen: 1) weil Prianischnikow gegen die Beweiskraft meiner Analysen wegen zu kleiner Mengen Substanz, welche ich für Einzelbestimmungen verwendet habe, Einwände erhoben hat; 2) weil damals Ammoniak in den geernteten Pflanzen nicht besonders bestimmt, sondern sein Stickstoff zu den organischen Verbindungen mit eingerechnet wurde.

Nun hat sich bei meinen neuen Versuchen gezeigt, dass die Ammoniakmenge in den Keimpflanzen sowohl des Weizens wie der Gerste, mögen dieselben im Dunkeln oder im Lichte, in salpeterhaltiger oder salpeterfreier Lösung kultiviert werden, immer eine sehr geringe war. Sie schwankte meistens zwischen 3% und 5% des ursprünglichen Stickstoffgehaltes der Samen und erreichte in dem extremsten Falle 6.4% dieser Grösse, während der Gewinn an organischem Stickstoff im Dunkeln in einigen Fällen 38% des ursprünglichen Stickstoffgehaltes der Samen übertraf.

Auch der von Prianischnikow gegen die Stichthaltigkeit meiner früheren Versuche erhobene Einwand kann sich auf meine neuen Versuche nicht beziehen, da die für den Gewinn an organischem Stickstoff im Dunkeln in diesen Versuchen gefundenen Zahlen weit über die Grenze der möglichen Fehler hinauslaufen. So finden wir z. B., dass 70 Weizenkeimlinge im Versuche I 17.6 mgr, 50 Weizenkeimlinge im Versuche II 11.0 mgr und 84 Gerstekeimlinge im Versuche V 15 mgr Salpeterstickstoff in organische Verbindungen im Dunkeln übergeführt haben, während der höchste Fehler, welchen wir bei der Bestimmung des organischen Gesamtstickstoffs in unseren Kontrollanalysen begangen haben, nur 3 mgr betrug.

Eine Garantie dafür, dass die beobachtete Zunahme des organischen Stickstoffs im Dunkeln nicht auf Analysefehlern beruhe, bieten auch die Analysen der Pflänzchen, welche in den Lösungen

ohne Salpeter kultiviert wurden. Es wurden im allgemeinen 7 solcher Analysen ausgeführt. Die Differenzen zwischen der gefundenen Menge des organischen Stickstoffs in den Pflänzchen und in den Samen, aus welchen sie gezogen wurden, waren in diesen 7 Fällen folgende: + 4.14 mgr + 1.46 mgr — 1.99 mgr — 3.12 mgr — 3.02 mgr + 6.00 mgr — 5.9. Auch der extremste Fall der Differenz von + 6 mgr betrug nur die Hälfte des Minimums dessen, was man bei den Pflanzen aus salpeterhaltiger Lösung gefunden hat. Jedenfalls scheint mir diese Differenz von 6.0 mgr und sogar die von 4.0 mgr zu gross zu sein, um von den analytischen Fehlern herzurühren, ich vermute eher, dass die Pflänzchen eine nicht vorausgesehene Stickstoffquelle gefunden und etwas Stickstoff wirklich assimiliert haben. Eine solche Stickstoffquelle konnte schon dadurch geboten werden, dass es vorgekommen ist, dass einzelne Samen schlecht oder gar nicht gekeimt, sondern sich zersetzt haben. Ihre stickstoffhaltigen Zersetzungsprodukte konnten dann selbstverständlich leicht von den an Stickstoff hungernden Pflänzchen aufgenommen worden und die bei der Analyse gefundene Stickstoffzunahme der Pflänzchen im Verhältnisse zu den Samen bedingen. Ich habe mich zwar bemüht, durch Sterilisation des Samens in Sublimat der Zersetzung der nicht keimenden Samen entgegen zu wirken, habe aber mehrmals konstatiert, dass diese Zersetzung doch stattfand, was bei der bekannten Schwierigkeit, solche Kulturen dauernd steril zu erhalten, nicht befremden kann.

Die Stickstoffassimilation im Dunkeln äusserte sich nicht nur in den Analysenresultaten, sondern auch in einer viel stärkeren Entwicklung der Pflänzchen aus salpeterhaltiger Nährlösung gegenüber denjenigen, welche in stickstofffreier Lösung kultiviert wurden. Diese stärkere Entwicklung äusserte sich nicht nur in dem Habitus der Pflänzchen während ihrer Vegetation, vielmehr hat sie auch in der Vergrösserung des frischen Gewichtes der geernteten Pflänzchen ihren Ausdruck gefunden. Dieses frische Gewicht der etiolierten Weizen- und Gerstekeimlinge aus der salpeterhaltigen Nährlösung war durchwegs höher als das derjenigen aus der salpeterfreien.

Wenn es zugestanden werden muss, dass die Verarbeitung des Salpeterstickstoffs zu organischen Stickstoffverbindungen auch im Dunkeln bei den höheren Pflanzen stattfindet, so folgt daraus durchaus nicht, dass das Licht für diesen Prozess belanglos ist. Im Ge-

genteil, das Resultat unserer früheren Versuche, dass das Licht fördernd auf die Verarbeitung des Salpeters einwirkt, hat sich auch in unseren neuen Versuchen vollkommen bestätigt.

So betrug der Gewinn an organischem Stickstoff auf Kosten der Nitate ausgedrückt in % des ursprünglichen Stickstoffgehaltes der Samen in den Versuchen mit Weizenkeimlingen:

bei den Dunkelpflanzen 30·7% 34·3% 27·6%

bei den Lichtpflanzen 31·1 42·5% 40·6% 40·8% 56·3% 55·5%

und in den Versuchen mit Gerstekeimlingen:

bei den Dunkelpflanzen 16·4% 18·7%

bei den Lichtpflanzen 25·7%.

Den Unterschied zwischen der Stickstoffassimilation aus Nitraten im Lichte und im Dunkeln bei den Gerstekeimlingen würde wahrscheinlich viel grösser ausfallen, wenn die Pflänzchen aus salpeterhaltiger Lösung in den letzten 5 Tagen des Versuches 6 infolge einer plötzlichen Verminderung der Luftfeuchtigkeit unter der Glocke nicht welk geworden wären.

Es muss mit allem Nachdruck betont werden, dass bei den Lichtpflanzen überall die Assimilation ausgeschlossen war, indem die Pflänzchen sich in kohlenstofffreier Luft entwickelten. Dass die Ausschliessung der Assimilation nicht nur angestrebt, sondern auch wirklich erreicht wurde, wird dadurch bewiesen, dass die Abnahme der Trockensubstanz durch Atmung bei den Lichtpflanzen eine ebenso grosse war wie bei den Dunkelpflanzen. Obwohl ich diesen Nachweis bereits in meiner ersten Mitteilung erbracht habe, wurde er von manchen Autoren übersehen; so bemerkt z. B. Prianschnikow in der Fussnote auf Seite 102 seiner bereits zitierten Abhandlung, dass er meine Versuche im Lichte unberücksichtigt lässt, weil die bei der Atmung der Pflanzen gebildete Kohlensäure teilweise wieder von der Pflanze assimiliert werden konnte. Ich habe eben wegen dieser theoretisch berechtigten Möglichkeit sowohl in meinen älteren wie in den vorliegenden Versuchen die Trockensubstanzbestimmungen der geernteten Pflänzchen überall ausgeführt und erst aus der Gleichheit der Trockensubstanzabnahme im Lichte und im Dunkeln auf das Nichtvorhandensein der Assimilation bei den Lichtpflanzen geschlossen. Dieser Nachweis, dass bei den Lichtpflanzen in meinen Versuchen keine Assimilation stattfand, berechtigt auch zu dem Schlusse, dass das Licht nicht indirekt durch Vermittelung der Assimilation, sondern direkt seine be-

günstigende Wirkung auf die Verarbeitung der Nitrate durch die höheren Pflanzen ausübt.

Durch den Nachweis, dass im Dunkeln und im Lichte in kohlenstofffreier Atmosphäre die Nitrate von den höheren Pflanzen verarbeitet werden, wird zugleich bestätigt, dass wenigstens der Regel nach die Entstehung der ersten organischen Stickstoffverbindungen mit dem Assimilationsprozesse nicht zusammenhängt, sondern dass die Stickstoffverbindungen auch bei den grünen Pflanzen auf Kosten der anorganischen Stickstoffverbindungen und organischen stickstofffreien Stoffe entstehen.

Einen noch grösseren Einfluss als auf die Verarbeitung der Nitrate hat die Lichtwirkung auf die Bildung der Eiweissstoffe in unseren Versuchen ausgeübt. In Übereinstimmung mit den Resultaten meiner früheren Versuche fand ich auch jetzt, dass die im Dunkeln gehaltenen Keimlinge, auch wenn sie in salpeterhaltiger Lösung wuchsen und Nitratstickstoff verarbeiteten, nie eine Zunahme, sondern immer eine Abnahme des Eiweissstickstoffs im Verhältnisse zu dem der Samen geäussert haben.

Doch ergab sich aus den Versuchen mit Weizen und mit Gerste, dass diese Eiweissabnahme in den Pflanzen aus nitrathaltiger Lösung kleiner ist als in denen aus stickstofffreier. Dasselbe habe ich schon in meinen früheren Versuchen vom Jahr 1896 beobachtet, habe aber damals noch für möglich gehalten, dass der Unterschied ein zufälliger sei. Diese Zufälligkeit ist nun angesichts der Bestätigung durch die neuen Versuche ausgeschlossen und es konnte sich nur noch darum handeln, ob die geringere Abnahme der Eiweissstoffe in den Pflanzen aus salpeterhaltiger Lösung daher rührt, dass auf Kosten des Salpeters eine gewisse Menge von Eiweissstoffen neugebildet wurde, wodurch die Abnahme teilweise kompensiert war, oder ob vielleicht die auf Kosten der Salpeters sich bildenden nicht proteinartigen Stickstoffverbindungen schützend auf die Eiweisszersetzung wirkten. In meiner früheren Mitteilung, wo ich diese Möglichkeiten auch erörtert habe, war ich mehr geneigt die letzte Hypothese als wahrscheinlicher anzusehen, jetzt aber, nachdem in der letzten Zeit die Eiweissbildung im Dunkeln vielfach bei den höheren Pflanzen und auch bei den Keimpflanzen (Suzuki) konstatiert worden ist, halte ich die erste Möglichkeit für naturgemässer.

Es ist höchst wahrscheinlich, dass in der Pflanze Eiweissbildung

und Eiweisspaltung auch im Dunkeln konstant nebeneinander vor sich gehen und die Zu- oder Abnahme der Eiweissstoffe davon abhängt, welcher von diesen Prozessen die Oberhand nimmt. Findet keine Assimilation des anorganischen Stickstoffs statt, so vollziehen sich diese Prozesse nur unter verschiedenen organischen Stickstoffverbindungen, welche aus den Reservestoffen der Samen und Knollen ihren Ursprung nehmen, kommt aber der neu aus Nitraten oder sonstigen Stickstoffquellen assimilierte Stickstoff hinzu, so wird auch er in diesen Kreislauf hineingezogen. Verhält sich die Sache wirklich so, so ist es verständlich, warum die Pflänzchen aus salpeterhaltiger Lösung auch im Dunkeln an Eiweissstickstoff reicher sind als die aus salpeterfreier.

Im Versuche 5 wurde der Einfluss des Zuckers (2% Rohrzucker + 1% Traubenzucker) auf diese Prozesse im Dunkeln an Gerstekeimlingen geprüft. Bekanntlich hat Suzuki eben an den Gerstekeimlingen nachgewiesen, dass sie bei Anwesenheit grösserer Zuckermengen aus Nitraten im Dunkeln Eiweiss zu bilden vermögen.

Unser Versuch 5. ergab:

| | Pro 100 des Samenstickstoffs: | |
|---|---|--|
| | Abnahme des Protein- stickstoffes | Zunahme des organischen Nichtproteinstickstoffes |
| Pflänzchen aus salpeterhaltiger Lösung die ganze Zeit ohne Zucker | — 43.0 | + 58.4 |
| Pflänzchen aus salpeterhaltiger Lösung 1½ Tage mit Zucker . . | — 28.7 | + 47.4 |
| Pflänzchen aus stickstofffreier Lösung die ganze Zeit ohne Zucker | — 49.0 | + 46.5 |
| Pflänzchen aus stickstofffreier Lösung 3 Tage mit Zucker | — 49.6 | + 46.1 |

Das Resultat ist interessant.

In Gegenwart von Nitraten hat der Zucker, obgleich er nur 1½ Tage mit den Pflänzchen in Berührung stand, die Eiweissabnahme bedeutend eingeschränkt, für die Pflänzchen, welche in stickstofffreier Lösung vegetierten, war die Ernährung mit Zucker, obgleich sie 3 Tage dauerte, für die Eiweissbildung belanglos; die Eiweissabnahme war bei den mit Zucker ernährten und nicht ernährten Pflänzchen gleich gross. Es macht also den Eindruck, als ob die

Neubildung des Eiweisses auf Kosten des Salpeters (bez. auf Kosten der bei Verarbeitung des Salpeters sich bildenden Stickstoffverbindungen) leichter im Dunkeln bei Anwesenheit des Zuckers vor sich ginge als die Eiweissregeneration aus den Produkten der Eiweisspaltung. Wäre es wirklich so, so würde daraus weiter folgen, dass die ersten stickstoffhaltigen Produkte, welche sich in der Pflanze aus der Verarbeitung des Salpeters bilden, mit den Spaltungsprodukten der Eiweissstoffe nicht identisch sind.

Der Versuch verdient wiederholt zu werden, da es selbstverständlich unstatthaft wäre, so wichtige Schlüsse auf einem einzigen Versuche aufzubauen.

Die Abnahme der Menge des Eiweissstickstoffs während der Vegetation im Dunkeln war bei unseren verschiedenen Versuchen nicht gleich, sie war im allgemeinen bei der Gerste stärker als bei dem Weizen, aber auch bei einer und derselben Pflanze war sie verschieden. So betrug die Verminderung des Eiweissstickstoffs pro 100 des Gesamtstickstoffs, bei dem Weizen:

| | | | | | |
|--|------------------|-------|-----------------|-------|-------|
| in salpeterhaltiger Lösung | Versuch von 1896 | 26.6% | 22.0% | 20.8% | |
| " | " | " | Versuch 1 . . . | 12.7% | 13.7% |
| " | " | " | Versuch 2 . . . | 40.6% | |
| in salpeterfreier Lösung | Versuch von 1896 | 31.0% | | | |
| " | " | " | Versuch 1 . . . | 29.0% | |
| und bei der Gerste in salpeterfreier Lösung: | | | Versuch 5 . . . | 49.0% | |
| | | | Versuch 7 . . . | 55.3% | |

Besonders grosse Unterschiede bestehen zwischen den Zahlen aus den Versuchen 1 und 2. Dass diese Unterschiede nicht durch verschiedene Entwicklungsstadien der in beiden Versuchen geernteten Pflanzen bedingt wurden, folgt daraus, dass die Mengen der veratmeten Trockensubstanz in beiden Versuchen gleich waren, sie konnten auch nicht durch Verschiedenheit des für die Versuche verwendeten Samenmaterials verursacht werden, da für beide Versuche das Material von derselben Samenprobe gedient hat, folglich konnten nur verschiedene Versuchsbedingungen diesen Unterschied verursachen. Da Versuch 1 im März, Versuch 2 im Juli ausgeführt wurde, so war es wahrscheinlich die höhere Temperatur während der Dauer des Versuches 2, welche ein stärkeres Übergewicht

der Eiweisspaltung über die Eiweissbildung hervorgerufen hat. Es wäre ohne Zweifel angezeigt, den Einfluss der Temperatur auf das Verhältnis zwischen diesen beiden Prozessen einer näheren experimentellen Prüfung zu unterwerfen.

Wir gelangen nun zu dem wichtigsten Punkte unserer Arbeit, d. h. zur Besprechung des Einflusses des Lichtes auf die Proteinbildung auf Kosten der nichtproteinartigen Stickstoffverbindungen.

Man hat bisher die Frage nach dem Einflusse des Lichtes auf die Eiweissbildung in der Regel nur dahin zu beantworten gesucht, dass man sich bemüht hat festzustellen, ob dieser Prozess im Dunkeln vor sich gehen kann oder nicht.

Da die Versuche Zaleski's, Suzuki's, Hansteens und anderer dargethan haben, dass die Eiweissbildung auch bei den Pflanzenorganen im Dunkeln vollzogen werden kann, so folgerte man daraus, dass dem Lichte keine direkte Rolle in diesem Prozesse zukommt. Hansteen z. B., wie wir sahen, betrachtet als festgestellte Tatsache, dass das Licht nur eine indirekte Rolle bei dem Prozesse der Eiweissbildung spielt.

Es ist aber zu bemerken, dass auch viele andere physiologische Prozesse, wie z. B. Transpiration, Wachstum, manche Bewegungserscheinungen u. s. w. im Dunkeln vollzogen werden können und doch vom Lichte beeinflusst werden, indem das Licht auf den Verlauf dieser Prozesse eine beschleunigende oder retardierende Wirkung ausübt. Das Gleiche bezieht sich auf die Eiweissbildung. Durch die Feststellung, dass die Eiweissbildung im Dunkeln sich vollziehen kann, ist die Frage nach der Abhängigkeit oder Unabhängigkeit dieser Prozesse von der direkten Lichtwirkung noch nicht gelöst. Eine Unabhängigkeit vom Lichteinflusse dürfte erst dann angenommen werden, wenn der Beweis erbracht werden würde, dass bei gleicher Zufuhr von stickstofffreiem plastischen Nährmaterial die Eiweissbildung im Dunkeln und im Lichte mit gleicher Schnelligkeit erfolge. Nun verhält sich aber die Sache ganz anders.

Schon aus den in der Einleitung besprochenen Versuchen von Laurent und Marchal und namentlich aus ihren Versuchen im farbigen Lichte lässt sich auf eine von der Assimilation unabhängige, also direkte Wirkung des Lichtes auf Stickstoffassimilation und Eiweissbildung schliessen und sowohl unsere Versuche vom Jahre 1896 wie auch die jetzigen lassen über die Begünstigung sowohl der Eiweissneubildung auf Kosten der Nitrate wie der Eiweissre-

generation aus den Spaltungsprodukten derselben keinen Zweifel übrig.

Was die Neubildung des Eiweisses auf Kosten der Nitate anbetrifft, so sehen wir, dass in Übereinstimmung mit meinen Versuchen von 1896 unsere jetzigen Versuche 3 und ganz besonders 4 zeigen, dass die in kohlenstofffreier Atmosphäre im Lichte gezogenen Weizenkeimpflanzen eine bedeutend grössere Menge von Eiweissstickstoff enthielten als die Samen. Die Eiweiss-synthese im Lichte hat also trotz der mangelnden Assimilation nicht nur die ganze Menge der Eiweissstoffe, welche während der Entwicklung der Keimlinge gespalten wurde, wieder hergestellt, sondern noch darüber ein gewisses Plus ergeben. Im Dunkeln erreichte die Eiweissbildung kein einziges Mal die Höhe der Eiweisspaltung, so dass die geernteten Pflänzchen immer weniger Stickstoff enthielten als die Samen.

