BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

Nº 5. Mai 1903.

19. SÉANCE PUBLIQUE ANNUELLE DU 12 MAI 1903.

S. E. M. Julien Dunajewski, Vice-Protecteur de l'Académie, ouvre la séance au nom de Son Altesse Impériale et Royale, le Protecteur.

Le Président de l'Académie, comte Stanislas Tarnowski, prononce l'allocution d'usage.

Le Secrétaire général rend compte des travaux de l'Académie pendant l'année qui vient de s'écouler et annonce que, dans la séance générale du 11 mai, ont été élus:

I. Dans la Classe de Philologie, membres correspondants: MM. le Dr. Vladimir Demetrykiewicz, Jean Rozwadowski, Stanislas Schneider.

II. Dans la Classe d'Histoire et de Philosophie, membres titulaires: MM. S. E. le comte Edouard Piniński, Louis Kubala; membres correspondants: MM. Jean Fijałek, Alexandre Hirschberg.

III. Dans la Classe des Sciences mathématiques et naturelles, membres titulaires: MM. Léon Marchlewski, Edouard Suess, François Vejdowsky; membres correspondants: MM. Michel Siedlecki et Stanislas Zaremba.

M. Jean Błoz-Antoniewicz, membre correspondant de la Classe de Philologie, fait ensuite une conférence sur le sujet suivant: *„Amor Sacro e Profano du Titien“*.

Enfin, le Secrétaire général proclame les noms des lauréats de l'Académie.

Le Prix Barczewski, destiné à récompenser l'ouvrage d'Histoire le plus méritant, est décerné à M. Marie Sokołowski pour son ouvrage: *„Etudes sur l'histoire de la sculpture polonaise au XV^e et XVI^e siècle“*.

Le Prix Barczewski, destiné à récompenser l'oeuvre de peinture la plus remarquable, est attribué à M. Hyacinthe Malczewski pour son tableau: *„Trois têtes“*.

Séance du lundi 4 Mai 1903.

Présidence de M. E. GODLEWSKI.

20. M. EDOUARD JANCZEWSKI m. t. **Układ naturalny gatunków w rodzaju Porzeczka (Ribes).** ***(Essai d'une disposition naturelle des espèces dans le genre Ribes L.).***

Considéré jadis comme genre unique d'une famille particulière, les Grossulariées, le groseiller est habituellement incorporé aujourd'hui à la famille des Saxifragacées dont il constitue à lui seul la tribu des Ribesioïdées.

Le nombre des espèces décrites et surtout les différences notables dans le port, l'odeur, la grappe, les fleurs, les fruits etc. des espèces aussi communément cultivées que le *R. Grossularia, R. vulgare, R. nigrum, R. sanguineum, R. aureum, R. alpinum,* ont depuis longtemps obligé les phytographes de morceler le groseiller en sections, sous-genres ou genres; cependant leurs essais n'ont pas eu trop de succès, et les dispositions proposées par Berlandier [1]), Spach [2]), Maximowicz [3]), devaient être plus ou moins modifiées

[1]) Mém. de la Soc. physique de Genève. III. 2. 1826. DC. Prodromus syst. regni vegetabilis III. 1828.

[2]) Revisio Grossulariaearum, Ann. des sc. natur. 1 s. IV. 1835. Histoire des végétaux phanérogames VI. 1838.

[3]) Decad. pl. n. Jap. et Mandch. Bull. Acad. Pétersbourg XIX. 1874.

dans les traités de dendrologie, où il s'agissait de classer un nombre d'espèces plus considérable et de donner le moyen de les déterminer sans trop d'embarras. Elles étaient entièrement artificielles, ne résultaient pas d'observations suivies sur des plantes vivantes et, pour cette raison, rapprochaient des espèces fort disparates et en éloignaient de bien proches.

La disposition que nous allons tenter d'établir, reposera sur d'autres principes; si elle ne peut être encore définitive et complète, c'est que, à peu d'exceptions près, les espèces de l'Amérique méridionale et plus d'une de l'Asie et de l'Amérique septentrionale, ne pouvaient être étudiées à l'état vivant et leurs particularités ne pouvaient être connues autrement que par l'examen d'échantillons d'herbier ou par des diagnoses insuffisantes.

Ces principes, nous les exposerons brièvement et aborderons dans la suite la caractéristique des nouveaux sous-genres, dont les plus riches en espèces demanderaient encore à être divisées en sections conformes à la nature des espèces qui les constituent.

Mode de végétation. Dans les vrais groseillers à grappes, comme *R. vulgare* Lamarck (*R. domesticum* nob.), *R. rubrum* L., *R. petraeum* Wulf., *R. multiflorum* Kit. et autres, tout bourgeon à fleurs est axillaire, produit sur un scion robuste ou une petite brindille, dont le bourgeon terminal est toujours un bourgeon à bois, absolument comme dans nos arbres fruitiers à noyaux (Cerisier, Prunier, Pêcher etc.). Dans les cassis (*R. nigrum* L., *R. floridum* L'Hérit., *R. villosum* Gay etc.), les groseillers épineux (*R. Grossularia* L., *R. niveum* Lindl., *R. Lobbii* Gray, *R. speciosum* Pursh, etc.) et dans d'autres sous-genres, le bourgeon à fleurs prend naissance aussi bien à l'aisselle d'une feuille qu'au sommet de la branche — scion, brindille ou lambourde réduite à ce seul bourgeon — tout comme dans nos arbres fruitiers à pépins (Poirier, Pommier etc). Le prolongement de la branche est dans ce cas engendré à l'aisselle de la dernière feuille qui précède la grappe; les feuilles deviennent aussi. en partie, fasciculées. Rarement la grappe est portée par une petite brindille de l'année, longue de quelques centimètres (*R. Maximowiczii* Batal., *R. molle* de Poeppig, *R. villosum* Gay).

Ecailles. Pendant le repos de la végétation, les bourgeons sont couverts d'écailles imbriquées, tantôt herbacées, quelquefois colorées en beau rouge (*R. prostratum* L'Hérit., *R. laxiflorum* Pursh), tantôt

1*

scarieuses, brunes ou cendrées, translucides ou plus épaisses et opaques. Les espèces voisines, appartenant au même sous-genre, ne diffèrent jamais par la nature de leurs écailles.

Pédicelles et pédoncules. La fleur des groseillers est habituellement portée par un pédicelle (axe de deuxième ordre) qui est court ou long, inséré à l'aisselle d'une bractée sur le rachis (axe de premier ordre), muni ordinairement de deux bractéoles et articulé immédiatement avec l'ovaire. Lorsque la fleur tombe, c'est à cette place qu'elle se détache du pédicelle persistant. Dans les groseillers épineux, le vrai pédicelle, même s'il porte deux bractéoles (*R. subvestitum* Hook et Arn.), est réduit à une toute petite excroissance articulée avec le faux pédicelle que nous appellerons pédoncule, parce qu'il rappelle à tout égard le pédoncule de la poire et tombe avec la fleur inféconde, exactement comme dans le poirier.

Organes sexuels. A l'exception des fleurs monstrueuses, toutes les autres contiennent les deux sexes. Ceux-ci sont tous les deux fertiles dans les fleurs hermaphrodites, tandis que dans les dioïques l'un des deux reste stérile, mais ne disparaît pas. Les anthères des fleurs femelles sont beaucoup plus petites que les fertiles, elles ouvrent cependant leurs loges; dans les fleurs mâles, le style et les deux stigmates existent toujours, mais l'ovaire ne contient ordinairement aucune cavité et est remplacé par un pédoncule articulé avec le pédicelle et aussi mince que lui. Dans les *Berisia*, toutes les espèces, dans les *Calobotrya* et *Coreosma* quelques-unes sont dioïques; les autres sous-genres ne contiennent que des espèces à fleurs bisexuées.

Inflorescence. Bien que la grappe soit quelquefois changée en épi, corymbe, capitule, ou en ombelle sessile pauciflore (*R. fasciculatum* Sieb. et Zucc.), même remplacée par une fleur solitaire dans des espèces voisines sous tout autre rapport, sa structure et sa direction peuvent être constantes dans toutes les espèces appartenant au même sous-genre. Ainsi, elle est toujours normale dans les *Ribesia*, pauciflore et corymboïde (épi en réalité) dans les *Grossularia*.

Trichomes. Il n'y a pas de *Ribes* entièrement dépourvu de poils de nature double, les uns simples, les autres glanduleux.

Les *poils simples*, unicellulaires ou cloisonnés une ou deux fois vers la base, varient considérablement, d'une espèce à l'autre, sous le rapport de la direction, longueur, diamètre et épaisseur de la membrane plus ou moins distinctement mamelonnée; leur abondance est au contraire très peu fixe dans les individus de la même espèce et sert souvent à distinguer des formes d'ordre inférieur, considérées à tort comme variétés ou espèces dites élémentaires.

Les *poils glanduleux* sont encore plus variables sous le rapport de leur abondance et des dimensions de leur pédoncule, mais la nature de la glande ne change jamais dans les limites de l'espèce et se maintient constante dans la plupart des sous-genres. Nous connaissons trois types de ces glandes: cristallines, visqueuses et huileuses.

Les *glandes cristallines* sont des corps pluricellulaires, sphériques ou allongés, dont les cellules gorgées de substance réfringente et riche en tannin ne sécrètent rien à l'extérieur. Leur existence est bien éphémère. Leurs pédoncules, pluricellulaires et plurisériés, sont tantôt très courts, tantôt plus développés, parfois transformés en soies coniques, visibles à l'oeil nu, verticales sur le scion, obliques à la face supérieure de la feuille. Vers la base du pétiole, ces soies sont ordinairement plumeuses (ornées de poils simples) et monocéphales, rarement ramifiées et polycéphales. Sur le scion et même sur l'ovaire, elles peuvent être remplacées, en totalité ou en partie, par de véritables aiguillons, dépourvus de glande terminale, lignifiés et persistants.

Les *glandes visqueuses* sont sphériques, turbinées ou discoïdes, ressemblent beaucoup aux cristallines, mais sécrètent une substance visqueuse, souvent aromatique, protégée d'abord par la cuticule soulevée, ensuite mise à nu, collant au doigt ou au papier. Leurs pédoncules varient comme ceux des glandes cristallines et se développent quelquefois aussi en soies distinctes, glabres sur les scions et les feuilles, plumeuses (ornées de poils simples) et monocéphales vers la base du pétiole, plus rarement glabres, ramifiées et polycéphales en cet endroit (*R. orientale* Desf.).

Les *glandes huileuses* sont minces, discoïdes ou légèrement pelviformes, toujours sessiles, attachées par le centre un peu plus épais (à deux couches cellulaires) à l'épiderme. Elles sécrètent une substance huileuse, aromatique, jaune, qui soulève considérablement la cuticule, la distend sans la rompre et se conserve bien longtemps sous cette protection. A l'oeil nu ou à la loupe, ces glandes ont l'air de taches rondes, jaunes, brillantes, dispersées sur l'épiderme, quelquefois presque se touchant par les bords. Une bonne partie de ces glandes avorte de bonne heure, avant de sécréter la substance huileuse, et reste pour ainsi dire arrêtée à l'état cristallin, comme cela a lieu par exemple à la face supérieure des feuilles du cassis (*R.*

nigrum L). Les espèces munies de ces glandes sont toujours inermes et dépourvues de soies; si elles en portent de plumeuses à la base du pétiole, ces soies sont nécessairement acéphales, ne dérivent pas de glandes et constituent par conséquent une troisième forme de trichomes dans ces plantes.

De tous les caractères exposés, nous choisissons pour la clef analytique des sous-genres, seulement ceux qui ne souffrent aucune exception et ont le privilège d'être reconnus avec facilité sur des plantes vivantes, souvent aussi sur les échantillons d'herbier.

A. Écailles scarieuses.

1. Bourgeons à fleurs uniquement axillaires . . . I. *Ribesia.*
2. Bourgeons à fleurs terminaux et axillaires:
   - a. Fleurs dioïques . . . . II. *Berisia.*
   - b. Fleurs bisexuées.
     - α. Grappe normale . . . . III. *Grossularioides.*
     - β. Grappe pauciflore, corymboïde . . IV. *Grossularia.*

B. Écailles herbacées.

1. Glandes visqueuses, rarement cristallines V. *Calobotrya.*
2. Glandes huileuses, sessiles . . . . . IV. *Coreosma.*

Une caractéristique plus détaillée de chaque sous-genre que nous allons maintenant donner, écartera les doutes possibles sur la place qui revient à toute espèce de *Ribes*, examinée de plus près, et démontrera, nous le croyons, que notre disposition n'est pas artificielle comme les antérieures, mais qu'elle correspond à la véritable affinité des espèces, généralement aussi à leur distribution géographique. Les noms admis sont pour la plupart anciens, mais employés pour des groupes autrement circonscrits et définis. Les caractères de nos sous-genres ne seront pas suivis de l'énumération des espèces qui les possèdent, parce que l'étude de l'espèce exige du temps et de l'expérience et constituera l'objet d'un travail postérieur.

1. Ribesia (Berl) nob [1]).

Arbustes inermes, érigés, parfois presque rampants (*R. triste* Pallas). Bourgeons moyens, à écailles scarieuses, plus ou moins pu-

[1]) Le nom de *Ribesia* fut donné par Berlandier à tous les groseillers inermes

bescentes. Feuilles moyennes ou assez grandes, caduques, plissées en bourgeon. Glandes cristallines pédonculées, quelquefois portées par de soies coniques. Bourgeons à fleurs uniquement axillaires; les terminaux, plus gros, toujours à bois. Grappe réclinée, quelquefois pendante. Fleurs petites ou moyennes, bisexuées. Sépales quelquefois réfléchis pendant l'anthèse (*R. multiflorum* Kit.). Ovaire glabre, articulé avec le pédicelle quelquefois très bref (*R. moupinense* Franch). Fruit glabre, petit ou moyen, rouge, rarement noir, juteux, acidulé ou acerbe, ordinairement comestible. Une dizaine d'espèces: *R. longeracemosum,* Franch., *R. sutchuense* sp. n., *R. himalayense* Dcne., *R. moupinense* Franch., *R. Meyeri* Maxim., *R. Griffithii* Hook. f. et Thom. sont exclusivement asiatiques, *R. vulgare* Lamarck (*R. domesticum* Jancz.) n'est spontané que dans l'Europe occidentale, *R. rubrum* L., *R. multiflorum* Kit. habitent l'Europe et l'Asie du nord, *R. petraeum* Wulf. l'Europe, l'Asie du nord et les monts Atlas en Afrique, *R. triste* Pall. l'Asie et l'Amérique boréales, depuis les embouchures du Yennissey jusqu'à l'Atlantique.

2. Berisia Spach[1]).

Arbustes inermes, rarement armés d'aiguillons peu nombreux, érigés ou nains (*R. Davidii* Franch.). Bourgeons moyens ou plus gros, à écailles scarieuses. Feuilles petites ou moyennes, rarement ovoïdes, indivises et coriaces (*R. Davidii*), plissées ou involutées (*R. diacantha* Pall.) en bourgeon. Glandes cristallines, plus rarement visqueuses (*R. orientale* Desf., *R. sardoum* Martelli), pédonculées, quelquefois portées sur des soies coniques. Bourgeons à fleurs terminaux sur lambourdes, brindilles et scions, axillaires sur brindilles et scions. Grappe ordinairement normale, érigée, plus rarement transformée en ombelle sessile pauciflore (2—4, *R. fasciculatum* ♀ Sieb. et Zucc., *R. sardoum* ♀ Martelli). Fleurs petites ou moyennes, dioïques par stérilité de l'autre sexe, rarement polygames (?). Ovaire glabre, quelquefois hérissé de poils glanduleux, articulé avec le pédicelle et remplacé dans les fleurs mâles par un pédoncule aussi mince que le

ou subinermes, sauf le *R. aureum* Pursh, érigé en sous-genre *Symphocalyx;* il a été maintenu par Maximowicz à peu près dans les mêmes limites.

[1]) Le nom de *Berisia* fut donné par Spach à une section de son genre *Ribes* (Hist. d. vég. phan.), absolument correspondante à la nôtre. Les autres sections de Spach, *Conostylium* et *Cylindrostylium*, de son *Ribes*, embrasssaient les espèces distribuées chez nous parmi les: *Grossularioides, Calobotrya* et *Ribesia.*

pédicelle. Fruit petit ou moyen, rouge, rarement orange, glabre, quelquefois hispide, insipide. Graines germant beaucoup plus vite et plus régulièrement que dans les autres sous-genres, quelquefois en quinze jours. Une dizaine d'espèces, presque toutes asiatiques: *R. diacantha* Pall., *R. fasciculatum* Sieb. et Zucc., *R. acuminatum* Wall., *R. Davidii* Franch., *R. Henryi* Franch. et autres, encore insuffisamment connues. Le *R. alpinum* L. est commun à l'Asie et à l'Europe, *R. orientale* à l'Asie (occidentale et centrale) la Grèce et l'Italie. Enfin le *R. sardoum* Martelli, fut assez récemment découvert dans les montagnes de la Sardaigne. Aucune espèce n'habite donc le nouveau monde.

3. Grossularioides nob. [1]).

Arbustes piquants, peu élevés, d'un port semblable à celui de notre groseiller épineux. Bourgeons petits, à écailles scarieuses. Glandes cristallines, pédonculées, quelquefois portées par des soies coniques. Feuilles petites ou presque moyennes, rarement munies d'aiguillons sur les deux faces (*R. lacustre var. horridum*), plissées en bourgeon. Bourgeons à fleurs terminaux sur brindilles et lambourdes, axillaires sur brindilles et scions. Grappe réclinée. Fleurs moyennes, bisexuées. Ovaire hérissé de soies à glandes cristallines rouges, articulé avec le pédicelle distinct. Fruit petit ou moyen, rouge ou noir, un peu hispide. Deux espèces: *R. montigenum* Mc Clatchie (*R. lacustre var. molle* Gray), habitant les montagnes Rocheuses, Sierra Nevada et autres de l'ouest de l'Amérique septentrionale, et *R. lacustre* Poiret, étendu dans ce pays depuis l'Atlantique jusqu'au Pacifique et au delà, sur l'île de Sachalin et en Mandchourie orientale.

4. Grossularia A. Rich. [2]).

Arbustes armés d'aiguillons. Bourgeons petits, à écailles scarieuses. Feuilles caduques, petites ou moyennes, quelquefois coriaces

[1]) Berlandier confondit ce type avec les groseillers épineux, Spach et Maximowicz avec les groseillers à grappes. En réalité, il constitue un lien entre les *Ribesia* et *Grossularia,* et ne peut être incorporé ni à l'un ni à l'autre.

[2]) Ce nom fut adopté par Ach. Richard pour les groseillers épineux. Berlandier mit dans les *Grossularia* le *R. lacustre* Poir. (un *Grossularioides*) et le *R. cuneifolium* Ruiz et Pav. (un *Calobotrya*), Maximowicz son *R. ambiguum* (un *Calobotrya*).

(*R. speciosum* Pursh), plissées en bourgeon. Glandes cristallines, rarement visqueuses, pédonculées ou portées par des soies coniques, quelquefois remplacées par des aiguillons. Bourgeons à fleurs terminaux sur brindilles et lambourdes, axillaires sur scions et brindilles. Grappe corymboïde, pauvre, ordinairement bi- ou triflore, souvent subsessile. Fleurs moyennes ou assez grandes et ornementales, bisexuées, rarement tétramères et tubuleuses (*R. speciosum* Pursh), ordinairement à sépales réfléchis (*R. Grossularia* L., *R. niveum* Lindl., *R. cynosbati* L., *R. divaricatum* Dougl., *R. stenocarpum* Maxim. et autres), quelquefois réclinés (*R. Lobbii* Gray, *R. Menziesii* Pursh, *R. subvestitum* Hook. & Arn.) pendant l'anthèse. Anthères glabres, quelquefois pubescentes (*R. niveum* Lindl.), même glanduleuses sur le dos (*R. Lobbii* Gray), ou sagittées (*R. Menziesii* Pursh, *R. subvestitum* Hook et Arn.). Ovaire glabre (*R. divaricatum* Dougl., *R. oxyacanthoides* L. et autres), pubescent (*R. Grossularia* L. *var. uva crispa),* épineux (*R. burejense* Fr. Schmidt, *R. Menziesii* Pursh, *R. Watsonianum* Koehne, *R. pinetorum* Greene, *R. cynosbati* L.) ou couvert de soies glanduleuses (*R. grossularia* L., *R. subvestitum* Hook. et Arn.) ou de glandes subsessiles (*R. Lobbii* Gray). L'ovaire est toujours pédonculé; la fleur tombe avec le pédoncule qui est articulé avec un pédicelle réduit à un petite excroissance quelquefois munie de bractéoles (*R. subvestitum*). Fruit petit, moyen ou gros, de couleur différente, glabre, pubescent, hispide ou armé d'aiguillons, comme l'ovaire, succulent ou dur, comestible ou insipide. Une vingtaine d'espèces bien variables, habitant pour la plupart l'Amérique du Nord; quelques-unes sont asiatiques, une seule européenne, le *R. Grossularia* L., habitant aussi les monts Atlas en Afrique.

5. Calobotrya (Spach) nob [1]).

Arbustes inermes, érigés, quelquefois humbles et presque rampants (*R. prostratum* L'Hérit., *R. laxiflorum* Pursh). Bourgeons moyens ou gros, couverts d'écailles herbacées. Feuilles petites, moyennes ou grandes, caduques, quelquefois coriaces et persistantes, plissées, rarement involutées en bourgeon (*R. aureum* Pursh). Glandes visqueuses (souvent odorantes), rarement cristallines, pédonculées, por-

[1]) Ce nom fut donné par Spach (Rev. Gross.) au *R. sanguineum* Pursh, ensuite abandonné (Hist. vég. phan.) par cet auteur qui finit par incorporer cette espèce dans son genre *Coreosma,* à côté du *R. floridum* L'Hérit.

tées quelquefois sur des soies assez rigides. Bourgeons à fleurs terminaux sur lambourdes, brindilles, quelquefois aussi sur scions, axillaires sur brindilles et scions. Grappes normales, réclinées ou érigées, quelquefois produites sur de courtes brindilles de l'année (*R. Maximowiczii* Batal., *R. molle* de Poeppig); grappes corymboïdes (*R. viscosissimum* Pursh), capituliformes (*R. cereum* Dougl.), ombelles pauciflores sessiles, ou fleurs solitaires (*R. ambiguum* Maxim). Fleurs de grandeur très différente, quelquefois ornementales, même odorantes, bisexuées, dioïques dans quelques espèces de l'Amérique méridionale. Ovaire glabre ou hérissé de poils glanduleux, pédonculés ou subsessiles, plus rarement pubescent, articulé avec le pédicelle. Fruit habituellement noir, pruineux, ou rouge, hispide, glabre ou pubescent, dur ou pulpeux, doux ou insipide. Environ une trentaine d'espèces habitant presque toutes l'Amérique occidentale, tant septentrionale que méridionale. Seulement le *R. aureum* Pursh s'étend depuis le Pacifique presque jusqu'aux monts Alléghanes, le *R. laxiflorum* Pursh traverse même le Pacifique pour habiter le Japon et la Mandchourie orientale, le *R. prostratum* L'Hérit. habite le nord, depuis les montagnes Rocheuses jusqu'à l'Atlantique. — Deux espèces sont asiatiques, le *R. ambiguum* Maxim. au Japon, le *R. Maximowiczii* Batal. en Chine centrale (Kansu oriental); aucune n'habite l'Europe.

6. Coreosma (Spach) nob [1]).

Arbustes érigés, parfois presque rampants (*R. procumbens* Pallas). Bourgeons moyens, couverts d'écailles herbacées, quelquefois pubescentes. Feuilles très grandes (*R. bracteosum* Dougl.), ordinairement moyennes ou petites, quelquefois ovoïdes ou lancéolées (*R. viburnifolium* Gray, *R. integrifolium* Phil., *R. nubigenum* Phil.), caduques, semi-persistantes, ou coriaces et complètement persistantes (*R. villosum* Gay, *R. sublobatum* Phil.), plissées en bourgeon. Glandes huileuses, jaunes, plates, rondes, sessiles, très nombreuses ou rares (*R. nubigenum* Phil.). Bourgeons à fleurs terminaux et axillaires. Grappe quelquefois très longue (*R. bracteosum* Dougl.), érigée ou réclinée,

[1]) Ce nom fut donné par Spach (Rev. Gross.) à une section renfermant les: *R. floridum* L'Hérit. *R. Kunthii* Berl., *R. campanulatum* HB, et *R. viscosum* R. & Pav., ensuite employé (Hist. végét. phan.) comme nom de genre embrassant le *R. floridum* l'Hér. et *R. sanguineum* Pursh.

rarement avec une ou deux fleurs basales remplacées par des grappes secondaires (*R. nigrum* L.), transformée, par réduction des pédicelles, en épi terminant une brindille de quelques centimètres (*R. villosum* Gay), ou en ombelle biflore (ou uniflore) sessile (*R. nubigenum* Phil). Fleurs bisexuées, rarement dioïques (*R. villosum*). Ovaire quelquefois glabre (*R. floridum* L'Hérit.), ou pubescent (*R. villosum* Gay, *R. valdivianum* Phil.), ordinairement couvert de glandes huileuses, aromatiques, articulé avec le pédicelle. Fruit glabre, pubescent ou glanduleux, ordinairement noir, quelquefois légèrement pruineux, ou rouge, pulpeux ou dur (?), sucré, acidulé ou insipide. Une vingtaine d'espèces, peut-être davantage, habitant surtout les montagnes de l'Amérique méridionale jusqu'à la Terre de Feu (*R. magellanicum* Poiret), peu nombreuses en Amérique septentrionale (*R. bracteosum* Dougl., *R. hudsonianum* Richards., *R. floridum* L'Hérit., *R. viburnifolium* Gray) et en Asie, où elles lui sont particulières (*R. procumbens* Pall.) ou très proches des espèces américaines (*R. japonicum* Maxim. du *R. bracteosum* Dougl., *R. Dikuscha* Fischer du *R. hudsonianum* Richards.). Enfin le seul *R. nigrum* L. habite l'Europe et l'Asie, jusqu'aux monts Himalaya et le Kamtchatka.

