

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 3.

Mars

1903.

- Sommaire:** 12. M. JOSEPH BRZEZIŃSKI. Le chancre des arbres, ses causes et ses symptômes.
13. M. MARIE SMOLUCHOWSKI. Sur les phénomènes aérodynamiques et les effets thermiques qui les accompagnent.
14. M. MARIE SMOLUCHOWSKI Contribution à la théorie de l'endosmose électrique et de quelques phénomènes corrélatifs.
15. PUBLICATIONS DE LA CLASSE.

Séance du lundi 9 Mars 1903.

PRÉSIDENCE DE M. E. GODLEWSKI.

12. M. JOSEPH BRZEZIŃSKI. **Rak drzew, jego przyczyny i przejawy.** (*Le chancre des arbres, ses causes et ses symptômes*). Mémoire présenté par M. E. Janczewski m. t.

(Planches II – VIII).

La maladie des arbres, connue sous le nom de chancre (cancer, Krebs), a attiré depuis longtemps l'attention des praticiens ainsi que des naturalistes. Le chancre des arbres fruitiers, occasionnant les dégâts les plus sensibles et, d'autre part, étant d'observation plus facile, vu la culture soignée exigée par ces arbres a été l'objet de recherches multiples, qui datent de temps fort éloignés. La seconde moitié du dernier siècle nous apporte de nombreux ouvrages, qui traitent ce sujet d'une manière détaillée.

Presque tous les auteurs distinguent les causes immédiates du chancre des agents secondaires, qui tiennent aux conditions plus ou moins favorables à la végétation des arbres et les prédisposent plus ou moins à contracter cette maladie.

Le fait que le chancre attaque surtout les arbres plantés dans les terres trop humides et froides, que toutes les causes qui diminuent la force de la végétation, comme: le trop grand rapprochement des arbres, le manque de lumière, l'action de la gelée etc. augmentent la fréquence et l'intensité de la maladie — a été suffisamment reconnu au XVII-e siècle déjà, et nous n'avons aujourd'hui rien à y ajouter. Quant aux causes immédiates du chancre,



la question ne put être résolue aussi aisément. On a commencé par attribuer l'apparition du chancre à la surabondance de la sève, aux perturbations que provoque cette pléthore dans diverses parties de l'arbre (Henri Hess 1690, Duhamel de Monceau 1758).

Vers la seconde moitié du siècle dernier, le chancre des arbres devient l'objet de recherches scientifiques, particulièrement en Allemagne, où Hartig, Goethe et Sorauer publient de nombreux ouvrages sur ce sujet¹⁾. Sorauer attribue l'origine de la maladie du chancre à l'action de la gelée et essaye de le prouver en soumettant les arbres à l'action du froid artificiel. Hartig et Göthe, tout en ne rejetant pas tout à fait les opinions de Sorauer, admettent cependant que le chancre est dû surtout aux altérations produites par le champignon *Nectria ditissima*, qui d'après eux serait un parasite. D'autre part Sorauer, tout en regardant le froid comme l'agent principal de la maladie, ne s'oppose pas catégoriquement à l'idée que le chancre, dans certains cas, peut être aussi provoqué par le *Nectria*.

Il résulte donc de ces théories que le chancre pourrait provenir de deux causes absolument différentes, exerçant leur action soit simultanément, soit séparément. A ceci s'ajouta l'opinion, qu'indépendamment de l'action du froid et des ravages du *Nectria*, le chancre peut être encore provoqué directement par la piqûre des insectes et en général par toute sorte de blessures que peut subir l'écorce des arbres.

Sorauer, en attribuant le chancre à l'action du froid, attachait

¹⁾ R. Göthe. Mittheilungen über den Krebs der Apfelbäume. 1877.

R. Göthe. Vorläufige Mittheilungen über den Krebs der Apfälbäume. Rheinische Blätter für Wein, Obst und Gartenbau. Strassburg. 1879.

R. Göthe. Landwirtschaftliche Jahrbücher. 1880.

R. Göthe. Zum Krebs der Apfelbäume. Bot. Zeits. 1884. Nr. 25.

R. Göthe. Weitere Mittheilungen über den Krebs der Apfelbäume. Deutsche Garten-Monatsschrifte. 1887. Nr. 2.

Sorauer. Ueber den Krebs der Apfelbäume. Tageblatt der Naturforscher-Versammlung zu Hamburg. Beilage.

Sorauer. Handbuch der Pflanzenkrankheiten. Zweite Auflage. 1886. T. I. Chapitres: „Brand“, „Krebs“, „Frostbeulen“ et d'autres.

Hartig. Lehrbuch der Baumkrankheiten. Berlin 1882.

Hartig. Untersuchungen an dem forstbot. Institut. I. p. 209.

Hartig. Die krebstartigen Krankheiten der Rothbuche. Zeitschrift für Forst- und Jagdwesen. IX.

beaucoup d'importance aux changements anatomiques qui ont lieu dans le bois et l'écorce des plaies chancreuses et il les a décrits d'une manière très détaillée. Les auteurs qui admettent que le *Nectria* est la cause principale de la maladie, prêtent au contraire beaucoup moins d'attention aux changements anatomiques du bois lésé et sont portés à regarder le chancre comme étant surtout une maladie de l'écorce. Cette manière de voir était la conséquence naturelle du fait qu'on ne trouvait jamais le *Nectria* qu'à de très faibles profondeurs dans les tissus des plaies chancreuses. Cette opinion a été adoptée presque généralement, et voilà comment un des auteurs les plus récents, M. Ed. Prillieux¹⁾, définit la maladie dont il est question: „Les chancres sont des plaies de l'écorce, qui ne se cicatrisent pas. Dans le milieu les tissus y sont morts et desséchés; sur les bords il se forme bien des bourrelets de cicatrice, mais ils sont rongés et détruits successivement et le chancre s'étend toujours“. „Cependant le corps ligneux n'est jamais envahi profondément, il n'est altéré et coloré en brun que sur une épaisseur de quelques millimètres au dessous d'un chancre“.

La diversité des formes que présentent les plaies chancreuses a été la cause de certaines confusions. Sorauer, tout en attribuant les plaies chancreuses sans distinction à l'action du froid, les a divisées en deux catégories: La première renferme les chancres caractérisés par la formation d'épais bourrelets cicatriciels sur les bords de la plaie, et les excroissances chancreuses, que Sorauer réunit sous le nom de „Krebs“. A l'autre catégorie appartiennent toutes les plaies plates, sans bourrelets cicatriciels, dans lesquelles le savant allemand ne fait point de différences, les appelant toutes du nom de „Brand“. Il est cependant facile d'observer que les plaies des arbres provoquées directement par le froid, si elles ne deviennent pas la cause de la mort immédiate du sujet, forment rapidement des bourrelets normaux sur leurs bords, diminuent de surface et au bout d'un temps plus ou moins long se cicatrisent totalement. Au contraire, les plaies chancreuses plates — que, faute de mot plus approprié, nous appellerons ici nécrose — se comportent tout à fait autrement: Leur surface augmente de plus en plus, même pendant la belle saison ou à la suite d'hivers très peu rigoureux, quand il est impossible de supposer que les arbres les

¹⁾ Ed. Prillieux. Maladies des plantes agricoles. T. II. p. 75, 76 et 77.

moins résistants aient pu souffrir du froid. Encore faut-il ajouter que les plaies chancreuses plates se forment aussi bien sur les variétés résistantes au gel et qui ne souffrent jamais du froid dans le climat du pays où on les cultive, que sur toutes les autres.

En nous mettant, il y a 8 ans, à étudier le chancre des arbres, nous étions persuadés, d'après les résultats des recherches de Goethe et de Hartig, que le *Nectria ditissima* est la seule ou au moins la principale cause de cette maladie. Nos recherches portaient sur deux points. Nous désirions notamment établir, au moyen d'observations microscopiques, quelle est la relation intime entre les hyphes du champignon et les tissus des plaies qui commencent à souffrir de l'atteinte du mal. D'autre part, nous voulions démontrer d'une manière expérimentale, comment s'effectue l'infection des tissus sains par les spores ou le mycelium du parasite.