Ein abweichendes Verhalten zeigte sich bei den Versuchen 2 mit dem Weizen und 6 mit der Gerste. In diesen beiden Versuchen wurde auch bei den Lichtpflanzen eine Ahnahme des Eiweissstickstoffs im Verhältnisse zu dem der Samen konstatiert; die Eiweisspaltung übertraf also auch im Lichte die Eiweissbildung. Ich kann nicht bestimmt angeben, worauf dieses von dem üblichen verschiedene Verhalten beruht. In dem Versuche 6 mit Gerste hängt das wahrscheinlich damit zusammen, dass in den letzten 4 Tagen des Versuches eben die Pflänzchen aus salpeterhaltiger Lösung, infolge einer zu starken Feuchtigkeitsabnahme unter der Glocke welk wurden. Auch in dem Versuche 2 musste irgend eine Bedingung für regere Eiweiss-synthese fehlen oder vielleicht war aus irgend welchen Gründen, z. B. wegen der hohen Temperatur, die Eiweisspaltung besonders stark, so dass sie auch im Lichte über die Eiweiss-synthese Oberhand gewann. Wie dem auch sei, so ist doch zu konstatieren, dass auch in diesen in gewissem Sinne misslungenen Versuchen der Einfluss des Lichtes auf die Eiweissbildung nicht ausblieb, da im Versuche 2 die Abnahme des Eiweisses bei den Dunkelpflanzen doch eine bedeutend stärkere war als bei den Lichtpflanzen.

Bei dem Versuch 6 waren keine Vergleichspflanzen im Dunkeln gezogen, vergleicht man aber die Resultate dieses Versuches mit denjenigen des Versuches 5, welcher im Dunkeln ausgeführt wurde, so sieht man, dass die Eiweissabnahme bei den Lichtpflanzen des

Versuches 6 nicht nur um die Hälfte kleiner war als bei den in stickstoffhaltiger, rein mineralischer Lösung gezogenen Pflanzen des Versuches 5, sondern auch kleiner als bei denjenigen, welche mit Zucker ernährt wurden. Der begünstigende Lichteinfluss auf Eiweissbildung hat sich also auch hier deutlich geäussert.

Was nun die Regeneration der Eiweissstoffe aus ihren Spaltungsprodukten anbetrifft, so beweisen die Kulturen in stickstofffreier Lösung im Dunkeln und im Lichte, aber unter Ausschluss der Assimilation, dass auch dieser Prozess durch die direkte Lichtwirkung begünstigt wird. Ganz besonders instructiv ist in dieser Hinsicht die Vergleichung der Analysenresultate der in salpeterfreier Lösung gezogenen Lichtpflanzen im Versuche 6 mit den mit Zucker ernährten Dunkelpflanzen des Versuches 5. Die Abnahme der Trockensubstanz betrug bei den ersten 21.1%, bei der letzten 20.8%, dieselbe war also bei den Licht- und Dunkelpflanzen gleich. Dagegen wurde pro 100 Samenstickstoff in den geernteten Pflanzen gefunden:

| | Eiweissstickstoff | Nichteiweissstickstoff |
|-------------------------------------|-------------------|------------------------|
| bei den Lichtpflanzen (Versuch 6.) | 69.0 | 27.1 |
| bei den Dunkelpflanzen (Versuch 5.) | 45.4 | 51.1 |

Bei den Dunkelpflanzen des Versuches 7 war der Eiweisszerfall ein noch grösserer wie im Versuch 5, denn die Pflänzchen enthielten pro 100 Samenstickstoff nur 39.7 Eiweissstickstoff und 55.2 Stickstoff des Nichteiweisses. Hier war aber auch die Abnahme der Trockensubstanz grösser (30.3%); der Vergleich mit den Lichtpflanzen des Versuches 6 ist also weniger entscheidend. Auch der Vergleich der Resultate des Versuches 4 (Tabelle XV) mit denen des Versuches 1 (Tabelle VII) und 2 (Tabelle X) lässt auf direkte Lichtwirkung auf Eiweissregeneration aus ihren Spaltungsprodukten mit Sicherheit schliessen.

Es muss aber bemerkt werden, dass die Resultate dieser unserer Versuche mit Kulturen in stickstofffreier Nährlösung in doppelter Weise interpretiert werden können. Die unmittelbar nachgewiesene Tatsache ist nur die, dass bei 3 wöchentlichen Gerste- und Weizenkeimlingen im Verhältnisse zu den Samen die Abnahme an Eiweissstoffen und die Zunahme an nichtproteinartigen Stickstoffverbindungen im Lichte auch unter Ausschluss der Assimilation

kleiner ist als im Dunkeln. Unsere Interpretation dieser Tatsache ist folgende: Das Licht begünstigt, auch unabhängig von der Assimilation, die Eiweissregeneration aus ihren Spaltungsprodukten natürlich unter der Bedingung, dass es der Pflanze an stickstofffreiem Material zu dieser Regeneration nicht fehlt. Es liegt aber auf der Hand, dass auch eine andere Interpretation der konstatierten Tatsache möglich wäre, nämlich die Annahme, dass das Licht die Prozesse der Eiweisspaltung verhindert. Eben durch eine solche Annahme versuchte Schulze¹⁾ meine in der Mitteilung von 1897 publizierten Resultate zu erklären: „Ich glaube aber,“ sagt Schulze, „dass die grosse Verschiedenheit, welche in Bezug auf den Eiweissgehalt zwischen den im Dunkeln und im Lichte in nitrathaltiger Nährstofflösung gezogenen Pflänzchen in den Versuchen Godlewskis sich zeigte, auf die von anderen und von mir nachgewiesene Tatsache zurückzuführen ist, dass oberirdische Teile lebenskräftiger Pflanzen einen starken Eiweissverlust erleiden, wenn man sie im Dunkeln vegetieren lässt. Es ist daher erklärlich, dass die im Dunkeln gezogenen Versuchspflanzen Godlewskis, auch wenn sie aus Nitraten Eiweissstoffe zu bilden vermochten, doch viel weniger Eiweiss enthielten als die im Licht erwachsenen Pflänzchen gleicher Art“.

Diesem Erklärungsversuche schliesst sich auch Emmerling an, indem er nach der Besprechung meiner Versuche sagt²⁾ „Mehr zutreffend scheint uns der Hinweis von E. Schulze zu sein, dass oberirdische Teile lebenskräftiger Pflanzen nach bekannten Erfahrungen einen Eiweissverlust erleiden, sobald man sie verdunkelt. Wenn man umgekehrt folgern darf, dass das Licht den entgegengesetzten Einfluss hat, also die Zersetzung verhindert oder verlangsamt, so kann man begreifen, dass es unter gewissen Umständen noch mehr zu leisten vermag als dies, nämlich die Eiweissbildung selbst zu fördern“.

Ich kann nur den letzten Satz Emmerlings, dass das Licht die Eiweissbildung zu fördern vermag, als richtig anerkennen, dagegen kann ich dem Erklärungsversuche meiner Resultate der bei-

¹⁾ „Über den Umsatz des Eiweissstickstoffs in der lebenden Pflanze“ Separat. Abd. aus Hoppe-Seylers Zeitschrift für physiologische Chemie B. 24. 1897. S. 93.

²⁾ Emmerling „Studien über die Eiweissbildung in den Pflanzen“. Die landwirtschaftlichen Versuchsstationen Bd. 54 1900, S. 228.

den um die Erforschung des Eiweissumsatzes so hoch verdienten Autoren nicht beipflichten. Meiner Meinung nach, ist nicht die Eiweisszersetzung im Lichte schwächer, sondern die Eiweissregeneration stärker als im Dunkeln. Wäre das erste der Fall, so wäre nicht einzusehen, warum sich diese schwächere Eiweisszersetzung im Lichte auch dann nicht äussern sollte, wenn in Ermangelung an stickstofffreiem Material die Eiweissregeneration unmöglich wird.

Nun haben aber die in meinem Laboratorium ausgeführten Untersuchungen von Frau Balicka dargethan, dass dies nicht der Fall ist¹⁾. Dieselbe kultivierte gelbe Lupine einerseits im Dunkeln, andererseits im Lichte, aber in einer kohlensäurefreien Atmosphäre und nach einer 19, 24 oder 30 Tage dauernden Vegetation unterzog sie die geernteten und getrockneten Pflanzen einer Analyse, in welcher Eiweissstickstoff, Asparaginstickstoff und Stickstoff sonstiger Verbindungen bestimmt wurde. Es zeigte sich, dass die Abnahme des Eiweissstickstoffs und die Zunahme des Nichtproteinstickstoffs bei den Lichtpflanzen eine ebenso grosse war wie bei den Dunkelpflanzen.

Damit wird sichergestellt, dass die Unterschiede, welche ich in dem Eiweissgehalt der im Lichte unter Ausschluss der Assimilation und im Dunkeln gezogenen Weizen- und Gerstekeimlinge gefunden habe, nicht auf eiweisszersetzungshemmende, sondern auf eiweissbildungfördernde Lichtwirkung zurückzuführen ist.

Demnach darf als festgestellt betrachtet werden, dass bei den höheren Pflanzen das Licht nicht nur auf indirekte Weise durch Vermittelung der Assimilation, sondern auch direkt sowohl auf die Verarbeitung der Nitrate im allgemeinen wie auf die Neubildung der Eiweissstoffe auf Kosten der anorganischen Stickstoffverbindungen wie endlich auch auf die Regeneration dieser Stoffe aus ihren Zersetzungsprodukten begünstigend einwirkt.

Nun muss aber die Frage aufgeworfen werden, wie man sich die Art und Weise dieser begünstigenden Lichtwirkung denken soll. Mir scheint, dass die einfachste, ja vielleicht die einzig mögliche

¹⁾ Balicka: „Recherches sur la décomposition et la régénération des corps albuminoïdes dans les plantes“. Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie. Classe des sc. math. et nat., 1903, S. 27—32.

Erklärung dieser Lichtwirkung in der Annahme liegt, welche schon Laurent und Marchal gemacht haben, dass nämlich das Licht die Energie für diese Prozesse liefert. Es sind dies ja durchwegs komplizierte synthetische Prozesse, zu deren Vollziehung Energie erforderlich ist. Diese Energie kann je nach den Umständen entweder in den chemischen Spannkräften oder in der Lichtstrahlung oder in beiden zugleich ihre Quelle haben. Eine ausgiebige Stickstoffassimilation aus salpetersauren Salzen sowie eine ausgiebige Eiweissbildung kann sich auch im Dunkeln vollziehen, aber nur dann, wenn reichliche Mengen von stickstofffreien plastischen Stoffen vorhanden und in Umwandlung begriffen sind. Die Stoffe liefern nicht nur das Material zur Eiweissbildung, sondern auch die für diesen Prozess nötige Energiequelle. Der ungemein starke Stoffwechsel und Verbrauch von grossen Mengen des Atmungsmaterials bei den Pilzen bietet eine hinreichende Erklärung dafür, dass bei den Pilzen die Stickstoffassimilation und Eiweiss-synthese vom Lichte vollständig unabhängig zu sein scheint.

Je spärlicher die chemische Energiequelle für Eiweiss-synthese fliesst, sei es aus Mangel an hinreichendem Atmungsmaterial sei es aus anderen Ursachen, desto mehr wird für diesen Prozess eine andere Energiequelle, und zwar die des Lichtes erforderlich. Da die Phanerogamen und überhaupt die grünen Pflanzen bei weitem nicht so viel Material verarbeiten wie die Pilze, so darf nicht befremden, dass sie auch in Bezug auf Stickstoffassimilation und Eiweissbildung sich etwas anders als die Pilze verhalten, weil nämlich bei diesen Pflanzen die in Rede stehenden Prozesse, um energisch vor sich zu gehen, der Wirkung des Lichtes als der Energiequelle bedürfen.

Da jedoch in Bezug auf die chemische Energiequelle zwischen den Pilzen und grünen Pflanzen kein absoluter, sondern nur ein quantitativer Unterschied besteht, so ist es verständlich, dass auch in Bezug auf die Befähigung, ohne Mithilfe des Lichtes Stickstoff aus Nitraten zu assimilieren und Eiweissstoffe auf Kosten anderer Stickstoffverbindungen aufzubauen, ein ähnlicher quantitativer Unterschied zwischen beiden Pflanzengruppen sich äussert.

Diese Prozesse im Dunkeln durchzuführen, sind auch die grünen Pflanzen, auch die Phanerogamen befähigt, aber in einer beschränkteren Masse als die Pilze; zu einer ausgiebigen Stickstoffassimilation und Eiweissbildung bedürfen diese Pflanzen der Mithilfe

des Lichtes und einer entsprechenden Einrichtung zur Ausnützung derselben, d. h. der Chloroplasten. Dementsprechend wird auch auf Grund verschiedener Tatsachen von den hervorragendsten Pflanzenphysiologen angenommen, dass die Eiweissstoffe hauptsächlich in den Blättern gebildet und von dort aus anderen Pflanzenteilen zugeführt werden. Auch hat Schimper gezeigt, dass in den panachyrten Blättern Nitrate leicht nur in grünen, nicht aber, wenigstens nicht so rasch in den weissen Teilen zersetzt werden, was für Beteiligung der Chlorophyllkörner an der Stickstoffassimilation aus Nitraten spricht. Da nach Laurent und Marchal die wichtigste Rolle bei Nitratverarbeitung und Eiweissbildung den brechbarsten, namentlich den ultravioletten Strahlen zukommt, so ist es nicht unwahrscheinlich, dass die überaus starke Absorption in der brechbareren Hälfte des Chlorophyllspektrums eben mit der Wirkung des Lichtes auf Eiweissbildung zusammenhängt.

Eine Stickstoffassimilation und Eiweissbildung in anderen, nicht chlorophyllhaltigen Organen und im Dunkeln ist bei den höheren Pflanzen nicht nur nicht ausgeschlossen, sondern findet unzweifelhaft statt, sie tritt aber im Verhältnisse zur Eiweissbildung in den Blättern mehr in den Hintergrund. Ausgiebiger findet die Eiweissbildung im Dunkeln nur dann statt, wenn besonders günstige Bedingungen für diesen Prozess und für die Gewinnung der chemischen Energie für ihn bestehen, z. B. wenn man durch künstliche Fütterung der Pflanze mit fertigen Kohlenhydraten den Stoffwechsel begünstigt oder wenn in gewissen Pflanzenteilen besonders grosse Mengen von leicht verwendbaren Kohlenhydraten und amidartigen Stickstoffverbindungen miteinander zusammentreffen und dabei die Lebensvorgänge sich energisch abspielen (Keimung der Zwiebeln und Knollen).

Eine bemerkenswerte Tatsache, welche zu Gunsten der eben entwickelten Anschauungsweise angeführt werden kann, ist z. B. die, dass durch Zerkleinerung der Zwiebeln und Knollen und überhaupt durch Verwundung solcher Pflanzenteile, in welchen Kohlenhydrate und amidartige Verbindungen reichlich nebeneinander auftreten, Atmung und Eiweissbildung gleichzeitig in hohem Grade beschleunigt werden. Wahrscheinlich ist diese Tatsache dahin zu deuten, dass durch den Wundreiz die Atmung beschleunigt wird, wodurch die Pflanze mehr Energie für die Eiweiss-synthese gewinnt.

Neulich hat Kovchhoff¹⁾ gezeigt, dass nicht nur die Eiweissbildung im allgemeinen, sondern auch die Bildung der Nucleoproteide durch den Wundreiz beschleunigt wird. Auch diese Erscheinung hängt möglicherweise mit der Beschleunigung der Atmung zusammen.

Andererseits möge hervorgehoben werden, dass es durchaus unberechtigt wäre, in Konsequenz obiger Anschauungsweise stets einen Parallellismus zwischen Eiweissbildung im Dunkeln und Atmung zu fordern, da die Ausgiebigkeit der für irgend einen Prozess erforderlichen Energiequelle noch keineswegs allein über die Ausgiebigkeit dieses Prozesses, für welchen noch verschiedene andere Bedingungen nötig sind, entscheiden kann. Ebenso wie die Intensität des Lichtes für sich allein nicht über die Ausgiebigkeit der Kohlensäureassimilation eines Blattes entscheidet, ebensowenig kann auch die Intensität der die chemische Energie für Eiweiss-synthese liefernden Atmung über die Ausgiebigkeit der Eiweiss-synthese entscheiden. Es kann sich keineswegs allein um Ausgiebigkeit der Energiequelle für diesen Prozess handeln, sondern auch um die Bedingungen, unter welchen diese Energie am leichtesten ihre Wirkung in gewünschter Richtung ausüben konnte.

Dabei muss beachtet werden, dass mit der Atmung auch Eiweiss-spaltung verknüpft zu sein scheint, und dass dieser letzte Prozess gleichzeitig mit der Eiweissbildung fortwährend vor sich geht, so dass wir als Endresultat immer nur die Differenz zwischen diesen beiden Prozessen beobachten können. Verschiedene Ursachen können bald den einen bald den anderen von diesen beiden Prozessen begünstigen oder verlangsamen, wodurch natürlich das Endresultat abgeändert wird.

Auch bei der Entwicklung der Samenkeimlinge ist anzunehmen, dass fast von Anfang an immer diese beiden Prozesse gleichzeitig verlaufen, dass nämlich aus den stickstoffhaltigen Spaltungsprodukten der Eiweissstoffe und den in den Stoffwechsel hineingezogenen stickstofffreien Reservestoffen fortwährend Eiweiss regeneriert wird, dass aber in der ersten Entwicklungsperiode der Keimpflanzen die Eiweiss-spaltung bei weitem die Eiweissregeneration übertrifft, was eben zur Folge hat, dass zeitweise die Menge der Ei-

¹⁾ Kovchhoff „Über den Einfluss der Verwundungen auf Bildung von Nucleoproteiden“. Berichte der deutsch. bot. Gesell. B. XXI, 1903, S. 165.

weissstoffe beständig ab, die Menge der stickstoffhaltigen Spaltungsprodukte des Eiweisses konstant zunimmt. Bei der Weiterentwicklung hängt die Gestaltung des Endresultates beider Prozesse davon ab, ob diese Weiterentwicklung im Dunkeln oder im Lichte vor sich geht. Entwickelt sich die Keimpflanze im Dunkeln, so ist die Eiweissregeneration nur auf das stickstofffreie Material der Reservestoffe und auf die durch die Atmung gelieferte Energie angewiesen. Es ist nicht uninteressant, dass Prianišchnikow¹⁾ gezeigt hat, dass das Maximum des Eiweisspaltungsprozesses bei der Entwicklung der Keimpflanzen in der Dunkelheit um mehrere Tage früher eintritt als das Maximum der Atmung. Es wäre möglich, dass die Ursache dieser Erscheinung darin zu suchen sei, dass der Pflanze erst dann eine hinreichende Energiequelle für die Eiweiss-synthese zu Gebote steht, wenn die Atmung eine gewisse Grösse erreicht hat, und deshalb vollzieht sich die Eiweissregeneration in diesen weiteren Entwicklungsstadien zur Zeit des Maximums der Atmung energischer als es früher bei noch schwächerer Atmung der Fall war.