---

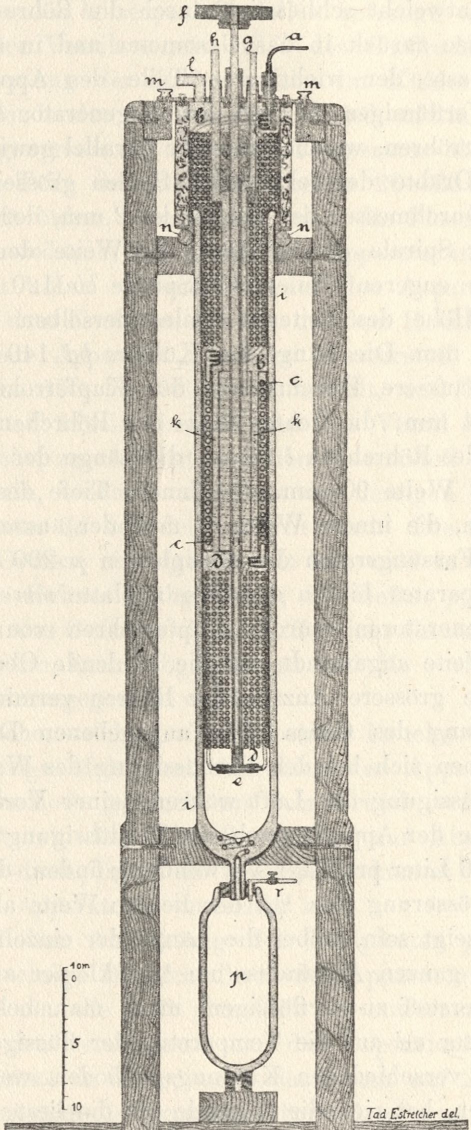
21. M. K. OLSZEWSKI m. t. **Nowy przyrząd do skraplania wodoru.** ***(Ein neuer Apparat zur Verflüssigung des Wasserstoffs).*** *(Un appareil nouveau pour la liquéfaction de l'hydrogène).*

In meiner früheren Abhandlung [1]) habe ich zwei Luftverflüssigungs- sowie einen Wasserstoffverflüssigungsapparat beschrieben. Unlängst habe ich einen neuen Wasserstoffverflüssiger erprobt, mit dessen Herstellung ich während der letzten Monate beschäftigt war. Die Probe ist sehr gut ausgefallen und hat bewiesen, dass dieser neue Apparat während der Verflüssigung des Wasserstoffs noch besser funktioniert als der von mir vorher beschriebene und dass er sowohl zur Verflüssigung von grösseren Mengen Luft wie auch zur demonstrativen Verflüssigung derselben Anwendung finden kann. Das Prinzip des Apparates ist dasselbe geblieben; der Unterschied

[1]) Rozprawy Wydz. Mat.-Przyr. Akad. Kraków, XLII, 457; 1902. — Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie. Décembre 1902.

besteht hauptsächlich darin, dass die beiden Regeneratoren sowie der dazwischenliegende Kühler, welcher zur Aufnahme der flüssigen Luft dient, in demselben Vakuumgefässe untergebracht worden sind. Auf diese Weise wurde eine bessere Wärmeisolierung aller Apparatenteile erreicht, wodurch die Menge der flüssigen Luft, die zur Abkühlung des Apparates und des Wasserstoffs erforderlich ist, erheblich reduziert wurde. Es entfiel auch die Notwendigkeit, Wolle zur Isolierung des Apparates anzuwenden, wodurch die Ausmasse sowie das Gewicht des Apparates beträchtlich verkleinert wurden und der Apparat ein stattlicheres und übersichtlicheres Aussehen gewann.

Die beigefügte Figur stellt einen vertikalen Durchschnitt durch den Apparat dar. Der Verflüssiger *dd*, der Kühler *bd* und der Regenerator *bb* sind an einer Neusilberröhre befestigt, welche mit ihrem oberen Ende an die Messingplatte *mm* mit Hilfe einer entsprechenden Mutter, welche gleichzeitig zum Abdichten der Ventilstange *fe* dient, angeschraubt ist. Die Schrauben *m, m* dienen zum Befestigen der Messingplatte und somit des ganzen metallenen Teiles des Apparates an dem hölzernen Gestell. Der Verflüssiger *dd*, sowie der untere, engere Teil des Regenerators *bb* sind mit Flanell so umwickelt, dass sie in das Vakuumgefäss *ii* mit leichter Reibung hineinpassen; das Gefäss ist mit Ausnahme des unteren Teiles unterhalb des Ventils *e* innen versilbert. Das Messingrohr *oo*, welches im oberen Teile an den Messingdeckel dicht angeschraubt ist, ruht mit dem unteren Teile auf dem Kautschukringe *nn*; so dass man durch Anziehen der Schrauben *m, m* einen gasdichten Abschluss zwischen dem oberen Teile des Apparates *mn* und dem Vakuumgefässe *ii* erreichen kann. Der Raum zwischen dem Rohre *oo* und dem erweiterten Teile des Regenerators *bb* ist behufs Isolation mit Flanell ausgefüllt. Das Röhrchen *g* dient zum Hineingiessen von flüssiger Luft in den Kühler *bd*, die verdampfende Luft entweicht durch die Röhre *h* nach aussen. Aus dem Kompressor, bezw. aus dem Hochdruckreiniger, welcher mit Kalistangen beschickt ist, gelangt der Wasserstoff durch die Röhre *a* in den Regenerator *bb* und darauf durch die abgekühlte Spirale *cc* in den Verflüssiger *dd*, welcher in einem Ventil *e* endet; dieses Ventil, welches mittels des Griffrädchens *f* reguliert werden kann, dient zum Entspannen des Wasserstoffs. Das expandierte Gas strömt auf dem Rückwege zwischen den Windungen des Verflüssigers *dd*


f
h
g
a
l
m
m
n
n
i
b
c
k
k
c
d
e
i
r
p
10cm
0
5
10
Tad Estreicher del.

hindurch und gelangt dann durch die Röhrchen *kk*, welche sich in dem Kühler *bd* befinden, zwischen die Windungen des Regenerators *bb* und entweicht schliesslich durch die Röhre *l* nach aussen, beziehungsweise zurück in das Gasometer und in den Kompressor.

Die Ausmasse der wichtigeren Teile des Apparates sind folgende: der Verflüssiger *dd* und der Regenerator *bb* bestehen aus je drei Kupferröhren, welche einander parallel gewickelt sind, ähnlich wie die Drähte der sekundären Spulen grösserer Induktoren. Der äussere Durchmesser der Röhren ist 2 mm, der innere 1·2 mm, die Höhe der Spirale *dd* 140 mm, die Weite derselben 48 mm, die Höhe des engeren Teiles der Spirale *bb* 120 mm, die Weite 48 mm, die Höhe des weiteren Teiles derselben Spirale 50 mm, die Weite 68 mm. Die Länge des Kühlers *bd* 140 mm, die Weite 50 mm, der äussere Durchmesser des Kupferrohres *cc* 3·8 mm, der innere 2·4 mm; die lichte Weite der Röhrchen *kk* 6 mm, die lichte Weite des Röhrchens *l* 8 mm, die Länge der Messingröhre *oo* 100 mm, ihre Weite 90 mm. Die innere Tiefe des Vakuumgefässes *ii* 500 mm, die innere Weite 51 mm, der äussere Durchmesser 65 mm, der Fassungsraum des Recipienten *p* 200 cm³. Die ganze Höhe des Apparates bis zu der Messingplatte *mm* 810 mm. Zum Bau der Regeneratoren wurden Kupferröhren von möglichst kleiner lichter Weite angewandt, um die kühlende Oberfläche zu vergrössern; eine grössere Anzahl der Röhren vermindert die übermässige Reibung des Gases. Die angegebenen Dimensionen des Apparates haben sich bei der Verflüssigung des Wasserstoffs sowie bei der Verflüssigung der Luft während einer Vorlesung sehr gut bewährt. Sollte der Apparat auch zur Verflüssigung grösserer Mengen Luft (3—6 Liter pro Tag) Verwendung finden, dann würde eine geringe Vergrösserung (um $^1/_5$) der lichten Weite aller Röhren und Gefässe angezeigt sein, wobei die Länge der einzelnen Teile sowie die Höhe des ganzen Apparates (um $^1/_{10}$) kleiner ausfallen könnte.

Um Wasserstoff zu verflüssigen, muss man bekanntlich zuerst den Regenerator *dd* auf die Temperatur der flüssigen Luft abkühlen. Von den verschiedenen Kühlungsmethoden, welche angewandt werden können, hat sich die folgende als die beste erwiesen: man giesst in den Kühler *db* flüssige Luft durch das Röhrchen *g* solange hinein, bis die Flüssigkeit durch das Röhrchen *h* in Gestalt kleiner Tröpfchen herauszuspritzen anfängt; darauf verbindet man die Röhre *a* mit einer Stahlflasche, von 13 Liter Fassungsraum, welche trockene und kohlensäurefreie Luft unter einem Drucke von etwa 100 Atm. enthält, sowie mit einem Metallmanometer, welches an der rechten Seite des hölzernen Gestelles befestigt werden kann. Durch Öffnen des Ventils *e* mit Hilfe des Griffrades *f* bewirkt man die Entspannung der Luft, welche im Kühler *bd* auf die Temperatur der siedenden Luft abgekühlt wird, und innerhalb 4—5 Minuten den Regenerator *dd* auf diese Temperatur abkühlt. Wenn sich im unteren Teile des Gefässes *ii* etwa 20—30 cm³ flüssige Luft angesammelt haben, verschliesst man die Flasche mit komprimierter Luft, wodurch der Druck im Apparate in kurzer Zeit auf 1 Atm. sinkt. Man verbindet darauf den Apparat mit Hilfe des Rohres *a* mit dem Kompressor bezw. mit dem Hochdruckreiniger des Hampsonschen Apparates, welcher Wasserstoff unter einem Drucke von etwa 150 bis 200 Atm. enthält, und leitet in den Apparat Wasserstoff hinein, indem man das Ventil des Reinigers vorsichtig aufmacht; zuerst leitet man den Wasserstoff unter schwachem Druck hinein, wodurch der Rest der flüssigen Luft, welche sich im Regenerator *dd* befindet, entfernt wird. Die flüssige Luft, welche sich im Gefässe *ii* aufgesammelt hat, wird in das Gefäss *p* durch Öffnen des Hahnes *r* abgelassen; das Gefäss *p*, welches mit dem Abflussrohre des Gefässes *ii* mit Hilfe eines Kautschukstopfens verbunden ist, kann leicht abgenommen und die verflüssigte Luft aus demselben herausgegossen werden.

Eine Stahlflasche, welche Luft unter einem Drucke von 100 Atm. enthält, kann einige Male zum Abkühlen des Apparates dienen. Diese Kühlungsmethode ist auch aus dem Grunde vorteilhaft, weil die flüssige Luft mit dem Flanell, welches zur Abdichtung des Regenerators *dd* dient, nicht in Berührung kommt und deshalb leichter aus dem Apparate zu entfernen ist.

Nach wiederholter Abdichtung des Recipienten *p* lässt man Wasserstoff noch einige Minuten durch den Apparat unter kleinem Drucke strömen, um die Luft gründlich zu entfernen. Nachdem dieses geschehen ist, verschliesst man das Expansionsventil *e* und setzt den Kompressor in Gang; wenn der Druck auf 200 Atm. gestiegen ist, beginnt man die Expansion, bezw. lässt man den Wasserstoff zirkulieren, indem man das Ventil *e* vorsichtig aufmacht. Um die Entspannung zu regulieren, bedient man sich der Angaben des oben erwähnten Metallmanometers für hohe Drucke, sowie eines Glycerinmanometers (welches in der Zeichnung nicht ersichtlich ist); dieses ist oben an der linken Seite des hölzernen Gestelles befestigt und mit dem Röhrchen *l* mittels einer entsprechenden Abzweigung verbunden. Beinahe gleichzeitig mit dem Beginn der Entspannung des Wasserstoffs fängt die dieses Gas verunreinigende Luft an zu erstarren; nach Ablauf einer Minute ungefähr beginnt auch der Wasserstoff sich zu verflüssigen und sammelt sich im unteren Teile des Gefässes *ii* an. Durch Lüften des Hahnes *r* lässt man den flüssigen Wasserstoff durch ein Leinwandsieb (welches in der Figur nicht abgebildet ist) in den versilberten Recipienten *p* hinunterfliessen. Nach Ablauf von 8 bis 10 Minuten vom Beginn des Expandierens an gerechnet füllt sich der Recipient von 200 cm^3 Fassungsraum vollständig mit flüssigem Wasserstoff an. Die zum Abkühlen des Apparates sowie zum Verflüssigen von 200 cm^3 Wasserstoff verbrauchte Menge flüssiger Luft betrug blos 1700 gr. Die Verflüssigung weiterer Portionen Wasserstoff erfordert in dem bereits abgekühlten Apparate nur noch eine kleine Luftmenge. In einem versilberten Vakuumgefässe hält sich der flüssige Wasserstoff verhältnismässig lange; die vollständige Verflüchtigung einer Portion von 200 cm^3 dieser Flüssigkeit fand erst nach Verlauf von fünf Stunden statt, obwohl dieselbe Portion zur Messung der elektrischen Leitfähigkeit von sieben Spulen mit aufgewickelten Metalldrähten diente.

Der oben beschriebene Apparat funktioniert im allgemeinen tadellos; ich bemerkte nicht einmal eine zeitweilige Verstopfung des Expansionsventils, obwohl der Wasserstoff wahrscheinlich infolge des Undichtwerdens des Kompressors während des Versuches ziemlich stark mit Luft verunreinigt wurde. Die Analyse des Wasserstoffs nach Beendigung des Experimentes ergab einen Gehalt von 0·9% Sauerstoff. Das regelmässige Funktionieren des Expansionsventils ist dadurch erzielt worden, dass der Regenerator *dd* aus drei parallelen Kupferröhren zusammengewickelt ist sowie dass das Gewinde der Ventilstange in den unteren Teil des Kühlers *bd* versetzt worden ist, an welchem Orte die den Wasserstoff verunreinigende Luft nicht erstarren und die Bewegungen des Ventils nicht hemmen kann. Um jedoch die Verstopfung der dünnen Kupferröhrchen des Regenerators zu verhüten, soll man sie vor einem jeden Experimente genau trocknen, indem man durch dieselben vermittels einer Pumpe Luft durchzieht.

Krakau, I chemisches Universitätslaboratorium.

22. M. JOSEPH PUZYNA m. c. **O sumach nieskończenie wielu szeregów potęgowych i o twierdzeniach Mittag-Lefflera z teoryi funkcyi.** ***(Über Summen unendlich vieler Potenzreihen und über die funktionen-theoretischen Sätze des Herrn Mittag-Leffler).*** *(Sur les sommes d'un nombre infini de séries entières et sur le théorème de M. Mittag-Leffler).*

Der Verfasser beschäftigt sich im I Teile dieses Aufsatzes mit der Summe

$$S = \sum_{s=1}^{\infty} \mathfrak{P}_s(x)$$

unendlich vieler Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_s(x) = a_{s0} + a_{s1}x + a_{s2}x^2 + \ldots.., \quad s = 1, 2, 3, \ldots.$$

Soll diese Summe im gemeinsamen Konvergenzbereiche (r) ihrer Addenten nicht nur gleichmässig, sondern auch absolut konvergieren so gilt der Satz, dass in ihrer Entwickelung nach Potenzen von x:

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots.. \tag{1}$$

die Koëffizienten

$$A_\mu = a_{1\mu} + a_{2\mu} + a_{3\mu} + \ldots, \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots$$

ohne Ausnahme unbedingt konvergierende Reihen sein müssen.

Um die Umkehrung dieses Satzes ganz allgemein zu beweisen, wird die Summe S untersucht, ohne irgend welche Voraussetzungen über ihre Konvergenz resp. Divergenz in (r) zu machen.

Wenn man mit $R_s(x)$ den Rest

$$R_s(x) = a_{s,\,\nu_s} . x^{\nu_s} + \ldots\ldots$$

des Addenten $\mathfrak{P}_s(x)$ bezeichnet, so kann man stets solche — mit s wachsende — Zahlen ν_s finden, welche die Grenze $\lim_{s=\infty} \nu_s = \infty$ erreichen und für welche die Summe

$$T_{\nu_1 \nu_2 \ldots} = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(x)$$

in (r) gleichmässig und absolut konvergent wird. Der Beweis stützt sich auf die Vergleichung der Reihe $\Sigma\,|R_s(x)|$ mit einer beliebigen konvergenten Reihe: $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \ldots.)$ von lauter positiven Addenten ε_s. Die Summe $T_{\nu_1 \nu_2 \ldots}$ wird als eine dem S adjungierte Summe bezeichnet.

Es fragt sich nun, ob die Fälle vorkommen können, in welchen auch $\lim_{s=\infty} \nu_s$ endlich sein kann. Dazu ist augenscheinlich notwendig (aber nicht hinreichend), dass

$$(A)\ \lim_{s=\infty} \mathfrak{P}_s(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{c-1} x^{c-1} + 0 \,.\, x^c + 0 \,.\, x^{c+1} + \ldots\ldots$$

wird, und diese Bedingung lässt sich ohne Mühe direkt aus der gegebenen Summe S entnehmen.

Um nun auch die hinreichenden Bedingungen für die Endlichkeit aller ν_s zu bestimmen, wird zuerst die Summe $S = \sum_{s=1}^{\infty} \mathfrak{P}_s(x)$ von der Eigenschaft untersucht, dass sie die Bedingung

$$\text{(a)} \qquad \lim_{s=\infty} \mathfrak{P}_s(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots.$$

erfüllt und dass ihre formelle Entwickelung $\Sigma A_\mu x^\mu$ lauter unbedingt konvergierende Koëffizienten A_μ — mit endlichem oder divergierendem $\lim A_\mu$ — besitzt. Im ersten Falle ist die Reihe $\Sigma A_\mu x^\mu$ sicher konvergent. Im zweiten Falle wird ihre Konvergenz auf folgende Weise bewiesen.

Scheidet man aus S die Summe

$$T_{\nu_1 \nu_2 \ldots} = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots$$

mit $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \ldots$ und mit $\lim \nu_s = \infty$ aus, so hat die Reihe $\Sigma B_\mu x^\mu$, als Entwickelung einer gleichmässig (und absolut) konvergenten Summe sicher einen bestimmten Konvergenzbereich.

Setzt man

$$\mathfrak{P}_s(x) = P_s(x) + R_s(x), \quad s = 1, 2, \ldots$$

und wird noch die Summe

$$T'_{\nu_1 \nu_2 \ldots} = \sum_{s=1}^{\infty} P_s(x),$$

deren formelle Entwickelung mit

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots..$$

bezeichnet wird, gebildet, so sind die Koëffizienten C_μ alle endlich, denn in den hier bestehenden Gleichungen $B_\mu + C_\mu = A_\mu$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots.$, sind die Grössen A_μ und B_μ endlich.

Die Grenze

$$\lim_{\mu=\infty} C_\mu \text{ ist} = 0$$

infolge der Bedingung (a). Die Reihe $C_0 + C_1 x + \ldots.$ ist demnach konvergent und da

$$(B_0 + B_1 x + \ldots) + (C_0 + C_1 x + ..) = A_0 + A_1 x + \ldots$$

ist, so hat die Potenzreihe $\Sigma A_\mu x^\mu$, welche bis jetzt nur formell existierte, sicher (auch im Falle lim $A_\mu = \infty$) einen bestimmten Konvergenzbereich. Da nun die Koëffizienten A_μ unbedingt konvergieren (lim A_μ bleibt unendlich bei jeder Anordnung der Addenten), so muss S in ihren Addenten $\mathfrak{P}_s(x)$ absolut konvergent sein. Dies zieht auch die gleichmässige Konvergenz nach sich [1]) und berechtigt die Gleichheit

$$S = A_0 + A_1 x + \ldots.$$

für richtig zu halten.

Die Umkehrung des zu Anfang ausgesprochenen Satzes ist demnach bewiesen.

Jetzt kann die Frage nach den hinreichenden Bedingungen der Endlichkeit aller Zahlen ν_s beantwortet werden.

Betrachtet man wieder eine allgemeine Summe S und sind unter den Koëffizienten

$$A_0,\ A_1,\ A_2, \ldots..$$

der Entwickelung (1), welche jetzt, da man über die Konvergenz der Summe S nichts vorausgesetzt hat, wieder nur formell existiert, die Koëffizienten

$$A_m,\ A_{m+1}, \ldots\ldots$$

ohne Ausnahme b r a u c h b a r d. h. unbedingt konvergent, während dagegen A_{m-1} u n b r a u c h b a r (divergent oder bedingt konvergent) ist [2]), so ist jetzt klar, dass man allen Zahlen ν_s den gleichen Wert m oder $(m+1)$ u. s. w. beilegen und dem S die Summen

$$T_m,\ T_{m+1}, \ldots..$$

mit allen ν_s resp. $=$

$$= m,\ m+1, \ldots.$$

adjungieren kann. Diese Summen werden als die dem S adjungierten Summen vom R a n g e: m, $(m+1)$, u. s. w. bezeichnet.

[1]) Dasselbe lässt sich von der Summe $T'_{\nu_1 \nu_2 \ldots}$ behaupten. $[T'_{\nu_1 \nu_2 \ldots} + T'_{\nu_1 \nu_2 \ldots} = S]$.

[2]) Unter den Koëffizienten A_0, A_1, A_{m-2} können sowol brauchbare wie unbrauchbare vorkommen. Die Grenze $\lim_{\mu=\infty} A_\mu$ kann divergent sein.

Es ist daher neben der Bedingung (a) die Brauchbarkeit der Koëffizienten A_{μ} — von einem bestimmten $\mu = m$ angefangen — auch die hinreichende Bedingung dafür, um in der Adjunktion der Summen $T_{\nu_1 \nu_2 \ldots\ldots}$ nur endliche Zahlen ν_s benützen zu können. Ist $m = 0$, sind also die Koëffizienten $A_0, A_1, A_2, \ldots.$ alle brauchbar, so ist die Summe S selbst ein T_0. Sie ist notwendig gleichmässig und absolut konvergent.

Die oben angeführten und bewiesenen Sätze werden im II Teile zur eingehenderen Diskussion der funktionen-theoretischen Theoreme von Herrn Mittag-Leffler[1]) benützt.

Soll nämlich eine Funktion gebildet werden, welche in einer unendlichen Punktmenge (a_s) mit einer einzigen Häufungsstelle im Unendlichen singulär sein soll und ihre Singularitäten durch die Addenten

$$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right) = \frac{C_{s1}}{x-a_s} + \frac{C_{s2}}{(x-a_s)^2} + \ldots..$$

— [G_s sind ganze, rationale oder transzendente Funktionen] — aufweist, so verfährt man bekanntlich auf folgende Weise:

Man entwickelt vor allem $G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)$ in der Umgebung der Stelle $x = 0$. Ist diese Entwickelung

$$\Phi_s(x) = A_{s0} + A_{s1}x + A_{s2}x^2 + \ldots.., \tag{2}$$

so hat man:

$$A_{s\mu} = -\left[\binom{-\mu-1}{0}\frac{C_{s1}}{a_s} - \binom{-\mu-1}{1}\frac{C_{s2}}{a_s^2} + \right.$$
$$\left. + \binom{-\mu-1}{2}\frac{C_{s3}}{a_s^3} - \ldots\right]\frac{1}{a_s^{\mu}}.$$

Da nun $C_{s1}, C_{s2}, \ldots.$ als Koëffizienten einer beständig konvergierenden Reihe — für endliche s — alle endlich sind und da daher ihre absoluten Beträge eine endliche obere Grenze g_s besitzen, so wird — wenn man dasselbe von $C_{s1}, C_{s2}, \ldots$ für $s = \infty$ voraussetzt —

[1]) Acta math. Bd. 4.; Weierstrass, Abhandlungen aus der Funktionenlehre.

$$|A_{s\mu}| < \frac{g_s}{|a_s|^{\mu+1}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{|a_s|}\right)^{\mu+1}} \qquad s = 1, \ldots, \infty \tag{3}$$

Beachtet man nun, dass $|a_s|$ für sehr grosse s selbst sehr gross werden und dass $\lim_{s=\infty} |a_s| = \infty$ ist, so wird aus den letzten Ungleichheiten gefolgert, dass:

1⁰) alle Koëffizienten in (2) für hinreichend grosse s beliebig klein gemacht werden können,

2⁰) $$\lim_{s=\infty} A_{s\mu} = 0, \; [\mu = 0, 1, 2, \ldots]$$
und

3⁰) $$\lim_{s=\infty} \Phi_s(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots.$$
wird.