Nous avons commencé par obtenir des cultures pures du *Nectria*, que nous employâmes ensuite à contaminer des jeunes pommiers cultivés en pots et tenus sous cloches. Toutes nos recherches dans ce sens donnèrent des résultats négatifs. Au cours de nos observations microscopiques, nous trouvâmes, il est vrai, le mycelium du *Nectria* dans beaucoup de plaies chancreuses, mais uniquement et toujours dans le tissu déjà mort — donc pas dans cette région où le bois commence à devenir anormal, mais là seulement où la maladie a exercé son influence funeste depuis longtemps. Les inoculations non plus ne réussirent guère. Les spores avaient germé et formé dans l'air humide, sous cloche, un mycelium abondant; celui-ci cependant s'étalait seulement sur la surface de l'écorce, mais ne la pénétrait jamais et n'endommageait d'aucune manière les jeunes pousses du pommier. Le mycelium du *Nectria* ne déterminait jamais une action destructive dans les tissus encore sains.

L'observation du *Nectria* dans la nature a confirmé en quelque sorte l'opinion que nous nous sommes faite, que ce champignon n'avait rien à voir dans la maladie du chancre. On peut facilement trouver le *Nectria* non seulement sur les plaies chancreuses, mais partout à la surface des arbres, où il y a un morceau de bois mort ou une écaille de vieille écorce à ronger. Il accompagne ainsi fidèlement le *Fusicladium*, en profitant de l'écorce morte, qui a été tuée par ce parasite, mais sans jamais lui-même s'attaquer aux tissus vivants et sans y provoquer de changements, qui rappelleraient en quoi que ce soit la maladie du chancre.

Ayant acquis la certitude que le *Nectria* ne pouvait être la cause directe du chancre, il nous fallut rechercher quel est le vrai facteur de cette maladie. L'observation suivante nous servit de point de départ dans ces recherches: à savoir que le bois des branches, portant des plaies chancreuses, offre toujours un aspect plus ou moins anormal. Ce bois est traversé, principalement dans le sens de la longueur, par des filons se distinguant du bois sain par leur couleur jaunâtre, jaune ou brune. On peut observer ces filons de bois à couleur modifiée à une distance de 30, 40 à 50 cm. — et même plus — d'une plaie chancreuse. Souvent on voit ces filons à couleur modifiée réunir entre elles plusieurs plaies chancreuses, même fort éloignées l'une de l'autre. On retrouve aussi ces filons dans toutes les excroissances chancreuses et dans les bourrelets des plaies, où ils cheminent dans divers sens parmi du bois apparemment sain. Comme les plaies chancreuses, même les plus récentes, s'accompagnent toujours de ce changement de couleur du bois, nous avons été amenés à conclure que la lésion plus ou moins profonde du bois constitue le fait essentiel de la maladie. On pourrait même dire que cette lésion du bois — c'est la maladie elle-même, et que les plaies et excroissances chancreuses n'en sont que la manifestation extérieure et finale. Cette manière de voir est justifiée par le fait, qu'il est aisé d'observer des changements anatomiques dans le bois sans la présence de plaies chancreuses à l'extérieur de l'arbre, mais que jamais nous n'avons pu trouver une plaie chancreuse sans les changements mentionnés dans le fond du bois.

Cette particularité n'a pas attiré suffisamment l'attention des observateurs, quoique certains d'entre eux l'aient bien distinctement marquée dans leurs dessins¹⁾. L'indifférence sur ce point s'explique par le fait que ces auteurs regardent le chancre comme une maladie essentiellement de l'écorce, ce qui les a induits à négliger les modifications qui se produisent à l'intérieur du bois. Quant à Sorauer, il décrit bien les changements anatomiques du bois, mais il les regarde comme causés par une action locale du froid.

Ayant acquis la presque certitude que les lésions internes du bois sont l'essence même de la maladie du chancre, il nous restait à découvrir la cause immédiate de ces lésions. Au mois de mai 1899, en observant à de forts grossissements des coupes de bois de

¹ Göthe. Mittheilungen über den Krebs der Apfelbäume. 1877. p. 15, f. 20 b.

pommier, pris à une certaine distance d'une plaie chancreuse, nous y avons trouvé des bactéries, qui après coloration se présentaient fort distinctement. Des observations ultérieures ont prouvé la présence constante de ces bactéries dans les tissus à couleur changée. Nous nous sommes donc mis à considérer ces bactéries comme la vraie cause immédiate du chancre.

Au commencement du mois d'août 1899 nous avons obtenu sans grande difficulté des cultures pures de ces bactéries dans des milieux nutritifs liquides et solides. Ces bactéries nous servirent à faire des inoculations expérimentales sur plusieurs arbres de jeunes pommiers. Les expériences ayant réussi, nous sommes autorisés à regarder comme la cause directe de la maladie du chancre la bactérie mentionnée, que nous nommons *Bacterium mali*.

Bacterium mali (Brzez.)

Bactéries du pommier.

Le *bacterium mali* a la forme de bâtonnets courts et droits; d'environ 2 mem. de longueur et 0.6 ou 0.7 mem. de largeur. En les observant attentivement, on peut remarquer que ces bâtonnets se trouvent presque toujours en état de division; ils se présentent alors comme s'ils étaient formés de deux corpuscules ovales. La longueur des bactéries varie de 1 à 3 mem. Cultivée dans des conditions favorables, la bactérie forme des bâtonnets plus longs, quelquefois même réunis en de courtes chaînettes. Les chaînettes se trouvent alors semées çà et là parmi les simples bâtonnets, beaucoup plus nombreux. On peut aussi observer de telles chaînettes de bactéries non encore séparées dans le plasma des cellules du bois attaqué, mais cela n'arrive que rarement.

La bactérie du pommier est mobile. Observées dans une goutte suspendue, les bactéries accomplissent un mouvement double: elles tournent vivement à la manière d'un tourniquet, et en même temps elles effectuent par secousses légères un mouvement en avant. Le mouvement des bactéries n'est point continu: on peut voir des bâtonnets reposant tranquillement pendant un certain temps et puis se mettant à tourner, à se mouvoir, pour disparaître finalement du champ visuel du microscope.

Les bactéries vivantes ont l'aspect de bâtonnets incolores, de forme ovale à bouts arrondis. Il est assez difficile, mais non impossible d'apercevoir ces bactéries non colorées dans les tissus.

Les bactéries sont enveloppées d'une enveloppe gélatineuse, qui ne se laisse pas distinguer à l'étude au microscope des bactéries colorées, mais qui devient parfaitement visible sur les photographies (Fig. 1.). Les bactéries du pommier ne se colorent pas à la méthode de Graham. En revanche, elles attirent aisément divers colorants, tels que la fuchsine, le violet de gentiane et le violet de méthyle. Les colorations les plus intenses ont été obtenues en traitant les bactéries avec le bleu de méthyle polychrome pendant 10 minutes et en les chauffant légèrement en même temps; on lave ensuite la préparation à l'eau, sans employer de décolorant.

Cultivé dans un bouillon approprié, le *bacterium mali* y forme bientôt une espèce de nuage léger, ainsi qu'un précipité blanchâtre au fond de l'éprouvette. A la surface du liquide des vieilles cultures il se forme un mince voile à reflets métalliques, qu'on obtient aussi à la surface de l'eau dans un bocal, si l'on y fait tremper pendant quelque temps des morceaux de branches chancreuses.

Cultivée sur de l'agar-agar, la bactérie se développe à la surface, en formant une couche épaisse blanc-grisâtre qui ne tarde pas à recouvrir l'agar entier. Les cultures plus anciennes présentent aussi un lustre métallique à leur surface. La bactérie ne pénètre pas dans l'intérieur du milieu nutritif. Si nous l'inoculons profondément à l'intérieur de l'agar, elle s'y développe faiblement et seulement sur les bords de la fente produite par la piqûre dans la gelée nutritive. Le *bacterium mali* est donc aérophile.

Les bactéries du pommier forment dans les boîtes de Petri des colonies rondes, de couleur blanc-grisâtre, saillantes, qui ne présentent d'ailleurs rien de particulier dans leur structure. Les colonies qui se développent sur de la gélatine sucrée sont de la même teinte, mais plus plates (Fig. 2.).

La bactérie du pommier liquéfie la gélatine au bout de dix ou de quinze jours. Il se forme d'abord autour de chaque colonie une couche légère de gélatine liquéfiée, de sorte que les colonies semblent s'enfoncer; peu à peu toute la gélatine est liquéfiée entièrement.

Les cultures du *bacterium mali* exhalent une forte odeur d'acide butyrique. Cette odeur est surtout remarquable, quand les bactéries sont cultivées sur de la gélatine et au moment où celle-ci est en train de se liquéfier.

La bactérie du pommier se développe parfaitement sur la pomme de terre stérilisée; elle forme sur sa surface une épaisse couche

grisâtre. Les coupes microscopiques de la pomme de terre, faites quand la culture des bactéries s'y est bien développée, montrent que les bactéries pénètrent dans les tissus à une profondeur considérable, mais pourtant à mesure que la profondeur augmente, le nombre des bactéries diminue sensiblement.