Das Andauern und der Grad der Eiweissregeneration im Dunkeln muss natürlich von der Menge der stickstofffreien Reservestoffe abhängen, denn davon hängt sowohl das Baumaterial wie auch die Energiequelle für die Eiweiss-synthese ab. Deswegen ist es leicht begreiflich, weshalb für eine bestimmte Menge der Eiweissstoffe der Samen in den etiolierten Pflanzen, deren Samen an stickstofffreien Reservestoffen arm sind (Papilionaceae und vor allem *Lupinus*), mehr amidartige Stickstoffverbindungen und weniger Eiweissstoffe zu finden sind als in den etiolierten Pflanzen aus beispielweise sehr stärkereichen Samen (Cerealien). Nicht die Eiweisspaltung ist bei den ersten grösser, sondern die Eiweissregeneration kleiner als bei den letzten.

Wird nun die Keimpflanze zur rechten Zeit dem Lichte ausgesetzt, so wird dadurch der Eiweisspaltungsprozess gar nicht gehindert, sondern die Eiweissregeneration wird in dreifacher Weise gefördert.

1. wird durch Kohlensäureassimilation neues stickstofffreies Baumaterial für die Eiweiss-synthese geschaffen;

¹⁾ Prianišchnikow „Eiweisszerfall und Atmung in ihren gegenseitigen Verhältnissen“ Land. Versuchst., Bd. 52, 1899, S. 135.

2. wird durch dieselbe Assimilation neues Atmungsmaterial und dadurch eine neue Quelle der chemischen Energie zur Eiweiss-synthese geliefert;

3. wird in der Lichtstrahlung eine neue unmittelbare Energiequelle für Eiweiss-synthese gewonnen.

Handelt es sich nun um Keimpflanzen aus Samen, welche sehr reich an Proteinstoffen und arm an stickstoffreiem Material sind, wie z. B. Lupinensamen, so kommt vor allem der erste Punkt, d. h. die Beschaffung eines neuen stickstoffreien Baumaterials in Betracht, fehlt dieses Baumaterial, so helfen der Pflanze auch die reichsten Energiequellen für Eiweissregeneration gar nichts. Demzufolge wirkt das Licht auf die Regeneration der Eiweissstoffe bei den Lupinenkeimlingen nur in Anwesenheit der Kohlensäure, in einer kohlenstofffreien Luft wird sie nicht grösser als in tiefster Finsternis, so dass Lupinepflanzen, in einer solchen Luft am Lichte gezogen, eine eben so starke Abnahme der Proteinstoffe und eine eben so starke Zunahme an amidartigen Stickstoffverbindungen und sonstigen Produkten der Eiweiss-spaltung zeigen wie die Pflanzen, welche sich in der gleichen Zeit im Dunkeln entwickelten (Versuch von Frau Balicka).

Anders verhält sich die Sache, wenn es sich um Keimlinge aus an stickstoffreien Reservestoffen reichen Samen handelt. Hier fehlt es lange Zeit hindurch an stickstoffreiem Baumaterial für Eiweiss-synthese nicht, aber die durch die Atmung der Pflanzen gelieferte Energie reicht nicht hin, um dieses Baumaterial für Eiweissregeneration vollkommen auszunutzen, wird nun die Pflanze auch bei Fernhaltung der Kohlensäure dem Lichte ausgesetzt, so kommt eben der dritte Punkt der drei Wirkungsweisen des Lichtes in Betracht, d. h. es wird vom Lichte Energie geliefert, welche eine bessere Ausnutzung des aus Reservestoffen stammenden Baumaterials zur Eiweissregeneration gestattet. Dementsprechend zeigten unsere Versuche mit in stickstoffreien Nährlösungen gezogenen Weizen- und Gerstekeimlingen, dass auch in kohlenstofffreier Atmosphäre bei vollständigem Ausschlusse der Assimilation die Eiweissregeneration durch das Licht begünstigt wurde.

Alles, was wir hier in Bezug auf Eiweissregeneration aus den Spaltungsprodukten der Proteinstoffe gesagt haben, bezieht sich natürlich auch auf die Eiweiss-synthese aus denjenigen organischen Stickstoffverbindungen, welche unmittelbar aus den anorganischen,

also aus Nitraten und Ammoniaksalzen entstehen, nur ist hier die Energie nicht nur zur Eiweissynthese, sondern auch zu dieser ersten Umbildung des anorganischen Stickstoffs in erste organische Stickstoffverbindungen erforderlich. Wie schon gesagt wurde, muss angenommen werden, dass auch hier wie bei der Eiweissregeneration diese Energie teils durch den chemischen Stoffwechsel teils durch das Licht geliefert wird.

Diese Annahme, dass ein und derselbe synthetische Prozess, nämlich die Eiweissbildung, unter Verwendung bald der chemischen bald der Lichtenergie sich vollziehen soll, darf insöfern nicht befremden, als es doch bewiesen ist, dass das Gleiche auch denjenigen synthetischen Prozess betrifft, welcher von allen sich in Organismen abspielenden der wichtigste ist, nämlich die Kohlenstoffassimilation aus Kohlensäure und die Bildung der ersten organischen Substanz. Die grünen Pflanzen vermögen bekanntlich Kohlensäure nur im Lichte zu zersetzen, für die synthetische Bildung der organischen Substanz verwenden sie also Lichtenergie, aber die salpeterbildenden Bakterien *Nitrosomonas* wie auch Nitrobakter, welche sich auch mit Kohlensäure ernähren, vermögen aus derselben in tiefster Finsternis organische Substanz herzustellen, sie verwenden also zur Zersetzung der Kohlensäure und zur Bildung der organischen Substanz nicht Lichtenergie, sondern chemische Energie. Diese letzte schöpfen sie aus der ihr eigenthümlichen Atmungsweise, d. h. aus der Oxydation des Ammoniaks zu salpetriger Säure resp. der salpetrigen Säure zu Salpetersäure. Es ist kaum zu zweifeln, dass das Gleiche sich auch für Schwefelbakterien und überhaupt für alle Organismen ergeben wird, welche ihr Atmungsmaterial von aussen in der Form von oxydierbaren anorganischen Stoffen schöpfen. Ich halte es durchaus nicht für unwahrscheinlich, dass auch die Pilze und auch die höheren Pflanzen gelegentlich im Dunkeln, unter Verwendung der chemischen Energie, welche sie durch Atmung gewinnen, Kohlensäure zersetzen und daraus organische Substanz aufbauen, es liegt aber auf der Hand, dass sich dieser Prozess hier nie in sichtbarer Weise durch Trockensubstanz-Vergrößerung äussern kann, weil die Menge der auf diese Weise gebildeten organischen Substanz immer nur einen Bruchteil derjenigen sein kann, welche für die Gewinnung der für diese Bildung nötigen Energie veratmet werden muss.

Endlich möge noch das Auftreten verschiedener nichtprotein-

artiger Stickstoffverbindungen in den Weizen- und Gerstekeimlingen kurz besprochen werden.

Durch Bestimmung verschiedener Formen dieser Verbindungen in den Pflänzchen, welche einerseits in stickstofffreier, andererseits in salpeterhaltiger Lösung gezogen wurden, wollte ich versuchen, ob es nicht gelingen möchte, einige Anhaltspunkte über die Natur der intermediären Stickstoffverbindungen bei der Eiweissynthese auf Kosten der Nitrate zu gewinnen. Sollte es sich herausstellen, dass einzelne Gruppen der Stickstoffverbindungen in den in salpeterhaltiger Lösung gezogenen Pflänzchen stärker vertreten sind als in den, welche in stickstofffreier Nährlösung vegetierten, so dürfte man vermuten, dass die in den mit Salpeter ernährten Pflänzchen vorherrschenden Stickstoffverbindungen als intermediäre Produkte der Eiweissbildung anzusehen sind. Indessen hat sich, wie wir bald sehen werden, diese Erwartung nicht erfüllt.

Um uns die Orientierung über die Verhältnisse, in welchen verschiedene, nichtproteinartige Stickstoffverbindungen in den Weizen- und Gerstekeimlingen auftreten, zu erleichtern, habe ich auf Grund der vorstehenden Analysen berechnet, welche Stickstoffmenge von 100 des Gesamtstickstoffs des Nichtproteins auf einzelne Gruppen verschiedener Stickstoffverbindungen entfallen.

Die Zahlen aus dieser Berechnung sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Siehe die TABELLE auf Seite 375.

Es ist nicht möglich, auf Grund dieser Zahlen irgend einen charakteristischen Unterschied zwischen den Eiweisspaltungsprodukten und den intermediären Produkten der Eiweissynthese auf Kosten der Nitrate zu präzisieren. Es besteht z. B. im Versuche I in der Verteilung des Stickstoffes auf verschiedene Gruppen der nichteiweissartigen Verbindungen kein Unterschied zwischen den Pflanzen aus stickstofffreier und denen aus nitrathaltiger Nährlösung.

Die erste Stelle unter den nichtproteinartigen Stickstoffverbindungen, mögen die Pflänzchen im Dunkeln oder im Lichte in salpeterhaltiger oder in salpeterfreier Lösung gezogen werden, nehmen immer die Aminosäureamide (Asparagin resp. auch Glutamin) auf. Ihr Stickstoff macht bei den Weizenkeimlingen nahezu die Hälfte des ganzen Nichtproteinstickstoffs aus.

Aminosäuren sind in wechselnder, aber ziemlich geringer Menge

| Von 100 Stickstoff der nichtpro- teinartigen Verbindungen entfällt: | bei Weizenkeimlingen | | | | | | | | | |
|---|--|--|------|--------|--------|--|---------------------------|---|--------|--------|
| | kultiviert im Dunkeln | | | | | kultiviert im Lichte in kohlenäure- freier Luft | | | | |
| | in stickstoffhaltiger Nährlösung | | | | | in stickstoffhaltiger Nährlösung | | | | |
| | V. 1 | V. 1 | V. 2 | V. 2 a | V. 2 b | V. 2 a | V. 2 b | V. 4 a | V. 4 b | V. 4 b |
| auf Ammoniak | 7.2 | 8.2 | 6.1 | 8.5 | 7.4 | 7.8 | | | | |
| " Aminosäureamide (Asparagin u. Glutamin) | 41.6 | 45.4 | 42.2 | 42.4 | 42.9 | 37.4 | | | | |
| " Aminosäuren | 7.8 | 7.9 | 19.2 | 21.6 | 14.9 | 15.8 | | | | |
| " Peptone u. organische Basen . | 5.3 | Spuren | 31.9 | 9.4 | 10.7 | 2.6 | | | | |
| " unbestimmte Verbindungen . | 38.0 | 38.5 | | 18.2 | 23.7 | 32.3 | | | | |
| | bei Gerstekeimlingen | | | | | | | | | |
| | kultiviert im Dunkeln | | | | | kultiviert im Lichte V. 6 | | | | |
| | in stickstoff- freier Nährlösung V. 7 | in stickstoff- halt. Nährlö- sung 1 1/2 Tage mit Zucker V. 5 | | | | Lösung stickstofffrei gewöhnliche Luft | kohlenäure- freie Luft | Lösung stick- stoffhaltig kohlenäure- freie Luft | | |
| auf Ammoniak | 6.3 | 9.9 | 5.4 | 12.2 | 6.6 | | | | | |
| " Aminosäureamiden | 51.2 | 53.2 | 34.0 | 62.7 | 56.5 | | | | | |
| " Aminosäuren | 5.8 | 14.1 | 15.5 | 13.3 | 15.6 | | | | | |
| " Peptone u. organische Basen . | 11.3 | 3.6 | 19.9 | 0.0 | 11.0 | | | | | |
| " unbestimmte Verbindungen . . | 25.4 | 18.5 | 25.6 | 11.8 | 10.2 | | | | | |

vertreten, manchmal entspricht der Aminosäurestickstoff nur der Menge des Ammoniakstickstoffs (1, 2), in dem extremsten Falle (Versuch 2, wo die Eiweisspaltung eine sehr starke war) betrug er 21% des ganzen Nichteiweissstickstoffs. Ammoniak war immer aber

nur spärlich vorhanden. Sein Stickstoff schwankte zwischen 5 und 12% des ganzen Nichteisstickstoffs. Ob dieses Ammoniak oder wenigstens die ganze Menge desselben in den Pflanzen präformiert war, darf angezweifelt werden; es ist sehr wahrscheinlich, dass wenigstens ein Teil desselben durch Inversion eines Teils der Aminosäureamide, sei es beim Trocknen der Pflänzchen, sei es bei der Destillation des Auszuges mit MgO (trotz der niedrigen Temperatur, bei welcher destilliert wurde) entstanden ist. Wäre es wirklich so, so würde die Menge der Aminosäureamide in den Keimpflänzchen tatsächlich noch grösser, die Menge der Aminosäuren noch kleiner, als in unseren Tabellen angegeben ist, und in Fällen, wo die Menge des Aminosäurestickstoffs nur derjenigen des Ammoniakstickstoffs entspricht, würden die Aminosäuren eigentlich gänzlich fehlen.

Da es mir wahrscheinlich erscheint, dass das gefundene Ammoniak wenigstens in seinem grössten Teil wirklich von der Inversion der Aminosäureamide herrührte und da bei einigen Analysen Ammoniak leider nicht bestimmt wurde, weshalb die betreffenden Analysen für die Zusammenstellung der Tabelle XXIII nicht benutzt werden konnten, so habe ich noch folgende Tabelle (XXIV) unter der Annahme zusammengestellt, dass sämtliches Ammoniak aus der Inversion der Aminosäureamide stammte. In dieser Tabelle konnten also auch die Resultate dieser Versuche aufgenommen werden, in welchen Ammoniak nicht besonders bestimmt wurde. Wo diese Bestimmung stattfand, wurde der Ammoniakstickstoff zu dem abspaltbaren Amidstickstoff addiert und diese Zahl verdoppelt, indem damit der Stickstoff der Aminosäureamide ausgedrückt wurde. Durch Subtraktion dieser Zahl von der Menge des durch N_2O_3 ausgetriebenen Aminosäurestickstoffs erhielt man die Menge des Stickstoffs der Aminosäuren.

Die so erhaltenen Zahlen, auf 100 des jeweiligen Gesamtstickstoffs der Nichtproteinverbindungen umgerechnet, sind in folgender Tabelle wiedergegeben.

Siehe TABELLE, Seite 377.

Ist die Annahme, unter welcher die Zahlen dieser Tabelle berechnet wurden, richtig, so beträgt der Stickstoff der Aminosäureamide bei den Weizenpflanzen mehr als die Hälfte, bei den Gerstekeimlingen meistens ungefähr $\frac{3}{4}$ des ganzen Stickstoffs der Nichtproteinverbindungen. Aminosäuren sollen nach diesen Zahlen

TABELLE XXIV.

| Von 100 Stickstoff der nichtweisartigen Verbindungen entfällt: | in Weizenkeimlingen | | | | | | | | | |
|--|---|---------------------------------|--|-------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------|--------|----------------------------------|-------|-------|
| | Pflänzchen im Dunkeln kultiviert | | | | | Pflänzchen im Lichte kultiviert | | | | |
| | in salpeter- freier Lösung | | in salpeterhaltiger Lösung | | | kohlensäurefreie Luft | | salpeterhaltige Nährlösung | | |
| | V. 1 | V. 1 | V. 2 | V. 2 a | V. 2 b | V. 4 a | V. 4 b | | | |
| auf Amidosäureamide | 56.0 | 61.8 | 54.4 | 59.4 | 58.5 | 61.0 | 70.4 | | | |
| " Aminosäuren | 0.7 | 0.0 | 13.7 | 13.1 | 7.1 | 4.0 | | | | |
| " Peptone u. organische Basen | 5.3 | Spuren | 31.9 | 9.4 | 10.7 | 2.6 | 29.6 | | | |
| " unbestimmte Verbindungen | 38.0 | 38.5 | | 18.2 | 23.7 | 32.3 | | | | |
| | in Gerstekeimlingen | | | | | | | | | |
| | Pflänzchen im Dunkeln | | | | | Pflänzchen im Lichte | | | | |
| | in stickstofffreier Lösung | | in stickstoffhaltiger Lösung | | | salpeterfreie Lösung | | salpeter- haltige Nährlös. | | |
| | ganze Zeitlang rein mineralische Nährlösung | 3 Tage mit Zucker ernährt | ganze Zeit- lang rein mineralische Nährlösung | 1 1/2 Tage mit Zucker ernährt | kohlen- säurefreie Luft | kohlen- säurehalti- ge Luft | VI. 6 | VI. 6 | VI. 6 | VI. 6 |
| | V. 7 | V. 5 | V. 5 | V. 5 | VI. 6 | VI. 6 | VI. 6 | VI. 6 | VI. 6 | VI. 6 |
| auf Aminosäureamide | 63.8 | 75.7 | 62.0 | 73.7 | 87.1 | 44.4 | 69.7 | | | |
| " Aminosäuren | 0.0 | 15.9 | 6.4 | 4.2 | 1.1 | 10.1 | 9.0 | | | |
| " Peptone u. organische Basen | 11.3 | 8.4 | 31.6 | 3.6 | 0.0 | 19.9 | 11.0 | | | |
| " unbestimmte Verbindungen | 25.4 | | | 24.1 | 18.5 | 11.8 | 25.6 | 10.2 | | |

manchmal gänzlich fehlen, etwas reichlicher waren sie nur dann in den Keimpflanzen vertreten, wenn in denselben der Eiweisszerfall im Verhältnisse zur Eiweissbildung besonders stark war (Versuch 2 mit Weizen und 5 mit Gerste).

Die Ernährung mit Zucker der in stickstofffreier Lösung im Versuche 5 im Dunkeln vegetierenden Gerstepflänzchen hat zwar keine Vermehrung der Eiweissbildung, doch aber die Umwandlung der Aminosäuren in andere nicht näher bestimmte Stickstoffverbindungen zur Folge gehabt. (Da die Phosphorwolframfällung bei der Analyse dieser Pflänzchen nicht vorgenommen wurde, so bleibt unentschieden, ob diese Umwandlungsprodukte der Aminosäuren nicht Peptone waren). In stickstoffhaltiger Nährlösung hat die Ernährung der Keimlinge mit Zucker deutlich die Eiweissbildung begünstigt.

Die mit Phosphorwolframsäure fällbaren Stickstoffverbindungen waren in sehr wechselnden, aber immer nur kleinen Mengen vertreten. Nur in den Gerstepflänzchen, welche in stickstofffreier Lösung im Lichte unter Zutritt von CO_2 (Versuch 6) kultiviert wurden, erreicht die Menge des mit Phosphorwolframsäure fällbaren Nichteiweissstickstoffs die Höhe von nahezu 20% des Gesamtnichteiweissstickstoffs.

Summiert man die Stickstoffmengen der Aminosäureamide, der Aminosäuren, des Ammoniaks und der mit Phosphorwolframsäure fällbaren Verbindungen und vergleicht diese Summe mit dem Gesamtstickstoff der Nichteiweissverbindungen, so bleibt noch ein manchmal ziemlich ansehnlicher Rest des Stickstoffs übrig. Es folgt daraus, dass in den Keimpflanzen, ausser den aufgezählten Gruppen der Stickstoffverbindungen, noch andere zu keiner dieser Gruppen gehörenden Stickstoffverbindungen vorhanden sind. Was das für Verbindungen sind, bleibt zur Zeit unbekannt; ihre Menge ist schwankend, in den Weizenkeimlingen, wo sie grösser ist als in den Gerstekeimlingen, erreicht die Stickstoffmenge dieser unbestimmten Verbindungen nahezu 40% des Gesamtstickstoffs des mehr Nichteiweisses. Im Dunkeln wachsende Keimpflanzen scheinen mehr von diesen Stickstoffverbindungen zu enthalten als im Lichte vegetierende.