Im vorliegenden Falle wird daher die notwendige Bedingung dafür, dass man der Summe

$$S = \sum_{s=1}^{\infty} G_s\left(\frac{1}{x - a_s}\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \Phi_s(x),$$

deren formelle Entwickelung mit $\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu x^\mu$, $\left(A_\mu = \sum_{s=1}^{\infty} A_{s\mu}\right)$, bezeichnet sein soll, ein T_m eines bestimmten Ranges m adjungieren könnte, stets erfüllt. Man wird daher gezwungen, nach den hinreichenden Bedingungen zu fragen.

Diese ergeben sich aus den Ungleichungen (3). Setzt man nämlich dort für g_s die obere Grenze g aller

$$|C_{sk}|, \; s = 1, 2, 3, \ldots \infty, \; k = 1, 2, 3, \ldots, \infty$$

und für $\left\{1 - \frac{1}{|a_s|}\right\}^{-\mu-1}$ die obere Grenze $\left\{1 - \frac{1}{|a_1|}\right\}^{-\mu-1}$ ein, so wird

$$|A_{s\mu}| < \frac{g}{|a_s|^{\mu-1}} \cdot \frac{1}{\left\{1 - \frac{1}{|a_1|}\right\}^{\mu+1}}$$

Daraus kommt:

$$\left|\sum_{s=1}^{\infty} A_{s\mu}\right| = \left|A_\mu\right| < \frac{g}{\left\{1 - \frac{1}{|a_1|}\right\}^{\mu+1}} \cdot \sum_{s+1}^{\infty} \frac{1}{|a_s|^{\mu+1}}$$

und dies beweist, dass die Brauchbarkeit der Koëffizienten A_μ eine Folge der unbedingten Konvergenz der Summen

$$K_{\mu+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{|a_s|^{\mu+1}} \quad \mu = 0, 1, \ldots$$

ist. Sind nun die Summen $K_{\mu+1}$ für $\mu \geqq m$ alle unbedingt konvergent, während K_m noch divergent ist oder bedingt konvergiert, so sind die Koëffizienten A_m, $A_{m+1}, \ldots$ brauchbar und dem S können T_m, $T_{m+1}, \ldots.$ adjungiert werden. Dieses Kennzeichen der Existenz eines bestimmten Ranges wurde bis jetzt öfters an bekannten Funktionen wie $\sec x$, $\zeta(x)$, $p(x)$ u. s. w. bemerkt. Es gilt — wie aus dem Obigen hervorgeht — für eine sehr ausgedehnte Klasse von Funktionen [mit endlichen $\lim_{s=\infty} C_{sk}$, $k = 1, 2, \ldots$] und kann bei jeder beliebigen Funktion der hier betrachteten Art angewendet werden.

Setzt man also

$$P_s(x) = A_{s0} + A_{s1}x + \ldots + A_{s, m-1}x^{m-1}$$
$$\text{oder } = A_{s0} + A_{s1}x + \ldots + A_{s, \nu_s-1} \cdot x^{\nu_s - 1},$$

je nachdem die Existenz des Ranges m nachgewiesen werden konnte oder nicht, so kann eine der verlangten Funktionen die Form haben:

$$\text{(I)} \qquad f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[G_s\left(\frac{1}{x - a_s}\right) - P_s(x) \right].$$

Im Falle eines bestimmten Ranges m werden alle Funktionen, welche durch die Form (I) dargestellt werden und in welchen sich kein (äusserer) Addent, der eine ganze Funktion von x selbst wäre, vorfindet, einfache Funktionen m^{ten} Ranges genannt; [analog mit einfachen Produkten, welche Benennung H. Vivanti eingeführt hat].

Die Funktion $f(x)$ m^{ten} Ranges hat in $x = 0$ eine Nullstelle m^{ter} oder auch höherer, aber bestimmt keiner niederen Ordnung; denn man hat in der Umgebung der Stelle $x = 0$:

$$G_s\left(\frac{1}{x - a_s}\right) - P_s(x) = A_{sm}x^m + \ldots\ldots = F_s(x),$$

und es lässt sich demnach aus allen Addenten der Summe (I) ein Faktor x^k, wo $k \geqq m$ ist, ausscheiden.

Um nun weiter die Funktion $f(x)$ m^{ten} Ranges in ihren Fortsetzungen zu untersuchen, werden die Gleichungen

$$\Phi_s(x) = P_s(x) + F_s(x)$$

in Betrachtung gezogen. Aus diesen — wenn man Φ_s, F_s von nun an in der Bedeutung analytischer Funktionen nimmt — ergeben sich in der Umgebung jedes beliebigen Punktes $x_0 \neq a_s$ folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned} & G_s\left(\frac{1}{(x-x_0)-(a_s-x_0)}\right)=\Phi_s(x\,|\,x_0)= \\ & =\Big[P_s(x_0)+F_s(x_0)\Big]+\frac{1}{1!}\Big[P_s'(x_0)+F_s'(x_0)\Big](x-x_0)+ \\ & \cdots+\frac{1}{(m-1)!}\Big[P_s^{(m-1)}(x_0)+F_s^{(m-1)}(x_0)\Big](x-x_0)^{m-1}+ \\ & +\frac{1}{m!}F_s^{(m)}(x_0).(x-x_0)^m+\frac{1}{(m+1)!}.F_s^{(m+1)}(x_0).(x-x_0)^{m+1}+\cdots \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Setzt man nun:

$$\sum_{h=0}^{m-1}\frac{1}{h!}\Big[P_s^{(h)}(x_0)+F^{(h)}(x_0)\Big](x-x_0)^h=Q_s(x-x_0)$$

und bildet die Summe:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{s=1}^{\infty}\left[G_s\left(\frac{1}{(x-x_0-(a_s-x_0)}\right)-Q_s(x-x_0)\right] \\ &= \sum_{s=1}^{\infty}\Big[\Phi_s(x\,|\,x_0)-Q_s(x-x_0)\Big], \end{aligned}$$

so wird diese sicher gleichmässig und absolut konvergierend, da man durch Substraktion des $Q_s(x-x_0)$ von $\Phi_s(x\,|\,x_0)$ die Glieder ausgeschieden hat, welche $P_s(x_0)$, $P_s'(x_0),\ldots,$ $P_s^{(m-1)}(x_0)$ enthalten, also die Koëffizienten A_{s0}, $A_{s1},\ldots,$ $A_{s,\,m-1}$, deren Summen $\sum\limits_{s=1}^{\infty}A_{s0},\ldots,\sum\limits_{s=1}^{\infty}A_{s,\,m-1}$ schon in der Entwickelung von $f(x)$ in (I) nach Potenzen von x unbrauchbar waren.

Berücksichtigt man nun, dass nach (4):

$$\Phi(x\,|\,x_0)-Q_s(x-x_0)=\frac{1}{m!}F_s^{(m)}(x_0).(x-x_0)^m+\ldots\ldots$$

ist, so hat man auch:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{s=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m!}F_s^{(m)}(x_0).(x-x_0)^m+\ldots..\right] \\ &= \frac{f^{(m)}(x)}{m!}(x-x_0)^m+\frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}+\ldots. \end{aligned}$$

und, wenn man hier auf beiden Seiten die Summe

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(m-1)}(x_0)}{(m-1)!}(x-x_0)^{m-1}=g_{m-1}(x-x_0)$$

hinzuaddiert, gelangt man schliesslich zu folgender Formel:

$$f(x\,|\,x_0)=$$
$$=g_{m-1}(x-x_0)+\sum_{s=1}^{\infty}\left[G_s\left(\frac{1}{(x-x_0)-(a_s-x_0)}\right)-Q_s(x-x_0)\right].$$

Die hier auftretende Summe ist wieder vom Range m, welcher auch ihr niedrigster Rang ist. Daraus ergiebt sich, dass die einfache Funktion $f(x)$ ihren, für die Umgebung des Punktes $x=0$ bestimmten Rang auch bei der Fortsetzung beibehält, hingegen ihre einfache Form verliert.

Nur an jenen Stellen, an welchen g_{m-1} identisch verschwindet — und diese sind Nullstellen der Funktion selbst von der Ordnung $\geqq m$ — tritt sie wieder in der einfachen Form auf.

Der Rang m ist demnach eine Invariante der gebildeten Funktion, und zwar in Bezug auf ihre Fortsetzung. Dieser Begriff der Invarianz des Ranges kann auf unendliche Produkte, welche Funktionen mit unendlich vielen Nullstellen a_s darstellen sollen, übertragen werden.

Bilden a_s eine unendliche Punktmenge mit einer im Endlichen gelegenen Grenzstelle b, so hat man alle $G_s\dfrac{1}{(x-a_s)}$ in:

$$\Phi_s\left(\frac{1}{x-b}\right)=A_{s1}\frac{1}{x-b}+A_{s2}\frac{1}{(x-b)^2}+\ldots.$$

zu entwickeln. Aus den

$$A_{s\mu}=\left[C_{s1}\,(a-b)^{\mu-1}+\binom{\mu-1}{2}C_{s2}(a_s-b)^{\mu-2}+\right.$$
$$\left.+\ldots+\binom{\mu-1}{0}C_{s\mu}\right] \tag{5}$$
$$s=1,2,3,\ldots,\ \mu=1,2,3,\ldots$$

ersieht man, dass hier:

$$\lim_{s=\infty} A_{s\mu} = \lim_{s=\infty} C_{s\mu}\ , \ \mu = 1, 2, 3, \dots \tag{6}$$

wird.

Bildet man nun die Summe

$$S = \sum_{s=1}^{\infty} G_s'\left(\frac{1}{x-a_s}\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \Phi_s\left(\frac{1}{x-b}\right)$$

mit ihrer formellen Entwickelung

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \left(\frac{1}{x-b}\right)^\mu ; \quad A_\mu = \sum_{s=1}^{\infty} A_{s\mu}\ ,$$

so ist hier die Möglichkeit der Adjunktion der Summen eines bestimmten Ranges von folgenden Umständen abhängig.

Die Grössen C_{sk}, als Koëffizienten beständig konvergierender Reihen $G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)$, sind alle für endliche s endlich. Es werden daher auch die Quotienten

$$\frac{|C_{sk}|}{|a_s - b|^k} \tag{a}$$

für alle endlichen s endlich sein.

Setzen wir noch voraus, dass auch die Grenzen

$$\lim_{s=\infty} \frac{|C_{sk}|}{|a_s - b|^k} \tag{b}$$

endlich sind und bezeichnen durch g die obere Grenze aller Quotienten (a), (b), so haben wir aus (5)

$$|A_{sk}| < |a_s - b|^k . g . 2^{\mu-1}.$$

Daraus ersieht man, dass:

$$|A_\mu| < 2^{\mu-1} . g \sum_{s=1}^{\infty} |a_s - b|^\mu$$

ist.

Soll nun der niedrigste Rang m existieren, so ist hinreichend, dass unter den Summen $K'_\mu = \sum\limits_{s=1}^{\infty} (a_s - b)^\mu$ die Summen $K'_m, K'_{m+1}, \dots$ ohne Ausnahme unbedingt konvergieren, während K'_{m-1} noch auf diese Weise nicht konvergiert.

Die hier gefundenen Bedingungen können — aber müssen nicht — erfüllt werden, wenn vor allem die Bedingung

$$\lim_{s=\infty} \Phi_s\left(\frac{1}{x-b}\right)=0.\frac{1}{x-b}+0.\left(\frac{1}{x-b}\right)^2+\ldots.$$

erfüllt wird [vgl. (5) und (6)].

Setzt man jetzt

$$P_s = A_{s1}\frac{1}{x-b}+\ldots..+A_{s,m-1}\left(\frac{1}{x-b}\right)^{m-1}$$

$$\text{oder} = A_{s1}\frac{1}{x-b}+\ldots+A_{s,\nu_s-1}\left(\frac{1}{x-b}\right)^{\nu_s-1},$$

so kann bekanntlich eine der Funktionen, welche in a_s die mit $G_s\left(\frac{1}{x-b}\right)$ verursachten Singularitäten besitzen sollen, stets in der Form

$$\text{(II)} \qquad f(x)_b = \sum_{s=1}^{\infty}\left[G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)-P_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)\right]$$

dargestellt werden.

---

23. M. STANISLAS DOBROWOLSKI. **O cytotoksynie łożyskowej.** ***(Über Cytotoxine der Plazenta).*** *(Sur les cytotoxines placentaires).* Mémoire présenté par M. T. Browicz m. t.

In den letzten fünf Jahren hat man viele Zellulargifte kennen gelernt, die man Cytotoxine benannt hat. Trotz der zahlreichen Arbeiten auf diesem Gebiete hat jedoch bisher niemand auf experimenteller Grundlage die Wirkung des Giftes sowol der tierischen als auch menschlichen Plazenta näher untersucht. Verfasser unternahm im bakteriologischen Institute des Prof. Nowak Experimente in dieser Richtung und untersuchte die Wirkung des plazentaren heterotoxischen Serums.

Verf. ging von der Voraussetzung aus, dass, wenn das heterotoxische Serum, welches für andere Gewebe bereitet wurde, die Fähigkeit besitzt, diese Gewebe zu vernichten, so muss auch das Plazenta-Serum in der Plazenta irgend welche Veränderungen hervorrufen.

Durch seine Experimente wollte Verf. folgende Fragen beantworten:

1) ob nach Einwirkung dieses Serums irgend welche anatomischen Veränderungen in der Plazenta entstehen?
2) ob dieses Serum bei trächtigen Tieren die Schwangerschaft unterbricht?
3) ob dieses Serum irgend welche Veränderungen im Organismus sowol trächtiger als auch nicht trächtiger Tiere hervorruft?
4) ob die in diesem Serum enthaltenen Toxine nur auf Tiere einwirken können, von denen die zur Herstellung des Plazentaserums verwendeten Mutterkuchen stammten, oder ob sie auch auf Tiere verwandter Arten einwirken können?

Vor allem untersuchte Verf. die Giftigkeit von Emulsionen, welche aus tierischen und ferner auch aus menschlichen bei normalen und eklamptischen Entbindungen erhaltenen Mutterkuchen hergestellt waren. Verf. injizierte Tieren die aus tierischen und menschlichen Nachgeburten erhaltene Emulsion subkutan und intraperitoneal und überzeugte sich, dass nur ganz grosse Mengen der Emulsion das zum Experimente angewendete Tier zu töten im stande sind; mittlere und kleinere Mengen rufen keine Veränderungen im tierischen Organismus hervor.

Die eigentlichen Experimente mit dem heterotoxischen Plazenta-Serum teilt Verf. in drei Gruppen ein: die erste umfasst die Experimente mit dem heterotoxischen Serum für Meerschweinchen, die zweite für Kaninchen, die dritte Experimente mit dem für den Menschen bereiteten Serum.

Behufs Gewinnung des für Meerschweinchen heterotoxischen Serums wurden die trächtigen Tiere mittelst Chloroform getötet, die Plazenten durch Laparotomie herausgenommen, durch Waschen in Wasser von Blut gereinigt, in einem sterilisierten Mörser zerrieben, mit sterilem Wasser verdünnt und die so erhaltene Emulsion einer Ziege in einer Menge von 8–16 *ccm* (3 Nachgeburten) viermal in Abständen von 10—15 Tagen injiziert. Drei Wochen nach der letzten Injektion entnahm Verf. der Ziege Blut und stellte aus demselben Serum her.

Dieses Serum injizierte Verf. zunächst zweimal einem nicht trächtigen Meerschweinchen in einer Menge von 4—12 *ccm* pro Kilo Körpergewicht, ohne irgendwelche Veränderungen bei demselben hervorzurufen.

Bei trächtigen Meerschweinchen bewirkte Verf. durch subkutane Injektion von 6—12 *ccm* Serum pro Kilo Körpergewicht immer

Abortus von toten oder noch lebenden unreifen Foeten, die sofort nach der Geburt verendeten. Die Schnelligkeit der Einwirkung des Serums stand in gleichem Verhältnisse zur Höhe der Dosis.

Wurde dieses Serum eine Stunde lang bis zu 60° C erhitzt und dann trächtigen Meerschweinchen selbst in doppelt so grossen Mengen wie früher injiziert, so wirkte dieses Serum gar nicht.

Ferner konstatierte Verf., dass kleine Mengen des Plazenta-Serums ohne jede Wirkung bleiben, gleichviel ob sie subkutan, intravenös oder in den Subduralraum injiziert wurden. Nach subduralen Injektionen beobachtete Verf. keine Veränderungen, die an eklamptische Krämpfe erinnern könnten; die Symptome, welche danach auftraten, entsprachen vollständig den Symptomen des erhöhten intrakraniellen Druckes, wie ein solcher nach Einführung einer gewissen Menge Flüssigkeit in den Subduralraum entsteht.

Verf. gelang es nicht, in dem gegebenen Serum Praezipitine nachzuweisen; in den Nachgeburten, welche bei durch Serum erwirkten Aborten gewonnen wurden, fand Verf. mit Ausnahme einer unbedeutenden Verfettung keine anderen Veränderungen.

Fernerhin konstatierte Verf., dass dieses Serum auch bei trächtigen Kaninchen nach subkutaner Injektion einer Menge von 2—3 *ccm* pro Kilo Körpergewicht Abortus hervorruft, dass aber die Wirkung sehr langsam eintritt.

Behufs Kontrolle der vorherigen Experimente injizierte Verf. trächtigen Meerschweinchen eine zweifache Menge von gewöhnlichem Serum einer Ziege, doch hatte dieses Serum weder auf die Schwangerschaft noch auf den Organismus des Tieres irgend welche Wirkung.

Heterotoxisches Plazenta-Serum für Kanichen gewann Verf. durch viermalige Injektion einer Emulsion von Kaninchen-Nachgeburten bei einem Schafe in einer Menge von 8—10 *ccm* in Zeiträumen von 10—15 Tagen. Das aus dem Blute eines solchen Schafes erhaltene Serum injizierte Verf. trächtigen Kaninchen und bewirkte auf diese Weise immer Abortus bei denselben. Wenn die Menge des Serums 5 *ccm* pro Kilo Körpergewicht des Tieres nicht überschritt, so blieben die Tiere nach der Injektion vollständig gesund. Abortus trat bei den Tieren um so schneller ein, je näher sie sich dem Schwangerschaftsende befanden. Nach Injektion von grösseren Mengen als 5 *ccm* pro Kilo Körpergewicht abortierten zwar die Kaninchen, starben aber kurz nach dem Abortus.

Wenn man die gleichen Mengen von Serum nicht trächtigen Kaninchen injizierte, so verursachten dieselben keine Veränderungen.

Kontrollversuche, bei denen Verf. trächtigen Kaninchen gewöhnliches Ziegen-Serum subkutan injizierte, bewiesen, dass dieses Serum auf die Tiere gar nicht wirkte.

Verf. konstatierte ferner, dass einstündiges Erhitzen des spezifischen Serums auf 60° C dessen Wirkung nicht vollständig aufhebt, sondern nur seine Giftigkeit bedeutend herabsetzt.

Die abortierten Nachgeburten zeigten bei der histologischen Untersuchung ausgedehnte Verfettung.

Die Untersuchung des Serums in Bezug auf Praezipitine ergab ein negatives Resultat. Bei den letzten Experimenten dieser Gruppe konstatierte Verf., dass das Kaninchen-Plazenta-Serum auf Tiere verwandter Gruppen sehr unsicher wirkt und dass kleine Mengen desselben, sei es intravenös, sei es subkutan, sei es subdural, trächtigen Kaninchen injiziert, keinen Abortus bewirken. Die subdurale Injektion von Serum ruft kein den eklamptischen Krämpfen ähnliches Krankheitsbild hervor.

Für die dritte Gruppe der Experimente bereitete sich Verf. ein heteroxisches Plazenta-Serum für Menschen. Die aus menschlichen Nachgeburten hergestellte Emulsion injizierte Verf. einem Ziegenbock und gewann aus dessen Blute das gewünschte Serum.

Obwol es Fälle gibt, wo man die bestehende Schwangerschaft bei Frauen unterbrechen muss, so wurden dennoch keine Versuche mit dem erhaltenen Serum ausgeführt, und zwar aus zwei Gründen: erstens, weil Verf. die Zahl seiner Experimente nicht für hinreichend genug hielt, um die wirksame, zur Hervorrufung des Abortus nötige Dosis bestimmen zu können, und zweitens deshalb, weil sich das Kaninchen-Plazenta-Serum bei einer gewissen Dosis giftig zeigte. Den Experimenten an Frauen müssen nach des Verf. Meinung sehr zahlreiche und auch kostspielige Experimente an höheren Tieren vorangehen, die die genaue Erforschung der Giftigkeit eines solchen spezifischen Serums ermöglichen würden und zugleich die Dosis feststellen liessen, die den Abortus hervorrufen könnte, ohne dabei dem mütterlichen Organismus einen Schaden zu bringen.

Das Serum der dritten Gruppe injizierte Verf. trächtigen Nagetieren subkutan, aber dasselbe rief bei ihnen, wie Verf. voraussah, keine Veränderungen hervor.

Aus allen diesen Experimenten zieht Verf. folgende Schlüsse:

1) Emulsionen von menschlichen oder tierischen Plazenten anderen Tieren in mässigen Dosen subkutan oder intraperitoneal injiziert sind für ihren Organismus unschädlich.
2) Nach den oben angegebenen Vorschriften kann man ein heterotoxisches Plazenta-Serum gewinnen, welches mit Bestimmtheit die Schwangerschaft unterbricht, gleichviel ob es subkutan, intravenös oder intraperitoneal injiziert wird.
3) Ganz kleine Mengen dieses Serums wirken gar nicht.
4) Grössere Mengen dieses Serums (über 5 *ccm* pro Kilo Körpergewicht) bewirken zwar Abortus, können aber auch das zum Experimente benutzte Tier töten.
5) Wenn man dieses Serum selbst in trächtige Tiere tötenden Mengen nicht trächtigen Tieren injiziert, so ruft es keine Veränderungen in ihrem Organismus hervor.
6) Das auf 60°C erhitzte Serum verliert sehr viele von seinen toxischen Eigenschaften.
7) Wenn man das Plazenta-Serum subdural injiziert, so ruft es bei Tieren keine anderen Veränderungen hervor, als wenn man dieselbe Menge einer anderen Flüssigkeit subdural einführt, es bewirkt jedenfalls kein Krankheitsbild, das den eklamptischen Krämpfen, wie solche bei Frauen vorkommen, ähnlich wäre.
8) Dieses Serum wirkt sicher nur bei Tieren jener Art, für welche es zubereitet wurde, bei Tieren verwandter Arten wirkt es sehr unsicher.

---

24. M. PHILIPPE EISENBERG. **O prawach łączenia się toksyn z antytoksynami.** ***(Ueber die Bindungsverhältnisse zwischen Toxin und Antitoxin).*** *(Sur les lois quantitatives de la réaction entre les toxines et les antitoxines).* Mémoire présenté par M. L. Marchlewski m. c.

Da die bisher ausgesprochenen Theorien über die Bindungsgesetze zwischen Toxin und Antitoxin und speziell diejenigen von Ehrlich sowie von Danysz und Bordet unzureichend erscheinen, alle auf diesem Gebiete bekannt gewordenen Tatsachen einheitlich und folgerichtig zu erklären, unternimmt es Verf. diese Erscheinungen im Zusammenhange mit den für andere spezifische Bindungsreaktionen eruierten Verhältnissen sowie mit allgemeinen chemischen Gesetzen zu erklären. Durch den Bordet'schen Versuch [1]) haben wir zuerst erfahren, dass die Bindung des Haemolysins an die Erytrocyten nicht den Gesetzen „einfacher konstanter Proportionen“ folgt, sondern von der relativen Konzentration des Haemolysins bedingt wird. Ehrlich und Morgenroth [2]) zeigten dann, dass ein bestimmtes Blutquantum wechselnde Mengen des haemolytischen Zwischenkörpers binden kann je nach der Höhe des Zwischenkörperzusatzes und dass dabei auch ungebundene Überschüsse von wechselnder Grösse zurückbleiben können. Verf. und Volk [3]) stellten für die Reaktion zwischen Agglutinin und agglutinierbarer Substanz auf Grund exakter quantitativer Untersuchungen fest, dass die quantitativen Bindungseffekte von der relativen Konzentration beider reagierenden Substanzen bedingt werden sowie ferner, dass bei jeder solchen Reaktion neben dem Reaktionsprodukt ungebundene Überschüsse beider reagierenden Substanzen zurückbleiben, die nur, falls sie sehr gering ausfallen, eine vollkommene Absorption vortäuschen können. In Anlehnung an diese Befunde konnte Verf. [4]) zeigen, dass für die spezifischen Praezipitationsvorgänge, ferner für die Vesuvin-Agglutination der Bakterien und für die Eiweissfällung durch Pikrinsäure dieselben Bindungsgesetze Geltung haben.