Les essais de culture du *bacterium mali* sur des pommes stérilisées ont été infructueux, probablement à cause de la trop grande quantité d'acide que renferme ce fruit.

Des milieux nutritifs généralement employés, c'est l'agar-agar avec du moût de bière qui convient le mieux à la bactérie du pommier; elle le préfère à l'agar-agar au sucre. Sur l'agar-agar pur la bactérie se développe très faiblement. Les gelées nutritives à base de gélatine semblent moins bien convenir au développement des cultures, que celles à base d'agar-agar.

Le *bacterium mali* se développe déjà à une température peu supérieure à 0°. Ainsi, on peut observer la formation de nouvelles colonies sur des boîtes de Petri placées dans des récipients remplis de glace. Le développement des bactéries à une température aussi basse est cependant faible. La température qui paraît le mieux convenir à la bactérie du pommier est celle d'environ 20°C.; son développement est alors intense et rapide. Pendant les chaleurs de l'été, quand le thermomètre monte beaucoup plus haut, le développement des bactéries semble ralenti. Les températures élevées lui sont funestes. Cultivée à 37°C., la bactérie accuse une végétation faible, et deux jours suffisent pour qu'elle se mette à produire des formes involutives, prenant l'aspect de filaments courts d'abord, puis de plus en plus longs.

Inoculée dans un milieu nutritif nouveau et maintenue à la température ordinaire des appartements, la bactérie se multiplie rapidement. Le développement des bactéries devient visible déjà après 24 heures; trois jours plus tard, les cultures prennent leur forme et leur teinte caractéristiques, et il leur suffit d'une quinzaine de jours pour envahir toute la surface de l'agar.

Les bactéries peuvent végéter jusqu'à trois mois sur le même milieu nutritif stable, sans perdre beaucoup de leur vitalité. Celle-ci dépend surtout de l'état d'humidité du milieu nutritif. Le dessèchement de ce milieu affaiblit les bactéries et amène peu à peu leur mort, tandis qu'elles peuvent rester fort longtemps bien vivantes dans un milieu suffisamment humide. Ainsi, tandis que l'inoculation

dans un milieu nouveau des bactéries cultivées plus de trois mois sur de l'agar-agar ne donne pas toujours de résultats satisfaisants, les bactéries cultivées dans du bouillon conservent leur vitalité jusqu'à deux ans.

L'obtention de cultures pures, par l'ensemencement des milieux nutritifs solides ou liquides avec les bactéries prises dans la nature, ne présente pas de grandes difficultés. Cette obtention est facilitée par le fait que le tissu ligneux attaqué par le chancre, s'il est pris avec des précautions suffisantes et à une certaine distance de la surface des plaies, ne renferme pas d'autres microorganismes capables de se développer. Nous avons procédé de la manière suivante:

Après avoir enlevé au moyen d'un couteau stérilisé l'écorce du bourrelet cicatriciel du chancre ou l'écorce d'une place de la branche plus éloignée de la plaie, mais où le bois était visiblement attaqué par les bactéries, nous découpions un morceau de ce bois. Nous rognions ce morceau plusieurs fois, en changeant souvent de couteau, pour atténuer la possibilité d'avoir laissé demeurer sur le bois des microorganismes étrangers, qui auraient pu y être entraînés de la surface de l'écorce. Possédant un morceau de bois ainsi nettoyé, nous en découpions de fins copeaux, qui étaient placés immédiatement à la surface de l'agar-agar dans des éprouvettes et y adhéraient fortement, ou bien étaient jetés dans des éprouvettes avec du bouillon.

Les éprouvettesensemencées étaient tenues en lieu sombre à la température ordinaire.

Au bout de 3 ou 4 jours, quelquefois après 8 jours seulement ou même plus tard, les bactéries commençaient à se développer, en formant dans les milieux nutritifs stables de menues colonies au bord des copeaux. Ces colonies se développaient rapidement, de sorte que bientôt les copeaux de bois se trouvaient noyés dans la masse des bactéries. En procédant avec précaution on obtient de cette manière, dans une partie des éprouvettes au moins, des cultures tout à fait pures.

Quant aux éprouvettes avec du bouillon où les copeaux de bois chancreux avaient été placés, on voyait au bout de 4 ou 5 jours que le liquide devenait légèrement troublé et qu'il s'y formait un précipité blanchâtre — signe caractéristique du développement des bactéries dans le liquide.

Dans le bois malade, nous trouvons le bacterium mali dans toutes

les cellules possédant un contenu; les bactéries envahissent donc surtout les tissus parenchymateux, et on les trouve aussi bien dans le parenchyme médullaire que dans celui du bois et de l'écorce. La présence des bactéries dans les cellules privées totalement de contenu ne semble être qu'accidentelle.

Les bactéries abondent d'autant plus dans les cellules, que celles-ci sont plus riches en protoplasme et en amidon. On aperçoit les plus grandes quantités de bactéries dans les cellules — riches en contenu — du parenchyme médullaire des jeunes bourgeons contaminés. Elles y apparaissent d'autant plus distinctement, qu'il est facile de faire des coupes très fines dans le bois non encore durci, et d'y bien colorer les bactéries.

En observant les bactéries à l'intérieur des cellules, on les voit disséminées dans le protoplasme, aussi bien vers le centre de la cellule que près des cloisons (Fig. 3.). Le protoplasme est souvent rétréci en masse irrégulièrement globuleuse, qui occupe une partie de la cellule; cette masse protoplasmique emprisonne de nombreuses bactéries disposées dans tous les sens. Quelquefois, rarement cependant, on peut apercevoir de courtes chaînettes; en général, les bâtonnets sont isolés, et on peut observer qu'ils se présentent la plupart du temps à l'état de division. La masse protoplasmique resserrée prend une teinte brunâtre, diminue de volume et se transforme peu à peu en un petit amas brun. Dans les cellules contenant de l'amidon, comme dans celles du parenchyme ligneux ou médullaire, on trouve les bactéries abondamment disséminées parmi les grains d'amidon et adhérant à leur surface. Les grains d'amidon conservent quelque temps leur aspect normal et leurs contours précis; bientôt cependant l'influence des bactéries commence à se manifester — la netteté des contours disparaît, ce qui résulte de la corrosion de leur surface. Le nombre des grains avariés s'accroît peu à peu, et ils finissent par se fondre ensemble en une masse informe, où on n'arrive qu'avec difficulté à distinguer les grains séparés (Fig. 4.). Quelquefois une partie des grains d'amidon contenus dans une cellule est changée déjà et ne forme qu'une seule masse, tandis que certains autres grains se présentent comme presque intacts (Fig. 5.). La masse grise d'amidon, provenant des grains fondus ensemble, est bourrée de bactéries. Dans les états d'altération plus avancée, la masse difforme de l'amidon diminue de volume et se présente comme un petit amas coloré en brun. Il arrive souvent que l'on

peut observer dans plusieurs cellules voisines toutes ces phases successives de l'action destructive des bactéries sur les grains d'amidon.

On trouve généralement beaucoup de bactéries tout près des cloisons des cellules et y adhérant. Il n'est pas rare également de les voir remplissant les canalicules dans les cloisons épaissies des cellules. Dans les cellules à parois épaissies, on peut distinguer souvent que cette paroi est rongée par places et que les bactéries se trouvent placées dans les cavités ainsi formées (Fig. 6.). Les faces internes des parois ne présentent pas alors de lignes nettes, elles semblent en quelque sorte frangées. On y voit par places des trous traversant les cloisons dans toute leur épaisseur. En observant les cellules de manière à voir leur paroi supérieure, on peut apercevoir que cette paroi est percée de grandes ouvertures à bords irréguliers, sur lesquels se trouvent les bactéries.

La membrane corrodée se colore en brun. On peut voir quelquefois, entre deux cellules dont les cloisons sont encore normales, un point où la paroi est déjà brunie de part en part.

La destruction des cloisons arrive après celle du contenu cellulaire. Elle a lieu soit de manière que toute la partie interne des parois est attaquée en même temps intégralement, soit de manière qu'il se forme dans la cloison des taches brunes çà et là, tandis qu'en d'autres places la paroi cellulaire garde encore sa couleur et sa grosseur normale. Les parties brunies se détachent alors souvent par morceaux de la couche interne de la paroi cellulaire. Finalement, les cloisons s'amincissent, se ratatinent, se déchirent et enfin disparaissent complètement (Fig. 7.).