Zusammenfassung der Resultate.

Zum Schlusse wollen wir noch die Resultate der vorliegenden Arbeit in folgenden kurzen Sätzen zusammenfassen.

1. Nicht nur die Pilze, sondern auch die höheren Pflanzen vermögen im Dunkeln den Stickstoff aus salpetersauren Salzen zu

assimilieren und eine Eiweissynthese sowohl auf Kosten dieses neu assimilierten Stickstoffs wie auf Kosten der Spaltungsprodukte der Proteinstoffe herbeizuführen.

2. Während bei den Pilzen die Stickstoffassimilation und Eiweissbildung vom Lichte vollkommen unabhängig ist, werden diese Prozesse bei den höheren Pflanzen sehr stark durch das Licht beeinflusst und eine dauernde und ausgiebige Stickstoffassimilation und Eiweissbildung findet bei den höheren Pflanzen nur bei Lichtwirkung statt.

3. Die begünstigende Lichtwirkung auf die Eiweissynthese bezieht sich sowohl auf die Neubildung dieser Stoffe auf Kosten der salpetersauren Salze wie auch auf die Regeneration der Eiweissstoffe aus ihren Spaltungsprodukten.

4. Das Licht begünstigt die Stickstoffassimilation und Eiweissynthese bei den höheren Pflanzen einerseits indirekt, indem sie die Kohlensäureassimilation durch die Pflanze bewirkt und dadurch das stickstoffhaltige Baumaterial für die Eiweissynthese schafft, anderseits direkt, indem sie der Pflanze die für das Zustandekommen der Stickstoffassimilation und der Eiweissynthese nötige Energie liefert.

5. Sofern die Stickstoffassimilation und die Eiweissynthese bez. Eiweissregeneration ohne Mitwirkung des Lichtes eintritt, wird die für diesen Prozess nötige Energie durch die bei dem Stoffwechsel resp. bei der Atmung frei werdenden Kräfte geliefert.

6. Die Unabhängigkeit der Stickstoffassimilation und der Eiweissynthese vom Lichte bei den Pilzen erklärt sich durch den relativ starken Stoffwechsel bei dieser Pflanzengruppe, wodurch die Pilze mehr als die höheren Pflanzen chemische Energie für die Eiweissynthese zur Verfügung haben.

7. Bei den höheren Pflanzen findet eine ausgiebigere Eiweissynthese im Dunkeln nur dann statt, wenn den betreffenden Zellen stickstofffreie, im Stoffwechsel begriffene, plastische Stoffe reichlich zu Gebote stehen, d. h. wenn die Lebensbedingungen der eiweissbildenden Zellen sich denjenigen der Pilze nähern.

8. Unter den nichteiweissartigen Stickstoffverbindungen, welche in den dreiwöchentlichen Weizen- und Gerstekeimlingen auftreten und teils durch Eiweisspaltung teils als intermediäre Produkte der Eiweissynthese auf Kosten der anorganischen Stickstoffverbindungen entstehen, sind Aminosäureamide (in erster Linie Asparagin) am reichlichsten vertreten; etwa die Hälfte des gesamten Stickstoffs

des Nichteiwisses ist in der Form der Aminosäureamide vorhanden. Die Aminosäuren und die mit Phosphorwolframsäure fällbaren Stickstoffverbindungen sind in wechselnder und in der Regel geringer Menge vorhanden. Ausser diesen drei Gruppen der nichteiweissartigen Stickstoffverbindungen finden sich in den Keimpflanzen in wechselnder, ziemlich bedeutender Menge noch andere zu keiner dieser Gruppen gehörende Stickstoffverbindungen.

9. Übereinstimmend mit den noch nicht publizierten Beobachtungen Kosińskis zeigte es sich auch bei den Weizen- und Gerstekeimlingen, dass bei Stickstoffmangel die Wurzelbildung im Verhältnisse zur Sprossbildung bevorzugt wird, so dass man den Eindruck bekommt, als ob die Pflanze dahin strebe, durch stärkere Wurzelentwicklung den Stickstoff des Substrates besser auszunutzen.

-
28. M. ST. ZAREMBA m. c. O pewnym uogólnieniu klasycznej teoryi tarcia wewnętrznego. (*Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité.*)

I. Introduction.

On peut chercher à rendre compte des phénomènes dus à la viscosité des fluides en admettant que la distribution des tensions intérieures dans un fluide en mouvement soit, à chaque instant, identique à celle qui régnerait dans un corps fictif parfaitement élastique et isotrope lequel aurait éprouvé une certaine déformation. C'est précisément sur cette hypothèse que M. Natanson¹⁾, qui en attribue d'ailleurs la première idée à Poisson et à Maxwell, a tenté de fonder une théorie mathématique de la viscosité. Malheureusement les équations définitives qu'il propose et sur lesquelles reposent tous ses travaux ultérieurs doivent être rejetées²⁾ comme contraires à l'un des principes fondamentaux de la mécanique. M. Natanson obtient, il est vrai, ces équations erronées en négligeant certains termes, qu'il n'était pas permis de négliger, dans d'autres équations qui n'ont pas le défaut précédent. Mais, ces équations là n'ont pas la géné-

¹⁾ Natanson, Sur les lois de la viscosité. Bulletin de l'Académie de Cracovie 1901.

²⁾ Zarembo. Remarques sur les travaux de M. Natanson relatifs à la théorie de la viscosité. Bulletin de l'Académie de Cracovie 1903.

ralité voulue: pour les obtenir, il faut faire une hypothèse particulière que rien ne justifie à priori; d'ailleurs la déduction qu'en donne M. Natanson est tout-à-fait incorrecte.

L'hypothèse que M. Natanson a prise pour base de sa théorie n'étant pas, selon nous, dénuée de vraisemblance, il nous a paru intéressant de la préciser et de la compléter, sans cependant en restreindre arbitrairement la généralité, de façon qu'il soit possible d'en déduire les équations du mouvement d'un fluide visqueux, d'établir ensuite ces équations au moyen d'une analyse rigoureuse et de faire ressortir enfin les défauts de l'analyse de M. Natanson. Tel est précisément l'objet de ce travail. Le chapitre suivant contient la théorie que nous proposons et le dernier chapitre l'examen de celle de M. Natanson.

II. Equations du mouvement d'un fluide visqueux.

Nr. 2. Commençons par rappeler certains faits bien connus dans la théorie de la déformation d'un milieu continu¹⁾, faits qui joueront un rôle important dans les considérations qui vont suivre. L'espace étant rapporté à un système de coordonnées rectangulaires, désignons par a, b, c les coordonnées d'un élément matériel m , d'un milieu continu (M) à une époque t_0 et par

$$\left. \begin{aligned} x &= a + \xi \\ y &= b + \eta \\ z &= c + \zeta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

les coordonnées du même élément matériel m du milieu (M) à une autre époque t . Les époques t_0 et t étant données, les quantités ξ, η et ζ seront évidemment des fonctions déterminées des variables a, b et c . Supposons que les dérivées partielles du premier ordre des fonctions ξ, η et ζ des variables a, b, c soient des fonctions continues de ces variables et envisageons trois éléments matériels m, m' et m'' du milieu (M). Soient A_0, A'_0 et A''_0 les positions de ces éléments matériels à l'époque t_0 et A, A', A'' leurs positions à l'époque t . Je suppose que les distances des points A'_0 et A''_0 au point A_0 soient infiniment petites et je désigne par l_1, l_2 et l_3 les cosinus-directeurs du vecteur $\overline{A'_0 A''_0}$. On aura, à des infiniment petits d'ordre supérieur près:

¹⁾ Voir par exemple Appell. Cours de Mécanique T. III.

$$\overline{A' A''}^2 = \{ (1 + 2 \varepsilon_1) l_1^2 + (1 + 2 \varepsilon_2) l_2^2 + (1 + 2 \varepsilon_3) l_3^2 + \\ + 2 \gamma_1 l_2 l_3 + 2 \gamma_2 l_3 l_1 + 2 \gamma_3 l_1 l_2 \} \overline{A_0' A_0''}^2$$

en posant:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial a} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial a} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial a} \right)^2 \right\} \\ \varepsilon_2 = \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial b} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial b} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial b} \right)^2 \right\} \\ \varepsilon_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial c} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial c} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial c} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial c} \right)^2 \right\} \end{array} \right.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial b} + \frac{\partial \eta}{\partial c} + \frac{\partial \xi}{\partial b} \frac{\partial \xi}{\partial c} + \frac{\partial \eta}{\partial b} \frac{\partial \eta}{\partial c} + \frac{\partial \zeta}{\partial b} \frac{\partial \zeta}{\partial c} \\ \gamma_2 = \frac{\partial \xi}{\partial c} + \frac{\partial \zeta}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial c} \frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial c} \frac{\partial \eta}{\partial a} + \frac{\partial \zeta}{\partial c} \frac{\partial \zeta}{\partial a} \\ \gamma_3 = \frac{\partial \eta}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial b} + \frac{\partial \xi}{\partial a} \frac{\partial \xi}{\partial b} + \frac{\partial \eta}{\partial a} \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial a} \frac{\partial \zeta}{\partial b} \end{array} \right.$$

où a , b et c représentent les coordonnées du point A_0 . Nous dirons que les six fonctions

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$$

sont les composantes de la déformation éprouvée par le milieu (M) dans le voisinage de l'élément matériel m pendant l'espace de temps de t_0 à t .

Lorsque les dérivées partielles du premier ordre des fonctions ξ , η et ζ sont assez petites pour que l'on puisse négliger les termes du second degré par rapport à ces dérivées partielles, les formules (2) et (3) peuvent être remplacées par les formules plus simples que voici:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{\partial \xi}{\partial a}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial \eta}{\partial b}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial c} \\ \gamma_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial b} + \frac{\partial \eta}{\partial c} \\ \gamma_2 = \frac{\partial \xi}{\partial c} + \frac{\partial \zeta}{\partial a} \\ \gamma_3 = \frac{\partial \eta}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial b} \end{array} \right.$$

Supposons que le milieu continu M ait éprouvé dans deux espaces de temps consécutifs, de t' à t'' et de t'' à t''' , deux déformations consécutives. Soient

$$\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3', \gamma_1', \gamma_2', \gamma_3'$$

les composantes de la déformation qui s'est produite de l'époque t' à l'époque t'' et

$$\varepsilon_1'', \varepsilon_2'', \varepsilon_3'', \gamma_1'', \gamma_2'', \gamma_3''$$

celles de la déformation que le milieu a éprouvée dans l'espace de temps de t'' à t''' . Si les conditions voulues pour que les formules (4) soient applicables sont remplies pour chacune des deux déformations précédentes, les composantes de la déformation que le milieu a éprouvée dans l'espace de temps de t' à t''' seront représentées approximativement par les expressions:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1' + \varepsilon_1'', \varepsilon_2' + \varepsilon_2'', \varepsilon_3' + \varepsilon_3'' \\ \gamma_1' + \gamma_1'', \gamma_2' + \gamma_2'', \gamma_3' + \gamma_3'' \end{array} \right\}$$

Nr. 3. L'hypothèse dont nous nous proposons de poursuivre les conséquences mathématiques, hypothèse énoncée au début de l'Introduction, exige que nous distinguions en un instant quelconque t deux espèces de déformation dans le sein du fluide: 1^o celle que le fluide a réellement subie depuis une certaine époque fixe, soit t_0 , jusqu'à l'époque considérée t . Nous appellerons cette déformation, la déformation géométrique du fluide et nous en représenterons les composantes par les symboles:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \quad (5)$$

2^o celle du corps fictif parfaitement élastique que nous substituons par la pensée, à chaque instant, au fluide réel et dont l'état de tension intérieure est identique à celui qui, à l'instant considéré, règne dans le sein du fluide. Nous désignerons les composantes de cette déformation par

$$\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^* \quad (6)$$

et nous dirons qu'elles représentent les composantes de la déformation élastique du fluide ou celles de la déformation du corps fictif.

Nous admettrons que la déformation élastique du fluide est telle qu'il soit permis d'en représenter les composantes par des formules

de la forme (4). En d'autres termes, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées d'un élément matériel du corps fictif dans l'état de déformation qu'il a à l'époque t et par x^*, y^*, z^* les coordonnées du même élément matériel du corps fictif à l'état naturel et dans la position à partir de laquelle on suppose qu'il a subi la déformation, on aura approximativement

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1^* = \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*}, \quad \varepsilon_2^* = \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*}, \quad \varepsilon_3^* = \frac{\partial \zeta^*}{\partial z^*} \\ \gamma_1^* = \frac{\partial \eta^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \zeta^*}{\partial y^*} \\ \gamma_2^* = \frac{\partial \zeta^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \xi^*}{\partial z^*} \\ \gamma_3^* = \frac{\partial \xi^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*}, \end{array} \right.$$

en posant:

$$x = x^* + \xi^*, \quad y = y^* + \eta^*, \quad z = z^* + \zeta^*$$

L'hypothèse précédente est indispensable pour que l'on soit en droit de faire usage des formules de la théorie de l'élasticité.

L'état de tension intérieure qui règne en un point x, y, z du fluide est caractérisé comme on le sait par six quantités que l'on désigne ordinairement par

$$p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} \\ p_{yz} = p_{zy}, \quad p_{zx} = p_{xz}, \quad p_{xy} = p_{yx}.$$

L'état de tension intérieure du fluide étant à l'époque t identique à celui d'un corps fictif parfaitement élastique et isotrope qui aurait éprouvé une déformation caractérisée par les quantités (6), on aura

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} = -\lambda \theta^* - 2\mu \varepsilon_1^* \\ p_{yy} = -\lambda \theta^* - 2\mu \varepsilon_2^* \\ p_{zz} = -\lambda \theta^* - 2\mu \varepsilon_3^* \\ p_{yz} = -\mu \gamma_1^* \\ p_{zx} = -\mu \gamma_2^* \\ p_{xy} = -\mu \gamma_3^*, \end{array} \right.$$

en posant

$$(9) \quad \theta^* = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*$$

et en désignant par λ et μ les deux coefficients qui caractérisent les propriétés élastiques du corps fictif. Ces coefficients doivent être regardés comme des fonctions de la température et de la densité du fluide au point et à l'époque auxquels on rapporte les équations (8), mais, à titre de première approximation, il faudra regarder ces quantités comme constantes.

On pourrait nous objecter qu'en écrivant les formules (8), nous avons supposé implicitement que la pression constante p_0 qui règne sur la frontière de la partie de l'univers accessible à nos expériences est nulle et que nous aurions dû remplacer p_{xx} , p_{yy} et p_{zz} dans ces formules par les différences:

$$p_{xx} - p_0, \quad p_{yy} - p_0, \quad p_{zz} - p_0$$

Nous estimons qu'il est inutile de compliquer les formules par l'introduction de la constante inconnaissable p_0 ; il suffit de convenir une fois pour toutes que ce que l'on appelle pression normale à un élément de surface n'est en réalité que l'excès (au sens algébrique) de la pression véritable sur la pression constante qui règne peut-être sur les confins de l'espace accessible à l'expérience humaine. Pour aller plus loin, deux hypothèses nous seront nécessaires.

Hypothèse I. Supposons qu'à partir d'une époque quelconque t tout mouvement ultérieur du fluide par rapport aux axes x , y , z , ainsi que tout changement de distribution des températures dans son sein, aient été supprimés. Nous admettrons qu'il se produirait alors, en chaque point du fluide, un phénomène que nous appellerons „relaxation“ lequel consisterait en ceci: les quantités p_{xx} , p_{yy} et p_{zz} tendraient, dans ces conditions vers une limite commune p tandis que les quantités p_{yz} , p_{xy} et p_{xz} tendraient vers zéro.

Dans le phénomène de la relaxation tel que nous venons de le définir, la température et la densité du fluide au point (x, y, z) conserveront les valeurs τ et ϱ qu'elles avaient en ce point à l'époque t . Par conséquent la quantité p n'est autre chose que la pression hydrostatique qui, pour le fluide considéré, correspondrait à la température τ et à la densité ϱ . Il résulte de là que les quantités p , ϱ et τ vérifieront une équation de la forme:

$$F(p, \varrho, \tau) = 0 \quad (10)$$

bien connue dans la théorie classique de la chaleur sous le nom d'équation caractéristique.

Considérons le fluide dans les conditions spécifiées plus haut et désignons par

$$d_2 p_{xx}, d_2 p_{yy}, d_2 p_{zz}, d_2 p_{yz}, d_2 p_{zx}, d_2 p_{xy}$$

les variations infiniment petites dues à la relaxation qu'éprouvent les quantités

$$p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{zx}, p_{xy}$$

pendant l'élément de temps dt' qui s'écoule d'une époque quelconque t' , non antérieure à l'époque t , à l'époque $t' + dt'$. Nous pourrons poser:

$$(11) \quad \begin{cases} d_2 p_{xx} = A_x dt', & d_2 p_{yy} = A_y dt', & d_2 p_{zz} = A_z dt' \\ d_2 p_{yz} = B_y dt', & d_2 p_{zx} = B_x dt', & d_2 p_{xy} = B_z dt' \end{cases}$$

en désignant par $A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z$, certaines fonctions des paramètres définissant l'état physique du fluide au point x, y, z à l'époque t' .

On peut évidemment prendre pour ces paramètres les quantités:

$$(12) \quad p_{xx} - p, p_{yy} - p, p_{zz} - p, p_{yz}, p_{zx}, p_{xy}$$

ainsi que la température τ et la densité ρ du fluide au point x, y, z à l'époque t . Pendant le phénomène de la relaxation, faisons le remarquer, les quantités τ et ρ ne varient, par définition, que quand on passe d'une particule du fluide à une autre particule. Supposons que les quantités

$$(13) \quad A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z$$

soient développables en séries procédant suivant les puissances entières et positives des quantités (12) et supposons de plus que ces quantités soient assez petites pour qu'il soit permis d'arrêter ces séries aux termes du premier degré. Les quantités (13) s'annulent par définition en même temps que les quantités (12). Par conséquent elles se présenteront sous forme de fonctions linéaires et homogènes des quantités (12), fonctions dont les coefficients pourront être des fonctions des quantités ρ et τ . Nous aurions donc en tout 36 coefficients. En réalité le nombre de ces coefficients se réduit à 2. Cela résulte, comme nous allons le démontrer, de ce qu'un fluide est un corps essentiellement isotrope.