Es ist ferner das Bestehen analoger Verhältnisse wahrscheinlich gemacht worden für die bakteriziden Immunkörper durch Pfeiffer und Friedberger [5]), für das Spermolysin durch London [6]), für die Saponin-Haemolyse durch Ransom [7]), für die Haemolyse durch Staphylolysin durch Schur [8]), endlich für die Bindung von Farbsäuren an Eiweisskörper durch M. Heidenhain [9]). Angesichts dieser zahlreichen Befunde erklärte ich es schon vor einem Jahre in meiner Praezipitinarbeit für sehr wahrscheinlich „dass dieselben Gesetze für die Bindung zwischen Toxin und Antitoxin Geltung

[1]) Ann. de l'Inst. Past. XIV. 1900 N. 5. p. 257—297.
[2]) Berlin. Klin. Woch., 1901. S. 251—569.
[3]) Zeitschrift für Hyg. u. Inf. XL. 1902 S. 155—196.
[4]) Bullet. de l'Ac. des Sc. de Crac., Sc. math. et nat., Mai 1902.
[5]) Berl· Klin. Woch. 1902 N. 258—583.
[6]) Arch. russ. des Sc. biol. IX. N. 1. p. 82—127.
[7]) Deutsch. med. Woch. 1901. N. 13. S. 194—196.
[8]) Hofmeister's Beitr. Z. chem. Phys. und Path. III B., 1902 H. $^1/_3$.
[9]) Pflüg. Arch. XC, H. $^3/_4$. S. 203—230.

haben“, da diese Reaktion auch sonst mit den oben erwähnten vielfache Analogien aufweist. (S. 8. des poln. Orig.)

Wie weiter unten des näheren ausgeführt wird, kann die Ehrlich’sche Ansicht, wonach die Bindung zwischen Toxin und Antitoxin „nach einfachen konstanten Proportionen“ etwa nach Art der Neutralisation von Säure durch Alkali erfolgt, unmöglich mit vielen Erfahrungstatsachen in Einklang gebracht werden. Doch auch die neuerdings von Danysz[1]) sowie von Bordet[2]) aufgestellte Theorie gibt zu manchen Bedenken Anlass; diese Autoren behaupten, dass beim Zusammenbringen beliebiger Mengen von Toxin und Antitoxin jedesmal das gesammte Antitoxin sich über alle vorhandenen Toxinmoleküle verteilt und auf diese Weise im Gemisch überhaupt kein Überschuss an freiem Toxin oder Antitoxin zurückbleibt. Der Charakter der resultierenden Verbindung, die natürlich jedesmal eine andere ist, wird von den relativen quantitativen Verhältnissen der Komponenten resp. von der überwiegenden Komponente bestimmt. Diese Theorie erscheint mir nun unannehmbar, da sie die Annahme involviert, ein schon gebundenes Toxin könne noch toxisch wirken: eine Annahme, die den uns gegenwärtig geläufigen Vorstellungen vom Wesen der Toxinwirkung widerspräche. Vollends unverständlich erscheint aber nach dieser Theorie das Bestehen von Gemischen, die zugleich toxisch und antitoxisch wirken, wie es von Danysz beschrieben wird, da nach dieser Theorie immer die in Überschuss vorhandene Substanz die andere absättigen wird und dementsprechend die Verbindung nur eine spezifische Funktion wird ausüben können, nie aber beide zugleich. Es liegt nun m. E. viel näher, die oben erwähnten Bindungsgesetze, die, wie leicht einzusehen ist, auf das allgemeine chemische Gesetz für reversible Reaktionen von Guldberg und Waage zurückzuführen sind, auch auf die Bindung von Toxin und Antitoxin anzuwenden. Man hätte sich demnach vorzustellen, dass, wenn gewisse Mengen Toxin und Antitoxin zusammegebracht werden, neben dem Reaktionsprodukt, der nach meiner Ansicht vollkommen neutralen Verbindung ungebundene Überschüsse beider Substanzen in wechselnden Mengen übrig bleiben, die einander nicht weiter beeinflussen. Der Unter-

[1]) Ann. de l’Inst. Past. XVI. 1902 N. 5. p. 331—345.
[2]) ibid., XVII. 1903 N. 3. p. 161—187.

schied zwischen dieser Anschauung und der von Danysz und Bordet vertretenen ist klar: dort haben wir als Reaktionsprodukt eine einheitliche Verbindung, das mehr oder weniger mit Antitoxin gesättigte Toxin, hier neben immer derselben neutralen Verbindung Toxin — sowie Antitoxin — Überschüsse. Die quantitativen Verhältnisse bei der Reaktion werden von den aktiven Massen, d. i. von den relativen Konzentrationen beider reagierenden Substanzen bestimmt; angesichts einer starken Konzentration der einen wird die andere zum grössten Teil gebunden werden und umgekehrt. Ein und dieselbe Menge Toxin bindet verschiedene Mengen Antitoxin je nach der Konzentration des Antitoxinzusatzes und umgekehrt. Um diese Erklärungsweise plausibel zu machen, müsste man beweisen, dass tatsächlich Toxin und Antitoxin-Überschüsse in Toxin-Antitoxingemischen vorhanden sind, sodann, dass die Menge der sich bildenden Toxin-Antitoxinverbindung von der aktiven Masse der reagierenden Körper abhängig ist, was im folgenden an der Hand des ausgedehnten vorliegenden Tatsachenmaterials versucht werden soll.

Die Reaktion zwischen Toxin und Antitoxin kann entweder in vitro vor sich gehen, wenn wir beide Körper im Reagenzglas mischen und dann erst dem Versuchstier injizieren, oder aber im lebenden Körper, wenn wir einem normalen oder immunisierten Tier Toxin injizieren. Um ein Toxin-Antitoxingemisch im Tierexperiment neutral erscheinen zu lassen, muss man selbstverständlich einen beträchtlichen Antitoxin-Überschuss verwenden, so dass der zurückbleibende Toxin-Überschuss bis unter den Wert der kleinsten, noch krankmachenden Toxindosis heruntergedrückt wird. Solche Gemische müssen dementsprechend deutliche antitoxische Wirkungen offenbaren, während der Nachweis der minimalen Toxin-Überschüsse nur unter bestimmten Bedingungen gelingen wird. Tatsächlich zeigen Untersuchungen von Danysz, die sich auf Ricin-Antiricingemische sowie Diphterie-Toxin-Antitoxingemische beziehen, dass sog. „neutrale Gemische“ deutlich antitoxisch wirken, u. zw. sowohl simultan als auch praeventiv. Um diese Gemische herum gibt es eine Reihe von Kombinationen, die gleichzeitig toxisch und antitoxisch wirken, natürlich in wechselndem Grade; selbst Gemische, die schon an sich schwach toxisch wirken, offenbaren antitoxische Wirkungen, indem sie die Wirkungen weiter zugesetzter Toxinmengen herabsetzen. Anderseits ergibt sich aus diesen Untersuchungen, dass der

Bindungs- resp. Neutralisierungseffekt in solchen Gemischen von den aktiven Massen der reagierenden Substanzen bedingt wird; gibt man zu einer bestimmten Antitoxinmenge eine gewisse Menge Toxin, die eben hinreicht, um im Gemisch die toxischen Wirkungen einer letalen Dosis hervortreten zu lassen (L+ Gemisch), und andererseits zu derselben Antitoxinmenge sukzessive fraktionierte kleinere Dosen Toxins, so wird man sehen, dass hier die L+Schwelle schon bei einem kleineren Toxinzusatz erreicht wird. Das zuerst zugesetzte Toxin bindet nämlich eine relativ grössere Antitoxinmenge als im ersten Falle, da es eine relativ stärkere Antitoxinkonzentration vorfindet und dementsprechend finden dann die nachträglich zugesetzten Toxinfraktionen nicht mehr genügend Antitoxin vor, um neutralisiert zu werden. Über ähnliche Erfahrungen bei Komplement-Antikomplementgemischen berichtet Bordet. Die schwierigste Aufgabe für die experimentielle Forschung bleibt aber immer der Nachweis von minimalen Toxinüberschüssen in „glatt neutralen" Gemischen. Dieser Nachweis wird zwei Funktionen des Giftes betreffen können, entweder die toxische oder immunisierende, da wir wissen, dass kleine nicht mehr krankmachende Toxindosen noch eine physiologische Wirkung im Sinne einer Anregung der Antitoxinproduktion entfalten können. Wenn nun solche Gemische an normalen Tieren reaktionslos abgleiten, wie ja schon ihre Benennung aussagt, so kann es dennoch gelingen, den Toxinüberschuss nachzuweisen entweder an gewissen Individuen der betreffenden Spezies, die besonders befähigt erscheinen, auf minimale Toxindosen zu reagieren, oder aber an überempfindlichen Tieren, oder endlich an einer anderen für das betreffende Toxin empfindlicheren Spezies. Alle diese Möglichkeiten sind tatsächlich im Experiment beobachtet worden. Während Dzierzgowski[1]) nach Injektion von neutralen Diphterie-Toxin-Antitoxingemischen bei Ziegen, Hunden und Pferden keine Antitoxinproduktion sah, wurde eine solche, wenn auch ganz geringe (3fach norm. Serum) bei einem Pferde (Donar) von Kretz[2]) nach solchen Injektionen beobachtet. Derselbe Autor[3]) fand, dass solche Injektionen bei Diphteriegift-überempfindlichen Pferden ganz beträchtliche Antitoxinproduktion anregen können. Diese Beobach-

[1]) Arch. russ. des Sc. biol. IX N. 3. 1902 p. 293—321.
[2]) Zeitschrift f. Heilk. 1901 H. 4.
[3]) ibid., 1902. H. 10.

tungen sind von besonderer Wichtigkeit, da hier den Pferden mit Pferde-Antitoxin neutralisiertes Toxin injiziert wurde, folglich kein Grund besteht, eine Spaltung dieser Verbindung im Tierkörper anzunehmen. Der Beweis der Toxinüberschüsse kann aber auch an Tieren erbracht werden, die eine nicht spezifische Überempfindlichkeit zeigen; so sahen Roux und Vaillard[1]) bei Meerschweinchen, die zuvor mit anderen Bakterienarten geimpft waren und anscheinend völlig gesund waren, nach Injektion von neutralen Gemischen typischen Tetanus auftreten. Ebenso berichtet Marenghi[2]), dass Meerschweinchen, die durch Entfernung beider Nebennieren Diphteriegift-überempfindlich geworden sind, auf Injektion von glatt neutralem Gemisch eingehen. Dass Gemische, die für eine Tierart ganz neutral sind, bei anderen empfindlicheren, deutliche toxische Wirkungen offenbaren können, ergibt sich aus den Untersuchungen von Buchner[3]), Roux und Martin[4]), Dreyer und Madsen[5]), Danysz[6]). Die oben erwähnte immunisierende Wirkung neutraler Gemische sowie ihre Auffassung findet eine starke Stütze in analogen Versuchen anderer Autoren über die Wirkungen überkompensierter Gemische verschiedener spezifischen Elemente. Sachs[7]) erzielte durch Injektionen Immunkörper-beladener Erythrocyten Produktion von Haemolysinen bei manchen Tieren, Rehns[8]), Nicolle und Trénel[9]) sowie Neisser und Lubowski[10]) durch Injektion von agglutinierten Bakterien Produktion von Agglutininen, Pfeiffer[11]) durch Injektion von Immunkörper-beladenen Choleravibrionen Produktion von Immunkörpern. In allen diesen Fällen muss man annehmen, dass selbst in den überkompensierten Gemischen noch Überschüsse spezifischer Substanzen enthalten waren, die zu spezifischen Reaktionen im Tierkörper Anlass geben.

[1]) Ann. de l'Inst. Past. VII. 1893. p. 65—140.
[2]) Rend. del. R. Ist. Lomb. di scienze e lett. S. II. V. XXXIV. 1193—1207.
[3]) Münch. med. Woch. 1893. S. 480.
[4]) Ann. de l'Inst. Past. VIII. 1894 N. 9. p. 609—639.
[5]) Zeitschr. f. Hyg. u. Inf. XXXVII. S. 250—268.
[6]) l. c.
[7]) Cbl. f. Bakt. I. Abt. Orig. XXX. N. 13.
[8]) Compt. Rend. Soc. de Biol. 1900. p. 1058.
[9]) ibid., p. 1088.
[10]) Cbl. f. Bakt. I. Abt. Orig. XXX. N. 13.
[11]) Deutsch. med. Woch. 1901. N. 50,51.

Die hier vertretene Auffassung von der Bindung zwischen Toxin und Antitoxin steht auch in Einklang mit den Vorgängen, die beobachtet werden, wenn die beiden Körper nicht in vitro, sondern in vivo zusammentreffen. Wir wissen durch die Untersungen von Roux u. Martin[1]), Cobbett[2]), Meade-Bolton[3]), Dzierzgowski[4]), Bujwid[5]), dass normale Pferde in ihrem Serum einen Antitoxingehalt von $^1/_{100}$ — 2 J. E. pro 1 *Cm*³ besitzen; wird nun einem solchen Tiere eine Toxindosis injiziert, die durch seinen Antitoxingehalt vielfach neutralisiert werden könnte, so erfolgt trotzdem Antitoxinbildung oder aber — in wenigen Fällen — eine sogar letale Intoxikation, wie dies von Bujwid und Dzierzgowski beobachtet wurde. Während man im Falle der Antitoxinproduktion eventuell die Annahme einer immunisierenden Wirkung an der Injektionstelle zur Erklärung heranziehen kann, wie Dzierzgowski dies tut, muss man im Falle einer letalen Wirkung zugeben, dass das Gift nur durch die Blutbahn zu den lebenswichtigen Organen gelangen konnte. In diesem Falle muss also vom Gift, trotzdem es in der Blutbahn ein Multiplum der neutralisierenden Menge antrifft, ein freier Überschuss zurückbleiben, der für den letalen Effekt verantwortlich zu machen ist. Ähnliche Verhältnisse treten ein, wenn man einem schon immunisierten Tiere neuerdings Toxin injiziert, da hier immer das im Blut kreisende Antitoxin ein vielfaches Multiplum derjenigen Menge ausmacht, die zur glatten Neutralisation der injizierten Toxinmenge ausreicht. Speziell in dem Falle, wo das Toxin bei solchen Tieren intravenös eingeführt wird, müsste man nach der Theorie der „konstanten Neutralisierungsproportionen“ das Ausbleiben einer Antitoxinproduktion erwarten. Da dies aber nicht der Fall ist, wie die Beobachtungen von Kretz[6]) und Dzierzgowski[7]) beweisen, muss man annehmen, dass trotz des grossen Antitoxinüberschusses ein Überschuss an freiem Toxin zurückbleibt, der zur Wirkung gelangt. Endlich muss dieselbe Annahme herangezogen werden zur Erklärung der bekannten Fälle

[1]) l. c.

[2]) Cbl. f. Bakt. I. Abt. XXVI. N. 18. S. 731—732.

[3]) Journ. of exper. med. Vol. I p. 543.

[4]) Gazeta lekarska 1903. N. 14. 15. S. 317—322, 344—349.

[5]) Nicht publizierte Untersuchungen.

[6]) l. c.

[7]) l. c.

von Giftüberempfindlichkeit, in denen hochimmunisierte Tiere auf kleine Toxindosen eingingen; hier musste das Gift die Blutbahn passieren, um zu lebenswichtigen Organen zu gelangen, folglich muss das Bestehen eines freien Giftüberschusses postuliert werden. Endlich sei noch auf eine Tatsachenreihe hingewiesen, die darauf hinweist, dass auch im Tierkörper die Bindung zwischen Toxin und Antitoxin nicht dem Ehrlich'schen Gesetz „einfacher konstanter Proportionen" folgt, sondern durch die aktiven Massen der reagierenden Körper bestimmt wird. Injiziert man einem schon immunisierten Tiere Toxin, so zeigt der Antitoxingehalt des Blutes einen steilen Abfall, der aber quantitativ durchaus nicht dem glatten Neutralisationswert der eingeführten Giftmenge entspricht, sondern ein hohes Multiplum davon ausmacht. So betrug im Falle von Salomonsen und Madsen[1]) der Antitoxinverlust 875.000 J. E., während schon 385 J. E., also $^1/_{2000}$ davon, zur Neutralisation der eingeführten Giftmenge genügt hätten. Ähnliches berichten für das Botulismusgift Forssmann und Lundstrom[2]), Dzierzgowski für das Diphteriegift, Bulloch[3]) für Immunhaemolysine. Diese Beobachtungen beweisen m. E., dass angesichts der hohen Antitoxinkonzentration, die es im immunisierten Tier vorfindet, das Toxin ein Multiplum der glatt neutralisierenden Antitoxindosis bindet.

Die Richtigkeit der ausgeführten Anschauungen vorausgesetzt, ergäbe sich für die Serotherapie von Tetanusfällen beim Menschen die Indikation, möglichst hohe Antitoxindosen zu wiederholten Malen bis zum Verschwinden der tetanischen Symptome zu injizieren, da auf diese Weise die Neutralisation des an der Infektionsstelle stetig gebildeten Giftes eine möglichst vollständige wäre und einer eventuell spät einsetzenden Rekrudeszenz der Intoxikation vorgebeugt werden könnte, wie sie sowol in der menschlichen Pathologie wie auch bei den serotherapeutischen Versuchen von Roux und Vaillard[4]) an Tieren beobachtet wurde.

[1]) Ann. de l'Inst. Past. XI. 1897. N. 4. p. 315—331.
[2]) ibid. XVI. 1902. N. 4. p. 294—305.
[3]) Cbl. f. Bakt. I Abt. XXIX. N. 18 S. 731—732.
[4]) l. c.

Krakau, am 15. April 1903.

25. M. LADISLAS NATANSON m. t. **O zastosowaniu równań Lagrange'a w Teoryi tarcia wewnętrznego.** ***(Sur l'application des équations de Lagrange dans la Théorie de la Viscosité).***

§ 1. Dans notre Mémoire Sur les lois de la viscosité, présenté à l'Académie dans la séance du 4. Février 1901 [1]), nous avons proposé un système d'équations pour exprimer la loi suivant laquelle s'opère, au sein d'un fluide déformé, le phénomène intime et fondamental de la relaxation. Ainsi que dans le Mémoire cité, désignons par x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point situé à l'intérieur du fluide; par u, v, w les projections (sur les axes $Oxyz$) de la vitesse de la particule du fluide qui au moment t se trouve au point considéré; par $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{zx}, p_{xy}$ les composantes des pressions qui définissent de la façon bien connue l'état de tension imposé au fluide, en (x, y, z), à l'époque t; par p, la limite vers laquelle convergeraient p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} par l'effet de la relaxation; par n, k, h les constantes désignées par les mêmes symboles dans le Mémoire auquel nous venons de faire allusion; par T la constante caractéristique du fluide que l'on nomme le temps de relaxation. Avec ces notations, les équations dont il s'agit s'écrivent de la manière suivante. On a, en premier lieu,

$$\frac{d\,(p_{xx}-p)}{dt}+\frac{p_{xx}-p}{T}+2n\frac{\partial u}{\partial x}+(k-h-\tfrac{2}{3}n)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0 \tag{1a}$$

et deux équations analogues; et, en second lieu,

$$\frac{dp_{yz}}{dt}+\frac{p_{yz}}{T}+n\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0 \tag{2a}$$

ainsi que deux équations analogues qui s'en déduisent par des permutations circulaires. Dans ces équations, le symbole d/dt a la signification

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{3}$$

Posons:

$$p_{xx}-p=\Phi_{xx} \qquad p_{yz}=\Phi_{yz} \tag{4a}$$

$$p_{yy}-p=\Phi_{yy} \qquad p_{zx}=\Phi_{zx} \tag{4b}$$

$$p_{zz}-p=\Phi_{zz} \qquad p_{xy}=\Phi_{xy} \tag{4c}$$

[1]) Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences Mathém. et Naturelles, Année 1901, p. 95.

$$2n\frac{\partial u}{\partial x}+(k-h-\tfrac{2}{3}n)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\Omega_{xx}\,;$$

$$n\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\Omega_{yz} \tag{5a}$$

$$2n\frac{\partial v}{\partial y}+(k-h-\tfrac{2}{3}n)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\Omega_{yy}\,;$$

$$n\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\Omega_{zx} \tag{5b}$$

$$2n\frac{\partial w}{\partial z}+(k-h-\tfrac{2}{3}n)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\Omega_{zz}\,;$$

$$n\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\Omega_{xy}\,. \tag{5c}$$

Si donc l'on convient de représenter par Φ et par Ω deux termes correspondants du tableau

$$\left.\begin{matrix}\Phi_{xx}, & \Phi_{yy}, & \Phi_{zz}, & \Phi_{yz}, & \Phi_{zx}, & \Phi_{xy}\\ \Omega_{xx}, & \Omega_{yy}, & \Omega_{zz}, & \Omega_{yz}, & \Omega_{zx}, & \Omega_{xy}\end{matrix}\right\} \tag{6}$$

on peut écrire les équations (1) et (2) sous la forme générale que voici:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+u\frac{\partial\Phi}{\partial x}+v\frac{\partial\Phi}{\partial y}+w\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\Phi}{T}+\Omega=0\,. \tag{7}$$

Il est évident que, dans cette équation, la quantité Ω est supposée être une fonction connue des variables indépendantes x, y, z, t; Φ représente une fonction inconnue des mêmes variables.

§ 2. Considérons trois quantités a, b, c, définies par les égalités

$$a=a\,(x,y,z,t) \tag{1a}$$

$$b=b\,(x,y,z,t) \tag{1b}$$

$$c=c\,(x,y,z,t)\,. \tag{1c}$$

Nous supposerons, en guise de définition, que ces quantités vérifient les équations

$$\frac{\partial a}{\partial t}+u\frac{\partial a}{\partial x}+v\frac{\partial a}{\partial y}+w\frac{\partial a}{\partial z}=0 \tag{2a}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t}+u\frac{\partial b}{\partial x}+v\frac{\partial b}{\partial y}+w\frac{\partial b}{\partial z}=0 \tag{2b}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t}+u\frac{\partial c}{\partial x}+v\frac{\partial c}{\partial y}+w\frac{\partial c}{\partial z}=0\,. \tag{2c}$$

Soit $F^*(a, b, c, t)$ la forme que prend une fonction quelconque $F(x, y, z, t)$ des variables x, y, z, t lorsque, aux variables x, y, z, on substitue les valeurs

$$x = x(a, b, c, t) \tag{3a}$$

$$y = y(a, b, c, t) \tag{3b}$$

$$z = z(a, b, c, t), \tag{3c}$$

tirées des équations (1). Nous avons par conséquent

$$\Phi(x, y, z, t) \equiv \Phi^*(a, b, c, t) \tag{4}$$

$$\Omega(x, y, z, t) \equiv \Omega^*(a, b, c, t). \tag{5}$$

On déduit de l'équation (4) les conséquences suivantes: on a:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*}{\partial c}\,; \quad \text{et} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial \Phi^*}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial \Phi^*}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial \Phi^*}{\partial c} \tag{7a}$$

ainsi que deux équations analogues: (7 b) et (7 c) qui déterminent les valeurs des dérivées $\partial\Phi/\partial y$ et $\partial\Phi/\partial z$. Multiplions les équations (7) respectivement par u, v, w et ajoutons les membre à membre; à l'équation ainsi obtenue ajoutons, membre à membre, l'équation (6); en tenant compte des équations (2), nous trouverons

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u\frac{\partial \Phi}{\partial x} + v\frac{\partial \Phi}{\partial y} + w\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial t}. \tag{8}$$

Cela prouve que les équations (7) du § 1. se transforment, par la substitution des variables a, b, c, t aux variables x, y, z, t, de la manière suivante:

$$\frac{\partial \Phi^*(a, b, c, t)}{\partial t} + \frac{\Phi^*(a, b, c, t)}{T} + \Omega^*(a, b, c, t) = 0\,. \tag{9}$$

Or, les équations (9) admettent les intégrales

$$\Phi^*(a, b, c, t) = \varepsilon^{-t/T}\,\Phi^*(a, b, c, 0) - \varepsilon^{-t/T}\int_0^t ds\,\varepsilon^{s/T}\,\Omega^*(a, b, c, s). \tag{10}$$

On désigne ici par ε la base des logarithmes népériens, par s une variable auxiliaire pouvant varier de zéro jusqu'à t, par $\Phi^*(a, b, c, 0)$ la valeur de Φ^* calculée, pour la particule en question, à l'époque que l'on a choisie pour origine des temps. Ainsi, les valeurs que prennent les composantes $(p_{xx} - p)$ etc. et p_{yz} etc. des pressions pour une particule déterminée du fluide, caractérisée par les valeurs a, b, c des paramètres (1), sont données par les équations que l'on obtient en donnant, aux symboles Φ et Ω de l'équation (10), les significations qu'ils comportent, conformément aux conventions établies au paragraphe précédent.