Le parenchyme ligneux qui entoure les vaisseaux semble être le plus sujet à l'action corrosive des bactéries. Nous voyons ses tissus absolument détruits là où le parenchyme voisin des rayons médullaires conserve encore la forme normale de ses cellules, quoique celles-ci renferment bien de nombreuses bactéries. Nous expliquons la résistance relative du parenchyme des rayons médullaires par la vitalité plus grande de ce tissu, composé de cellules riches en protoplasme, tandis que les cellules à cloisons épaissies du parenchyme ligneux sont presque entièrement remplies d'amidon et le protoplasme s'y trouve en petite quantité. La corrosion des cellules du parenchyme ligneux entourant les vaisseaux amène la destruction de ces vaisseaux, qui disparaissent complètement. Fina-

lement, il ne reste à la place des vaisseaux et du parenchyme ligneux qui les entourait que des cavités vides (Fig. 8.).

La facilité avec laquelle le parenchyme ligneux succombe à l'action des bactéries, comparée à la résistance relativement grande opposée par le parenchyme des rayons médullaires, nous explique le fait constaté dans la nature, que la bactériose se développe beaucoup plus promptement dans la direction de la longueur des branches que dans celle de leur épaisseur.

L'observation de l'action corrosive du *bacterium mali* dans les tissus nous fait conclure que ces bactéries ont la faculté de liquéfier les cloisons cellulaires et qu'elles pénètrent d'une cellule dans l'autre aussi bien par les canalicules des parois qu'au moyen de la corrosion des parties épaissies des parois cellulaires. Après avoir pénétré dans la cellule, les bactéries déterminent d'abord la disparition de son contenu, suivie bientôt de la corrosion totale des cloisons. Il en résulte la modification de la teinte du tissu ligneux, dont les éléments moins résistants ont subi une altération partielle ou même une destruction totale. A mesure que s'accroît l'action destructive des bactéries, les éléments plus résistants du tissu succombent à leur tour. La modification de la couleur du bois s'accroît donc de plus en plus. Quelquefois, dans les bosses chancreuses par exemple, le bois en brunissant devient en outre mou et spongieux, ce qui résulte de la destruction d'une grande partie du tissu.

L'observation des bactéries incluses dans les tissus est rendue difficile par le fait que la dureté du bois ne permet pas de faire des coupes suffisamment minces, et comme on est forcé d'employer des grossissements très forts, on doit se borner à étudier seulement les parties de la coupe où elle est le plus mince. Les coupes faites dans du tissu moins dur, comme p. ex. celui du parenchyme médullaire, font exception. Une autre difficulté tient à la coloration des bactéries renfermées dans le tissu ligneux: les colorants qui sont attirés par les bactéries donnent également une coloration intense au tissu, et en conséquence les bactéries n'apparaissent pas assez distinctement.

Après avoir essayé de nombreuses méthodes de coloration, nous avons choisi de préférence la méthode d'Unna, employée par lui pour la coloration du *bacterium ulceris molli* dans les tissus animaux. Suivant cette méthode, on colore une coupe pendant 30 minutes avec le bleu de méthyle polychrome et on la décolore ensuite

au moyen d'un mélange suivant: aniline — 100, anil. acide 2, tannine 0,05, mélange d'éther et de glycerine 0,10. Le tissu se décolore alors fortement; les bactéries restent plus colorées et on les distingue facilement. On peut aussi, après avoir coloré les coupes avec le bleu de méthyle polychrome, les décolorer avec un mélange d'éther et de glycerine, et les laver à l'alcool.

Dernièrement, nous avons encore pris connaissance d'une nouvelle méthode de coloration qui nous a donné les résultats les meilleurs. C'est la méthode de Pappenheim, modifiée par Unna¹⁾.

Le colorant est composé de la manière suivante: vert de méthyle 0,15, pyronine 0,25, alcool 2,50, glycerine 20,00. Compléter jusqu'à 100 avec de l'eau phéniquée 1/2%. Colorer pendant 10 minutes à la température de 40°C. ou 20 minutes à froid. Laver la préparation avec de l'eau, puis avec de l'alcool, et traiter, afin de l'éclaircir, avec de l'huile de bergamote.

Avec ce système de coloration, le protoplasme cellulaire prend une teinte rose clair et les bactéries se colorent en rouge foncé, se détachant parfaitement sur le fond.

Inoculations expérimentales. Une fois en possession des cultures pures du *bacterium mali*, nous avons inoculé ces bactéries à des arbres bien portants, afin d'obtenir la preuve concluante de leur faculté d'infection. Les expériences ont été commencées au mois d'août 1899.

Pour nos inoculations nous avons employé de jeunes pommiers des variétés: Calville blanc d'hiver, reinette grise du Canada et rouge de Stettin d'hiver, plantés dans des caisses, et aussi les variétés: Belle fleur jaune, reinette de Bauman et reinette de Caux, croissant librement dans le sol du jardin. Ces derniers arbres, greffés sur doucin, étaient âgés de 4 ans et se distinguaient par leur bon état de santé et leur végétation vigoureuse. Les pommiers en caisse, de même âge que ceux plantés dans le jardin, étaient greffés sur paradis, ce qui, joint aux limites fixées à la croissance de leurs racines par les parois de la caisse, était la cause de leur croissance moins forte. Ils étaient néanmoins en très bon état de santé et se développaient parfaitement. Les arbres en caisse furent hivernés en 1899/1900 et 1900/1901 dans un fossé, garni et couvert de planches, où ils étaient à l'abri de la gelée; durant l'hiver de 1901/1902

¹⁾ Monatsschrift für prakt. Dermatologie. 1902. T. 35.

et 1902/1903 ils furent placés dans une cave. Il convient d'ajouter, que les hivers de 1899/1900, 1900/1901 et 1901/1902 étaient fort éléments. Les pommiers cultivés au jardin furent par précaution couverts de paille pour l'hiver.

Nous avons effectué de nombreuses inoculations sur les parties jeunes et sur celles plus vieilles des pommiers, en procédant de deux manières: 1) par de simples piqûres jusqu'au bois, faites avec une aiguille infectée, et 2) par des incisions longitudinales de l'écorce jusqu'au cambium et l'introduction dans la fente ainsi formée d'une aiguille contaminée. Là où l'inoculation devait être pratiquée, la surface de l'écorce fut désinfectée auparavant par un lavage répété fait avec de l'alcool faible. La moitié des inoculations fut laissée sans abri, l'autre moitié fut recouverte de ouate stérilisée, fixée au moyen de ligatures, afin de préserver les plaies d'une infection éventuelle, venant du dehors. Sur chaque arbre nous avons choisi quelques branches qui devaient servir de témoins. Ces branches ont été piquées et incisées comme les arbres inoculés, mais avec des outils stérilisés.

Indépendamment des arbres destinés en entier à nos recherches et devant servir aux observations à long cours, nous avons inoculé au moyen de piqûres et d'incisions une grande quantité de jeunes pousses de l'année sur un pommier (reinettes du Canada), planté au jardin. Ces pousses devaient nous fournir matière à observation immédiate et servir particulièrement aux recherches microscopiques ayant pour but d'établir, si les bactéries se développent dans les tissus sains environnant la plaie et dans le cas où cela a lieu — au bout de combien de temps se fait cette pénétration. Les recherches microscopiques furent commencées quinze jours après l'inoculation. A ce moment, les plaies sur les pousses de l'année étaient déjà cicatrisées.

En coupant longitudinalement les pousses inoculées, nous avons aperçu — dès ce moment — que le bois et la moelle des pousses avaient changé de couleur sur une petite étendue, tout autour du point bruni déterminé par la piqûre. Chez les témoins au contraire, la partie altérée par la piqûre se détachait distinctement du tissu environnant, qui était resté complètement sain.

Les préparations microscopiques des pousses inoculées montrèrent en même temps, que les cellules des tissus aux environs des plaies avaient été envahies par des bactéries très nombreuses. Cela était particulièrement facile à observer dans les cellules du parenchyme

médullaire, où la bactériose semblait faire les progrès les plus rapides (Fig. 9.). Il fut donc constaté de cette manière, que les bactéries inoculées pénétrèrent dans les tissus sains et s'y multiplièrent énergiquement.