Considérons dans le fluide un tétraèdre infiniment petit (\mathcal{T}), supposons que le centre de gravité G d'une de ses faces soit situé

au point (x, y, z) et désignons par σ l'aire de cette face et par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale (N) à cette face. Nous supposons que cette normale est élevée en G et qu'elle est dirigée vers l'intérieur du tétraèdre. Cela posé, désignons par $P\sigma$ la projection de la pression qu'exerce sur la face σ le fluide extérieur, sur la normale (N) à la face considérée du tétraèdre (\mathcal{T}) , et soit $d_2 P$ la variation infiniment petite qu'éprouve, grâce au phénomène de la relaxation, la quantité P pendant le temps qui s'écoule de l'époque t' à l'époque infiniment voisine $t' + dt'$. Si l'on pose:

$$\varphi(X, Y, Z) = (p_{xx} - p) X^2 + (p_{yy} - p) Y^2 + (p_{zz} - p) Z^2 + \\ + 2p_{yz} XZ + 2p_{zx} ZX + 2p_{xy} XY,$$

$$\psi(X, Y, Z) = A_x X^2 + A_y Y^2 + A_z Z^2 + \\ + 2B_x YZ + 2B_y ZX + 2B_z XY,$$

on aura

$$P - p = \varphi(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\frac{d_2 P}{dt'} = \psi(\alpha, \beta, \gamma).$$

Pour aller plus loin, nous allons suivre une méthode géométrique analogue à celle que M. Appell¹⁾ a indiquée à propos d'une autre question. Portons sur l'axe (N) défini plus haut deux vecteurs GM et GM' définis par les équations

$$GM = \varphi(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$GM' = \psi(\alpha, \beta, \gamma).$$

Soient (Σ) et (Σ') les lieux des points M et M' quand l'axe (N) tourne autour du point G . La surface (Σ) représente graphiquement les valeurs de la quantité $P - p$ à l'époque t' pour les différents axes qui passent par le point G , tandis que la surface (Σ') représente celle de la dérivée $\frac{d_2 P}{dt'}$. Un fluide étant un corps isotrope, la surface (Σ) peut être considérée comme définissant complètement l'état physique, déterminé à l'époque t' au point (x, y, z) du fluide, par la marche du phénomène de la relaxation à partir de l'époque t jusqu'à l'époque considérée t' . Il n'en serait pas ainsi s'il s'agissait

¹⁾ Cours de Mécanique T. III, p. 503 et suivantes. Voir aussi l'article de M. Appell dans les Nouvelles Annales de mathématiques, mai 1902.

d'un corps non isotrope: dans ce cas, pour définir l'état physique du corps au point (x, y, z) , il aurait fallu connaître, en dehors de la surface (Σ) , l'orientation de cette surface par rapport aux directions remarquables dans le corps considéré au point x, y, z . Puisque la surface (Σ) définit d'une façon complète l'état physique du fluide au point (x, y, z) à l'époque t' , les plans de symétrie de cette surface seront des plans de symétrie de l'état physique du fluide au point (x, y, z) à l'époque t' . D'autre part la distribution des valeurs de la quantité $\frac{d_2 P}{dt'}$, à l'époque t' , sur les différents axes passant par le point (x, y, z) ne dépend manifestement que de l'état physique du fluide à l'époque t' au point considéré. Par conséquent la surface (Σ') , qui représente graphiquement cette distribution des valeurs de la quantité $\frac{d_2 P}{dt'}$, doit avoir les mêmes plans de symétrie que la surface (Σ) . Or si l'on représente par (X, Y, Z) un système d'axes de même sens que le système (x, y, z) , mais ayant le point G pour origine, les plans de symétrie des surfaces (Σ) et (Σ') coïncideront respectivement avec les plans de symétrie de la quadrique

$$(Q) \quad \varphi(X, Y, Z) = 1$$

et de la quadrique

$$(Q') \quad \psi(X, Y, Z) = 1.$$

Donc les plans de symétrie de ces quadriques coïncident. Rapportons ces quadriques à leurs plans de symétrie et soit alors

$$(14) \quad s_1 X'^2 + s_2 Y'^2 + s_3 Z'^2 = 1$$

l'équation de la quadrique (Q) et

$$(15) \quad l_1 X'^2 + l_2 Y'^2 + l_3 Z'^2 = 1.$$

celle de la quadrique (Q') .

Désignons par

$$p_{X'X'} - p, \quad p_{Y'Y'} - p, \quad p_{Z'Z'} - p, \quad p_{Y'Z'}, \quad p_{Z'Y'}, \quad p_{X'Y'}$$

et par

$$A_{X'}, \quad A_{Y'}, \quad A_{Z'}, \quad B_{X'}, \quad B_{Y'}, \quad B_{Z'}$$

les quantités dont le rôle par rapport au système d'axes (X', Y', Z') est identique à celui des quantités (12) et (13) par rapport au système de coordonnées (x, y, z) .

On aura:

$$\begin{aligned} p_{x'x'} - p &= s_1, & p_{y'y'} - p &= s_2, & p_{z'z'} - p &= s_3 \\ p_{y'z'} &= p_{z'y'} = p_{x'y'} = 0 \\ A_{x'} &= l_1, & A_{y'} &= l_2, & A_{z'} &= l_3 \\ B_{x'} &= B_{y'} = B_{z'} = 0. \end{aligned}$$

Nous aurons donc

$$l_1 = a s_1 + b s_2 + c s_3,$$

en désignant par a, b, c certaines fonctions des quantités τ et ϱ . Par raison de symétrie, la quantité l_1 ne doit pas changer quand on permute s_2 et s_3 . Donc

$$b = c.$$

Posons

$$a - b = -\frac{1}{T} \quad \text{et} \quad b = -\frac{1}{3T'},$$

il viendra:

$$l_1 = -\frac{s_1}{T} - \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3T'}$$

J'observe maintenant que, à cause de l'isotropie du fluide les valeurs de l_2 et de l_3 doivent se déduire de celle de l_1 par la permutation circulaire des nombres 1, 2, 3 dans les indices.

Cela prouve que l'on aura:

$$l_2 = -\frac{s_2}{T} - \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3T'}$$

$$l_3 = -\frac{s_3}{T} - \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3T'}.$$

Les quantités l_1, l_2, l_3 ayant les valeurs précédentes, la relation:

$$\begin{aligned} l_1 X'^2 + l_2 Y'^2 + l_3 Z'^2 + \frac{1}{T}(s_1 X'^2 + s_2 Y'^2 + s_3 Z'^2 + \\ + \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3T'}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)) = 0 \end{aligned}$$

sera une identité. Transformons cette identité en remplaçant les variables X', Y', Z' , considérées comme les coordonnées d'un point dans le système (X', Y', Z') , par leurs valeurs en fonction des coordonnées du même point dans le système (X, Y, Z) , système dans lequel sont écrites les équations (Q) et (Q') . Il viendra:

$$\psi(X, Y, Z) + \frac{1}{T} \varphi(X, Y, Z) + \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3T'} (X^2 + Y^2 + Z^2) = 0.$$

Remarquons que l'on a

$$s_1 + s_2 + s_3 = p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} - 3p$$

et posons

$$p_m = \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}.$$

L'identité précédente nous donnera les relations suivantes:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_x = -\frac{p_{xx} - p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} \\ B_x = -\frac{p_{yz}}{T}, \end{array} \right.$$

ainsi que celles qui s'en déduisent par la permutation circulaire des lettres x, y, z dans les indices. Les valeurs précédentes des quantités $A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z$, sont certainement les plus générales de toutes celles qui sont compatibles avec le fait qu'un fluide est une substance isotrope; c'est là une conséquence nécessaire de la voie suivie pour les obtenir. On peut en revanche se demander si les formules en question ne sont pas trop générales. Pour s'assurer qu'il n'en est pas ainsi, il suffit de vérifier qu'elles conservent leurs formes sans aucun changement quand on passe du système de coordonnées (x, y, z) à un autre système quelconque de coordonnées rectangulaires.

Continuons à nous placer dans les conditions spécifiées dans l'énoncé de l'hypothèse qui nous a fait introduire la notion de relaxation et cherchons les valeurs des quantités (12) au point (x, y, z) à une époque quelconque t' postérieure à l'époque t . A cet effet désignons, pour abrégier l'écriture, par $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$, les valeurs des quantités $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{xz}, p_{xy}$ à l'époque t au point (x, y, z) , et par $p'_1, p'_2, p'_3, q'_1, q'_2, q'_3$, les valeurs des mêmes fonctions, au même point à l'époque t' . Posons en outre:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \\ \Pi = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3} \end{array} \right.$$

Les équations (11) et (16) nous donneront aisément les relations suivantes:

$$\left. \begin{aligned} p_i' - p &= \Pi e^{-\frac{t-t'}{T_1}} + (p_i - \Pi) e^{-\frac{t-t'}{T}} \\ q_i' &= q_i e^{-\frac{t-t'}{T}} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Ces relations nous apprennent que l'hypothèse de la relaxation exige que l'on ait:

$$\left. \begin{aligned} T &> 0 \\ T_1 &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Il est aisé de déduire des équations (18) la signification physique des quantités T et T_1 : la quantité T détermine la manière dont les efforts tranchants tendent vers zéro; c'est ce qui résulte des trois dernières équations du système considéré; pour déterminer la signification physique de la quantité T_1 il suffit d'ajouter membre à membre les trois premières équations du système précédent; on trouve:

$$\Pi' - p = \Pi e^{-\frac{t-t'}{T_1}}, \quad (20)$$

en posant

$$\Pi' = \frac{p_1' + p_2' + p_3'}{3}.$$

Cela prouve que la quantité T_1 détermine la manière dont la pression normale moyenne tend vers sa limite p . D'ailleurs les dimensions des quantités T et T_1 sont celles d'un espace de temps; on pourrait donc appeler: T le temps de relaxation de la rigidité et T_1 celui de relaxation de la pression normale moyenne.

Nous avons fait remarquer dès le début des considérations sur la relaxation, que les coefficients des fonctions linéaires et homogènes qui font connaître les expressions des quantités (13) en fonction des quantités (12) doivent être considérés comme des fonctions de la température τ et de la densité ρ qu'a le fluide à l'époque t au point (x, y, z) , fonctions qui ne dépendront d'ailleurs que de la nature du fluide considéré. Par conséquent les quantités T et T' (ou si l'on veut T et T_1) doivent être regardées comme des fonctions des variables ρ et τ . Il est à peine utile d'ajouter que, dans

les premières applications de la théorie de la relaxation à l'étude d'un fluide déterminé, il faudra se placer dans des conditions où τ et ρ varient assez peu pour qu'il soit possible, dans une première approximation, de regarder les quantités T et T' comme constantes.

Dans la suite de ce travail nous n'aurons à considérer les valeurs des premiers membres des équations (11) que pour le temps infiniment court dt qui s'écoule de l'époque t , à partir de laquelle le fluide est supposé être placé dans les conditions spécifiées plus haut, à l'époque $t + dt$. Les formules qui nous seront nécessaires se déduisent immédiatement des relations (11) et (16); les voici:

$$(21) \left\{ \begin{array}{l} d_2 p_{xx} = - \left(\frac{p_{xx} - p}{T} + \frac{p_m - p}{T'} \right) dt \\ d_2 p_{yy} = - \left(\frac{p_{yy} - p}{T} + \frac{p_m - p}{T'} \right) dt \\ d_2 p_{zz} = - \left(\frac{p_{zz} - p}{T} + \frac{p_m - p}{T'} \right) dt \\ d_2 p_{yz} = - \frac{p_{yz}}{T} dt; \quad d_2 p_{zx} = - \frac{p_{zx}}{T} dt; \quad d_2 p_{xy} = - \frac{p_{xy}}{T} dt \end{array} \right.$$

où, rappelons-le, p_m représente la moyenne arithmétique des quantités p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} .

Telles sont les formules les plus générales qui résultent, comme première approximation, de l'hypothèse de la relaxation.

Pour énoncer la deuxième hypothèse, il est nécessaire de définir préalablement certains nouveaux éléments. Supposons que le fluide jouisse pendant le temps qui s'écoule de l'époque t à l'époque $t + dt$ et en conservant le mouvement réel qu'il a dans cet intervalle de temps, des propriétés élastiques du corps fictif dont l'état de tension intérieure serait identique à celui qui règne dans le sein du fluide à l'époque t . Cela posé convenons d'indiquer par le symbole d_1 , placé devant celui qui représente un élément quelconque relatif au fluide, la variation qu'éprouverait dans ces conditions l'élément considéré. Proposons-nous ensuite de calculer les quantités:

$$d_1 \varepsilon_i^* \quad \text{et} \quad d_1 \gamma_i^* \quad (i = 1, 2, 3).$$

A cet effet désignons par x, y, z les coordonnées d'une particule du fluide à l'époque t et représentons par $x + \xi'$, $y + \eta'$, $z + \zeta'$ les coordonnées de la même particule à une époque quelconque t' postérieure

à l'époque t . L'époque t restant fixe, ξ' , η' , ζ' seront évidemment des fonctions des quatre variables x , y , z et t' . J'admets que, pour des valeurs de t' assez voisines de t , les dérivées partielles du premier ordre des quantités $\frac{\partial \xi'}{\partial t'}$, $\frac{\partial \eta'}{\partial t'}$, $\frac{\partial \zeta'}{\partial t'}$ par rapport aux variables x , y , et z soient des fonctions finies et continues des quatre variables x , y , z et t' . Quelle sera la valeur de $\frac{\partial \xi'}{\partial x}$ à l'époque $t' = t + dt$? Pour $t' = t$ on a $\frac{\partial \xi'}{\partial x} = 0$ puisque ξ s'annule par définition pour $t' = t$. Donc, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, la valeur de $\frac{\partial \xi'}{\partial x}$ pour $t' = t + dt$ sera égale à $\left(\frac{\partial^2 \xi'}{\partial x \partial t'}\right)_{t'=t} dt$. Désignons par u , v , w les projections orthogonales sur les axes, de la vitesse de la particule du fluide qui, à l'époque t , se trouve au point x , y , z . Le résultat obtenu peut être exprimé au moyen de l'égalité suivante:

$$\left(\frac{\partial \xi'}{\partial x}\right)_{t'=t+dt} = \frac{\partial u}{\partial x} dt \quad (22)$$

puisque

$$\left(\frac{\partial \xi'}{\partial t'}\right)_{t'=t} = u.$$

On établira de la même manière les égalités suivantes:

$$\left(\frac{\partial \xi'}{\partial y}\right)_{t'=t+dt} = \frac{\partial u}{\partial y} dt \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \xi'}{\partial z}\right)_{t'=t+dt} = \frac{\partial u}{\partial z} dt$$

ainsi que celles qui se déduiraient des égalités précédentes et de l'égalité (22) en remplaçant ξ' et u une première fois par η' et v et une deuxième fois par ζ' et w . Cela posé on verra aisément, en se reportant au Nr. 2, que les composantes de la déformation géométrique éprouvée par le fluide pendant le temps qui s'écoule de l'époque t à l'époque $t + dt$ auront les valeurs suivantes:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 dt, \quad a_2 dt, \quad a_3 dt \\ c_1 dt, \quad c_2 dt, \quad c_3 dt, \end{array} \right\} \quad (23)$$

en posant, pour abrégé:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad a_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad a_3 = \frac{\partial w}{\partial z} \\ c_1 = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ c_2 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ c_3 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right.$$

A l'époque t , les composantes de la déformation élastique du fluide ont les valeurs (6). De l'époque t à l'époque $t + dt$, le fluide éprouve une déformation géométrique dont les composantes ont les valeurs (23). Enfin de l'époque t à l'époque $t + dt$, le fluide se comporte, par hypothèse, comme se comporterait le corps fictif parfaitement élastique que nous avons à considérer en vertu de l'hypothèse fondamentale relative à la nature des phénomènes dus à la viscosité. Il résulte de tout cela et de ce qui a été rappelé à la fin du Nr. 2 au sujet de la composition de deux déformations successives que les composantes de la déformation élastique du fluide à l'époque $t + dt$ auraient, dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, approximativement les valeurs suivantes:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1^* + a_1 dt, \quad \varepsilon_2^* + a_2 dt, \quad \varepsilon_3^* + a_3 dt \\ \gamma_1^* + c_1 dt, \quad \gamma_2^* + c_2 dt, \quad \gamma_3^* + c_3 dt. \end{array} \right.$$

J'ai dit que les expressions précédentes représentent des valeurs approchées des éléments que nous voulions calculer. En effet les formules (25) se déduisent des formules exactes, on le vérifierait aisément, en négligeant les produits des dérivées qui figurent dans le second membre des équations (7) par les quantités (23). Par conséquent les différences entre les valeurs (25) et les valeurs exactes des éléments demandés sont des infiniment petits de l'ordre même de dt . D'ailleurs les coefficients de dt dans ces différences seront petits par rapport aux coefficients

$$a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3$$

de cette différentielle dans les formules (25) et c'est pour cela que les expressions (25) peuvent être regardées comme les valeurs approchées des quantités demandées. Il résulte de tout ce qui précède que l'on a approximativement:

$$d_1 \varepsilon_i^* = a_i dt \quad \text{et} \quad d_1 \gamma_i^* = c_i dt, \quad (i = 1, 2, 3)$$

on aura donc, en vertu des formules (8):

$$\left. \begin{aligned} d_1 p_{xx} &= -\{\lambda \tilde{\omega} + 2\mu a_1\} dt \\ d_1 p_{yy} &= -\{\lambda \tilde{\omega} + 2\mu a_2\} dt \\ d_1 p_{zz} &= -\{\lambda \tilde{\omega} + 2\mu a_3\} dt \\ d_1 p_{yz} &= -\mu c_1 dt \\ d_1 p_{zx} &= -\mu c_2 dt \\ d_1 p_{xy} &= -\mu c_3 dt \end{aligned} \right\} (26)$$

en posant

$$\tilde{\omega} = a_1 + a_2 + a_3. \quad (27)$$

Voici maintenant la deuxième hypothèse que nous allons admettre:

Hypothèse II. Considérons une particule quelconque du fluide et convenons d'indiquer par le symbole d la variation qu'éprouve réellement une quantité quelconque relative à cette particule dans le temps qui s'écoule de l'époque t à l'époque $t + dt$. Nous admettrons que l'on a les relations suivantes:

$$d p_{xx} = d_1 p_{xx} + d_2 p_{xx}$$

$$d p_{yz} = d_1 p_{yz} + d_2 p_{yz}$$

ainsi que toutes celles qui s'en déduisent par la permutation circulaire des lettres x, y, z .

Si l'on désigne comme plus haut par u, v, w les projections orthogonales sur les axes, de la vitesse de la particule du fluide qui, à l'époque t , a x, y, z pour coordonnées, les formules (21) et (26) et l'hypothèse que nous venons d'énoncer nous donneront les équations suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p_{xx}}{\partial t} + u \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{xx}}{\partial y} + w \frac{\partial p_{xx}}{\partial z} &= -\lambda \tilde{\omega} - 2\mu a_1 - \frac{p_{xx} - p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} \\ \frac{\partial p_{yy}}{\partial t} + u \frac{\partial p_{yy}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + w \frac{\partial p_{yy}}{\partial z} &= -\lambda \tilde{\omega} - 2\mu a_2 - \frac{p_{yy} - p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} \\ \frac{\partial p_{zz}}{\partial t} + u \frac{\partial p_{zz}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{zz}}{\partial y} + w \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} &= -\lambda \tilde{\omega} - 2\mu a_3 - \frac{p_{zz} - p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} \\ \frac{\partial p_{yz}}{\partial t} + u \frac{\partial p_{yz}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + w \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} &= -\mu c_1 - \frac{p_{yz}}{T} \\ \frac{\partial p_{zx}}{\partial t} + u \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{zx}}{\partial y} + w \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} &= -\mu c_2 - \frac{p_{zx}}{T} \\ \frac{\partial p_{xy}}{\partial t} + u \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + w \frac{\partial p_{xy}}{\partial z} &= -\mu c_3 - \frac{p_{xy}}{T} \end{aligned} \right\} (28)$$

Les équations précédentes, rappelons-le, ne peuvent être considérées que comme l'expression approchée des hypothèses que nous avons faites parce que les formules (26) ne sont, comme nous l'avons vu, que des formules approximativement exactes.