§ 3. Représentons par ρ la densité du fluide, en un point x, y, z, à l'époque t; par X, Y, Z désignons les composantes de l'accélération que produisent, en ce point et à l'époque t, les forces extérieures données. Les équations du mouvement s'obtiennent en écrivant trois équations de la forme

$$\frac{du}{dt} - X + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right) = 0. \tag{1a}$$

Dans le système de Lagrange[1]), nous avons

$$u = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \tag{2a}$$

ainsi que quatre égalités analogues. Par conséquent, si l'on conserve aux symboles Φ_{xx} etc. la signification qui leur a été attribuée dans les paragraphes précédents et si l'on pose

$$\frac{\partial \Phi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial z} = P_x \quad \text{etc.,} \tag{3a}$$

les équations (1) deviennent

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{P_x}{\rho} = 0. \tag{4a}$$

Traitées de la manière bien connue, les équations (4) permettent d'écrire

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X + \frac{P_x}{\rho}\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y + \frac{P_y}{\rho}\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \\ + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z + \frac{P_z}{\rho}\right)\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial a} = 0, \tag{5a}$$

où l'on suppose que les quantités qui entrent dans l'expression du premier membre sont exprimées en fonctions des variables a, b, c, t. On peut d'ailleurs avoir recours aux équations (4) si l'on tient

[1]) Voir, au sujet de cette dénomination, Lamb, Hydrodynamics, Cambridge 1895, p. 3.

compte de la proposition suivante. Les symboles $D,\ L_a,\ L_b,\ L_c,\ M_a,\ M_b,\ M_c,\ N_a,\ N_b,\ N_c$ étant définis par les égalités

(6)
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a}, & \frac{\partial y}{\partial a}, & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b}, & \frac{\partial y}{\partial b}, & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c}, & \frac{\partial y}{\partial c}, & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = D$$

(7a)
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial b}, & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial y}{\partial c}, & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = L_a\ ; \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial c}, & \frac{\partial z}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a}, & \frac{\partial z}{\partial a} \end{vmatrix} = L_b \quad \text{etc.}$$

(7b)
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial b}, & \frac{\partial x}{\partial b} \\ \frac{\partial z}{\partial c}, & \frac{\partial x}{\partial c} \end{vmatrix} = M_a\ ; \qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.,}$$

on a les équations

(8a)
$$D\frac{\partial F}{\partial x} = L_a\frac{\partial F^*}{\partial a} + L_b\frac{\partial F^*}{\partial b} + L_c\frac{\partial F^*}{\partial c}$$

(8b)
$$D\frac{\partial F}{\partial y} = M_a\frac{\partial F^*}{\partial a} + M_b\frac{\partial F^*}{\partial b} + M_c\frac{\partial F^*}{\partial c}$$

(8c)
$$D\frac{\partial F}{\partial z} = N_a\frac{\partial F^*}{\partial a} + N_b\frac{\partial F^*}{\partial b} + N_c\frac{\partial F^*}{\partial c}$$

dans lesquelles $F(x, y, z, t)$ ou F et $F^*(a, b, c, t)$ ou F^* désignent, comme auparavant, les valeurs que prend la même fonction lorsqu'on l'exprime soit par le système de variables x, y, z, t, soit par le système a, b, c, t. Dans la méthode de Lagrange, il faut évidemment remplacer les expressions de $\partial p/\partial x$, de P_x etc. que renferment les équations (4), par des expressions composées de termes tels que $\partial p^*/\partial a$ etc., $\partial \Phi^*_{xx}/\partial a$ etc.; c'est ce que permettent de faire les équations (8). Si l'on tient compte de l'équation de continuité

(9)
$$\rho D = \rho_0$$

où l'on désigne par ρ_0 la densité de la particule a, b, c à l'époque $t = 0$, on parvient ainsi à trois équations dont la première est la suivante

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X + \frac{1}{\rho_0}\left(L_a \frac{\partial p^*}{\partial a} + L_b \frac{\partial p^*}{\partial b} + L_c \frac{\partial p^*}{\partial c}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\rho_0}\Big\{ L_a \frac{\partial \Phi^*_{xx}}{\partial a} + L_b \frac{\partial \Phi^*_{xx}}{\partial b} + L_c \frac{\partial \Phi^*_{xx}}{\partial c} +$$

$$+ M_a \frac{\partial \Phi^*_{yx}}{\partial a} + M_b \frac{\partial \Phi^*_{yx}}{\partial b} + M_c \frac{\partial \Phi^*_{yx}}{\partial c} +$$

$$+ N_a \frac{\partial \Phi^*_{zx}}{\partial a} + N_b \frac{\partial \Phi^*_{zx}}{\partial b} + N_c \frac{\partial \Phi^*_{zx}}{\partial c}\Big\} = 0. \quad (10a)$$

Dans ce qui va suivre, nous ferons usage des symboles $1/\rho \,.\, \partial p/\partial x$ et P_x/ρ en les considérant comme de simples abréviations définies par les égalités

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0}\left(L_a \frac{\partial p^*}{\partial a} + L_b \frac{\partial p^*}{\partial b} + L_c \frac{\partial p^*}{\partial c}\right) \quad (11)$$

$$\frac{P_x}{\rho} = \frac{1}{\rho_0}\Big\{ L_a \frac{\partial \Phi^*_{xx}}{\partial a} + L_b \frac{\partial \Phi^*_{xx}}{\partial b} + L_c \frac{\partial \Phi^*_{xx}}{\partial c} +$$

$$+ M_a \frac{\partial \Phi^*_{yx}}{\partial a} + M_b \frac{\partial \Phi^*_{yx}}{\partial b} + M_c \frac{\partial \Phi^*_{yx}}{\partial c} +$$

$$+ N_a \frac{\partial \Phi^*_{zx}}{\partial a} + N_b \frac{\partial \Phi^*_{zx}}{\partial b} + N_c \frac{\partial \Phi^*_{zx}}{\partial c}\Big\}. \quad (12)$$

§ 4. Calculons la valeur de la dérivée $\partial (P_x/\rho)/\partial t$ en partant de l'expression (12), § 3, de P_x/ρ établie au paragraphe précédent. Posons

$$\frac{\partial L_a}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*_{xx}}{\partial a} + \frac{\partial L_b}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*_{xx}}{\partial b} + \frac{\partial L_c}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*_{xx}}{\partial c} +$$

$$+ \frac{\partial M_a}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*_{yx}}{\partial a} + \frac{\partial M_b}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*_{yx}}{\partial b} + \frac{\partial M_c}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*_{yx}}{\partial c} +$$

$$+ \frac{\partial N_a}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*_{zx}}{\partial a} + \frac{\partial N_b}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*_{zx}}{\partial b} + \frac{\partial N_c}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*_{zx}}{\partial c} = \Theta_x. \quad (1a)$$

Nous aurons alors

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P_x}{\rho}\right) = \frac{\Theta_x}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0}\Big\{ L_a \frac{\partial^2 \Phi^*_{xx}}{\partial t \partial a} + L_b \frac{\partial^2 \Phi^*_{xx}}{\partial t \partial b} + L_c \frac{\partial^2 \Phi^*_{xx}}{\partial t \partial c} +$$

$$+ M_a \frac{\partial^2 \Phi^*_{yx}}{\partial t \partial a} + M_b \frac{\partial^2 \Phi^*_{yx}}{\partial t \partial b} + M_c \frac{\partial^2 \Phi^*_{yx}}{\partial t \partial c} +$$

$$+ N_a \frac{\partial^2 \Phi^*_{zx}}{\partial t \partial a} + N_b \frac{\partial^2 \Phi^*_{zx}}{\partial t \partial b} + N_c \frac{\partial^2 \Phi^*_{zx}}{\partial t \partial c}\Big\}. \quad (2)$$

Cependant, les quantités Φ^*_{xx}, Φ^*_{yx}, Φ^*_{zx} vérifient trois équations dont la première est la suivante (voir § 2.):

$$(3)\qquad \frac{\partial \Phi^*_{xx}}{\partial t} + \frac{\Phi^*_{xx}}{T} + \Omega^*_{xx} = 0\ .$$

Si donc l'on pose

$$(4a)\qquad L_a \frac{\partial \Omega^*_{xx}}{\partial a} + L_b \frac{\partial \Omega^*_{xx}}{\partial b} + L_c \frac{\partial \Omega^*_{xx}}{\partial c} + $$
$$+ M_a \frac{\partial \Omega^*_{yx}}{\partial a} + M_b \frac{\partial \Omega^*_{yx}}{\partial b} + M_c \frac{\partial \Omega^*_{yx}}{\partial c} + $$
$$+ N_a \frac{\partial \Omega^*_{zx}}{\partial a} + N_b \frac{\partial \Omega^*_{zx}}{\partial b} + N_c \frac{\partial \Omega^*_{zx}}{\partial c} = \Pi_x$$

et si l'on fait usage de l'expression de P_x/ρ donnée par l'égalité (12) du § 3., on voit sans peine que les équations (2) peuvent s'écrire:

$$(5a)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P_x}{\rho}\right) + \frac{1}{T}\left(\frac{P_x}{\rho}\right) + \frac{\Pi_x - \Theta_x}{\rho_0} = 0\ .$$

Reprenons maintenant, pour les transformer, les équations du mouvement du fluide, c'est-à-dire les équations (10) du paragraphe précédent. Ainsi qu'il a été dit plus haut, les équations (4) du même paragraphe équivalent à ces équations (10), qu'elles reproduisent sous une forme abrégée. Dérivons les par rapport à la variable t; il viendra, en tenant compte des équations (5),

$$(6a)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \frac{1}{T}\frac{P_x}{\rho} - \frac{\Pi_x - \Theta_x}{\rho_0} = 0\,.$$

Jointes aux équations initiales [(4) du § 3.], les équations (6) peuvent se mettre sous la forme:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} +$$
$$(7a)\qquad + T\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \frac{T(\Pi_x - \Theta_x)}{\rho_0} = 0\,.$$

C'est la forme que nous nous proposions de donner aux équations du mouvement.

§ 5. Dans ce qui va suivre, nous reprendrons l'étude des lois qui président à la propagation d'un mouvement extrêmement petit dans un fluide visqueux, en nous appuyant sur les résultats exposés dans la première partie de ce Travail. Le problème auquel nous venons de faire allusion nous a occupés dans notre Mémoire Sur la propagation d'un petit mouvement dans un fluide visqueux, présenté à l'Académie dans la séance du 7. Janvier 1902 [1]). Ainsi que dans ce Mémoire, nous supposerons nulles les forces extérieures auxquelles le fluide est soumis; les termes X, Y, Z disparaîtront donc de nos équations. Nous considérerons ρ_0, c'est-à-dire la densité du fluide à l'état initial, où il n'a point encore subi de perturbation, comme une constante absolue. Nous admettrons, à titre d'hypothèse, que la pression p peut s'exprimer [2]) en fonction de la densité:

$$p = p(\rho); \tag{1}$$

la nature de la fonction $p(\rho)$ dépendra évidemment de la nature du fluide considéré et en outre, des conditions d'ordre thermodynamique auxquelles le mouvement du fluide est assujetti. Nous supposerons d'ailleurs que l'on a

$$\rho \frac{dp(\rho)}{d\rho} = h, \tag{2}$$

en conservant au symbole h la signification qui lui a été attribuée dans la première partie de ce Travail ainsi que dans nos Communications précédentes. L'équation (2) se déduit immédiatement de la relation

$$\frac{dp}{dt} = -h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{3}$$

établie dans les Mémoires cités plus haut. Il importe d'observer que la constante h que renferment les équations (2) et (3), diffère essentiellement, par définition, d'une autre constante k dont nous avons fait usage dans les équations qui déterminent la manière dont varient les composantes $p_{xx}-p$, $p_{yy}-p$, $p_{zz}-p$ des pressions; la constante k sert notamment à caractériser l'influence qu'exerce,

[1]) Bulletin Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, Cl. d. Sc. Math. et Nat., Année 1902, p. 19.

[2]) C'est l'hypothèse dans laquelle on se place habituellement; par exemple voir Lamb, Hydrodynamics, Cambridge 1895, pp. 468—470. L'analyse que l'on va lire n'est que la généralisation immédiate de celle que contiennent les §§ 257 et 259 de ce Traité.

sur ces composantes, la dilatation ou la compression pure du fluide. Dans nos Mémoires précédents, nous avons indiqué les raisons qui nous portent à croire que, entre ces deux constantes, il existe la relation $h = k$ vérifiée, pour les fluides de la Nature, soit rigoureusement, soit approximativement; et nous avons prouvé que la relation $\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$, admise par Saint-Venant et par Stokes entre les deux coefficients de viscosité [1]), est la conséquence immédiate de l'égalité $h = k$. Mais, dans l'étude que nous nous proposons de poursuivre, cette question ne joue qu'un rôle secondaire et nous pouvons la laisser pour ainsi dire en suspens.

Posons

$$(4)\quad \frac{n}{\rho_0} = \alpha^2\,; \qquad (5)\quad \frac{k + \frac{4}{3}n}{\rho_0} = \beta^2\,; \qquad (6)\quad \frac{k - h + \frac{4}{3}n}{\rho_0} = \gamma^2\,;$$

les quantités α, β, γ seront des constantes; leurs dimensions seront celles d'une vitesse. Elles ne pourront différer que très peu des vitesses que nous avons désignées par a, b, c dans notre Communication du 7. Janvier 1902.

§ 6. Ecrivons, en désignant par a, b, c les valeurs initiales des variables x, y, z,

$$(1a)\qquad x - a = \xi\,(a, b, c, t)$$

$$(1b)\qquad y - b = \eta\,(a, b, c, t)$$

$$(1c)\qquad z - c = \zeta\,(a, b, c, t)\;;$$

les quantités ξ, η, ζ seront les composantes du déplacement de la particule, compté à partir de sa position initiale d'équilibre. Proposons-nous de calculer la valeur de $\partial p^*/\partial a$. Nous avons

$$(2a)\qquad \frac{\partial p^*}{\partial a} = \frac{dp}{d\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial a}$$

$$(3a)\qquad = -\frac{\rho^2}{\rho_0} \cdot \frac{dp}{d\rho} \cdot \frac{\partial D}{\partial a}$$

$$(4a)\qquad = -\frac{h}{D}\frac{\partial D}{\partial a}\,.$$

[1]) Voir à ce sujet: P. Duhem, Recherches sur l'Hydrodynamique, première Série, Paris 1903, p. 22. M. Smoluchowski, Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, Cl. d. Sc. Math. et Nat., Année 1903, p. 145.

Portées dans l'équation (8a) du § 3., les valeurs (4) des dérivées $\partial p^*/\partial a$ etc. la transforment de la manière suivante:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{h}{\rho_0 D}\left(L_a \frac{\partial D}{\partial a} + L_b \frac{\partial D}{\partial b} + L_c \frac{\partial D}{\partial c}\right). \tag{5a}$$

D'autre part on a les relations

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \text{etc.} \tag{6a}$$

Comparons les équations (5) et (6) ainsi obtenues aux équations (7) du § 4. dans lesquelles nous poserons $X = 0$ etc. En tenant compte des conventions (5) et (6) du § 5., nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\beta^2 - \gamma^2}{D}\left(L_a \frac{\partial D}{\partial a} + L_b \frac{\partial D}{\partial b} + L_c \frac{\partial D}{\partial c}\right) + \\ + T\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\beta^2 - \gamma^2}{D}\left(L_a \frac{\partial D}{\partial a} + L_b \frac{\partial D}{\partial b} + L_c \frac{\partial D}{\partial c}\right)\right\} - \\ - \frac{T(\Pi_x - \Theta_x)}{\rho_0} = 0.\end{aligned} \tag{7a}$$

L'équation (7 a) et les équations analogues qui se rapportent aux composantes η et ζ expriment la loi suivant laquelle se propagent les perturbations dans le fluide étudié.

§ 7. Considérons, en particulier, le cas où les valeurs initiales des quantités Φ (c'est-à-dire celles qui correspondent à l'époque $t = 0$) sont indépendantes de b et de c. Supposons que l'on ait

$$\xi = \xi(a, t) \; ; \quad \eta = 0 \; ; \quad \zeta = 0 \, . \tag{1}$$

La perturbation sera plane et longitudinale. Les équations (1) nous donnent:

$$D = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} \tag{2}$$

$$L_a = 1 \; ; \quad L_b = 0 \quad ; \quad L_c = 0 \tag{3a}$$

$$M_a = 0 \; ; \quad M_b = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} \; ; \quad M_c = 0 \tag{3b}$$

$$N_a = 0 \; ; \quad N_b = 0 \quad ; \quad N_c = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} \; ; \tag{3c}$$

elles nous apprennent d'ailleurs que l'on a

$$u^* = u^*(a, t) \; ; \quad v^* = 0 \; ; \quad w^* = 0 \, . \tag{4}$$

Selon les égalités (2), (3) et (4), les composantes de la vitesse de déformation (que l'on calcule à l'aide des égalités (8) du § 3) deviendront

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{D}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial a} \; ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \; ; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \; ; \tag{5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \; ; \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \; ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \, . \tag{6}$$

De l'égalité (4a), § 4, nous tirons, en tenant compte des égalités (3),

$$\Pi_x = \frac{\partial \Omega^*_{xx}}{\partial a} + \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial \Omega^*_{yx}}{\partial b} + \frac{\partial \Omega^*_{zx}}{\partial c}\right). \tag{7}$$

Mais il est aisé de voir que l'on a, dans ce cas,

$$\Omega^*_{xx} = (k - h + \tfrac{4}{3}\, n)\frac{1}{D}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial a} \tag{8a}$$

$$\Omega^*_{yx} = 0 \tag{8b}$$

$$\Omega^*_{zx} = 0 \; ; \quad \text{par conséquent} \tag{8c}$$

$$\Pi_x = (k - h + \tfrac{4}{3}\, n)\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{D}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial a}\right). \tag{9}$$

Si l'on tient compte des égalités (3) de ce paragraphe, l'égalité (1a), § 4, devient

$$\Theta_x = \left(\frac{\partial \Phi^*_{yx}}{\partial b} + \frac{\partial \Phi^*_{zx}}{\partial c}\right)\frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial a} \, . \tag{10}$$

Cependant, en vertu des équations (8b) et (8c), nous pouvons écrire

$$\Phi^*_{yx} = \varepsilon^{-t/T}\, \Phi^*_{yx}(a, b, c, 0) \; ; \quad \Phi^*_{zx} = \varepsilon^{-t/T}\, \Phi^*_{zx}(a, b, c, 0) \; ; \tag{11}$$

la comparaison de ces relations à l'équation (10) conduit donc à la conclusion que l'hypothèse énoncée au début du présent paragraphe entraîne la conséquence

$$\Theta_x = 0 \, . \tag{12}$$

Les égalités (2), (3), (9) et (12) de ce paragraphe permettent de simplifier l'équation (7a) du § 6. On trouve, en tenant compte de l'égalité (6) du § 5.,

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - \frac{\beta^2-\gamma^2}{D}\frac{\partial^2\xi}{\partial a^2} + T\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - \frac{\beta^2-\gamma^2}{D}\frac{\partial^2\xi}{\partial a^2}\right\} -$$

$$- T\gamma^2\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{D}\frac{\partial^2\xi}{\partial t\partial a}\right) = 0\,. \qquad (13a),$$

Supposons (ainsi que cela se fait habituellement) que la valeur de $\partial\xi/\partial a$ soit très petite en sorte que l'on puisse, dans l'expression de D, la négliger par rapport à l'unité; dans ces conditions, l'équation précédente se réduit à celle-ci:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - (\beta^2-\gamma^2)\frac{\partial^2\xi}{\partial a^2} + T\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - \beta^2\frac{\partial^2\xi}{\partial a^2}\right\} = 0\,. \qquad (14a)$$

A ce résultat, comparons l'équation à laquelle nous parviendrions, pour le cas particulier qui nous occupe, en nous appuyant sur les propositions données dans notre Mémoire du 7. Janvier 1902 [1]). Si l'on se reporte au § 6. de ce Travail, on voit sans peine que la quantité que nous y avons désignée par u_1 correspond à la dérivée $\partial\xi/\partial t$; d'ailleurs, l'expression $\nabla^2 u_1$ se réduirait à $\partial^2 u_1/\partial x^2$ dans le cas que nous discutons. On s'assure ainsi que l'équation (1), § 6., de la Communication mentionnée est identique, au fond, avec l'équation (14 a) que nous venons d'obtenir

§ 8. Ainsi qu'au paragraphe précédent, supposons que les valeurs initiales des quantités Φ ne dépendent point des deux variables: b, c. Admettons que l'on ait

$$\xi = 0\,; \qquad \eta = 0\,; \qquad \zeta = \zeta\,(a, t)\,. \qquad (1)$$

La perturbation sera plane et transversale. Nous aurons, dans ce cas:

$$D = 1 \qquad (2)$$

$$L_a = 1 \qquad L_b = 0 \qquad L_c = -\,\partial\zeta/\partial a \qquad (3a)$$

$$M_a = 0 \qquad M_b = 1 \qquad M_c = 0 \qquad (3b)$$

$$N_a = 0 \qquad N_b = 0 \qquad N_c = 1 \qquad (3c)$$

Les composantes de la vitesse de déformation seront données par les égalités

[1]) Bulletin Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, Cl. d. Sc. Math. et Nat., Année 1902, page 19.

(4a) $$\frac{\partial u}{\partial x}=0\,; \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=0\,; \qquad \frac{\partial w}{\partial z}=0$$

(4b) $$\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0\,; \quad \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial^2\zeta}{\partial a\partial t}\,; \quad \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0\,.$$

L'équation qui, dans ce cas, doit nous servir de point de départ est l'équation (7c) du § 6.; elle est de la forme

(5) $$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\frac{\beta^2-\gamma^2}{D}\left(N_a\frac{\partial D}{\partial a}+N_b\frac{\partial D}{\partial b}+N_c\frac{\partial D}{\partial c}\right)+$$
$$+T\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\frac{\beta^2-\gamma^2}{D}\left(N_a\frac{\partial D}{\partial a}+N_b\frac{\partial D}{\partial b}+N_c\frac{\partial D}{\partial c}\right)\right\}-$$
$$-\frac{T(\Pi_z-\Theta_z)}{\rho_0}=0\,.$$

On désigne ici par Π_z et Θ_z les expressions suivantes:

(6) $$\Pi_z=L_a\frac{\partial\Omega^*_{xz}}{\partial a}+L_b\frac{\partial\Omega^*_{xz}}{\partial b}+L_c\frac{\partial\Omega^*_{xz}}{\partial c}+$$
$$+M_a\frac{\partial\Omega^*_{yz}}{\partial a}+M_b\frac{\partial\Omega^*_{yz}}{\partial b}+M_c\frac{\partial\Omega^*_{yz}}{\partial c}+$$
$$+N_a\frac{\partial\Omega^*_{zz}}{\partial a}+N_b\frac{\partial\Omega^*_{zz}}{\partial b}+N_c\frac{\partial\Omega^*_{zz}}{\partial c}\,.$$

(7) $$\Theta_z=\frac{\partial L_a}{\partial t}\frac{\partial\Phi^*_{xz}}{\partial a}+\frac{\partial L_b}{\partial t}\frac{\partial\Phi^*_{xz}}{\partial b}+\frac{\partial L_c}{\partial t}\frac{\partial\Phi^*_{xz}}{\partial c}+$$
$$+\frac{\partial M_a}{\partial t}\frac{\partial\Phi^*_{yz}}{\partial a}+\frac{\partial M_b}{\partial t}\frac{\partial\Phi^*_{yz}}{\partial b}+\frac{\partial M_c}{\partial t}\frac{\partial\Phi^*_{yz}}{\partial c}+$$
$$+\frac{\partial N_a}{\partial t}\frac{\partial\Phi^*_{zz}}{\partial a}+\frac{\partial N_b}{\partial t}\frac{\partial\Phi^*_{zz}}{\partial b}+\frac{\partial N_c}{\partial t}\frac{\partial\Phi^*_{zz}}{\partial c}\,.$$

Des équations (4) nous déduisons

(8) $$\Omega^*_{xz}=n\frac{\partial^2\zeta}{\partial a\partial t}\,; \qquad \Omega^*_{yz}=0\,; \qquad \Omega^*_{zz}=0\,;$$

par conséquent, l'équation (6) nous donnera:

(9) $$\Pi_z=n\frac{\partial^3\zeta}{\partial a^2\partial t}\,.$$

D'autre part, l'équation (7) devient, en tenant compte des égalités (3),

$$\Theta_z = -\frac{\partial \Phi^*_{x_3}}{\partial c}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial a \partial t} = 0\,. \tag{10}$$

En vertu des égalités (2), (9) et (10), l'équation (5) permet d'écrire

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + T\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial a^2}\right\} = 0\,, \tag{11}$$

où l'on désigne par α la constante définie au moyen de l'égalité (4) du § 5. Ce résultat s'accorde exactement avec l'équation que l'on déduit, pour le cas d'une perturbation plane, de l'équation (2) du § 6. de notre Mémoire, cité plus haut, Sur la propagation d'un petit mouvement dans un fluide visqueux. Il est donc prouvé que les conclusions auxquelles nous avons été amenés dans notre étude précédente subsistent, au moins dans les deux cas que nous venons d'examiner, et ne sont nullement modifiées lorsque, dans leur discussion, on prend pour point de départ les équations données aux §§ 1. et 2. de la Communication actuelle.