Les coupes suivantes, faites consécutivement jusqu'à la fin de l'automne 1899, montrèrent un progrès lent mais constant de la bactériose, se manifestant par le jaunissement du bois sur une étendue toujours plus grande. Nous avons remarqué que le développement des bactéries était plus énergique lorsqu'elles avaient été introduites au moyen de piqûres, que lorsque l'inoculation avait été pratiquée par l'incision de l'écorce. Dans le premier cas, l'infection du bois — se manifestant plus ou moins fortement — avait lieu toujours et sans exception, tandis que parmi les inoculations faites par incision il s'en présenta plusieurs, où le bois était resté inaltéré, en apparence du moins, et seules les raies brunes dans l'écorce, partant du point de l'inoculation, trahissaient le développement des bactéries. Nous nous expliquons cela par le fait que les bactéries, si elles n'ont pas pénétré pendant l'inoculation dans le bois même mais seulement dans les couches profondes de l'écorce, n'ont pas été ensuite en état d'atteindre la zone cambiale et le bois et en sont restées séparées par les éléments de l'écorce nouvellement formés. La manière dont se fait le grossissement de l'écorce met la partie ligneuse des arbres à l'abri de l'infection bactérienne venant de ce côté, d'autant mieux que les parties malades de l'écorce peuvent être facilement séparées de l'intérieur par une couche de liège et rejetées en dehors. D'autre part, on peut supposer également que la différence dans les résultats des deux modes d'inoculation provient de ce fait, que les bactéries trouvent plus facilement à se développer dans les cellules physiologiquement plus faibles dont se compose le bois moins jeune, que dans les cellules bien vivantes du cambium.

L'action des bactéries s'était révélée exactement de la même manière dans les inoculations laissées à découvert que dans celles qui furent enveloppées de ouate. Toutes les plaies étaient cicatrisées normalement avant l'hiver et recouvertes d'une couche mince de bois jeune, ainsi que d'écorce nouvelle.

L'examen, fait au mois d'avril 1900, montra un progrès visible de l'infection, se manifestant par un changement plus intense de la teinte du bois attaqué, lequel occupait de plus une étendue plus

considérable qu'à la fin de l'automne précédente. Ces observations suggéraient donc la conclusion que les bactéries avaient exercé leur action corrosive pendant les moments plus doux de l'hiver et dans les premiers jours du printemps, ce qui coïnciderait avec le fait, constaté dans les cultures artificielles, que les bactéries du pommier peuvent se développer à des températures relativement basses

Le bois des branches inoculées accusait une modification de couleur assez intense sur une longueur d'un demi cm. au-dessus et au-dessous du point d'inoculation. Le développement des bactéries dans la direction de l'épaisseur de l'arbre était relativement faible.

Au cours de l'année 1900, les plaies cicatrisées se comblèrent et s'aplanirent, ne laissant que des traces légères à la surface de l'écorce. Les points infectés furent recouverts de nouvelles couches de bois normal. Les branches des arbres, plantés dans le sol du jardin, grossirent considérablement; celles des arbres en caisse — un peu plus faiblement, ce qui était la conséquence des conditions de leur croissance. Cependant, nos observations durant cet été de 1900 montraient toujours un progrès constant dans le développement de la maladie à l'intérieur du bois, de sorte que lorsque nous coupâmes en automne de la même année plusieurs branches inoculées, nous y trouvâmes une altération du bois atteignant déjà 1 $\frac{1}{2}$ cm. au dessus et au dessous du point d'inoculation.

La largeur des filons du bois à couleur modifiée avait également augmenté, pas assez cependant pour que le développement de l'infection dans le sens de la grosseur des branches ait pu égaler, chez les arbres à croissance vigoureuse, l'accroissement normal du bois dans ce sens. C'est ainsi que dans la plupart des cas examinés, chez les arbres à végétation vigoureuse, les bactéries corrodaient le bois principalement dans la direction de la longueur de la branche, mais les places atteintes se trouvaient séparées de la zone cambiale par une couche toujours plus épaisse de bois jeune et normal.

Au cours de l'année 1901, les inoculations montraient un progrès constant de la bactériose, les arbres inoculés ne présentant en outre rien de particulier.

Les recherches faites au printemps 1902 vinrent démontrer un développement considérable de la bactériose du bois. Une branche du pommier Calville blanc d'hiver, planté en caisse et inoculé en 1899 au moyen de piqûres, commença, au moment de la feuillaison,

à trahir un état maladif. Tandis que le reste de l'arbre ne présentait rien d'anormal, la branche mentionnée tardait visiblement à développer ses feuilles et portait des bouquets, dont les fleurs étaient courtement pédonculées et plus menues que d'ordinaire. Ces bouquets se fanèrent et séchèrent en pleine floraison, comme s'ils étaient privés d'eau et d'aliments. Tout le feuillage de la branche était peu abondant, ce qui la distinguait facilement des autres branches à feuillage normal. La branche mentionnée ne présentait point d'accroissement et rappelait à s'y méprendre l'aspect d'une branche gelée; ce dernier point cependant ne pouvait être admis, vû le mode d'hivernage de l'arbre.

La même branche, coupée et examinée au mois de juin 1902, montra un grand développement de la bactériose dans le bois. Les raies brunes, partant des points d'inoculation, se réunissaient en un filon traversant toute la longueur de la branche. La totalité du bois avait pris une teinte jaunâtre, plus claire vers le milieu et plus foncée — presque brune — vers le pourtour de la branche.

Les autres branches de l'arbre cité, ainsi que les autres arbres croissant en caisses, ne présentèrent au cours de l'été 1902 aucun signe extérieur de maladie. Ils fleurirent normalement et donnèrent des fruits. Néanmoins, l'examen de plusieurs inoculations, fait à la fin de l'été, montra l'allongement des filons du bois à couleur modifiée, qui atteignaient déjà jusqu'à 5 cm. de longueur à partir du point de l'inoculation.

Quant aux arbres croissant dans le sol du jardin, nous avons observé au printemps de 1902 sur le tronc de l'un d'eux — une reinette de Caux ¹⁾ — deux places malades, correspondant aux points d'inoculation. La surface de ces places couvertes d'écorce morte et desséchée mesurait environ 1 cm. de longueur et un $\frac{1}{2}$ cm. de largeur. Au dessous de l'écorce morte enlevée apparaissait le bois bruni et altéré. Ces plaies ne différaient donc point des plaies chancreuses qui sont en train de se former. Durant l'été 1902 les plaies commencèrent à se cicatrifier, en formant des bourrelets — et c'est ainsi que nous les trouvons à l'approche de l'hiver 1902/1903.

Il s'est formé encore sur la même reinette de Caux, en automne

¹⁾ Dans notre note, présentée en 1902 à l'Académie des Sciences de Paris, il s'était glissé une erreur dans le nom de la variété du pommier: il s'agit d'une reinette de Caux et non de Baumann.

1902, une nouvelle plaie, toute semblable aux précédentes, mais beaucoup plus grande. Il est impossible d'affirmer aujourd'hui si ces plaies deviendront dans les années suivantes des plaies chancreuses typiques, caractérisées — comme nous le savons — par la destruction consécutive des bourrelets du tissu cicatriciel, ou si, au contraire, elles arriveront à se cicatrifier normalement.

Les autres arbres inoculés, croissant dans le sol du jardin, ne présentaient au cours de l'été et de l'automne de 1902 rien d'anormal. Ils ont fleuri et porté des fruits, et seul l'accroissement des filons à teinte modifiée dans l'intérieur du bois accusait le progrès constant de la maladie.

Comme les arbres en caisse avaient hiverné en 1902/1903 dans une cave, il nous fut possible d'en faire le 8 décembre un dernier examen.

Nous avons trouvé dans deux pommiers (reinette grise du Canada et rouge de Stettin) un développement si grand des filons à couleur changée, que ces raies d'un brun rougeâtre parcouraient déjà toute la longueur des branches inoculées (Fig. 10.). A ces filons bruns correspondait l'altération du bois avoisinant, qui avait pris une teinte jaune canari. Nous avons en outre découvert sur le pommier rouge de Stettin une petite plaie chancreuse caractéristique, formée autour de la place de l'inoculation sur une jeune branche latérale. Quant au troisième pommier (Calville blanc d'hiver), il montrait une altération totale du bois, comparable à celle qui s'était manifestée antérieurement sur l'une des branches de cet arbre au printemps de 1902. Cette altération consistait en une coloration uniforme du bois en jaune foncé, passant au jaune brun sous l'écorce au pourtour de la branche. Très probablement, d'après le fait déjà observé, l'arbre ne survivra pas l'été prochain.

Comme on voit, ces expériences n'ont pas encore donné de résultats définitifs, si on ne tient pour tels que la formation de nombreuses plaies ou tumeurs chancreuses, bien caractérisées. Ces résultats sont cependant affirmatifs dans ce sens, que l'inoculation des bactéries entraîne leur pénétration dans les tissus et des altérations progressives dans le bois — altérations, qui sont le signe distinctif du chancre et l'accompagnent toujours. Ces altérations d'ailleurs, sans accompagnement d'aucune manifestation extérieure, sont capables de provoquer l'état malade de l'arbre et d'entraîner sa mort.