Pour obtenir le système complet des équations de l'hydrodynamique, il suffit de joindre aux équations (28):

1°. Les équations fournies par le principe de d'Alembert à savoir:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} = \rho X - \left\{ \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \right\} \\ \rho \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right\} = \rho Y - \left\{ \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} \right\} \\ \rho \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right\} = \rho Z - \left\{ \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} \right\} \end{array} \right.$$

où l'on a désigné par ρ , comme plus haut, la densité du fluide et par X, Y, Z les composantes parallèles aux axes de la force extérieure, rapportée à l'unité de masse, sollicitant le fluide.

2°. L'équation de continuité:

$$(30) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0.$$

3°. L'équation (10) laquelle fait connaître la relation qui existe entre la quantité p , la densité ρ du fluide et la température τ :

4°. Les équations tirées de la thermodynamique et de la théorie de la conductibilité calorifique.

Il faudra, bien entendu, tenir compte en outre des conditions aux limites qui caractériseront le problème particulier auquel on voudra appliquer les équations précédentes.

Nr. 4. Passons à l'examen des cas-limites les plus intéressants des équations établies au numéro précédent. Par quelles équations devra-t-on remplacer les équations (8) et (28) quand on voudra considérer un fluide incompressible? Les équations demandées sont les équations-limites des équations précédentes pour $\lambda = \infty$. Faisons croître λ indéfiniment et supposons, comme cela est indispensable pour arriver à un résultat ayant un sens, que les expressions

$$\lambda \theta^* \quad \text{et} \quad \lambda \tilde{\omega}$$

tendent vers des limites finies. Voyons d'abord ce que deviennent les équations (8). Il est évident que l'expression θ^* aura zéro pour

limite. Par conséquent si l'on désigne par $-p_m$ la limite du produit $\lambda\theta^*$, les équations (8) devront être remplacées par les équations suivantes:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= p_m - 2\mu \varepsilon_1^* \\ p_{yy} &= p_m - 2\mu \varepsilon_2^* \\ p_{zz} &= p_m - 2\mu \varepsilon_3^* \\ p_{yz} &= -\mu \gamma_1^* \\ p_{zx} &= -\mu \gamma_2^* \\ p_{xy} &= -\mu \gamma_3^* \\ \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^* &= 0. \end{aligned} \right\} (31)$$

La signification de la quantité p_m est immédiate: p_m représente, comme d'ailleurs plus haut, évidemment la moyenne arithmétique des trois quantités p_{xx} , p_{yy} et p_{zz} . Considérons maintenant les équations (28). Les trois dernières équations de ce système conserveront leur forme sans aucun changement. Voyons ce que deviennent les trois premières. Observons à cet effet que la première d'entre elles peut s'écrire ainsi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{xx}}{\partial t} + u \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{xx}}{\partial y} + w \frac{\partial p_{xx}}{\partial z} \\ = -2\mu a_1 - \frac{p_{xx} - p + \frac{\lambda T T' \tilde{\omega}}{T + T'}}{T} \\ - \frac{p_m - p + \frac{\lambda T T' \tilde{\omega}}{T + T'}}{T'} \end{aligned}$$

Lorsque λ croît indéfiniment, l'expression

$$p - \frac{\lambda T T' \tilde{\omega}}{T + T'}$$

tendra vers une certaine limite p' , puisque $\lambda \tilde{\omega}$ tend par hypothèse vers une limite déterminée. La quantité p' devra évidemment être regardée comme une certaine fonction des quatre variables x, y, z, t , fonction qui sera l'une des inconnues du problème de la détermination du mouvement d'un fluide incompressible. D'après cela l'équation qui nous occupe prendra, à la limite, la forme suivante:

$$(32) \quad \frac{\partial p_{xx}}{\partial t} + u \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{xx}}{\partial y} + w \frac{\partial p_{xx}}{\partial z} = \\ = -2\mu a_1 - \frac{p_{xx} - p'}{T} - \frac{p_m - p'}{T'}$$

Par conséquent, dans le cas d'un fluide incompressible, les trois premières équations du système (28) devront être remplacées par l'équation (32) et par les deux équations analogues relatives à p_{yy} et à p_{zz} ; quant aux trois dernières équations du système (28), elles resteront comme nous l'avons dit sans aucun changement. L'équation de continuité prendra évidemment la forme suivante:

$$(33) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

On vérifiera aisément l'intéressante remarque que voici: dans le cas d'un fluide incompressible et lorsqu'il est possible de regarder les quantités T et T' comme des constantes indépendantes de la température, les dix inconnues

$$u, v, w, p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{xz}, p_{xy} \text{ et } p'$$

pourront être déterminées au moyen du système formé par: les six équations par lesquelles le système (28) doit être remplacé ici, les trois équations du système (29) et l'équation (33).

Voyons maintenant à quelles équations-limites on arrive en faisant tendre T vers zéro. Les produits $T\lambda$ et $T\mu$ pourront tendre alors vers les limites finies λ_0 et μ_0 non nécessairement nulles; si l'on suppose encore que le rapport $\frac{T}{T'}$ tende vers zéro ¹⁾, les équations (28) devront être remplacées par les équations suivantes:

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} - p = -\lambda_0 \tilde{\omega} - 2\mu_0 a_1 \\ p_{yy} - p = -\lambda_0 \tilde{\omega} - 2\mu_0 a_2 \\ p_{zz} - p = -\lambda_0 \tilde{\omega} - 2\mu_0 a_3 \\ p_{yz} = -\mu_0 c_1 \\ p_{xz} = -\mu_0 c_2 \\ p_{xy} = -\mu_0 c_3 \end{array} \right.$$

¹⁾ Nous faisons cette hypothèse pour simplifier, mais, si nous avions supposé que le rapport $\frac{T}{T'}$ tendit vers une limite non nulle, nous serions arrivé à un résultat qui, au fond, serait le même.

Sans examiner ce que deviennent à la limite les équations (8), chose qui d'ailleurs n'offrirait aucune difficulté, on voit que l'on retombe sur la théorie classique de la viscosité. C'est ce qui permet de regarder la théorie de la viscosité exposée dans ce travail comme une généralisation de la théorie classique.

Examinons enfin le cas-limite

$$\frac{1}{T'} = \frac{1}{T} = 0.$$

Remplaçons, pour abréger l'écriture, le symbole

$$\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

par le symbole plus simple

$$\frac{d}{dt}$$

Les équations (28) donneront:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_{xx}}{dt} &= -\lambda \tilde{\omega} - 2\mu a_1 \\ \frac{dp_{yy}}{dt} &= -\lambda \tilde{\omega} - 2\mu a_2 \\ \frac{dp_{zz}}{dt} &= -\lambda \tilde{\omega} - 2\mu a_3 \\ \frac{dp_{yz}}{dt} &= -\mu c_1; \quad \frac{dp_{zx}}{dt} = -\mu c_2; \quad \frac{dp_{xy}}{dt} = -\mu c_3. \end{aligned} \right\} (35)$$

Ces équations sont celles que l'on déduit par la différentiation par rapport au temps des équations classiques de la théorie de l'élasticité d'un corps isotrope. En effet: désignons par a, b, c les coordonnées d'un élément matériel d'un corps isotrope parfaitement élastique lorsque ce corps se trouve à l'état de l'équilibre naturel en l'absence de tout espèce de forces extérieures et soient

$$\left. \begin{aligned} x &= a + \xi \\ y &= b + \eta \\ z &= c + \zeta \end{aligned} \right\} (36)$$

les coordonnées du même élément matériel à l'époque t lorsque le corps est déformé. Nous avons:

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} = -\lambda \theta - 2\mu \varepsilon_1 \\ p_{yy} = -\lambda \theta - 2\mu \varepsilon_2 \\ p_{zz} = -\lambda \theta - 2\mu \varepsilon_3 \\ p_{yz} = -\mu \gamma_1 \\ p_{zx} = -\mu \gamma_2 \\ p_{xy} = -\mu \gamma_3 \end{array} \right.$$

où l'on a posé:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial \xi}{\partial a}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial \eta}{\partial b}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial c}$$

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial \eta}{\partial c} + \frac{\partial \zeta}{\partial b}$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial \zeta}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial c}$$

$$\gamma_3 = \frac{\partial \xi}{\partial b} + \frac{\partial \eta}{\partial a}$$

Nous supposons naturellement que les termes de degré supérieur au premier par rapport aux quantités $\frac{\partial \xi}{\partial a}, \frac{\partial \xi}{\partial b}, \frac{\partial \xi}{\partial c}$ et aux quantités qui s'en déduisent en remplaçant successivement ξ par η et ζ , ainsi que par rapport aux dérivées de ces quantités, sont négligeables; c'est en effet l'hypothèse fondamentale de la théorie classique de l'élasticité. Il est aisé de voir que, pour montrer que le système (35) peut être regardé comme le résultat de la dérivation par rapport au temps du système (37), il suffit de montrer que les dérivées partielles du premier ordre des quantités

$$(38) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

par rapport aux variables a, b, c peuvent, dans les limites du degré d'approximation adopté dans la théorie de l'élasticité, être confondues avec celles des quantités

$$(39) \quad u, \quad v, \quad w$$

par rapport aux variables x, y, z . Les quantités (38) ne diffèrent des quantités (39) que parce qu'elles sont exprimées en fonction

des variables a, b, c et t au lieu de l'être en fonction des variables x, y, z, t . Par conséquent si l'on résout les équations (36) par rapport aux variables a, b, c et si l'on porte les valeurs trouvées dans les expressions (38), celles-ci se confondront avec les expressions (39). D'après cela on a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial a \partial t} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial b \partial t} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial c \partial t} \frac{\partial c}{\partial x}. \quad (40)$$

On s'assurera aisément en calculant les dérivées $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial c}{\partial x}$ au moyen des équations (36) qu'avec le degré d'approximation adopté, l'équation (40) est équivalente à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial a \partial t}.$$

On établirait de la même manière les autres relations qui existent entre les dérivées du premier ordre des quantités (38) et (39). La proposition que nous avons en vue est donc établie.

La comparaison des équations (8) aux équations (37) donne:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^* &= \varepsilon_i \\ \gamma_i^* &= \gamma_i \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Autrement dit la déformation du corps fictif est ici identique à la déformation géométrique du corps considéré. En résumé le cas-limite

$$\frac{1}{T'} = \frac{1}{T} = 0$$

est celui où le fluide se transforme en un corps isotrope parfaitement élastique. C'est ce que nous voulions mettre nettement en évidence et c'est ce qu'il était d'ailleurs aisé de prévoir a priori.

III. Analyse du développement théorique donné par M. Natanson à l'hypothèse que nous avons étudiée au chapitre précédent.

Nr. 5. M. Natanson expose sa théorie, comme nous l'avons déjà dit dans l'introduction, dans son mémoire „Sur les lois de la viscosité“¹⁾. Sans revenir sur les équations définitives proposées par

¹⁾ Bulletin de l'Académie de Cracovie 1901.

M. Natanson nous allons examiner celles dont il les déduit en négligeant des termes qu'il n'était pas permis de négliger. Les équations que nous avons en vue sont les équations (1 a), (1 b), (1 c), (2 a), (2 b), (2 c) du § 8 de son mémoire. On les obtiendrait, à une légère différence de notation près, en posant

$$(1) \quad \frac{1}{T'} = 0.$$

dans les équations (28) du chapitre précédent. Il est évident qu'au point de vue de la physique, rien ne justifie l'hypothèse exprimée par l'égalité (1). Par conséquent les équations de M. Natanson ne peuvent pas être regardées comme l'expression adéquate de l'hypothèse fondamentale d'où il est parti. Voyons par quelle voie M. Natanson arrive à ses équations. Il les obtient en combinant par voie d'addition les équations (1 a), (1 b), (1 c), (2 a), (2 b), (2 c), du § 3 avec les équations (2 a), (2 b), (2 c), (3 a), (3 b), (3 c) du § 4. Ces deux systèmes d'équations correspondent vaguement aux équations (26) et (21) du chapitre précédent, mais il est impossible, en s'appuyant sur le texte de M. Natanson, d'associer une idée précise à aucun de ces deux systèmes d'équations: les équations du § 3, celles qui correspondraient aux équations (26) du chapitre précédent contiennent les symboles

$$\left(\frac{dp_{xx}}{dt}\right)_1, \left(\frac{dp_{yy}}{dt}\right)_1, \text{ etc.}$$

dont la signification reste obscure pour le lecteur; il en est ainsi parce que M. Natanson présente ces équations sans avoir préalablement introduit la notion de ce que nous avons appelé „déformation élastique du fluide“ et qu'il ne fait intervenir que plus tard, sous le nom de déformation véritable, sans d'ailleurs la préciser et sans lui avoir fait jouer un rôle quelconque dans la déduction des équations (1) et (2) du § 8. Quant aux équations du § 4 lesquelles correspondraient aux équations (21) du chapitre précédent, M. Natanson les écrit à titre de relations hypothétiques sans expliquer clairement ce qu'il entend représenter par les symboles:

$$\left(\frac{dp_{xx}}{dt}\right)_2, \left(\frac{dp_{yy}}{dt}\right)_2, \text{ etc.}$$

Cette manière peu méthodique d'introduire les équations en question a eu pour conséquences: 1^o que les équations du § 8 n'ont

pas la généralité qu'elles devraient avoir, 2^o que M. Natanson ne s'est pas aperçu que la quantité qu'il désigne, comme nous même d'ailleurs, par p n'est autre chose qu'un élément bien connu dans la théorie classique de la chaleur, élément qui vérifie l'équation (10) du chapitre précédent; n'ayant pas reconnu la véritable nature de la quantité p , M. Natanson développe au sujet de cette quantité, dans le § 5 de son mémoire, des considérations que rien ne justifie.

Faisons encore remarquer, en terminant cette analyse, que M. Natanson regarde les quantités

$$\varepsilon, \varphi, \psi, \alpha, \beta, \gamma$$

lesquelles représentent, dans son mémoire ce qu'au chapitre précédent, nous avons appelé „composantes de la déformation géométrique“, comme définies au moyen des formules (1) du § 1. Il commet là une erreur parce que les formules (1) ne seraient applicables, à titre de formules approchées, que dans le cas, où les dérivées du premier ordre des quantités ξ, η, ζ par rapport aux variables x, y, z seraient très petites. Or cette hypothèse est évidemment inadmissible.

En résumé M. Natanson s'est proposé un problème intéressant, mais il ne lui a pas été donné de le résoudre d'une façon satisfaisante.

29. M. ST. ZAREMBA m. c. O podwójnem załamaniu w cieczach odkształconych i wywodach prof. Natansona, odnoszących się do tej kwestyi. (*Sur un problème d'hydrodynamique lié à un cas de double réfraction accidentelle dans les liquides et sur les considérations théoriques de M. Natanson relatives à ce phénomène.*)

I. Introduction.

Il est possible de rendre compte des phénomènes dus à la viscosité des fluides en admettant que l'état de tension intérieure d'un fluide en mouvement soit, à chaque instant, assimilable à celui d'un corps fictif parfaitement élastique et isotrope, lequel aurait éprouvé une certaine déformation et que l'on substituerait par la pensée, à l'instant considéré, au fluide réel. C'est l'hypothèse que M. Natanson, qui en attribue d'ailleurs la première idée à Poisson et Maxwell, a tenté de développer dans son mémoire „Sur les lois

de la viscosité¹⁾. Adoptons avec M. Natanson l'hypothèse précédente et admettons avec lui que la théorie de M. E. F. Neumann de la double réfraction accidentelle dans les solides déformés soit applicable à ce corps fictif que, par la pensée, nous substituons à chaque instant au liquide réel.

Il sera possible alors de soumettre à une étude théorique le phénomène de la double réfraction accidentelle dans les liquides²⁾. C'est précisément ce que se propose de faire M. Natanson dans son mémoire „Sur la double réfraction accidentelle dans les liquides“ (Bulletin de l'Académie de Cracovie 1901).

Voici le problème que l'on a à résoudre quand on se propose d'appliquer les vues théoriques précédentes à un cas de double réfraction accidentelle dans un liquide: déterminer l'état de déformation qu'il faut, à chaque instant, attribuer à ce corps fictif dont nous avons parlé plus haut pour que l'état de tension intérieure du corps fictif soit constamment identique à celui qui règne réellement dans le sein du liquide. M. Natanson envisage le cas d'un liquide placé entre deux cylindres de révolution de même axe; le cylindre extérieur est fixe et le cylindre intérieur tourne avec une vitesse angulaire constante; chaque particule du liquide se déplace sur un cercle situé dans un plan perpendiculaire à l'axe des cylindres et ayant son centre sur cet axe; enfin la vitesse angulaire d'une particule ne dépend que du rayon du cercle qu'elle décrit. M. Natanson ne précise pas d'une façon plus explicite les conditions dans lesquelles il se place mais, en réalité, il suppose que le liquide remplit tout l'espace indéfini limité par les deux cylindres et il admet que les forces extérieures sollicitant le liquide se réduisent à l'effet des parois cylindriques qui le contiennent. Nous ne discuterons pas dans quelle mesure les conditions théoriques précédentes peuvent être identifiées avec celles des expériences auxquelles M. Natanson applique les résultats de sa théorie. Bornons-nous à dire que ce qui détermine la différence la plus essentielle qui existe entre les conditions théoriques et celles des expériences, c'est sans

¹⁾ Bulletin de l'Académie de Cracovie 1901.

²⁾ On trouvera un exposé très complet de l'état actuel du problème de la double réfraction accidentelle dans les liquides dans une communication faite par M. de Metz au XI^e Congrès des naturalistes et des médecins russes tenu à St. Pétersbourg en 1901.

aucun doute ce qui se passe à la base de la colonne liquide verticale qui fait l'objet des expériences. Nous estimons cependant que, pour une colonne liquide assez haute les conditions théoriques énoncées plus haut peuvent être considérées comme réalisées approximativement. Malheureusement les calculs de M. Natanson reposent sur des équations qui, ainsi que je l'ai montré ailleurs¹⁾, sont incompatibles avec un des principes fondamentaux de la mécanique; ils constituent d'ailleurs une application incorrecte de ces équations erronées et le résultat définitif auquel ils conduisent est naturellement inexact. Nous expliquerons tout cela d'une façon détaillée après avoir exposé la solution correcte du problème d'hydrodynamique auquel la question se ramène.

II. Intégration des équations du problème et comparaison du résultat de la théorie rigoureuse à celui que trouve M. Natanson.