De l'équation (11) on déduit par intégration

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{1}{T}\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial a^2} = A(a). \tag{12}$$

Supposons une quantité Z qui satisferait aux équations

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial a^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial a^2} + \frac{A(a)}{\alpha^2} \tag{13a}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}\,; \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}. \tag{13b}$$

Jointes à l'équation (12), les équations (13) permettent d'écrire

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \frac{1}{T}\frac{\partial Z}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial a^2} = 0\,; \tag{14}$$

la quantité ζ s'obtient, par conséquent, en ajoutant, à la quantité Z qui vérifie l'équation des télégraphistes, des termes qui ne dépendent point du temps.

§ 9. Reprenons l'étude du problème de la propagation, dans un fluide, d'une perturbation extrêmement petite, mais d'ailleurs arbitraire. Soit ϑ une quantité constante et extrêmement petite. Nous supposerons que les composantes ξ, η, ζ contiennent la quantité ϑ comme facteur, et que tous les termes qui suivent:

$$\xi, \eta, \zeta, \partial\xi/\partial a, \ldots, \partial\zeta/\partial c, u^*, v^*, w^*, \partial u^*/\partial a, \ldots, \partial w^*/\partial c \tag{1}$$

sont des quantités petites d'ordre (ϑ). Nous négligerons les termes d'ordre (ϑ^2) ou d'ordre supérieur, en comparaison de termes d'ordre (ϑ); cette convention que nous adoptons définit le sens qu'il faut attacher désormais au signe d'égalité dans nos équations. Nous supposerons d'ailleurs que les valeurs initiales des quantités Φ sont données par des expressions d'ordre (ϑ) ou d'ordre supérieur. Nous aurons

(1) $$D = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c}$$

(2a) $$L_a = 1 + \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c}; \quad M_a = -\frac{\partial \xi}{\partial b}; \quad N_a = -\frac{\partial \xi}{\partial c}$$

(2b) $$L_b = -\frac{\partial \eta}{\partial a}; \quad M_b = 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial c} + \frac{\partial \xi}{\partial a}; \quad N_b = -\frac{\partial \eta}{\partial c}$$

(2c) $$L_c = -\frac{\partial \zeta}{\partial a}; \quad M_c = -\frac{\partial \zeta}{\partial b}; \quad N_c = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b}.$$

Calculons les valeurs que prennent les quantités

(3a) $$\Omega_{xx} = 2n\frac{\partial u}{\partial x} + (k - h - \tfrac{2}{3}n)\left(\frac{\partial u}{x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

(3b) $$\Omega_{yx} = n\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

(3c) $$\Omega_{zx} = n\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

lorsqu'on les exprime en fonctions des variables *a, b, c, t,* ce qui peut facilement se faire en vertu des égalités (8) du § 3. Il est aisé de voir que les termes Ω_{xx}, Ω_{yx}, Ω_{zx} se réduisent à des expressions d'ordre (ϑ). Considérons l'égalité (4a) du § 4.; si l'on y omet tous les termes d'ordre supérieur, on trouve

(4) $$\Pi_x = L_a\frac{\Omega^*_{xx}}{\partial a} + M_b\frac{\partial \Omega^*_{yx}}{\partial b} + N_c\frac{\partial \Omega^*_{zx}}{\partial c}$$

$$= \frac{\partial \Omega^*_{xx}}{\partial a} + \frac{\partial \Omega^*_{yx}}{\partial b} + \frac{\partial \Omega^*_{zx}}{\partial c}$$

$$= n\nabla^2 u^* + (k - h + \tfrac{1}{3}n)\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial u^*}{\partial a} + \frac{\partial v^*}{\partial b} + \frac{\partial w^*}{\partial c}\right),$$

où ∇^2 signifie $\partial^2/\partial a^2 + \partial^2/\partial b^2 + \partial^2/\partial c^2$. Considérons de même l'égalité (1a) du § 4.; les termes de la forme $\partial L_a/\partial t$ etc. sont d'ordre (ϑ), ainsi que les termes Ω et Φ^0; il résulte donc de cette égalité que l'expression Θ_x sera une quantité d'ordre (ϑ^2) ou d'ordre supérieur. Cela étant, reportons-nous à l'équation (7 a) du § 6.; en vertu des égalités (1), (2) et (4) que nous venons d'obtenir, ainsi que des conventions exprimées par les relations (4), (5), (6) du § 5., cette équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-(\beta^2-\gamma^2)\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}+\frac{\partial\eta}{\partial b}+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)+$$

$$+T\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-\alpha^2\nabla^2\xi-(\beta^2-\alpha^2)\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}+\frac{\partial\eta}{\partial b}+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)\right\}=0, \tag{5a}$$

où seuls les termes du premier ordre ont été conservés. Cette équation peut se comparer à l'équation (3) du § 6. de notre Mémoire Sur la propagation d'un petit mouvement dans un fluide visqueux; on s'assure aisément que la loi qu'expriment ces équations est la même.

Supposons que l'on ait affaire à un fluide incompressible. Dans ce cas, nous poserions $D=1$ dans l'équation (7a) du § 6. et

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{6}$$

dans l'égalité (3 a) de ce paragraphe. L'équation à laquelle nous parviendrions ainsi est la suivante

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\frac{1}{T}\frac{\partial\xi}{\partial t}-\alpha^2\nabla^2\xi\right\}=0\,; \tag{7a}$$

elle se ramène de la façon connue à l'équation des télégraphistes généralisée (voir les §§ 6. et 10. de la Communication précédente).

---

26. M. LADISLAS NATANSON m. t. **O stopniu przybliżenia pewnych równań teoryi tarcia wewnętrznego** ***(Sur l'approximation de certaines équations de la Théorie de la Viscosité).***

§ 1. Dans notre Mémoire Sur les lois de la Viscosité[1]), nous avons proposé un système d'équations qui, à notre avis, peut exprimer la loi suivant laquelle, au sein d'un fluide déformé, a lieu

[1]) Bulletin Intern. de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sc. Mathém. et Nat., Année 1901, p. 95. (Séance du 4. Février 1901).

le phénomène de la relaxation. Désignons par x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point situé à l'intérieur du fluide; par u, v, w les projections (sur les axes $Oxyz$) de la vitesse de la particule du fluide qui, au moment t, se trouve au point considéré; par $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{zx}, p_{xy}$ représentons les composantes des pressions qui, au moment t, s'exercent sur les faces d'un parallélipipède rectangle infiniment petit, ayant un de ses sommets en (x, y, z), conformément aux définitions bien connues que l'on adopte généralement. Désignons par p la limite vers laquelle convergeraient, par l'effet de la relaxation, les quantités p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}; par n, k, h les constantes désignées par les mêmes lettres dans le Mémoire cité et dont, à plusieurs reprises, nous avons discuté la signification; par T le temps de relaxation. Avec ces notations (qui se confondent avec celles du Travail que nous venons de citer), nous avons trois équations de la forme

$$\text{(1a)} \qquad \frac{d\,(p_{xx}-p)}{dt}+\frac{p_{xx}-p}{T}+2ne+(k-h-\tfrac{2}{3}n)\,\tilde{\omega}=0$$

ainsi que trois équations dont la première est la suivante

$$\text{(2a)} \qquad \frac{dp_{yz}}{dt}+\frac{p_{yz}}{T}+na=0.$$

Les équations (1b) et (1c), (2b) et (2c) se déduisent, des équations (1a) et (2a), par des permutations circulaires. Dans ces équations, toutes les quantités sont supposées être exprimées en fonctions des variables x, y, z, t, variables que l'on regarde comme indépendantes. Les lettres e, f, g, a, b, c ont la signification:

$$\text{(3a)} \qquad e=\frac{\partial u}{\partial x}\,; \qquad a=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\,;$$

$$\text{(3b)} \qquad f=\frac{\partial v}{\partial y}\,; \qquad b=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\,;$$

$$\text{(3c)} \qquad g=\frac{\partial w}{\partial z}\,; \qquad c=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\,;$$

les symboles $\tilde{\omega}$ et d/dt sont définis par les conventions suivantes:

$$\text{(4)} \qquad \tilde{\omega}=e+f+g\,;$$

$$\text{(5)} \qquad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\,\frac{\partial}{\partial x}+v\,\frac{\partial}{\partial y}+w\,\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Posons

$$p_{xx} - p = \Phi_{xx}\ ; \qquad p_{yz} = \Phi_{yz} \tag{6a}$$

$$p_{yy} - p = \Phi_{yy}\ ; \qquad p_{zx} = \Phi_{zx} \tag{6b}$$

$$p_{zz} - p = \Phi_{zz}\ ; \qquad p_{xy} = \Phi_{xy} \tag{6c}$$

$$2ne + (k - h - \tfrac{2}{3} n)\,\tilde{\omega} = \Omega_{xx}\ ; \qquad na = \Omega_{yz} \tag{7a}$$

$$2nf + (k - h - \tfrac{2}{3} n)\,\tilde{\omega} = \Omega_{yy}\ ; \qquad nb = \Omega_{zx} \tag{7b}$$

$$2ng + (k - h - \tfrac{2}{3} n)\,\tilde{\omega} = \Omega_{zz}\ ; \qquad nc = \Omega_{xy}. \tag{7c}$$

Convenons de représenter par Φ et Ω deux termes correspondants du tableau

$$\left.\begin{matrix} \Phi_{xx}, \Phi_{yy}, \Phi_{zz}, \Phi_{yz}, \Phi_{zx}, \Phi_{xy} \\ \Omega_{xx}, \Omega_{yy}, \Omega_{zz}, \Omega_{yz}, \Omega_{zx}, \Omega_{xy} \end{matrix}\right\} \tag{8}$$

Nous pourrons écrire les équations précédentes (1) et (2) sous la forme générale que voici:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + w \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\Phi}{T} + \Omega = 0\,. \tag{9}$$

Les équations (1) et (2) ou les équations équivalentes (9) de ce paragraphe sont celles que nous considérons comme constituant la base essentielle de la théorie que nous proposons [1]. On s'assure facilement qu'elles se trouvent à l'abri des objections soulevées par M. Zaremba [2]) contre certaines équations essentiellement différentes que nous avons données, dans notre Mémoire du 4. Février 1901, en les regardant comme des relations exactes approximativement. Dans ce qui va suivre, nous donnerons donc parfois le nom de rigoureuses aux équations (1) et (2) ou (9) de ce paragraphe; mais il est bien entendu que nous n'attacherons aucun sens absolu à cette dénomination. Les équations (1) et (2) ou (9) ne sont à nos yeux, il est presque superflu de le dire, que l'expression d'une hypothèse dont nous croyons utile de poursuivre les conséquences.

§ 2. Dans le Mémoire cité, il est dit, à la page 107, que les équations approchées auxquelles nous venons de faire allusion

[1]) Pour des exemples de l'application directe de ces équations, voir les §§ 10. et 13. de ce Mémoire; voir aussi notre Travail Sur l'application des équations de Lagrange dans la Théorie de la Viscosité (Bulletin Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, Année 1903, page 268).

[2]) Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie, Cl. d. Sc. Math. et Nat., Année 1903, page 85.

ne s'appliquent que dans le cas où le mouvement dont le fluide est animé est extrêmement lent. Il est de toute évidence que la signification de cette phrase est la suivante: supposons que le mouvement du fluide soit lent par rapport au système choisi d'axes de coordonnées, soit $Oxyz$; c'est-à-dire supposons que les composantes u, v, w de la vitesse relative des particules du fluide par rapport à ces axes soient petites, comparées à l'unité de vitesse; dans ce cas, certaines équations seront approximativement vérifiées. Voici ce que dit à ce sujet M. Zaremba: „Mais M. „Natanson ne considère ses équations que comme l'expres„sion approchée des véritables lois du mouvement d'un liquide „et cela seulement dans le cas particulier où les quantités u, v, w „sont très petites. Cette façon de voir est-elle soutenable? Evi„demment non puisque, dans les applications, nous ne pouvons „jamais étudier le mouvement d'un liquide que par rapport à des „axes mobiles dont la vitesse de translation est non seulement in„connue, mais inconnaissable“ (loco citato, p. 91). Il me suffira de faire observer que, dans mes Mémoires, je n'ai dit nulle part que le système de coordonnées qui sert à définir les composantes u, v, w soit fixe ou immobile. L'unique point de vue auquel je m'étais toujours placé est donc celui que M. Zaremba soumet à l'examen au bas de la page 91 de sa Communication, dans le passage qui débute en ces termes: „On pourrait pourtant essayer de „tirer parti des équations de M. Natanson en les interprétant „d'une façon particulière, laquelle, il est vrai, n'est indiquée dans „aucun de ses travaux. Voici ce que nous avons en vue: supposons „que le système de coordonnées (x, y, z), système pour lequel la „formule (2) serait valable, ne soit pas fixe, mais mobile et animé „d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme; cela posé, „regardons les quantités u, v, w comme les composantes de la vi„tesse relative du liquide par rapport aux axes (x, y, z) en M à l'é„poque t et voyons si, dans ces conditions, il serait possible de „regarder la formule (2) comme approximativement exacte“. Je prierai le lecteur de se reporter à quelques-uns de mes écrits. En discutant, dans mon Mémoire Sur la double réfraction accidentelle dans les liquides[1]), la théorie de l'expérience de

[1]) Bulletin Int. de l'Académie des Sciences de Cracovie, Cl. des Sc. Math. et Nat., Année 1901, p. 161. Voir plus loin, § 13.

Maxwell et de Kundt, j'ai supposé que les axes des coordonnées sont liés à la paroi cylindrique extérieure par rapport à laquelle le cylindre intérieur est animé d'un mouvement de rotation. Cette paroi est immobile par rapport à la Terre; mais, avec la Terre, elle est mobile dans l'espace. Dans un autre Travail Sur la déformation d'un disque plastico-visqueux[1]), j'ai dit (p. 496) que je dispose les axes des x et des y dans le plan de la base inférieure sur laquelle repose le disque pendant la déformation. Il apparaît donc clairement que l'hypothèse que j'ai admise est, dans ce cas, la suivante: les vitesses relatives des particules de la substance de la plaque par rapport au plan solide qui lui sert de base, sont toujours très petites.

Je dirai donc, en conclusion, que l'hypothèse du mouvement „lent" dans laquelle je me suis placé est parfaitement légitime et qu'elle est clairement indiquée dans mes Mémoires.

§ 3. Reprenons l'équation (9) du § 1. En supposant „lent" le mouvement du fluide j'ai proposé de négliger, en première approximation, les termes

$$u\frac{\partial\Phi}{\partial x}+v\frac{\partial\Phi}{\partial y}+w\frac{\partial\Phi}{\partial z} \tag{1}$$

du premier membre de cette équation. Nous aurons alors:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\Phi}{T}+\Omega=0. \tag{2}$$

De là on déduit

$$\Phi(x,y,z,t)=\varepsilon^{-t/T}\,C(x,y,z)-\varepsilon^{-t/T}\int dt\,\varepsilon^{t/T}\,\Omega(x,y,z,t), \tag{3}$$

où l'on désigne par ε la base des logarithmes népériens, par $C(x,y,z)$ une fonction des coordonnées qui ne dépend pas du temps t. Les équations (3) peuvent d'ailleurs se mettre sous une forme différente. Soit $\Phi(x,y,z,0)$ la valeur de Φ qui correspond au moment $t=0$ en (x,y,z), c'est-à-dire en un point dont la position par rapport aux axes est à l'époque t la même qu'au moment initial $t=0$. Nous aurons

$$\Phi(x,y,z,t)=\varepsilon^{-t/T}\,\Phi(x,y,z,0)-\varepsilon^{-t/T}\int_0^t dt\,\varepsilon^{t/T}\,\Omega(x,y,z,t). \tag{4}$$

[1]) Bulletin Int. de l'Académie des Sciences de Cracovie, Cl. des Sc. Math. et Nat., Année 1902, p. 494.

Les équations (4) sont celles auxquelles j'ai eu recours dans plusieurs de mes écrits [1]).

L'omission des termes (1) dans les équations (9) du § 1. est légitime lorsqu'on admet certaines hypothèses que j'indiquerai d'une façon explicite. Representons par $(\mathscr{L})$ et par $(\mathscr{T})$ l'unité de longueur et l'unité de temps. Supposons, en premier lieu, que les composantes u, v, w de la vitesse relative du fluide par rapport aux axes soient très petites ou négligeables par rapport à $(\mathscr{L}) / (\mathscr{T})$; c'est l'hypothèse, discutée plus haut, du mouvement „lent". Supposons encore que le temps de relaxation T soit une quantité qui, comparée à $(\mathscr{T})$, soit tout au moins finie; en sorte que les produits $u\,T$, $v\,T$, $w\,T$ soient extrêmement petits ou négligeables par rapport à $(\mathscr{L})$. Supposons enfin que les quantités

$$(5) \qquad \Phi, \quad (\mathscr{L})\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (\mathscr{L})\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (\mathscr{L})\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

aient, à tout moment et pour tout point situé à l'intérieur du fluide, des valeurs du même ordre de grandeur. On désigne ici par Φ, par $\partial \Phi / \partial x$ etc., les valeurs véritables des composantes des pressions et de leurs dérivées par rapport aux coordonnées. Ces hypothèses permettent de négliger les termes mentionnés plus haut. Elles suffisent pour la démonstration que nous donnerons au § 10. d'une des propositions fondamentales de ce Mémoire (voir l'équation (23) du § 10. ainsi que les conclusions qui s'y rattachent).

Il ne faut pas perdre de vue que les Φ, les $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$, $\partial\Phi/\partial z$ qui figurent soit dans (1) soit dans (5), représentent, ainsi qu'il a été dit plus haut, les valeurs véritables qui ne peuvent se calculer qu'en partant des équations rigoureuses (1) et (2) ou (9) du § 1. Nous verrons cependant au § 10. que les valeurs de Φ qui se déduisent des équations approchées (2), (3), (4) du présent paragraphe, diffèrent des valeurs véritables (appelées Ψ au § 10.) seulement par des termes d'ordre supérieur. D'autre part, en se reportant à l'équation (23) du § 10. on s'assure que les termes

$$(6) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \text{ et } \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

[1]) Bulletin Int. de l'Académie des Sciences de Cracovie, Cl. des Sc. Math. et Nat., Année 1902, p. 19; ibidem, p. 490; ibidem, p. 507.

sont généralement du même ordre. L'hypothèse que nous venons d'admettre au sujet des valeurs Φ, $\partial\Phi/\partial x$ etc. véritables, peut donc s'étendre, généralement parlant, aux Φ, aux $\partial\Phi/\partial x$ etc. qui se calculent au moyen des équations approchées.

On a, en vertu des équations (4) ci-dessus, trois équations de la forme

$$\frac{\partial\,\Phi\,(x,y,z,t)}{\partial x}=\varepsilon^{-t/T}\,\frac{\partial\,\Phi\,(x,y,z,0)}{\partial x}-\varepsilon^{-t/T}\int_0^t dt\,\varepsilon^{t/T}\,\frac{\partial\,\Omega\,(x,y,z,t)}{\partial x}. \quad (7)$$

Ces équations nous apprennent que l'hypothèse que nous avons adoptée au sujet des valeurs approchées des Φ et des $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$, $\partial\Phi/\partial z$, est sûrement vérifiée lorsque les termes

$$\left.\begin{array}{ccc}(\mathscr{L})\,\dfrac{\partial\Phi^0}{\partial x}, & (\mathscr{L})\,\dfrac{\partial\Phi^0}{\partial y}, & (\mathscr{L})\,\dfrac{\partial\Phi^0}{\partial z}, \\ (\mathscr{L})\,T\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}, & (\mathscr{L})\,T\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}, & (\mathscr{L})\,T\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}\end{array}\right\} \quad (8)$$

sont des quantités de même ordre que la quantité Φ elle-même. On désigne ici par Φ^0, pour plus de brièveté, la valeur initiale $\Phi\,(x, y, z, 0)$. Cette nouvelle hypothèse nous sera fort utile dans la suite; mais elle n'est pas absolument indispensable. Nous l'introduirons parfois en la regardant comme une supposition parallèle aux hypothèses précédentes.

Si restrictives que paraissent, au point de vue purement analytique, les diverses hypothèses que nous avons énoncées dans ce paragraphe, pour le physicien elles délimitent un champ d'activité extrêmement vaste dont l'étude permettra, sans aucun doute, de pénétrer plus avant dans la connaissance des lois qui régissent le phénomène si important et si peu connu de la relaxation.

§ 4. Arrivons maintenant à la difficulté que signale M. Zaremba dans l'application des équations (3) du § 3. Considérons, avec M. Zaremba, un système de coordonnées $O'x'y'z'$ mobile (par rapport au système $Oxyz$) mais constamment parallèle à celui-ci. Supposons que le système $O'x'y'z'$ soit animé, par rapport à $Oxyz$, d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme et que ces deux systèmes, $O'x'y'z'$ et $Oxyz$, coïncident au moment initial $t=0$. Soient λ, μ, ν les composantes, rapportées aux axes $Oxyz$, de la vitesse de l'origine O' du système $O'x'y'z'$. Nous aurons alors, entre les coordonnées d'un même point, les relations

$$(1) \qquad x' = x - \lambda t \ ; \qquad y' = y - \mu t \ ; \qquad z' = z - \nu t.$$

Soient u', v', w' les composantes, rapportées au système $O'x'y'z'$, de la vitesse de la particule dont les composantes par rapport aux axes $Oxyz$ sont u, v, w; nous aurons

$$(2) \qquad u' = u - \lambda \ ; \qquad v' = v - \mu \ ; \qquad w' = w - \nu.$$

M. Zaremba considère le cas où le mouvement du fluide par rapport au système $O'x'y'z'$ est „parfaitement déterminé"; cela veut dire que les fonctions qui expriment comment les u', v', w' dépendent des x', y', z' et de t, sont indépendantes des paramètres λ, μ, ν.

On peut diviser en deux parties distinctes les raisonnements subséquents de M. Zaremba. Dans la première partie qui occupe les pages 88—91 du Mémoire et finit avec le Nr. 2 de celui-ci, M. Zaremba prouve que les valeurs de Φ qui se déduisent des équations (3) du § 3. ne vérifient pas, d'une façon entièrement générale et rigoureuse, les équations

$$(3) \qquad t\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0 \ ; \qquad t\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = 0 \ ; \qquad t\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0.$$

La nature même de ces équations nous enseigne qu'elles devraient être vérifiées pour des valeurs rigoureuses des composantes des pressions; il est donc juste de demander à des équations rigoureuses qu'elles satisfassent à la condition que M. Zaremba a indiquée. Or, les équations (3) du § 3. sont des relations approchées obtenues en négligeant certains termes dans les équations initiales; elles ont été données pour approchées dans mon Mémoire cité du 4. Février 1901, ainsi que le reconnaît M. Zaremba lui-même (l. c., p. 91). Je crois par conséquent qu'il faut considérer le raisonnement du Nr. 2 (pp. 88—91) du Mémoire de M. Zaremba comme une démonstration nouvelle et intéressante de cette circonstance qui n'est point douteuse: que les équations (3) du § 3. ne sont pas entièrement rigoureuses.

Ce n'est que dans la seconde partie de son raisonnement (Nr. 3, pp. 91—92) que M. Zaremba examine la question qui, à notre avis, était la seule discutable: les équations (3) du § 3. sont-elles, oui ou non, des relations suffisamment approchées? C'est à cette question que nous essayerons de répondre dans ce qui va suivre, en ayant soin d'ailleurs de définir le sens qu'il faut attacher à l'expression „suffisamment approchées" de la phrase précédente.