Il résulte d'autre part, de la nature du tissu ligneux, que les progrès de la maladie, aussi bien que la cicatrisation des plaies sur les arbres, sont extrêmement lents à s'accomplir; en conséquence, le laps de temps qui s'est écoulé depuis le moment des inoculations n'était pas suffisant pour que les plaies caractéristiques ou tumeurs chancreuses aient pu se former.

La manière dont la bactériose se développait dans les arbres inoculés, aussi bien que les observations faites en même temps sur les arbres malades du jardin non infectés expérimentalement, nous ont d'ailleurs définitivement convaincus, que les plaies et tumeurs ne sont que les manifestations extérieures de la maladie et exigent certaines conditions pour apparaître, mais peuvent manquer totalement sur les arbres les plus malades et prêts à mourir.

L'auteur supposait d'abord, en commençant ses expériences, qu'en faisant des inoculations il provoquerait des altérations locales du bois sur une étendue plus ou moins grande, altérations qui se manifesteraient aussitôt à l'extérieur par un chancre ou tumeur à la place inoculée. Les observations qui suivirent démontrèrent cependant que l'infection et la maladie suivent un autre cours. La maladie commence à se manifester par le développement de plus en plus grand de la bactériose à l'intérieur du bois, cette bactériose gagnant des places fort éloignées des points de l'inoculation, sans se montrer à l'extérieur. Ces altérations du bois provoquent la mort des branches chez les arbres inoculés moins résistants et à végétation plus faible, sans former la moindre plaie ni tumeur. Au contraire, dans les arbres à végétation vigoureuse, les parties altérées sont masquées par de nouvelles couches épaisses de bois jeune. Les petites plaies, observées sur la reinette de Caux et sur un pommier rouge de Stettin en caisse, font exception et sont probablement le résultat de l'action plus énergique des bactéries dans les places d'infection, jointe à un affaiblissement local du tissu ligneux dans cette place.

En se basant sur le résultat de ces expériences, nous pouvons supposer qu'en général la défense des arbres contre les bactéries envahissantes peut être efficace jusqu'au moment où entre en jeu un agent quelconque d'affaiblissement de la végétation, tel que: le grand âge d'un arbre, l'action du froid, l'épuisement du sol etc.

Les résultats des expériences d'inoculation ont été pour nous le trait de lumière qui nous a guidé dans nos observations posté-

rieures des maladies provoquées par la bactériose du bois. Ces observations établirent enfin, comment la bactériose se développe au fond du bois et quelle est la manière dont elle provoque les diverses manifestations extérieures de la maladie. Nous avons acquis la certitude que la marche de la maladie dans les arbres en général ne diffère en rien de ce que nous avons observé sur les arbres consacrés aux expériences d'inoculation. C'est ce que nous tâcherons de démontrer plus loin.

Une seconde série d'inoculations fut effectuée à la fin du mois de juin et au commencement de juillet 1902. Pour faciliter la manipulation, nous avons employé exclusivement des pommiers plantés en caisse. Une partie de ces inoculations fut faite, ainsi que dans les expériences précédentes, au moyen de piqûres avec une aiguille infectée. Les autres furent pratiquées autrement: après avoir fait des incisions longitudinales de l'écorce, nous avons soulevé un peu cette écorce d'un côté de l'incision et nous avons fait passer une aiguille infectée au dessous de l'écorce soulevée. Les plaies produites de cette manière ont été ligaturées et enduites de mastic. Les arbres ont vécu à l'air libre pendant le reste de l'été et à l'approche de l'hiver furent placés dans une cave.

En les examinant le 12 décembre 1902, nous avons trouvé que les bactéries, là où elles avaient été inoculées par des piqûres, se développaient de la même manière que dans les expériences décrites précédemment: on pouvait observer déjà une modification de la teinte du bois à une distance d' $1\frac{1}{2}$ jusqu'à 2 ctm. du point de l'inoculation. Quant aux infections par incision, elles montrèrent un développement très rapide de la bactériose. Les incisions s'étaient, il est vrai, cicatrisées, mais les couches du bois jeune qui les cicatrisait avait pris une teinte anormale. On observait aussi un fort développement de la bactériose dans le bois ancien, vers le haut et vers le bas de la branche. Les lésions locales provoquées par les bactéries s'affirment donc plus vite et à un plus haut degré dans les inoculations pratiquées au moyen des incisions avec soulèvement de l'écorce, que dans celles effectuées par des piqûres. Nous attribuons ce fait à l'affaiblissement local des tissus, causé par le détachement momentané de l'écorce, et aussi à la circonstance qu'en agissant de cette manière, on introduit sous l'écorce une quantité de bactéries beaucoup plus grande que par le système de piqûres.

Mode de propagation des bactéries dans la nature.

Au sujet des infections naturelles et du mode de propagation des bactéries, nous ne pouvons exprimer que des idées générales, basées sur nos propres observations, ainsi que sur les opinions admises des praticiens — la question ne pouvant être encore aujourd'hui résolue définitivement.

Il est probable que les bactéries sont répandues surtout par l'intermédiaire des insectes qui piquent les jeunes parties des arbres, comme les pucerons par exemple.

Cette supposition se trouve confirmée par le fait, observé par nous, de l'apparition violente d'une bactériose de jeunes pousses dans une pépinière de pommiers, à la suite de l'envahissement de cette pépinière par des pucerons. La croyance généralement admise et fondée sur l'expérience des cultivateurs, que les lésions faites aux arbres par le puceron lanigère sont quelquefois aussi le point de départ des vrais chancres, ne peut que venir à l'appui de notre opinion. L'infection causée par la piqûre des pucerons est probablement la plus dangereuse, car les bactéries sont introduites alors profondément dans le tissu des jeunes pousses. Le liquide sucré produit par les pucerons, qui couvre les feuilles et les pousses d'un enduit visqueux, peut aider à l'infection, en retenant d'une part les microbes portés par le vent, et d'autre part en leur servant de milieu nutritif momentané.

Les kermès peuvent aussi jouer le même rôle que les pucerons dans la propagation des bactéries. Il est à remarquer que certains auteurs leur attribuent surtout la faculté de provoquer la maladie du chancre. Ainsi Goethe, avant d'attribuer la cause du mal à la présence du *Nectria*, accusait les kermès de produire le chancre par leurs piqûres qu'il supposait vénéneuses¹⁾.

Il convient d'admettre qu'indépendamment de l'action des insectes piquants, chaque blessure de l'arbre, qui met le bois à nu, peut servir de porte d'entrée aux bactéries, les inoculations artificielles nous donnant la preuve que non seulement le jeune bois d'une année, mais aussi celui de 3 et de 4 ans peut être infecté. L'infection de l'écorce, si elle ne vient pas du dedans, c'est à dire si elle n'est pas le résultat de l'envahissement précédent du bois par les bactéries, ne semble pas faire grand tort à l'arbre.

¹⁾ R. Göthe. Mittheilungen über den Krebs der Apfelbaume 1877. page 27.

Les bactéries se trouvent disséminées à la suite de la décomposition totale et de l'émiettement du vieux bois chancreux. On peut voir à la surface des plaies chancreuses des masses noires et informes, composées de débris du bois, et qui, à la suite de la sécheresse, tombent en poussière, peuvent être emportées par le vent ou entraînées par l'eau vers le sol.

Le sol, qui reçoit les bactéries emportées par les eaux des pluies de la surface des plaies chancreuses, peut être pour ces bactéries un milieu favorable, ainsi que nous le prouve la formation des nodosités sur les racines des arbres, ces nodosités n'étant que le chancre de racines. Il est donc permis de supposer que la poussière ordinaire peut aussi renfermer des bactéries.

Le greffage des arbres fruitiers contribue sans nul doute puissamment à propager le chancre. En coupant longitudinalement les arbres de plusieurs années de greffage, atteints de bactériose, nous trouvons souvent que la partie du tronc qui a été fournie par le greffon même est le point de départ de la maladie; la bactériose s'accroît fortement au point de soudure. Nous supposons que c'est moins les blessures faites pendant le greffage que l'emploi de greffons contaminés qui est cause de l'infection — soit que ces greffons aient été pris sur des arbres malades, soit que les pousses, qui devaient servir ensuite de greffons, aient été fortement attaquées et infectées par les pucerons. Il est possible que le greffage avec un bourgeon (occulisation) offre moins de chances d'infection que le greffage proprement dit.