Nr. 2. Il est évident que, sans commettre d'erreur appréciable, il serait permis d'admettre l'incompressibilité du liquide ainsi que la constance de la température dans toute l'étendue de sa masse; on reconnaîtra même aisément que, si l'on tenait compte de la compressibilité du liquide et de ce que la température peut varier quand on passe d'une couche cylindrique infiniment mince, parallèle aux cylindres limitant la masse liquide, à une autre couche semblable, on n'augmenterait pas les chances d'obtenir une solution bien adaptée aux conditions des expériences réelles. Cependant nous n'admettrons ni l'incompressibilité du liquide, ni la constance de la température; nous supposerons seulement que la température en un point du liquide ne dépend que de la distance de ce point à l'axe commun des parois cylindriques. Cela nous permettra de mettre en évidence ce fait curieux, que diverses circonstances relatives au mouvement du liquide peuvent être déterminées complètement, dans ce problème particulier²⁾, sans rien connaître des relations qui existent entre la densité, la température et les pressions; c'est même pré-

¹⁾ Zaremba. Remarques sur les travaux de M. Natanson relatifs à la théorie de la viscosité. Bulletin de l'Académie de Cracovie 1903; voir aussi mon mémoire „Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité“. Bulletin de l'Académie de Cracovie 1903.

²⁾ Je suppose bien entendu que l'on adopte les hypothèses sur lesquelles reposent les équations générales de l'hydrodynamique qui vont nous servir de point de départ.

cisément ce qui se produit pour l'élément dont dépendrait, suivant M. Natanson, le phénomène de la double réfraction.

Pour plus de clarté rappelons, sous leur forme générale, les équations qui vont nous servir de point de départ et dont on trouvera la déduction dans notre mémoire „Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité“ (Bulletin de l'Académie de Cracovie 1903).

Désignons par:

t — le temps

u, v, w — les composantes parallèles aux axes de la vitesse de la particule du liquide qui, à l'époque t a x, y, z pour coordonnées

$p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{xz}, p_{xy}$ — les six quantités bien connues qui caractérisent les pressions qui, à l'époque t , règnent en un point x, y, z du liquide.

p_m — la moyenne arithmétique des trois quantités p_{xx}, p_{yy} et p_{zz} .

p — la limite commune vers laquelle tendraient les quantités p_{xx}, p_{yy} et p_{zz} si, à partir de l'époque t , tout mouvement ultérieur du liquide par rapport aux axes et tout changement de distribution des températures étaient brusquement suspendus.

X, Y, Z — les composantes de la force extérieure rapportée à l'unité de masse sollicitant la particule du liquide qui, à l'époque t , se trouve au point x, y, z .

λ, μ, T et T' — des quantités qu'à titre de première approximation, nous regardons comme des constantes physiques du liquide, mais qui en réalité sont des fonctions de la température et de la densité, fonctions dont la forme dépend uniquement de la nature du liquide.

$a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3$ et $\tilde{\omega}$ — les quantités définies par les équations suivantes:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad a_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad a_3 = \frac{\partial w}{\partial z} \\ c_1 = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ c_2 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ c_3 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \tilde{\omega} = a_1 + a_2 + a_3. \end{array} \right.$$

Les équations que nous voulions rappeler seront alors les suivantes:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial p_{xx}}{\partial t} + u \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{xx}}{\partial y} + w \frac{\partial p_{xx}}{\partial z} &= -\lambda \tilde{\omega} - 2\mu a_1 - \frac{p_{xx} - p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} \\
 \frac{\partial p_{yy}}{\partial t} + u \frac{\partial p_{yy}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + w \frac{\partial p_{yy}}{\partial z} &= -\lambda \tilde{\omega} - 2\mu a_2 - \frac{p_{yy} - p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} \\
 \frac{\partial p_{zz}}{\partial t} + u \frac{\partial p_{zz}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{zz}}{\partial y} + w \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} &= -\lambda \tilde{\omega} - 2\mu a_3 - \frac{p_{zz} - p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} \\
 \frac{\partial p_{yz}}{\partial t} + u \frac{\partial p_{yz}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + w \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} &= -\mu c_1 - \frac{p_{yz}}{T} \\
 \frac{\partial p_{zx}}{\partial t} + u \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{zx}}{\partial y} + w \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} &= -\mu c_2 - \frac{p_{zx}}{T} \\
 \frac{\partial p_{xy}}{\partial t} + u \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + w \frac{\partial p_{xy}}{\partial z} &= -\mu c_3 - \frac{p_{xy}}{T} \\
 \rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} &= \rho X - \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \right) \\
 \rho \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right\} &= \rho Y - \left(\frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} \right) \\
 \rho \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right\} &= \rho Z - \left(\frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} \right) \\
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0.
 \end{aligned} \right\} (2)$$

Rappelons maintenant comment, après avoir intégré les équations précédentes, on peut déterminer l'état de déformation dans lequel on doit concevoir le corps fictif pour que, à chaque instant, la distribution des pressions intérieures dans le corps fictif représente la distribution des pressions réelles dans le sein du liquide à l'instant considéré.

Envisageons dans le corps fictif deux particules B et C infiniment voisines d'une troisième particule A . Désignons par A_0, B_0, C_0 les positions des particules A, B, C avant la déformation et par A_1, B_1, C_1 leurs positions après la déformation. Si l'on désigne par α, β, γ les cosinus directeurs du vecteur B_0, C_0 , on aura:

$$\begin{aligned}
 \frac{B_1 C_1^2}{B_0 C_0^2} &= (1 + 2\varepsilon_1^*)\alpha^2 + (1 + 2\varepsilon_2^*)\beta^2 + (1 + 2\varepsilon_3^*)\gamma^2 \\
 &\quad + 2\gamma_1^* \beta \gamma + 2\gamma_2^* \gamma \alpha + 2\gamma_3^* \alpha \beta
 \end{aligned}$$

où

$$(3) \quad \varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*,$$

représentent certaines quantités qui définissent la déformation du corps fictif et que nous appellerons „composantes de la déformation du corps fictif“. Cela posé, voici ce que nous avons établi dans le mémoire cité au début de ce numéro: si l'on se représente le corps fictif comme se confondant à chaque instant, dans son état de déformation instantanée, avec le liquide, les quantités (3) pourront être calculées au moyen des équations suivantes:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} = -\lambda \Theta^* - 2\mu \varepsilon_1^* \\ p_{yy} = -\lambda \Theta^* - 2\mu \varepsilon_2^* \\ p_{zz} = -\lambda \Theta^* - 2\mu \varepsilon_3^* \\ p_{yx} = -\lambda \gamma_1^*; \quad p_{xz} = -\lambda \gamma_2^*; \quad p_{xy} = -\lambda \gamma_3^*; \\ \Theta^* = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^* \end{array} \right.$$

où λ et μ représentent les mêmes constantes que dans les équations (2).

Nr. 3. Passons maintenant au problème même que nous nous proposons de résoudre. Prenons à cet effet pour axe des z , l'axe commun des deux cylindres et pour plan des x, y , un plan quelconque perpendiculaire à cet axe. En vertu des conditions dans lesquelles nous nous sommes placés, les différentes quantités qui entrent dans les équations du numéro précédent ne dépendent que des deux variables x et y . On aura en outre

$$w = 0$$

et, de plus, la dernière équation du système (2) ainsi que l'équation

$$(5) \quad \tilde{\omega} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

seront vérifiées identiquement, quelle que soit la forme de l'équation liant la densité ρ du liquide à la quantité p et à la température τ . Il est très aisé de se rendre compte de la justesse des deux dernières remarques: $\tilde{\omega}$ représente la vitesse de dilatation rapportée à l'unité de volume d'une portion infiniment petite du liquide, cette quantité sera donc nulle identiquement en vertu de l'hypothèse faite sur la nature du mouvement considéré; d'autre part, la dernière équation du système (2) peut s'écrire ainsi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \tilde{\omega} = 0.$$

Or l'expression

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

représente la vitesse avec laquelle varie la densité d'une portion infiniment petite du liquide et cette vitesse sera nulle identiquement en vertu de la nature même du mouvement considéré. Donc l'équation de continuité et l'équation (5) seront, comme nous l'avons dit vérifiées identiquement.

Voici par conséquent la forme que prendront ici les équations (2):

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{xx}}{\partial y} &= -2\mu a_1 - \frac{p_{xx} - p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} \\ u \frac{\partial p_{yy}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} &= -2\mu a_2 - \frac{p_{yy} - p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} \\ u \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{xx}}{\partial y} &= -\frac{p_{xx} - p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} \\ u \frac{\partial p_{yz}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} &= -\frac{p_{yz}}{T} \\ u \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{xz}}{\partial y} &= -\frac{p_{xz}}{T} \\ u \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} &= -\mu c_3 - \frac{p_{xy}}{T} \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} \\ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} \\ 0 &= -\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} \end{aligned} \right\} (7)$$

Introduisons les variables r et Θ définies par les formules suivantes:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \Theta \\ y &= r \sin \Theta \end{aligned} \right\} (8)$$

Pour une particule déterminée r sera constant et Θ sera une certaine fonction du temps. Posons

$$\varphi = \frac{d\Theta}{dt} \quad (9)$$

et

$$(10) \quad q = r \frac{d\Theta}{dt}$$

La lettre q représentera alors la vitesse de la particule considérée; cette vitesse sera positive ou négative suivant le sens de rotation de cette particule autour de l'axe des z ; ce sera dans tous le cas une fonction de r seul. On aura:

$$(11) \quad \begin{cases} u = -q \sin \Theta \\ v = q \cos \Theta \end{cases}$$

On s'assurera très aisément que, quelle que soit la fonction $F(x, y)$, l'on aura

$$(12) \quad u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{q}{r} \frac{\partial F}{\partial \Theta}$$

D'autre part, il est évident que l'on aura $p_{yz} = p_{zx} = 0$ et qu'après avoir exprimé p_{zz} en fonction de r et de Θ , on devra trouver:

$$\frac{\partial p_{zz}}{\partial \Theta} = 0.$$

Cela étant, les 3-e, 4 e et 5-e équations du système (6) prennent la forme suivante:

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{p_{zz} - p}{T} + \frac{p_m - p}{T'} = 0 \\ p_{yz} = p_{zx} = \frac{\partial p_{yz}}{\partial \Theta} = \frac{\partial p_{zx}}{\partial \Theta} = 0. \end{cases}$$

Considérons à l'intérieur du liquide un tétraèdre infiniment petit (T); soit σ l'aire d'une des faces de ce tétraèdre et ν_1, ν_2, ν_3 les cosinus-directeurs de la normale à la face σ dirigée vers l'intérieur du tétraèdre. Si l'on désigne par $\sigma F_x, \sigma F_y$ et σF_z les composantes de la pression σF exercée sur cette face du tétraèdre par le liquide adjacent, on aura d'après un théorème classique:

$$(14) \quad \begin{cases} F_x = \nu_1 p_{xx} + \nu_2 p_{xy} + \nu_3 p_{xz} \\ F_y = \nu_1 p_{yx} + \nu_2 p_{yy} + \nu_3 p_{yz} \\ F_z = \nu_1 p_{zx} + \nu_2 p_{zy} + \nu_3 p_{zz}. \end{cases}$$

Il serait aisé maintenant de calculer la projection de la pression σF sur un axe quelconque $L'L$. Si l'on désignait par σF_l cette projection et par $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ les cosinus-directeurs de l'axe $L'L$, on aurait:

$$F_i = \beta_1 F_x + \beta_2 F_y + \beta_3 F_z. \quad (15)$$

Cela posé, désignons par M le centre de gravité de la face σ du tétraèdre infiniment petit (T) et soit M_1 le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe des z . Supposons en premier lieu que les quantités ν_1, ν_2, ν_3 se confondent avec les cosinus-directeurs du vecteur M_1M . La face σ sera perpendiculaire à M_1M et l'on aura, en vertu des formules (14) et des égalités (8) et (13):

$$\left. \begin{aligned} F_x &= p_{xx} \cos \Theta + p_{xy} \sin \Theta \\ F_y &= p_{xy} \cos \Theta + p_{yy} \sin \Theta \\ F_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Menons par le point M un axe MM_2 perpendiculaire à l'axe M_1M et parallèle au plan des x, y . Suivant le sens attribué à l'axe MM_2 ses cosinus-directeurs seront représentés par les quantités

$$-\sin \Theta, \cos \Theta, 0$$

ou par les quantités

$$\sin \Theta, -\cos \Theta, 0.$$

Dirigeons l'axe MM_2 de façon que ses cosinus-directeurs aient les valeurs: $-\sin \Theta, \cos \Theta, 0$. Cela posé, le tétraèdre infiniment petit (T) étant placé comme il a été dit plus haut, si l'on désigne par σP et σQ les projections de la pression σF que supporte la face σ sur les axes M_1M et MM_2 , les quantités P et Q seront évidemment des fonctions de la seule variable $r = \overline{M_1M}$. D'ailleurs les formules (15) et (16) nous donnent:

$$\left. \begin{aligned} P &= p_{xx} \cos^2 \Theta + 2p_{xy} \cos \Theta \sin \Theta + p_{yy} \sin^2 \Theta \\ Q &= p_{xy} (\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta) + (p_{yy} - p_{xx}) \sin \Theta \cos \Theta \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Orientons maintenant notre tétraèdre infiniment petit de façon que les quantités ν_1, ν_2, ν_3 deviennent identiques respectivement aux cosinus-directeurs de l'axe MM_2 . La face σ se trouvera alors dans un plan passant par l'axe des z . La projection de la force σF supportée maintenant par la face σ sur l'axe M_1M sera, comme on le vérifierait sans peine et comme cela résulte d'un théorème classique, égale à σQ . Calculons la projection σH de la même force sur l'axe MM_2 . Les formules (14) nous donnent:

$$\begin{aligned} F_x &= -p_{xx} \sin \Theta + p_{xy} \cos \Theta \\ F_y &= -p_{xy} \sin \Theta + p_{yy} \cos \Theta \\ F_z &= 0 \end{aligned}$$

d'où, en faisant usage de la formule (15):

$$(18) \quad H = p_{xx} \sin^2 \theta - 2p_{xy} \cos \theta \sin \theta + p_{yy} \cos^2 \theta.$$

Il est évident que la fonction H sera une fonction de la seule variable r .

Une transformation facile des formules (17) et (18) nous donnera:

$$P = \frac{1}{2}(p_{xx} + p_{yy}) + \frac{1}{2}(p_{xx} - p_{yy}) \cos 2\theta + p_{xy} \sin 2\theta$$

$$Q = -\frac{1}{2}(p_{xx} - p_{yy}) \sin 2\theta + p_{xy} \cos 2\theta$$

$$H = \frac{1}{2}(p_{xx} + p_{yy}) - \frac{1}{2}(p_{xx} - p_{yy}) \cos 2\theta - p_{xy} \sin 2\theta$$

d'où:

$$(19) \quad \begin{cases} p_{xx} = \frac{1}{2}(P + H) + \frac{1}{2}(P - H) \cos 2\theta - Q \sin 2\theta \\ p_{xy} = \frac{1}{2}(P - H) \sin 2\theta + Q \cos 2\theta \\ p_{yy} = \frac{1}{2}(P + H) - \frac{1}{2}(P - H) \cos 2\theta + Q \sin 2\theta. \end{cases}$$

Les formules (8) et (11) donneront aisément:

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{q}{r} - \frac{dq}{dr} \right\} \sin 2\theta \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{q}{r} + \frac{dq}{dr} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{q}{r} - \frac{dq}{dr} \right\} \cos 2\theta \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{q}{r} + \frac{dq}{dr} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{q}{r} - \frac{dq}{dr} \right\} \cos 2\theta \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{q}{r} - \frac{dq}{dr} \right\} \sin 2\theta. \end{cases}$$

Substituons dans les deux premières et dans la dernière des équations (6) les valeurs (19) des quantités p_{xx} , p_{xy} et p_{yy} et les valeurs (20) des dérivées des fonctions u et v . On effectuera ce calcul rapidement en s'appuyant sur l'identité (12) et l'on obtiendra le système suivant:

$$\frac{q}{r} \left\{ -(P - H) \sin 2\theta - 2Q \cos 2\theta \right\} = -\mu \left\{ \frac{q}{r} - \frac{dq}{dr} \right\} \sin 2\theta - \frac{p_m - p}{T'} \\ - \frac{\frac{1}{2}(P + H) + \frac{1}{2}(P - H) \cos 2\theta - Q \sin 2\theta - p}{T}$$

$$\frac{q}{r} \left\{ (P - H) \sin 2\theta + 2Q \cos 2\theta \right\} = +\mu \left\{ \frac{q}{r} - \frac{dq}{dr} \right\} \sin 2\theta - \frac{p_m - p}{T'} \\ - \frac{\frac{1}{2}(P + H) - \frac{1}{2}(P - H) \cos 2\theta + Q \sin 2\theta - p}{T}$$

$$\frac{q}{r} \left\{ (P - H) \cos \theta - 2Q \sin 2\theta \right\} = + \mu \left\{ \frac{q}{r} - \frac{dq}{dr} \right\} \cos 2\theta - \frac{\frac{1}{2}(P - H) \sin 2\theta + Q \cos 2\theta}{T},$$

système que l'on peut écrire comme il suit:

$$\left. \begin{aligned} L \sin 2\theta + M \cos 2\theta + N &= 0 \\ -L \sin 2\theta - M \cos 2\theta + N &= 0 \\ M \sin 2\theta - L \cos 2\theta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

en posant:

$$L = - (P - H) \frac{q}{r} + \mu \left(\frac{q}{r} - \frac{dq}{dr} \right) - \frac{Q}{T}$$

$$M = - 2Q \frac{q}{r} + \frac{P - H}{2T}$$

$$N = \frac{\frac{1}{2}(P + H) - p}{T} + \frac{p_m - p}{T'}$$

Le système (21) est évidemment équivalent au système

$$L = M = N = 0,$$

ce qui donne:

$$\left. \begin{aligned} (P - H) \frac{q}{r} - \mu \left(\frac{q}{r} - \frac{dq}{dr} \right) + \frac{Q}{T} &= 0 \\ 4Q \frac{q}{r} - \frac{P - H}{T} &= 0 \\ \frac{\frac{1}{2}(P + H) - p}{T} + \frac{p_m - p}{T'} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Introduisons maintenant les variables r et θ dans les deux premières équations du système (7). Nous avons

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = - \frac{\partial p_{xx}}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial r} \cos \theta$$

$$\frac{\partial p_{yy}}{\partial y} = \frac{\partial p_{yy}}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial r} \sin \theta$$

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} = - \frac{\partial p_{xy}}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial r} \cos \theta$$

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial p_{xy}}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial r} \sin \theta.$$

D'autre part la formule (11) et l'identité (12) nous donnent:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{q^2}{r} \cos \Theta$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + x \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{q^2}{r} \sin \Theta.$$

Cela posé, on s'assurera au moyen d'un calcul facile, en s'appuyant sur les formules (19), que les deux premières équations (7) prennent la forme suivante:

$$\left(\varrho \frac{q^2}{r} - \frac{P-H}{r} - \frac{dP}{dr} \right) \cos \Theta + \left(\frac{2Q}{r} + \frac{dQ}{dr} \right) \sin \Theta = 0$$

$$-\left(\frac{2Q}{r} + \frac{dQ}{dr} \right) \cos \Theta + \left(\varrho \frac{q^2}{r} - \frac{P-H}{r} - \frac{dP}{dr} \right) \sin \Theta = 0,$$

d'où:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho \frac{q^2}{r} = \frac{dP}{dr} + \frac{P-H}{r} \\ 0 = \frac{2Q}{r} + \frac{dQ}{dr} \end{array} \right.$$

Nr. 4. On verra aisément avec un peu d'attention que le problème est ramené à la détermination des sept quantités P , Q , H , p_{xx} , p , q et q . Pour les calculer, il faut adjoindre aux cinq équations formant l'ensemble des systèmes (22) et (23), 1° la relation qui existe entre la température τ et les quantités p et q , 2° l'équation de l'équilibre thermique obtenue en tenant compte du dégagement de chaleur dû à la viscosité, 3° la première équation du système (13).