Nous ferons ici une remarque qui nous sera utile dans la suite. Si l'on tient compte de l'hypothèse du mouvement lent, dans laquelle nous nous sommes placés pour écrire les équations (3) du § 3., on voit aisément que, dans la discussion de ces équations, on doit a priori se borner à la considération du cas où les quantités

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\quad u',\ v',\ w'$$

(dans les notations de M. Zaremba) ont toutes de très petites valeurs. En effet, sans cette hypothèse, les composantes u, v, w de la vitesse du fluide par rapport au système $Oxyz$ pourraient devenir aussi grandes qu'on voudrait; ceci résulte immédiatement des équations et des conventions que M. Zaremba a adoptées et que nous avons reproduites au début de ce paragraphe.

§ 5. Considérons les systèmes $O'x'y'z'$ et $Oxyz$ de coordonnées dont nous avons fait usage jusqu'ici; mais introduisons, en outre, une série d'autres systèmes: $O_1 x_1 y_1 z_1$, $O_2 x_2 y_2 z_2$ etc., tous constamment parallèles aux systèmes $O'x'y'z'$ et $Oxyz$ et animés, par rapport à ceux-ci, d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme. Supposons que tous ces systèmes coïncident avec le système $Oxyz$ à l'instant initial. Soient λ_1, μ_1, ν_1; λ_2, μ_2, ν_2 etc. les composantes (parallèles aux axes) de la vitesse de l'origine O' du système $O'x'y'z'$ par rapport aux systèmes $O_1 x_1 y_1 z_1$, $O_2 x_2 y_2 z_2$ etc. Soient pareillement u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2 etc. les projections sur les axes $O_1 x_1 y_1 z_1$, $O_2 x_2 y_2 z_2$ etc. de la vitesse d'une particule du fluide par rapport à ces axes. Ces notations sont résumées dans le tableau suivant:

$$Oxyz \quad : \quad \lambda,\ \mu,\ \nu \quad ; \quad u,\ v,\ w \tag{1}$$

$$O_1 x_1 y_1 z_1 \quad : \quad \lambda_1, \mu_1, \nu_1 \quad ; \quad u_1, v_1, w_1 \tag{2}$$

$$O_2 x_2 y_2 z_2 \quad : \quad \lambda_2, \mu_2, \nu_2 \quad ; \quad u_2, v_2, w_2 \quad \text{etc.} \tag{3}$$

Soit une fonction $F(x', y', z', t)$ des variables x', y', z', t. Exprimée au moyen des variables x, y, z, t; x_1, y_1, z_1, t etc., elle prendra la forme

$$F(x - \lambda t,\ y - \mu t,\ z - \nu t, t) \tag{4}$$

$$F(x_1 - \lambda_1 t,\ y_1 - \mu_1 t,\ z_1 - \nu_1 t, t) \tag{5}$$

$$F(x_2 - \lambda_2 t,\ y_2 - \mu_2 t,\ z_2 - \nu_2 t, t) \tag{6}$$

etc. Nous aurons

$$(7)\quad \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{xyz}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}+\mu\frac{\partial F}{\partial y}+\nu\frac{\partial F}{\partial z}=$$

$$=\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x_1y_1z_1}+\lambda_1\frac{\partial F}{\partial x_1}+\mu_1\frac{\partial F}{\partial y_1}+\nu_1\frac{\partial F}{\partial z_1}$$

$$=\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x_2y_2z_2}+\lambda_2\frac{\partial F}{\partial x_2}+\mu_2\frac{\partial F}{\partial y_2}+\nu_2\frac{\partial F}{\partial z_2}\quad \text{etc.}$$

Ajoutons au premier membre de cette équation l'expression:

$$(8)\quad u'\frac{\partial F}{\partial x}+v'\frac{\partial F}{\partial y}+w'\frac{\partial F}{\partial z};$$

au second:

$$(9)\quad u'\frac{\partial F}{\partial x_1}+v'\frac{\partial F}{\partial y_1}+w'\frac{\partial F}{\partial z_1};$$

au troisième:

$$(10)\quad u'\frac{\partial F}{\partial x_2}+v'\frac{\partial F}{\partial y_2}+w'\frac{\partial F}{\partial z_2}\quad \text{etc.}$$

L'équation (7) devient (ainsi qu'il fallait s'y attendre)

$$(11)\quad \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{xyz}+u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}+w\frac{\partial F}{\partial z}=$$

$$=\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x_1y_1z_1}+u_1\frac{\partial F}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial F}{\partial y_1}+w_1\frac{\partial F}{\partial z_1}$$

$$=\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x_2y_2z_2}+u_2\frac{\partial F}{\partial x_2}+v_2\frac{\partial F}{\partial y_2}+w_2\frac{\partial F}{\partial z_2}$$

$$=\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$=\frac{dF}{dt}\ \text{(le système de cordonnées étant arbitraire).}$$

Observons que la valeur de la fonction Ω ne change pas lorsque, aux variables x', y', z', t, on substitue, dans son expression, les variables x, y, z, t; x_1, y_1, z_1, t; etc. Du raisonnement que l'on vient de lire, on peut donc tirer les conclusions suivantes: 1) lorsque, dans la série: $Oxyz$, $O_1x_1y_1z_1$ etc., on passe d'un système de coordonnées à un autre, les équations (1) et (2) ou (9) du § 1. ne sont pas altérées; cela prouve qu'elles sont à l'abri de l'objection formulée par M. Zaremba au sujet des équations (2) et (3) du § 3.; 2) le même changement de système de coordonnées détermine, pour les équations (2) du § 3., une altération de type qui est la conséquence immédiate de l'omission, dans les équations rigoureuses, des termes (1) du § 3. Cela suffit pour conclure que les équations (2), (3), (4) du § 3. ne peuvent être que des équations approchées, supposant un système de coordonnées convenable, c'est-à-dire choisi dans un groupe de systèmes qui, par leur mouvement de translation, diffèrent peu l'un de l'autre.

§ 6. Reprenons les équations (3) ou (4) du § 3.; pour les écrire, nous adoptons le système de coordonnées $Oxyz$. Cela revient à dire que les composantes u', v', w' de la vitesse du fluide par rapport à $O'x'y'z'$ ainsi que les composantes λ, μ, ν de la vitesse de l'origine O' par rapport à $Oxyz$ ont des valeurs suffisamment petites. Soit Φ la valeur d'une des composantes des pressions qui se calcule au moyen d'une des équations (3) ou (4) du § 3. Nous aurons

$$\Phi = \Phi(x, y, z, t, \lambda, \mu, \nu), \tag{1}$$

où $\Phi(\ )$ désigne une fonction ne vérifiant pas les équations

$$t\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{etc.} \tag{2}$$

Dans l'expression (1) de Φ, posons

$$x = x' + \lambda t \; ; \quad y = y' + \mu t \; ; \quad z = z' + \nu t \; ; \tag{3}$$

elle deviendra

$$\Phi = F(x', y', z', t, \lambda, \mu, \nu). \tag{4}$$

Comme au paragraphe précédent, considérons un troisième système de coordonnées $O_1 x_1 y_1 z_1$ dont le mouvement de translation par rapport à $O'x'y'z'$ diffère légèrement de celui dont est animé le système $Oxyz$. Supposons donc assez petites les composantes λ_1, μ_1, ν_1 de la vitesse de l'origine O' par rapport à $O_1 x_1 y_1 z_1$ en sorte que l'on soit autorisé à écrire les équations (3) ou (4) du § 3. en les rapportant au système de coordonnées $O_1 x_1 y_1 z_1$. Soit Φ_1 la valeur que donne, dans ces conditions, celle des équations (3) ou (4) du § 3. à laquelle on s'est adressé. Nous aurons

$$\Phi_1 = \Phi(x_1, y_1, z_1, t, \lambda_1, \mu_1, \nu_1), \tag{5}$$

où $\Phi(\ )$ représente la fonction désignée par la même lettre plus haut; elle ne vérifie pas les équations (2) de ce paragraphe. La valeur (5) sera, en général, différente de celle que donne l'égalité (1) ci-dessus. Si, dans l'expression (5), nous posons

(6) $x_1 = x' + \lambda_1 t$; $y_1 = y' + \mu_1 t$; $z_1 = z' + \nu_1 t$,

elle deviendra

(7) $$\Phi_1 = F(x', y', z', t, \lambda_1, \mu_1, \nu_1).$$

Considérons la différence $\Phi_1 - \Phi$; nous dirons que c'est la v a r i a t i o n de la composante Φ calculée au moyen des équations (3) ou (4) du § 3. En vertu des équations (4) et (7) nous sommes en droit de poser, lorsque les différences $(\lambda_1 - \lambda)$, $(\mu_1 - \mu)$, $(\nu_1 - \nu)$ sont suffisamment petites:

(8) $$\Phi_1 - \Phi = (\lambda_1 - \lambda)\frac{\partial F}{\partial \lambda} + (\mu_1 - \mu)\frac{\partial F}{\partial \mu} + (\nu_1 - \nu)\frac{\partial F}{\partial \nu}.$$

On pourra dire que l'emploi de cette formule équivaut à une hypothèse. Mais ce n'est là, au fond, qu'une de ces innombrables hypothèses auxquelles, en Physique, on fait un appel quotidien. Considérons maintenant les identités telles que

(9) $$\Phi(x, y, z, t, \lambda, \mu, \nu) = F(x', y', z', t, \lambda, \mu, \nu) ;$$

elles nous permettent d'écrire trois équations de la forme

(10a) $$t\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} ;$$

l'équation (8) devient donc

(11) $$\Phi_1 - \Phi = (\lambda_1 - \lambda)\left(t\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}\right) + (\mu_1 - \mu)\left(t\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mu}\right) + (\nu_1 - \nu)\left(t\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\right).$$

La variation $\Phi_1 - \Phi$, par conséquent, ne se détermine pas par les seules quantités suivantes (que pour plus de brièveté nous désignerons par φ_x, φ_y, φ_z):

(12) $$t\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = \varphi_x ; \quad t\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = \varphi_y ; \quad t\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \varphi_z ;$$

elle est donnée par l'équation (11) que nous pouvons transcrire ainsi qu'il suit:

(13) $$\Phi_1 - \Phi = (\lambda_1 - \lambda)\varphi_x + (\mu_1 - \mu)\varphi_y + (\nu_1 - \nu)\varphi_z .$$

§ 7. Calculons maintenant, en partant des équations (4) du § 3., les valeurs des quantités φ_x, φ_y, φ_z. Nous trouverons, en suivant la voie indiquée dans le Mémoire de M. Zaremba,

$$\varphi_x = \varepsilon^{-t/T}\left\{t\frac{\partial\Phi^0}{\partial x} + \frac{\partial\Phi^0}{\partial\lambda} - t\int_0^t dt\,\varepsilon^{t/T}\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \int_0^t dt\,\varepsilon^{t/T}\,t\,\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\}, \tag{1a}$$

où l'on a mis Φ^0 au lieu de $\Phi(x, y, z, 0)$.

Il est aisé de voir que, à l'époque $t = 0$, l'on a

$$\frac{\partial F^0}{\partial\lambda} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi^0}{\partial\lambda} = 0. \tag{2a}$$

Pour $t = 0$, ces propositions sont équivalentes. Ce qu'elles expriment toutes les deux, c'est que les pressions, au moment initial, doivent être déterminées par la nature même du problème d'une façon pour ainsi dire empirique; par conséquent, elles peuvent être regardées comme fonctions des variables (x', y', z', t ou x, y, z, t ou x_1, y_1, z_1, t, cela est indifférent lorsque $t = 0$) fonctions qui sont indépendantes des paramètres λ, μ, ν.

Considérons, en second lieu, le terme

$$\varepsilon^{-t/T}\,t\,\frac{\partial\Phi^0}{\partial x} \tag{3a}$$

qui figure dans l'expression (1a) ci-dessus. Lorsque t va de 0 à ∞ le facteur $\varepsilon^{-t/T}t$ varie de la manière suivante: depuis zéro, il augmente jusqu'à la valeur maxima T/ε à laquelle il arrive pour $t = T$; il diminue ensuite et tend vers zéro.

En troisième lieu, considérons la quantité

$$R = \varepsilon^{-t/T}\left\{t\int_0^t dt\,\varepsilon^{t/T}\frac{\partial\Omega}{\partial x} - \int_0^t dt\,\varepsilon^{t/T}\,t\,\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\}. \tag{4}$$

Elle peut s'écrire, avec un changement de notation facile à comprendre,

$$R = \varepsilon^{-t/T}\int_0^t ds\,\varepsilon^{s/T}(t-s)\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \tag{5}$$

où $t - s \geqslant 0$ et où l'on désigne par Ω une fonction $\Omega(x, y, z, s)$ de même forme que la fonction $\Omega(x, y, z, t)$ que l'on avait considérée jusqu'à présent. Substituons à $\partial\Omega/\partial x$ sous le signe de l'intégration, la valeur absolue $|\partial\Omega/\partial x|$; par là la valeur absolue de l'intégrale ne pourra qu'augmenter. Soit encore

$$(6)\qquad \left\{\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\}_0^t$$

la valeur maxima qu'admet $|\partial\Omega/\partial x|$ pendant l'intervalle de temps de $t=0$ à $t=t$. On voit qu'il existe une limite au dessous de laquelle la valeur absolue de R reste constamment; c'est la suivante:

$$(7)\qquad |R|\leqslant\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\}_0^t T(T-(t+T)\varepsilon^{-t/T}).$$

Considérons l'expression

$$(8)\qquad T-(t+T)\,\varepsilon^{-t/T}\,;$$

elle ne cesse d'augmenter lorsque t varie depuis 0 jusqu'à ∞ et elle est

$$(9)\qquad =0 \text{ lorsque } t=0\,;\quad =T \text{ lorsque } t=\infty\,.$$

La limite supérieure de $|R|$ peut donc varier entre les limites

$$(10)\qquad 0 \text{ et } T^2\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\}_0^\infty.$$

De ce qui vient d'être dit, on conclut, en se reportant à l'équation (1a), que l'on a

$$(11a)\qquad |\varphi_x|\leqslant\frac{T}{\varepsilon}\left|\frac{\partial\Phi^0}{\partial x}\right|+T^2\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\}_0^\infty$$

Les limites de $|\varphi_y|$ et de $|\varphi_z|$ se calculent d'une façon analogue. Jointes aux équations (3) du § 3., les inégalités (11) suggèrent tout naturellement le calcul que nous exposerons dans les lignes qui vont suivre.

§ 8. Acceptons l'équation (2) du § 3. L'opération $t\partial/\partial x+\partial/\partial\lambda$ la changera en

$$(1)\qquad \left(t\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\Phi}{T}+\Omega\right)=0\,;$$

or ceci se réduit à

$$(2)\qquad t\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)+\frac{1}{T}\left(t\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\right)=0$$

puisque

$$(3)\qquad (t\,\partial/\partial x+\partial/\partial\lambda)\,\Omega=0\,.$$

Si, dans l'équation (2), on fait usage du symbole φ_x en lui prêtant la signification définie par l'égalité (12a) du § 6., on trouve

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial t} + \frac{\varphi_x}{T} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \,. \tag{4}$$

Ici $\partial\Phi/\partial x$ est une fonction des variables x, y, z, t que l'on sait calculer toutes les fois que Φ^0 et Ω sont données en fonctions de ces variables; à savoir

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \varepsilon^{-t/T} \frac{\partial \Phi^0}{\partial x} - \varepsilon^{-t/T} \int_0^t ds\; \varepsilon^{s/T} \frac{\partial \Omega(x, y, z, s)}{\partial x} \,. \tag{5}$$

Si donc l'on considère le symbole $(\partial\Phi/\partial x)$ comme une simple abréviation qui remplace le second membre de l'égalité (5), on peut écrire, en vertu de (4),

$$\varphi_x = \varepsilon^{-t/T} \varphi^0{}_x + \varepsilon^{-t/T} \int_0^t ds\; \varepsilon^{s/T} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right). \tag{6a}$$

Un raisonnement imité de celui dont nous avons fait usage plus haut, au § 7., conduit à poser $\varphi_x{}^0 = 0$ et montre que l'on a

$$|\varphi_x| \leqslant \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right\}_0^t T(1 - \varepsilon^{-t/T}) \,. \tag{7a}$$

Il apparaît donc clairement que φ_x est une quantité petite tout-au-moins du même ordre que $T\, \partial\Phi/\partial x$.

§ 9. Reprenons l'équation (11) ou (13) du § 6. Les résultats que nous avons obtenus au § 7. nous permettent d'affirmer que

$$\begin{aligned} |\Phi_1 - \Phi| \leqslant & \left| (\lambda_1 - \lambda)\, T \left(\frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\partial \Phi^0}{\partial x} \right| + T \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right\}_0^\infty \right) \right| + \\ & + \left| (\mu_1 - \mu)\, T \left(\frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\partial \Phi^0}{\partial y} \right| + T \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right\}_0^\infty \right) \right| + \\ & + \left| (\nu_1 - \nu)\, T \left(\frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\partial \Phi^0}{\partial z} \right| + T \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right\}_0^\infty \right) \right| . \end{aligned} \tag{1}$$

Ainsi qu'au § 3., supposons que les quantités

$$\frac{\partial \Phi^0}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi^0}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi^0}{\partial z}, \quad T\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad T\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad T\frac{\partial \Omega}{\partial z} \tag{2}$$

multipliées par l'unité de longueur, soient du même ordre que la quantité Φ elle-même. Supposons d'ailleurs que les composantes λ_1,

$\mu_1, \nu_1, \lambda, \mu, \nu$ soient extrêmement petites et que la période T soit tout au moins finie, en sorte que les produits

$$(3) \qquad (\lambda_1 - \lambda)\, T\,, \qquad (\mu_1 - \mu)\, T\,, \qquad (\nu_1 - \nu)\, T$$

représentent les projections sur les axes d'une distance extrêmement courte. Cela posé, on conclut de l'équation (1) que la variation $(\Phi_1 - \Phi)$ est donnée par une expression d'ordre supérieur à celui de la quantité Φ elle-même. Or cette condition, à savoir: que la variation de la composante Φ qui résulte de l'application des équations (3) ou (4) du § 3., soit une quantité petite d'ordre supérieur à celui de la composante Φ elle-même, est précisément celle qui doit être remplie pour que l'on puisse dire que les équations que nous discutons sont suffisamment approchées.

On arrivera aisément à la même conclusion en portant les résultats du § 8. dans l'équation (11) ou (13) du § 6. et en tenant compte de l'hypothèse relative aux Φ, $\partial\Phi/\partial x$ etc. dont nous avons donné l'énoncé au § 3. Cette méthode de démonstration est même évidemment plus directe que celle que nous venons d'exposer.

§ 10. Dans notre Mémoire Sur l'application des équations de Lagrange dans la Théorie de la Viscosité (voir ci-dessus, p. 268), nous avons prouvé que les équations (1) et (2) ou (9) du § 1. de cette Communication permettent de calculer rigoureusement la valeur de Φ qui existe, à l'époque t, pour une particule donnée (a, b, c) du fluide. Cette valeur est donnée par l'équation (10) du § 2. du Mémoire que nous venons de citer; nous lui donnerons le nom de valeur véritable et nous la désignerons par $\Psi^*(a, b, c, t)$ pour la distinguer de la valeur approchée $\Phi(x, y, z, t)$ que nous avons considérée dans ce qui précède. La différence de la valeur approchée et de la valeur véritable représente l'erreur que l'on commet en adoptant la valeur approchée; nous la désignerons par la lettre Γ. Pour arriver à former Γ, on peut, en premier lieu, exprimer la valeur approchée $\Phi(x, y, z, t)$ en fonction des variables a, b, c, t; soit $\Phi^*(a, b, c, t)$ l'expression à laquelle on parvient. L'erreur sera donnée par

$$(1) \qquad \Phi^*(a, b, c, t) - \Psi^*(a, b, c, t) = \Gamma^*(a, b, c, t)\,.$$

On peut procéder d'une manière différente. Soit $\Psi(x, y, z, t)$ l'expression que l'on obtient en substituant dans $\Psi^*(a, b, c, t)$ les variables x, y, z, t aux variables a, b, c, t; on aura

$$\Phi\,(x,y,z,t)-\Psi\,(x,y,z,t)=\Gamma\,(x,y,z,t)\,. \tag{2}$$

Désignons par δa, δb, δc, δt des variations infinitésimales entièrement arbitraires. L'égalité (1) nous donnera

$$\begin{aligned}
\delta\,\Gamma^*(a,b,c,t)=&\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}-\frac{\partial\Psi^*}{\partial a}\right)\delta a+\\
&+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b}-\frac{\partial\Psi^*}{\partial b}\right)\delta b+\\
&+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c}-\frac{\partial\Psi^*}{\partial c}\right)\delta c+\\
&+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+u\frac{\partial\Phi}{\partial x}+v\frac{\partial\Phi}{\partial y}+w\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right)\delta t\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Supposons d'autre part que l'on ait choisi x, y, z, t pour variables indépendantes; désignons par δx, δy, δz, δt des variations infinitésimales arbitraires; en vertu de l'égalité (2) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma\,(x,y,z,t)=&\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial\Psi^*}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial\Psi^*}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}\right)\right)\delta x+\\
&+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial\Psi^*}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial\Psi^*}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial y}\right)\right)\delta y+\\
&+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z}+\frac{\partial\Psi^*}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial z}+\frac{\partial\Psi^*}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial z}\right)\right)\delta z+\\
&+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}+\frac{\partial\Psi^*}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\partial\Psi^*}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}+\frac{\partial\Psi^*}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}\right)\right)\delta t.
\end{aligned} \tag{4}$$

Posons

$$\delta a=0\ ;\quad \delta b=0\ ;\quad \delta c=0 \tag{5}$$

dans l'égalité (3); dans ce cas, nous suivons une particule donnée dans les différentes positions qu'elle occupe successivement. L'égalité (3) nous donnera

$$\frac{\partial\Gamma^*}{\partial t}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+u\frac{\partial\Phi}{\partial x}+v\frac{\partial\Phi}{\partial y}+w\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\,. \tag{6}$$

Rappelons maintenant que l'on a, d'une part, l'équation (2) du § 3., savoir

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\Phi}{T}+\Omega=0 \tag{7}$$

(équation où les quantités Φ et Ω sont supposées être exprimées en fonctions des variables x, y, z, t); et, d'autre part, l'équation (9) du § 2. du Mémoire auquel nous venons de faire allusion; nous la transcrirons en y introduisant le symbole Ψ^* dont actuellement nous faisons usage:

$$(8) \qquad \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \frac{\Psi^*}{T} + \Omega^* = 0 \;;$$

ici Ψ^* et Ω^* doivent être exprimées en fonctions des variables a, b, c, t. Comme l'on a

$$(9) \qquad \Omega \equiv \Omega^* \;; \qquad \Phi \equiv \Phi^* \;,$$

les équations (7) et (8) permettent d'écrire

$$(10) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{\Gamma^*}{T} .$$

L'équation (6) devient donc, en tenant compte de l'équation (10),

$$(11) \qquad \frac{\partial \Gamma^*(a,b,c,t)}{\partial t} + \frac{\Gamma^*(a,b,c,t)}{T} - \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + w \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0 .$$

Supposons les dérivées $\partial\Phi/\partial x$ etc. calculées au moyen des équations de la forme

$$(12a) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \varepsilon^{-t/T} \frac{\partial \Phi(x,y,z,0)}{\partial x} - \varepsilon^{-t/T} \int_0^t ds\; \varepsilon^{s/T} \frac{\partial \Omega(x,y,z,s)}{\partial x} \;;$$

supposons ensuite les u, v, w calculées au moyen d'équations telles que

$$(13) \qquad u = u(x,y,z,t) \;; \qquad v = v(x,y,z,t) \;; \qquad w = w(x,y,z,t) \;;$$

le dernier terme du premier membre de l'équation (11) deviendra une fonction connue des variables x, y, z, t, fonction que nous représenterons par $G(x, y, z, t)$. Soit $G^*(a, b, c, t)$ l'expression que l'on obtient lorsque on exprime G en fonction des variables a, b, c, t. De l'équation (11) on tire

$$(14) \qquad \Gamma^*(a,b,c,t) = \varepsilon^{-t/T}\, \Gamma^*(a,b,c,0) + \varepsilon^{-t/T} \int_0^t ds\; \varepsilon^{s/T}\, G^*(a,b,c,s).$$

Dans l'équation ainsi obtenue, on peut poser $\Gamma^*(a, b, c, 0) = 0$ en vertu d'une remarque analogue à celle qui a été faite au § 7. En raisonnant ensuite de la manière que l'on connaît déjà, on peut évaluer l'ordre de grandeur de la quantité $\Gamma^*(a, b, c, t)$. Il est aisé de voir que l'ordre de grandeur de la quantité $\Gamma^*(a, b, c, t)$ est le même que celui que nous avons trouvé plus haut dans le cas de $(\Phi_1 - \Phi)$.