Le *bacterium mali*, une fois introduit dans l'organisme de l'arbre, s'y développe et provoque la bactériose du bois. Dans certains cas, comme p. ex. dans la maladie bactérienne des jeunes pousses, les organes attaqués peuvent être tués presque immédiatement, mais en général la bactériose se développe lentement dans l'intérieur du bois, sans que l'arbre semble en souffrir, car chez les sujets bien portants le développement de la bactériose est contrebalancé par la formation annuelle des nouvelles couches d'un bois jeune et normal. On peut remarquer souvent, en taillant les arbres, une bactériose assez prononcée de certains rameaux sans que ces rameaux et l'arbre entier semblent en souffrir d'aucune manière. C'est pourquoi, quoique probablement bien rares soient les pommiers exempts d'infection dans toutes leurs parties, nous voyons souvent ces arbres arriver à un âge avancé en parfait état de santé, et

seule l'extrême vieillesse de l'arbre ou l'épuisement du sol fait apparaître la maladie. D'autre part, les arbres tout jeunes peuvent être tués par la bactériose en un temps relativement court, si les conditions extérieures sont défavorables à leur bon développement. Ce cas se trouve fortement aggravé, si les arbres appartiennent en même temps aux variétés peu résistantes au chancre. Cela nous permet de comparer la bactériose chancreuse des arbres à la tuberculose de l'organisme animal.

Les conditions extérieures qui favorisent les progrès de la maladie sont bien connues et nous n'avons pas à revenir sur ce sujet. Ajoutons cependant que la pauvreté du sol en potasse, provoquant une végétation malade, peut être une des conditions favorables au développement de la maladie. C'est un fait connu que les plantes diverses qui souffrent du manque de potasse sont bien plus exposées aux attaques des parasites végétaux que les plantes normales. Les observations que nous avons faites sur des arbres plantés dans un sol très bon au point de vue physique, mais insuffisamment riche en potasse, semblent confirmer cette opinion.

Quant à la cause de la résistance innée de certaines variétés à la maladie du chancre, nous en savons peu de chose, et les essais tentés par Sorauer pour expliquer cette résistance relative par les différences dans la structure des tissus nous semblent peu concluants. Nous savons que certaines variétés, comme: Reine des reinettes, Reinette du Canada, Calville blanc d'hiver, rouge de Stettin etc. souffrent plus que les autres — mais à cela se bornent nos connaissances dans cette matière. L'opinion, presque généralement adoptée, que les variétés à végétation vigoureuse souffrent plus que les autres, ne se confirme pas et nous voyons les variétés à végétation modérée, comme: Reinette muscat et rouge de Stettin, souffrir de même que les variétés à végétation vigoureuse.

Il convient de remarquer qu'à part la résistance relative des variétés, les individus appartenant à la même variété peuvent montrer un degré différent de résistance, dû aux facultés de résistance du sauvageon qui leur a servi de porte-greffe. Le sauvageon, étant obtenu de semis, possède des propriétés individuelles et s'il est peu résistant au chancre, il peut, en succombant lui-même à la maladie, la communiquer au sujet greffé sur lui.

Les manifestations extérieures de la bactériose du pommier.

La bactériose chancreuse est essentiellement une maladie du bois. Les bactéries peuvent se développer aussi dans l'écorce, mais — comme il a été dit plus haut — les lésions de l'écorce, si elles ne sont pas le résultat de la destruction du bois, ne présentent pas un grand danger pour les arbres.

La bactériose se manifeste à l'extérieur de l'arbre sous plusieurs formes, notamment sous forme de 1) bosses, 2) plaies chancreuses ordinaires, 3) tumeurs des branches, 4) nécrose, 5) bactériose généralisée de l'arbre, 6) bactériose des pousses et 7) nodosités sur les racines.

Les formes d'apparition de la maladie dépendent d'une part de l'intensité de la bactériose et du degré d'énergie avec laquelle les bactéries développent leur action, d'autre part de la résistance relative que leur opposent les tissus et des conditions locales de diverses parties de l'arbre. Ainsi, des altérations différentes peuvent se produire sur la même branche et à très peu de distance l'une de l'autre; par exemple, la bactériose cheminant dans le bois peut provoquer quelque part une plaie chancreuse ouverte et un peu plus loin une tumeur ou une nécrose de la branche. La plaie chancreuse ou la nécrose, en contournant totalement la branche, peuvent causer sa mort. La branche peut être cependant tuée, indépendamment des plaies qu'elle porte, par la bactériose généralisée du bois. Il arrive souvent que les plaies changent de nature, en prenant une forme plus aiguë, p. ex. une plaie chancreuse ordinaire ou une tumeur peuvent se compliquer par l'apparition tout autour d'elles d'une nécrose, qui tue bientôt la branche ou le tronc de l'arbre.

On trouve des formes intermédiaires si nombreuses et si peu marquées des diverses formes caractérisées du chancre, qu'il n'est pas toujours aisé de définir avec quelle forme on a vraiment à faire.

Les bosses chancreuses. On rencontre souvent sur le tronc et les branches des pommiers des bosses plus ou moins grandes, recouvertes d'écorce saine, sans trace de plaie extérieure. Ces bosses furent remarquées et décrites par Sorauer, qui les attribuait à l'action du gel ¹⁾.

En coupant une telle bosse, quand elle est petite encore, on n'aperçoit souvent dans son bois rien d'anormal; en examinant cepen-

¹⁾ Paul Sorauer. Handbuch der Pflanzen-Krankheiten, Berlin 1886, t. I. p. 386.

dant à cette place les couches plus profondes du bois de la branche, on y voit une excroissance de la bactériose qui chemine dans ce bois, dirigée vers le point de formation de la bosse.

Quand la bosse est plus grande et par conséquent plus vieille, il arrive que l'excroissance de la bactériose interne du bois, en poussant vers l'extérieur, entre dans le corps même de la bosse et y produit des altérations plus ou moins profondes (Fig. 11.). Souvent le bois de la bosse change non seulement de couleur, mais aussi de consistance, il devient mou et spongieux. Ces changements n'intéressent que le bois plus vieux à l'intérieur de la bosse, les couches extérieures du bois et le cambium y restant — en apparence du moins — intacts. Le bois altéré, examiné au microscope, montre de nombreuses bactéries dans les cellules et la destruction totale d'une grande partie du tissu.

Le bois des bosses, aussi bien que le bois de toutes les nodosités et tumeurs chancreuses en général — y compris les bourrelets des plaies, est caractérisé par l'abondance du tissu parenchymateux, riche en contenu cellulaire. Nous nous expliquons ce fait par la rapidité relative avec laquelle ce bois s'est formé sous l'influence irritante des bactéries. La structure de ce bois facilite à son tour l'action destructive des bactéries et indique pour ainsi dire la direction dans laquelle cette action doit se développer. Il est facile de comprendre que la bactériose du bois se dirige de préférence là où elle trouve la plus grande abondance de matières nutritives et en même temps la plus faible résistance du tissu; c'est pourquoi, une fois arrivée dans l'intérieur du bois des excroissances dont elle a provoqué la formation, la bactériose s'y développe avec plus d'intensité que dans le bois normal.

Si la marche de la bactériose est plus rapide que la formation du bois nouveau, elle atteint et tue le cambium et l'écorce, ce qui met une fin au développement ultérieur de l'excroissance. Si, au contraire, la destruction du bois à l'intérieur est contrebalancée par la formation de nouvelles couches de bois jeune, l'excroissance peut atteindre des dimensions considérables.

L'observation des arbres malades du jardin, ainsi que de ceux qui avaient subi l'infection artificielle, nous a permis de nous rendre compte de la manière dont se forme une bosse chancreuse. La bactériose, qui chemine dans le bois le long de la branche, forme quelque part — sous l'influence de conditions locales inexplicables —

un embranchement vers l'extérieur. Le cambium menacé donne rapidement dans ce point des couches nouvelles de bois, grâce auquel il se sépare de la bactériose et par cela même il se forme une excroissance, se présentant comme un bouton à la surface de la branche. La bactériose poussant toujours dans la même direction, la bosse augmente de plus en plus; quand la bactériose atteint enfin le centre de la bosse, elle y provoque les altérations du bois décrites précédemment. Si la bactériose arrive à détruire le cambium de la bosse, celle-ci devient une plaie chancreuse plus ou moins ouverte.