Mais ce qu'il y a d'intéressant c'est ceci: il est possible de déterminer les quantités Q et q sans avoir recours aux deux relations précédentes. D'autre part, si l'on admet les vues de M. Natanson sur la relation qui existe entre le phénomène de la double réfraction dans les expériences dont il a tenté de donner la théorie et les éléments qui caractérisent l'état de déformation du corps fictif défini dans l'introduction, les seuls éléments qu'il y ait lieu de calculer sont précisément Q et q . A cause de cela, c'est à la détermination de ces éléments-là que nous allons nous borner; cela nous permettra d'arriver au but en ne nous servant que des équations déjà établies.

La seconde des équations (23) donne:

$$Q = \frac{A}{r^2} \quad (24)$$

en désignant par A la constante arbitraire introduite par l'intégration. D'autre part, on tire des deux premières équations du système (22):

$$Q = \frac{\mu \left(\frac{q}{r} - \frac{dq}{dr} \right) T}{4T^2 \left(\frac{q}{r} \right)^2 + 1}. \quad (25)$$

Posons

$$q = r \varphi, \quad (25)$$

il viendra:

$$Q = \frac{-\mu T r \frac{d\varphi}{dr}}{4T^2 \varphi^2 + 1} \quad (26)$$

En portant cette valeur de Q dans l'équation (24), on trouve

$$\frac{\mu T \frac{d\varphi}{dr}}{4T^2 \varphi^2 + 1} = -\frac{A}{r^3}$$

d'où

$$\varphi(r) = \frac{1}{2T} \operatorname{tg} \left(\frac{A}{\mu r^2} + \frac{B}{\mu} \right), \quad (27)$$

en désignant par B une nouvelle constante arbitraire introduite par l'intégration.

Désignons par a et b ($a < b$), les rayons des parois cylindriques contenant le liquide et plaçons-nous dans le cas général où chacune de ces parois tourne autour de leur axe commun avec une vitesse angulaire donnée. Désignons par α et β les vitesses angulaires de la paroi intérieure et de la paroi extérieure. Si l'on admet, ce qui est très probable, qu'il ne se produise pas de glissement au contact du liquide avec les parois qui le contiennent, on aura pour déterminer les constantes A et B le système suivant de deux équations:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{A}{\mu a^2} + \frac{B}{\mu} \right) &= 2T\alpha \\ \operatorname{tg} \left(\frac{A}{\mu b^2} + \frac{B}{\mu} \right) &= 2T\beta. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

En calculant au moyen de ces équations les constantes A et B , il faudra tenir compte de ce que la fonction $\varphi(r)$ doit rester finie dans toute l'étendue de l'intervalle (a, b) . Cette condition fait disparaître toute ambiguïté dans la solution. En effet désignons par α_1 et β_1 les arcs compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ vérifiant les équations:

$$(29) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha_1 = 2T\alpha \\ \operatorname{tg} \beta_1 = 2T\beta. \end{cases}$$

Portons sur le cercle trigonométrique à partir de l'origine E des arcs, un arc $EA_1 = \alpha_1$ et un arc $EB_1 = \beta_1$ et soient A_1' et B_1' les points diamétralement opposés sur le cercle trigonométrique aux points A_1 et B_1 . Portons encore sur notre cercle trigonométrique l'arc variable

$$EM = \frac{A}{\mu r^2} + \frac{B}{\mu}.$$

Pour $r = a$, le point M coïncidera, en vertu des équations (28) et (29) avec le point A_1 ou avec le point A_1' . Pour $r = b$ le point M devra coïncider: dans le premier cas avec le point B_1 et dans le second avec le point B_1' ; autrement la fonction $\varphi(r)$ aurait une discontinuité dans l'intervalle (a, b) . Nous aurons donc:

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{A}{\mu a^2} + \frac{B}{\mu} = \alpha_1 + (k' + 2k'')\pi \\ \frac{B}{\mu b^2} + \frac{B}{\mu} = \beta_1 + (k' + 2k''')\pi \end{cases}$$

où les lettres k' , k'' et k''' représentent des entiers quelconques. Mais, pour que la fonction $\varphi(r)$ soit continue dans l'intervalle (a, b) , il faut encore que la différence

$$\frac{A}{\mu a^2} + \frac{B}{\mu} - \left(\frac{A}{\mu b^2} + \frac{B}{\mu} \right)$$

soit, en valeur absolue, inférieure à π . On aura donc $k' = k''$ et si l'on pose $k = k' + 2k''$, on déduira des équations (30) les formules suivantes:

$$(31) \quad \begin{aligned} \frac{A}{\mu} &= \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (\alpha_1 - \beta_1) \\ \frac{B}{\mu} &= \frac{b^2 \beta_1 - a^2 \alpha_1}{b^2 - a^2} + k\pi. \end{aligned}$$

Portons ces valeurs de $\frac{A}{\mu}$ et de $\frac{B}{\mu}$ dans la formule (27); il viendra:

$$\varphi(r) = \frac{1}{2T} \operatorname{tg} \left\{ \frac{a^2 b^2 (\alpha_1 - \beta_1)}{(b^2 - a^2) r^2} + \frac{b^2 \beta_1 - a^2 \alpha_1}{b^2 - a^2} \right\} \quad (32)$$

où, comme nous l'avions annoncé, aucune ambiguïté ne subsiste. On voit en même temps que, sans nuire à la généralité, on peut prendre

$$\frac{B}{\mu} = \frac{b^2 \beta_1 - a^2 \alpha_1}{b^2 - a^2}.$$

Occupons-nous maintenant de la déformation du corps fictif. Considérons à cet effet une particule M du liquide et envisageons un système d'axes mobiles x', y', z' superposable au système x, y, z , défini comme il suit: l'origine et l'axe des z' du système x', y', z' coïncide avec l'origine et l'axe des z du système x, y, z , tandis que le plan des y', z' passe constamment par la particule M . Cela posé rapportons la déformation du corps fictif aux axes (x', y', z') . Dans ces conditions les composantes de la déformation en M seront des fonctions de la seule variable r , distance du point M à l'axe des z_1 et elles seront identiques aux valeurs que prennent les quantités

$$\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*$$

calculées au moyen des formules (4), lorsqu'après y avoir effectué le changement de variables défini par les formules

$$x = r \cos \Theta; \quad y = r \sin \Theta,$$

on fait $\Theta = \frac{\pi}{2}$. Désignons, comme M. Natanson, par $\gamma_{r_1}^*$ la valeur que prend γ_3^* dans ces conditions et calculons $\gamma_{r_1}^*$. La seconde des formules (19) donne:

$$\{p_{xy}\}_{\Theta = \frac{\pi}{2}} = -Q,$$

on aura donc, en vertu de la 6-e des formules (4):

$$\gamma_{r_1}^* = \frac{Q}{\mu}$$

et les formules (24) et (31) donneront:

$$\gamma_{r_1}^* = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{\alpha_1 - \beta_1}{r^2} \quad (33)$$

D'après les vues théoriques adoptées par M. Natanson, la quantité qu'il désigne par Δ et qu'il appelle „la double réfraction rap-

portée à l'unité de longueur" { terme qu'il ne définit pas } serait donnée par la formule

$$(34) \quad \Delta = R \gamma_{rq}^*$$

où R représente „un coefficient optique“. On voit que le phénomène de la double réfraction ne dépendrait, d'après M. Natanson, que de γ_{rq}^* , élément que nous avons pu déterminer sans faire usage de la relation qui existe entre p , q et τ et de l'équation de l'équilibre thermique.

Mettons la formule (33) sous une forme plus commode. On a:

$$tg(\alpha_1 - \beta_1) = \frac{tg \alpha_1 - tg \beta_1}{1 + tg \alpha_1 tg \beta_1}$$

d'où en vertu des formules (29):

$$tg(\alpha_1 - \beta_1) = \frac{2T(\alpha - \beta)}{1 + 4T^2\alpha\beta}$$

Par conséquent la formule (33) prendra la forme définitive que voici:

$$(35) \quad \gamma_{rq} = \frac{a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{2T(\alpha - \beta)}{1 + 4T^2\alpha\beta} \right\}$$

Mais quelle est la détermination de l'expression

$$(36) \quad \operatorname{arctg} \left\{ \frac{2T(\alpha - \beta)}{1 + 4T^2\alpha\beta} \right\}$$

qu'il faut prendre dans la formule (35)? Les arcs α_1 et β_1 sont compris chacun entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, par conséquent la différence $\alpha_1 - \beta_1$ sera inférieure en valeur absolue à π et elle aura le même signe que la différence $\alpha - \beta$. Par conséquent la détermination demandée de l'expression (36) est comprise entre $-\pi$ et $+\pi$ et elle est positive ou négative en même temps que la différence $\alpha - \beta$.

La formule (35) offre des particularités qui pourraient étonner:

1°. Lorsque les quantités a , b , α et β ont des valeurs fixes, α et β étant en outre de même signe, si l'on fait croître T à partir de zéro, γ_{rq}^* croît d'abord en valeur absolue mais, à partir d'une certaine valeur de T , facile à calculer, cette fonction décroît en valeur absolue et tend vers zéro. Ceci est en désaccord avec l'idée fondamentale que nous avons adoptée au sujet du jeu des forces intérieures dans le liquide. Quelle est la raison de ce paradoxe?

L'explication en est facile: les équations fondamentales dont nous sommes partis ont été établies dans l'hypothèse où toutes les composantes de la déformation du corps fictif sont très petites, or il est aisé de voir que, lorsque l'on fait croître T indéfiniment, α et β restant fixes, certaines de ces composantes cessent de satisfaire à l'hypothèse précédente. Par conséquent lorsque α et β ont des valeurs données, la formule (35) n'est applicable que pour des valeurs de T qui ne dépassent pas une certaine limite. Il n'est donc pas étonnant que la formule (35) conduise à une conséquence absurde quand on examine ce qui se produit lorsque T croît indéfiniment.

2°. Peut-être trouvera-t-on étrange que, d'après la formule (35), γ_{ra}^* ne se présente pas, considéré comme fonction des vitesses angulaires α et β des parois cylindriques contenant le liquide, sous forme d'une fonction de la différence $\alpha - \beta$ de ces vitesses angulaires. Ceci n'a rien de paradoxal. En effet la force centrifuge ne peut évidemment pas être sans influence sur la distribution des pressions dans le sein du liquide et par conséquent elle doit aussi influencer sur la déformation du corps fictif. Or la force centrifuge est un élément qui ne dépend pas uniquement de la différence $\alpha - \beta$. Donc il n'y a pas lieu de s'étonner de ce que la formule (35) contienne α et β autrement que par l'intermédiaire de leur différence.

Il y a intérêt à remarquer que la constante T' n'entre pas dans la formule (35). Le phénomène de la double réfraction considérée ne dépendrait donc nullement de T' .

Nr. 5. M. Natanson envisage le cas où le cylindre extérieur est fixe tandis que le cylindre intérieur tourne en effectuant N tours par seconde.

Les formules (35) et (34) donneront dans ce cas

$$\Delta = R \frac{a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2} \operatorname{arctg} (4\pi T N) \quad (37)$$

Cette formule est tout à fait différente de celle de M. Natanson; il trouve:

$$\Delta = \frac{R A N T}{1 + B N^2 T^2} \quad (38)$$

où

$$A = \frac{4\pi a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)}; \quad B = \frac{16\pi^2 a^4 (b^2 - r^2)^2}{r^4 (b^2 - a^2)^2}.$$

Peut-être dira-t-on que la formule (38) ne doit pas être regardée comme inexacte pour la raison suivante: les équations d'où nous sommes partis ont été établies dans l'hypothèse où les composantes de la déformation du corps fictif sont assez petites pour qu'il soit permis de négliger toutes les quantités de degré supérieur au premier par rapport à ces composantes de la déformation du corps fictif; or le produit TN est de l'ordre de grandeur de $\gamma_{r_0}^*$, donc les puissances du produit TN de degré supérieur au premier seraient négligeables et les formules (37) et (38) pourraient être considérées, l'une et l'autre, comme équivalentes à la formule suivante:

$$(39) \quad \Delta = 4R \frac{\pi a^2 b^2 TN}{(b^2 - a^2)r^2}.$$

Cette manière de voir serait incorrecte: en examinant la formule de M. Natanson, nous ne devons pas tenir compte des restrictions qui dérivent de la théorie que nous avons exposée nous-mêmes; nous sommes tenus de nous placer dans les conditions où se place M. Natanson lui-même. Or les valeurs du produit TN pour lesquelles il applique sa formule, ne sont pas assez petites pour qu'il soit permis de négliger le terme BN^2T^2 ; d'ailleurs il suffit de jeter un coup d'oeil sur les tables numériques qui se trouvent dans le mémoire de M. Natanson pour s'assurer que, dans sa pensée, le terme BN^2T^2 n'est nullement négligeable. Pour élucider la question d'une façon plus complète, passons à une application numérique des formules comparées.

Considérons le rapport de la valeur de Δ pour $r = b$ à la valeur de la même quantité pour $r = a$ et désignons par α et α' les valeurs de ce rapport déduites des formules (37) et (38) respectivement. On trouve:

$$(40) \quad \alpha' = \alpha (1 + 16\pi^2 N^2 T^2)$$

Dans la première série d'expériences considérées par M. Natanson, dans celle qui, selon lui, se prête le mieux aux applications de la théorie, il prend $T = 0,0014$ et le nombre 54 est une des valeurs de N comprises entre les valeurs extrêmes de cet élément dans la série des expériences considérées. L'équation (40) donne, en y portant les valeurs numériques précédentes de N et de T :

$$\alpha' > \alpha \cdot 1,89.$$

Par conséquent, la formule de M. Natanson accuse des variations bien plus rapides de Δ lorsque r varie dans l'intervalle (a, b) que celles qui résulteraient de la formule (37).

A la vérité, la discussion précédente de la formule de M. Natanson est presque superflue, parce que cette formule ne peut, comme on le verra au chapitre suivant, être considérée comme déduite logiquement par M. Natanson des hypothèses que lui-même a adoptées. Par conséquent l'accord ou le désaccord de cette formule avec d'autres formules théoriques ou avec l'expérience, ne peut nous donner aucun renseignement sur le bien fondé des hypothèses en vue de la vérification desquelles elle a été établie par son auteur.

III. Analyse du travail de M. Natanson „Sur la double réfraction accidentelle dans les liquides“¹⁾.

Nr. 6. Si M. Natanson était parti des équations (1) et (2) du § 8 de son mémoire „Sur les lois de la viscosité“²⁾ il serait parvenu, en dirigeant ses calculs correctement, à la formule (37) du chapitre précédent, formule que nous avons obtenue nous-même. En effet, d'une part les équations (6) du chapitre précédent se réduisent aux équations (1) et (2) du § 8 du mémoire de M. Natanson en posant

$$\frac{1}{T'} = 0$$

et d'autre part la formule (37) ne contient pas la constante T' . Or cela justifie pleinement notre assertion. En réalité, M. Natanson s'appuie sur les équations (9) et (10) du § 8 de son mémoire sur les lois de la viscosité. C'est ce qu'il dit explicitement à la seconde ligne de la page 166 du mémoire que nous analysons. Ce système d'équations, que nous désignerons par (E) est précisément celui qui, comme nous l'avons montré ailleurs³⁾, est incompatible avec l'un des principes fondamentaux de la mécanique.

¹⁾ Bulletin de l'Académie de Cracovie 1901.

²⁾ Bulletin de l'Académie de Cracovie 1901.

³⁾ Zaremba. Remarques sur les travaux de M. Natanson relatifs à la théorie de la viscosité. Bulletin de l'Académie de Cracovie 1903.

Examinons de plus près l'usage que fait M. Natanson des équations (E). Dans les calculs qu'il développe au § 4, il effectue les intégrations indiquées dans ces équations en regardant x et y comme des fonctions du temps; or, pour appliquer les équations en question d'une façon correcte, il aurait fallu effectuer les intégrations précédentes en traitant x , y et z comme des quantités indépendantes du temps. D'ailleurs cette application incorrecte des équations (E) conduit accidentellement au même résultat qu'une application correcte des équations exactes dont nous nous sommes servis nous-mêmes. C'est ce qui explique pourquoi la formule (2) du § 5 du mémoire de M. Natanson est exacte. Au § 6 M. Natanson applique de nouveau les équations (E), mais cette fois il ne commet plus l'inconséquence que nous avons relevée au § 4. Les résultats qu'il obtient maintenant ne dérivent naturellement pas de l'hypothèse qu'il a adoptée dans sa conception de la viscosité; il obtient ceux auxquels aurait conduit une application correcte de la théorie classique de la viscosité. Il est aisé de se rendre compte pourquoi il en est ainsi: les équations (E) sont équivalentes à celles que l'on obtient en supprimant dans les premiers membres des six premières équations du système (2) du chapitre précédent les termes qui contiennent l'une des quantités u , v , w en facteur et en posant de plus $\frac{1}{T^v} = 0$. Or quand on envisage un cas de mouvement permanent

les dérivées des quantités p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} , p_{yz} , p_{zx} et p_{xy} par rapport au temps sont nulles et les équations précédentes se réduisent, sauf une différence de notations, aux équations de la théorie classique de la viscosité. Il convient enfin de relever dans les calculs de M. Natanson le défaut suivant: il ne détermine pas conformément aux conditions du problème les éléments arbitraires introduits par l'effectuation des intégrations indiquées dans les équations (E). Il arrive à cause de cela à des formules qui ne conviennent pas, comme cela devrait être le cas, au régime du mouvement permanent. Ce n'est que parce qu'il néglige, dans ses formules, les éléments qui dépendent du temps, que le temps disparaît dans la formule finale.

Il est évident que le résultat définitif obtenu par M. Natanson, résultat que nous avons comparé d'ailleurs à la fin du chapitre précédent au résultat exact, ne se rattache en réalité, comme nous l'avons affirmé, à aucune théorie.

30. PUBLICATIONS DE LA CLASSE.

Le Secrétaire dépose sur le bureau la dernière publication de la Classe:

J. Brzeziński. „Rak drzew, jego przyczyny i powawy“. (*Le chancre des arbres ses causes et ses symptômes*), 23 gravures, 8-o, p. 65.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Pod redakcją

Członka delegowanego Wydziału matem.-przyr., Dra Władysława Natansona.

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządkiem J. Filipowskiego.

28 Lipca 1903.