Posons

$$\delta x = 0 \quad ; \quad \delta y = 0 \quad ; \quad \delta z = 0 \tag{15}$$

dans l'équation (4); cela veut dire que nous fixons notre attention sur un point déterminé de l'espace occupé par le fluide. Nous aurons

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} \right). \tag{16}$$

Dans l'équation (16) portons les valeurs

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\left(u \frac{\partial a}{\partial x} + v \frac{\partial a}{\partial y} + w \frac{\partial a}{\partial z} \right) \tag{17a}$$

etc. que l'on tire des équations (2) du § 2. du Mémoire cité (voir à la page 269 de ce Volume). Les termes entre parenthèses deviendront

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} - \left(u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v \frac{\partial \Psi}{\partial y} + w \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right). \tag{18}$$

En vertu de l'équation (10) qui peut s'écrire de la façon suivante

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{\Gamma}{T}, \tag{19}$$

l'équation (16), transformée ainsi qu'il vient d'être dit, fournit l'équation

$$\frac{\partial \Gamma(x, y, z, t)}{\partial t} + \frac{\Gamma(x, y, z, t)}{T} - \left(u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v \frac{\partial \Psi}{\partial y} + w \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = 0. \tag{20}$$

Considérons que l'on a, d'après les équations (10) du § 2. du Mémoire cité,

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial a} = \varepsilon^{-t/T} \frac{\partial \Psi^*(a, b, c, 0)}{\partial a} - \varepsilon^{-t/T} \int_0^t ds\, \varepsilon^{s/T} \frac{\partial \Omega^*(a, b, c, s)}{\partial a} \tag{21a}$$

et deux équations analogues; par conséquent les dérivées $\partial \Psi^* / \partial a$ etc. peuvent être regardées comme des fonctions connues des variables a, b, c, t. Dès lors, au moyen des équations telles que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi^*}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x} \qquad \text{etc.} \tag{22a}$$

on pourra calculer $\partial \Psi / \partial x$ etc. que l'on exprimera en fonctions des variables x, y, z, t. Soit $H(x, y, z, t)$ la valeur des trois derniers termes du premier membre de l'équation (20). Nous aurons

$$(23)\quad \Gamma(x,y,z,t) = \varepsilon^{-t/T}\,\Gamma(x,y,z,0) + \varepsilon^{-t/T}\int_0^t ds\, \varepsilon^{s/T} H(x,y,z,s)$$

et, encore une fois, nous pourrons poser $\Gamma(x, y, z, 0) = 0$. L'évaluation de l'ordre de grandeur de $\Gamma(x, y, z, t)$ se fait comme à l'ordinaire. On s'assure aisément (voir § 3.) que l'erreur $\Gamma(x, y, z, t)$ est une quantité petite d'ordre supérieur à celui de la pression $\Psi(x, y, z, t)$ elle-même. Or la variation de l'erreur Γ est nécessairement identique à la variation de la valeur approchée Φ; en effet, la variation de la valeur véritable Ψ ne peut pas, par définition, être différente de zéro; par conséquent les résultats de ce paragraphe s'accordent avec les conclusions auxquelles nous avons été amenés dans les paragraphes précédents.

§ 11. Ces mêmes conclusions se trouvent, par contre, en désaccord avec les propositions que renferme le Nr. 3. de la Communication de M. Zaremba (pp. 91 – 92 de ce Volume); ceci m'impose l'obligation de soumettre le contenu du Nr. 3. de cette Communication à une analyse détaillée. Voici ce qu'affirme M. Zaremba: les équations (3) du § 3. devraient être exactes approximativement dans le cas où l'on n'envisagerait que des valeurs assez petites des paramètres λ, μ, ν; mais pour cela, il serait nécessaire et suffisant que, pour de petites valeurs des paramètres λ, μ, ν, les valeurs des expressions φ_x, φ_y, φ_z du § 6. fussent très petites par rapport aux paramètres λ, μ, ν.

Quand pourra-t-on dire que les équations (3) du § 3. sont exactes approximativement? Evidemment dans le cas où la variation de la valeur Φ qui se déduit de ces équations est une quantité petite d'ordre supérieur à celui de la quantité Φ elle-même. Si cette condition est satisfaite, l'utilité pratique (pour ainsi dire) de ces équations ne saurait être révoquée en doute. Cela posé, reportons nous à l'équation (13) du § 6. Elle nous apprend que, toutes les fois que les quantités φ_x, φ_y, φ_z (multipliées par l'unité de vitesse) seront données par des expressions du même ordre que celui de la quantité Φ, la variation $(\Phi_1 - \Phi)$ sera sûrement une quantité petite d'ordre supérieur à celui de la pression Φ elle-même. Il m'est donc impossible d'admettre la nécessité, pour les quantités φ_x, φ_y, φ_z, d'être très petites par rapport aux paramètres λ, μ, ν, nécessité que M. Zaremba pose en principe au Nr. 3. de sa Communication.

La proposition que nous venons d'analyser amène M. Zaremba à formuler de la manière suivante la condition que devraient vérifier, pour être approximativement exactes, les équations (3) du § 3.: les quantités $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ devraient s'annuler identiquement pour $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$. On devrait avoir, en d'autres termes,

$$\operatorname{Lim}\left(t\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\right)_{\substack{\lambda=0\\ \mu=0\\ \nu=0}}=0 \tag{1a}$$

ainsi que deux équations analogues. Cette conclusion n'étant donnée, dans le mémoire de M. Zaremba, que comme une conséquence qui découle de la proposition déjà analysée, nous serions en droit, en nous appuyant sur ce qui précède, de nous refuser à l'admettre. Mais il nous paraît préférable de la soumettre à l'examen en suivant une voie indépendante; c'est ce qui fera l'objet du paragraphe suivant.

Reprenons les considérations du § 6. Supposons, pour simplifier, que le système $O_1\,x_1\,y_1\,z_1$ se confonde constamment avec le système $O'\,x'\,y'\,z'$ en sorte que l'on ait

$$\lambda_1 = 0\ ; \quad \mu_1 = 0\ ; \quad \nu_1 = 0. \tag{2}$$

La valeur Φ_1 du § 6. pourra s'appeler Φ' puisqu'elle se rapporte au système $O'\,x'\,y'\,z'$. Nous aurons

$$\Phi - \Phi' = \lambda\left(t\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\right)+\mu\left(t\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right)+\nu\left(t\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right). \tag{3}$$

Imaginons que les valeurs de λ, μ, ν tendent vers zéro. Il est juste d'exiger, dans ce cas, que la valeur de Φ converge vers Φ'. L'équation (3) nous apprend qu'il n'est nullement indispensable que les équations (1) soient vérifiées pour que, dans ce cas, Φ converge vers Φ'; la condition qui doit être remplie est seulement que les expressions

$$t\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\,, \qquad t\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\,, \qquad t\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} \tag{4}$$

tendent, pour $\lambda = \mu = \nu = 0$, vers des limites qui ne sont pas infinies.

§ 12. Considérons, avec M. Zaremba, un fluide dont on rapporte le mouvement à un système de coordonnées $O'\,x'\,y'\,z'$. Introduisons ensuite, ainsi que plus haut (§ 5.), une série de systèmes différents:

$$O\,x\,y\,z\ , \qquad O_1\,x_1\,y_1\,z_1\ , \qquad O_2\,x_2\,y_2\,z_2 \quad \text{etc.} \tag{1}$$

auxquels nous imposerons, comme au § 5., les conditions ordinaires: de coïncider, à l'époque $t=0$, avec le système $O'x'y'z'$ et d'être animés, à tout instant, d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à ce même système $O'x'y'z'$. Soient

(2) λ', μ', ν' ; $\lambda_1', \mu_1', \nu_1'$; $\lambda_2', \mu_2', \nu_2'$ etc.

les composantes de la vitesse de l'origine O' par rapport à ces systèmes. On a, en vertu de l'hypothèse dans laquelle se place M. Zaremba,

(3) $u = u' + \lambda'$; $u_1 = u' + \lambda_1'$; $u_2 = u' + \lambda_2'$ etc.

Essayons maintenant de définir un système de coordonnées $O''x''y''z''$, différent de $O'x'y'z'$, mais qui serait capable de nous rendre des services analogues. Il nous est défendu, en effet, de supposer, dans la démonstration de M. Zaremba, que le système de coordonnées qu'il désigne par $O'x'y'z'$ soit un système singulier dont les propriétés seraient exceptionnelles; la démonstration de M. Zaremba serait sans force et sans portée si l'on ne pouvait pas la répéter pour une infinité de systèmes mis à la place du système $O'x'y'z'$. Soit par exemple $O_n x_n y_n z_n$ le système, choisi parmi les systèmes (1) précédents, que nous prendrons pour $O''x''y''z''$. Posons donc, pour plus de clarté,

(4) $$\lambda_n' = \Lambda \quad \text{et} \quad u_n = u''.$$

Considérons l'équation

(5) $$u_n = u' + \lambda'_n$$

qui est inclue parmi les équations du système (3) précédent. Elle s'écrira désormais

(6) $$u'' = u' + \Lambda.$$

Posons

(7) $$\left\{\begin{array}{l} \lambda' - \Lambda = \lambda'' \\ \lambda_1' - \Lambda = \lambda_1'' \\ \lambda_2' - \Lambda = \lambda_2'' \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Les équations (3) nous donneront

(8) $u = u'' + \lambda''$; $u_1 = u'' + \lambda_1''$; $u_2 = u'' + \lambda_2''$ etc.

L'analogie qui existe entre les équations (8) et les équations (3) nous confirme dans l'attente qu'il est possible de définir un système $O'' x'' y'' z''$, différent de $O' x' y' z'$, qui jouisse de propriétés exactement analogues à celles attribuées au système $O' x' y' z'$. De même, il nous sera possible de définir un troisième système $O''' x''' y''' z'''$, différent des deux premiers, qui jouira pareillement de propriétés analogues etc.

D'après l'hypothèse qu'admet M. Zaremba, nous avons

$$\begin{aligned} u' &= u'(x', y', z', t) \\ &= u'(x - \lambda' t,\ y - \mu' t,\ z - \nu' t, t). \end{aligned} \tag{9}$$

De là on déduit, en tenant compte des équations (6) et (7,1),

$$\begin{aligned} u'' &= u'(x - \lambda' t,\ y - \mu' t,\ z - \nu' t,\ t) + \Lambda \\ &= u'\big(x - (\lambda'' + \Lambda) t,\ y - (\mu'' + \mathrm{M}) t,\ z - (\nu'' + \mathrm{N}) t,\ t\big) + \Lambda. \end{aligned} \tag{10}$$

On désigne ici par M et par N les deux composantes qui sont analogues à Λ.

Imaginons que l'on calcule, au moyen de la formule

$$\Phi(x, y, z, t) = \varepsilon^{-t/T} \Phi(x, y, z, 0) - \varepsilon^{-t/T} \int_0^t ds\ \varepsilon^{s/T} \Omega\ , \tag{11}$$

la valeur de la composante Φ, en s'appuyant, pour calculer Ω, la première fois sur l'équation

$$u = u'(x - \lambda' t,\ y - \mu' t,\ z - \nu' t,\ t) + \lambda' \tag{12a}$$

qui se déduit de (3) et de (9), et, la seconde fois, en prenant pour point de départ la formule

$$u = u'\big(x - (\lambda'' + \Lambda) t, y - (\mu'' + \mathrm{M}) t, z - (\nu'' + \mathrm{N}) t, t\big) + \Lambda + \lambda'' \tag{13a}$$

que l'on écrit en vertu de (8) et de (10). Soient

$$\Omega_1 = \Omega(x - \lambda' t,\ y - \mu' t,\ z - \nu' t,\ t) \tag{14,1}$$

$$\Omega_2 = \Omega\big(x - (\lambda'' + \Lambda) t,\ y - (\mu'' + \mathrm{M}) t,\ z - (\nu'' + \mathrm{N}) t,\ t\big) \tag{14,2}$$

les valeurs que l'on obtient ainsi. Dans ces égalités, la nature de la fonction Ω est la même. Portons les valeurs Ω_1 et Ω_2 dans l'équation (11). Dans les deux cas, les limites de l'intégration sont les mêmes; les mêmes quantités x, y, z, dans les deux cas, sont regardées comme constantes pendant l'intégration. Considérons, d'autre part, que les systèmes

$$Oxyz\ , \qquad O'x'y'z'\ , \qquad O''x''y''z'' \tag{15}$$

coïncident, par hypothèse, à l'époque $t=0$; cela prouve que, dans les deux cas dont il s'agit, les valeurs initiales de Φ sont les mêmes. De tout ceci on conclut que les valeurs que l'on trouve pour la pression Φ seront, dans ces deux cas, les suivantes:

$$(16,1)\qquad \Phi_1=\Phi(x,y,z,t,\ \lambda',\mu',\nu')$$

$$(16,2)\qquad \Phi_2=\Phi(x,y,z,t,\ \lambda''+\Lambda,\ \mu''+\mathrm{M},\ \nu''+\mathrm{N}),$$

où l'on désigne par Φ une fonction dont la nature dans les deux cas est la même.

Rappelons maintenant que Λ ne dépend pas de λ'' (voir (7)). Par conséquent les équations (16) nous donnent

$$(17,1)\qquad \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}=\dot{\Phi}_x(x,y,z,t,\ \lambda',\mu',\nu')$$

$$(17,2)\qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}=\dot{\Phi}_x(x,y,z,t,\ \lambda''+\Lambda,\ \mu''+\mathrm{M},\ \nu''+\mathrm{N})$$

$$(18,1)\qquad \frac{\partial\Phi_1}{\partial\lambda'}=\dot{\Phi}_\lambda(x,y,z,t,\ \lambda',\mu',\nu')$$

$$(18,2)\qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial\lambda''}=\dot{\Phi}_\lambda(x,y,z,t,\ \lambda''+\Lambda,\ \mu''+\mathrm{M},\ \nu''+\mathrm{N}),$$

où il serait superflu d'expliquer les notations adoptées. Les équations (17) et (18) permettent d'écrire

$$(19,1)\qquad t\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial\lambda'}=\Pi(x,y,z,t,\ \lambda',\mu',\nu')$$

$$(19,2)\qquad t\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial\lambda''}=\Pi(x,y,z,t,\ \lambda''+\Lambda,\ \mu''+\mathrm{M},\ \nu''+\mathrm{N}).$$

On désigne ici par Π une nouvelle fonction dont la nature dans les deux équations est la même. Posons:

$$(20)\qquad \left\{\begin{array}{ll}\text{dans l'équation } (19,1): & \lambda'=\Lambda,\ \mu'=\mathrm{M},\ \nu'=\mathrm{N}\\ \text{dans l'équation } (19,2): & \lambda''=0,\ \mu''=0,\ \nu''=0.\end{array}\right.$$

Nous obtenons l'égalité suivante:

$$(21)\qquad \left(t\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial\lambda''}\right)_{\substack{\lambda''=0\\ \mu''=0\\ \nu''=0}}=\left(t\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial\lambda'}\right)_{\substack{\lambda'=\Lambda\\ \mu'=\mathrm{M}\\ \nu'=\mathrm{N}}}.$$

M. Zaremba exige que l'on ait

$$\left(t\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial\lambda'}\right)_{\substack{\lambda'=0\\ \mu'=0\\ \nu'=0}}=0\,. \tag{22}$$

Supposons vérifiée cette équation (22). Le système $O''\,x''\,y''\,z''$ jouissant de propriétés exactement analogues, nous serons contraints d'exiger que l'on ait pareillement

$$\left(t\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial\lambda''}\right)_{\substack{\lambda''=0\\ \mu''=0\\ \nu''=0}}=0\,. \tag{23}$$

Jointe à l'équation (21) l'équation (23) entraîne la conséquence suivante

$$\left(t\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial\lambda'}\right)_{\substack{\lambda'=\Lambda\\ \mu'=M\\ \nu'=N}}=0\,. \tag{24}$$

Les hypothèses que nous avons admises impliquent que les quantités Λ, M, N sont petites; mais, dans l'intervalle dans lequel elles sont enfermées, ces quantités sont entièrement arbitraires. La comparaison des équations (22) et (24) suffit donc à prouver que la condition posée par M. Zaremba revient à exiger que, dans cet intervalle, les équations que l'on soumet à l'épreuve soient absolument rigoureuses. Ainsi la proposition énoncée au Nr. 3. du Mémoire de M. Zaremba entraîne comme conséquence une conclusion qui équivaut à celle-ci: pour que certaines équations (les équations (3) du § 3. notamment) soient exactes approximativement, il est nécessaire et suffisant qu'elles soient absolument rigoureuses.

Rappelons d'ailleurs que c'est sur cette proposition que repose l'affirmation suivante qui clot le Nr. 3. du Mémoire de M. Zaremba: „Il est donc prouvé que les équations de M. Natanson sont absolument inexactes".

§ 13. Il me reste à faire une remarque relative au Mémoire Sur la double réfraction accidentelle dans les liquides, présenté à l'Académie le 4. Mars 1901 [1]). Le titre de ce Mé-

[1]) Bulletin Intern. de l'Académie des Sciences de Cracovie, Cl. d. Sc. Math. et Nat., Année 1901, p. 161. Je saisis cette occasion pour remarquer que le résultat de cette Note est partiellement vicié par une erreur qui s'est glissée dans les calculs ultérieurs. J'espère pouvoir bientôt corriger cette erreur dans un Travail dans lequel je me propose de traiter certains points particulièrement intéressants de la théorie de la réfraction accidentelle.

moire apparaît dans la liste des travaux relatifs à la Théorie de la Viscosité que l'on trouve, avec cette remarque: „Il est évident que „la base scientifique de ces travaux est illusoire", dans le Nr. 4. de la Communication de M. Zaremba (pp. 92—93 de ce Volume). M. Zaremba affirme donc que le Mémoire auquel nous venons de faire allusion repose sur les équations approchées (3) du § 3. qui ont fait l'objet des discussions précédentes. Cette assertion est inexacte; le Mémoire Sur la double réfraction etc. repose sur les équations rigoureuses (1) et (2) ou (9) du § 1. qui ne sont même pas mentionnées dans le travail de M. Zaremba.

Ainsi que dans ce Mémoire, désignons par $\varepsilon^*, \varphi^*, \psi^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ les composantes, rapportées à un système $Oxyz$ de coordonnées, de la déformation véritable; par e, f, g, a, b, c représentons les composantes de la vitesse de la déformation apparente. Nous aurons alors six équations dont il nous suffira ici d'écrire la sixième [1]):

$$\frac{\partial\gamma^*}{\partial t}+u\frac{\partial\gamma^*}{\partial x}+v\frac{\partial\gamma^*}{\partial y}+w\frac{\partial\gamma^*}{\partial z}+\frac{\gamma^*}{T}-c=0\,. \tag{1}$$

Les conditions dans lesquelles on se place dans l'expérience de Maxwell et de Kundt exigent que l'on pose $w=0$. Dans le Mémoire dont il s'agit, j'ai encore admis que l'on a

$$\frac{\partial\gamma^*}{\partial t}=0\,, \tag{2}$$

mais on ne serait pas en droit de négliger les termes

$$u\partial\gamma^*/\partial x+v\partial\gamma^*/\partial y\,. \tag{3}$$

Adoptons les notations du Mémoire en question et considérons une fonction arbitraire $F(r,\theta)$ des variables r et θ. Nous pouvons écrire, en vertu des équations (2a), (2b) du § 2., p. 164., de ce Mémoire,

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{\partial F}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta}=\cos\theta\frac{\partial F}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta} \tag{4a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{y}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta}=\sin\theta\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\,. \tag{4b}$$

[1]) Bulletin Int. de l'Acad. des Sc. de Cracovie, Année 1901, pp. 102—105 et 106.

On a d'autre part

$$u = \pm q \sin\theta \ ; \quad v = \mp q \cos\theta \ . \tag{5}$$

Des équations (4) et (5) il résulte

$$u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} = \mp \frac{q}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta} \ . \tag{6}$$

Considérons l'équation (3) du § 1. du Mémoire que nous discutons; elle est la suivante:

$$\theta = \mp ht \quad \text{où } h = \frac{q}{r} \ . \tag{7}$$

Par conséquent nous avons

$$\frac{d\gamma^*}{dt} = \frac{\partial \gamma^*}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} = \mp \frac{q}{r}\frac{\partial \gamma^*}{\partial \theta} \ ; \tag{8}$$

ici on regarde γ^* comme une fonction de la variable t dont l'équation (7) est la définition. Les équations (6) et (8) nous donnent

$$u\frac{\partial \gamma^*}{\partial x} + v\frac{\partial \gamma^*}{\partial y} = \frac{d\gamma^*(t)}{dt} , \tag{9}$$

d'où l'on tire, en tenant compte de (1) et (2),

$$\gamma^* = K\varepsilon^{-t/T} + \varepsilon^{-t/T}\int dt\ \varepsilon^{t/T} c \ . \tag{10}$$

C'est l'équation (3) du § 4. du Mémoire en question. Il apparaît donc clairement que le Mémoire Sur la double réfraction etc. s'appuye sur des équations rigoureuses de la forme (1) et (2) ou (9) du § 1. et qu'il ne dépend nullement d'équations approchées de la forme (3) du § 3.

Conclusions.

Les objections soulevées par M. Zaremba dans sa Communication du 9. Février 1903 sont, en résumé, les suivantes: 1) les hypothèses dans lesquelles je me suis placé impliqueraient le mouvement absolu; 2) les valeurs des composantes des pressions qui se calculent à l'aide de mes équations [(3) du § 3.] ne satisfont pas aux conditions qui devraient être remplies pour que les lois du mouvement d'un fluide par rapport à un système d'axes de coordonnées soit indépendant de la translation de ces axes; 3) les expressions des composantes des pressions que j'avais données comme des expressions approchées, ne sont pas exactes, même approximativement.

Dans l'étude que l'on vient de lire, j'ai été amené aux conclusions suivantes:

1) Je rappelle, en premier lieu, que, dans mon Mémoire du 4. Février 1901, j'ai proposé un système d'équations que j'appelle rigoureuses [(1) et (2) ou (9) du § 1.] et qui se trouvent entièrement à l'abri des objections soulevées par M. Zaremba. Ce sont ces équations que je considère comme constituant la base essentielle de la théorie que j'ai proposée.

2) L'hypothèse du mouvement „lent" que j'ai invoquée pour établir certaines équations dites approchées [(3) du § 3.] est parfaitement légitime, puisque, dans mes Mémoires, je n'ai jamais étudié que les lois du mouvement relatif.

3) On est en droit de demander à des équations rigoureuses qu'elles satisfassent à la condition indiquée par M. Zaremba. Mais les équations (3) du § 3., contre lesquelles est dirigée sa Communication, sont des relations approchées et ont été données pour telles dans mon Mémoire du 4. Février 1901; par conséquent on n'est pas en droit d'exiger qu'elles remplissent la condition en question.

4) Reste la question qui (à mon avis) était la seule discutable: les équations (3) du § 3. sont-elles, oui ou non, des relations suffisamment approchées? Pour répondre à cette question, je considère, en premier lieu, la variation des composantes des pressions calculées au moyen des équations approchées (3) du § 3.; et, en second lieu, l'erreur que l'on commet en adoptant, au lieu de la valeur véritable de cette composante, sa valeur approchée. Je crois avoir prouvé que l'une et l'autre, la variation et l'erreur, sont des quantités petites d'ordre supérieur à celui de la composante elle-même. Or la condition qu'il en soit ainsi est précisément celle qui doit être remplie pour que l'on puisse dire que les équations que nous discutons sont suffisamment approchées.

5) Ces conclusions se trouvent en désaccord avec les résultats auxquels est arrivé M. Zaremba. Ce désaccord s'explique en considérant que le Critérium d'approximation suffisante adopté par M. Zaremba n'est pas justifié. Ce Critérium est même injustifiable et erroné puisque son adoption entraînerait comme conséquence une conclusion de la nature de la proposition suivante: pour que certaines équations soient exactes approximativement, il

est nécessaire et suffisant qu'elles soient absolument rigoureuses.

6) Le Mémoire Sur la double réfraction accidentelle dans les liquides, que M. Zaremba considère comme reposant sur les équations approchées [(3) du § 3.] qui font l'objet de la discussion précédente, est basé, non point sur ces équations, mais sur les équations dites rigoureuses (1) et (2) ou (9) du § 1.

7) Dans un Mémoire Sur l'application des équations de Lagrange dans la Théorie de la Viscosité (présenté à l'Académie en même temps que cette Communication), j'ai montré que les conclusions auxquelles j'ai été amené dans mon Mémoire Sur la propagation d'un petit mouvement dans un fluide visqueux (Séance du 7. Janvier 1902) subsistent et ne sont pas modifiées lorsque, dans la discussion des problèmes auxquels ce Mémoire est consacré, on prend pour point de départ les équations rigoureuses, au lieu des équations approchées dont j'ai fait usage dans le Mémoire mentionné.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Pod redakcyą
Członka delegowanego Wydziału matem.-przyr., Dra Władysława Natansona.

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

30 Czerwca 1903.