Les plaies chancreuses ordinaires. Ces plaies constituent la forme du chancre la plus connue et la plus souvent décrite. Le chancre se présente ici sous l'aspect de plaies plus ou moins grandes, dont le caractère distinctif est la formation d'un épais bourrelet de cicatrice tout autour de la plaie. Ce bourrelet est lui-même, au bout d'un certain temps, corrodé par les bactéries et il meurt en agrandissant la plaie. Le cambium encore sain forme un bourrelet nouveau qui meurt à son tour, et ainsi de suite (Fig. 12). La plaie s'élargit donc jusqu'au moment, où ayant fait le tour du tronc ou de la branche, elle provoque la mort de toute la partie située au dessus d'elle. On peut trouver dans les plaies chancreuses trois, quatre, cinq ou même plus de bourrelets corrodés et desséchés, ce qui prouve que l'agrandissement de la plaie est fort lent, le même bourrelet pouvant se développer pendant quelques années consécutives. Il arrive que le chancre se développe si lentement que le bourrelet cicatrisant ne périt pas, mais grossit au contraire de plus en plus pendant un certain nombre d'années. Dans ce cas la plaie, étant petite, devient relativement profonde et à bords très élevés, ce qui constitue comme une forme de transition entre la plaie et la tumeur chancreuse.

Dans la première phase de son développement le chancre ordinaire se présente sous la forme d'un point d'une certaine dimension, où l'écorce est desséchée. Le dessèchement de l'écorce est dû à ce fait que la bactériose, se développant dans le bois, a atteint ici et tué les plus jeunes couches du bois ainsi que le cambium et a attaqué les couches internes de l'écorce.

Aux bords de la petite plaie, produite de cette manière, commence à se former un bourrelet de cicatrisation; mais comme celui-ci est tué par la bactériose venant du dedans de l'arbre, il se

forme bientôt un autre bourrelet plus en dehors de la plaie, et ainsi de suite. La plaie prend donc le caractère distinctif d'un chancre. Comme la branche grossit en même temps annuellement, les bords de la plaie deviennent de plus en plus profonds et les bourrelets s'élèvent l'un au dessus de l'autre, comme les gradins d'un escalier.

En observant les coupes longitudinales des branches couvertes de plaies chancreuses, il est aisé d'apercevoir comment le bourrelet encore sain se trouve graduellement envahi par des raies et filons bruns, venant de l'intérieur du bois bactériosé de la branche (Fig. 13).

Il résulte de la nature du chancre décrit, qu'il ne peut être porté que par une branche d'un certain âge, la plaie exigeant quelque temps pour former la série des bourrelets de cicatrisation, qui lui donne son caractère distinctif.

Une plaie chancreuse, si elle n'est pas grande et si son développement est lent, peut — tant que les circonstances favorisent la végétation de l'arbre — cesser de progresser et même finir par se cicatrifier. Les jardiniers ont l'habitude d'aider à la cicatrisation des plaies en les tranchant sur les bords jusqu'au vif et en les recouvrant de mastic.

Par suite du grossissement de l'arbre, la plaie cicatrisée se couvre chaque année de nouvelles couches de bois et peut même disparaître sans laisser de traces à l'extérieur. Cependant, la cicatrisation d'une plaie chancreuse n'est nullement la guérison définitive de l'arbre, car la bactériose au fond du bois y suit son cours. Vu la nature de la maladie, il n'est pas possible d'obtenir une guérison complète; ce n'est que la disparition d'une manifestation extérieure de la maladie et son retour à l'état caché — état qui peut durer aussi longtemps que l'arbre continue d'avoir des conditions favorables à sa végétation. Aussitôt ces conditions changées, les manifestations extérieures de la maladie se montreront avec une force correspondant à l'affaiblissement de l'arbre.

Les tumeurs chancreuses (chancre fermé). Les tumeurs chancreuses se trouvent principalement sur des branches assez minces, où elles sont parfois très nombreuses. Elles se distinguent facilement des bosses, car elles ne sont pas recouvertes entièrement d'écorce saine et on y trouve toujours une solution de continuité, sous la forme d'une fente profonde, atteignant le bois bactériosé et bruni

de l'intérieur de la branche (Fig. 14 et 15). Cette solution de continuité représente ici la plaie primitive, qui a été tellement enserrée par le développement considérable de ses bourrelets de cicatrisation, qu'elle a pris la forme d'une fente. La tumeur n'est donc autre chose qu'une plaie chancreuse dont les bourrelets durent très longtemps et ont pu prendre des dimensions considérables, grâce à l'action peu intense des bactéries. La tumeur est donc la forme la plus bénigne de la bactériose chancreuse et elle cause rarement à elle seule la mort d'une branche. Dans la plupart des cas, la branche couverte de tumeurs meurt de la bactériose généralisée du bois, ou bien est tuée par une nécrose qui apparaît parfois à sa surface.

On rencontre parfois des renflements de rameaux en forme de tonnelets. Ces renflements sont provoqués par le fait que la bactériose intérieure du bois commence à se développer fortement dans un point donné du rameau, en se dirigeant vers l'extérieur dans toutes les directions. Cela provoque une formation anormale des couches du bois à cette place et la branche y prend la forme mentionnée. Le renflement de la branche se complique quelquefois par la présence d'une plaie chancreuse, ou peut au contraire n'en présenter aucune. Dans ce dernier cas, il faudrait le ranger dans la catégorie des bosses chancreuses.

La nécrose chancreuse (chancre aigu). La nécrose est une forme aiguë de la maladie. Elle se manifeste par le dessèchement de l'écorce de l'arbre sur une certaine étendue (Fig. 16). Le bois sous l'écorce desséchée est détruit par la bactériose. Il ne se forme point ici de bourrelets cicatriciels, les progrès de la bactériose dans le bois étant si rapide que le cambium autour de la plaie est tué graduellement. La plaie ne présente pas en conséquence des bords élevés, comme dans le chancre ordinaire, mais elle reste plate.

Si on enlève autour de la plaie l'écorce encore saine, on voit que le bois y a pris une teinte brune, plus foncée tout près du bord même de la plaie, moins prononcée à mesure qu'on s'en éloigne. Bientôt l'écorce qui couvre ce bois meurt à son tour et la plaie s'agrandit de plus en plus, souvent avec une telle rapidité que la branche est contournée par la nécrose et tuée au cours même d'un été. Vu la rapidité des progrès de la maladie, tous les soins tendant à guérir la plaie restent généralement inefficaces.

Par ce fait, la nécrose bactérienne diffère sensiblement des plaies

produites par l'action du froid sur les variétés qui en souffrent, cette sorte de plaies guérissant facilement même malgré le manque de soins. Les nécroses chancreuses se formant d'ailleurs, comme nous l'avons mentionné, même après une suite d'hivers très doux, toute tentative de rapprochement entre elles et les plaies produites par le froid doit être absolument abandonnée, malgré l'opinion contraire de certains auteurs (Sorauer). Le froid n'entre ici en jeu que comme cause d'un affaiblissement de la végétation des arbres, ce qui peut les prédisposer au chancre; il n'est donc ici qu'un agent secondaire.

La nécrose chancreuse est provoquée par une forte poussée de la bactériose du bois vers un point quelconque de la surface où elle tue le cambium et attaque les couches internes de l'écorce, qui ne tarde pas à se dessécher. La bactériose se répand ici dans les couches externes du bois à la manière d'une goutte d'huile qu'on laisserait tomber sur une feuille de papier buvard. On peut remarquer que même là où la couche la plus jeune du bois est encore — en apparence du moins — intacte, les couches plus anciennes et plus profondes ont déjà subi l'atteinte des bactéries et le trahissent par la modification de leur couleur.

La nécrose apparaît parfois d'une manière très violente sur des sujets jeunes de variétés sujettes au chancre, et elle les tue en un temps très court. On n'aperçoit pas sur de tels sujets d'autres formes extérieures du chancre, comme les plaies ordinaires ou les tumeurs; celles-ci ne sauraient s'y produire, vu la progression rapide de la maladie. D'habitude, l'arbre trahit alors une infection plus ou moins généralisée, ce qu'on peut conclure du fait que la nécrose apparaît sur le tronc et sur les branches en beaucoup d'endroits à la fois. L'examen d'un tel arbre, fait au moyen de coupes de ses branches, vient prouver que le bois plus âgé y est envahi presque partout par les bactéries plus ou moins fortement.

Si le développement de la nécrose vient à se ralentir, il peut commencer à se former autour de la plaie un bourrelet de cicatrice. Ce bourrelet cependant est envahi au fur et à mesure qu'il se développe et tué avant qu'il ait pu atteindre quelque épaisseur; la plaie reste donc toujours plus ou moins plate. Ce cas sert de forme intermédiaire entre la nécrose et les plaies du chancre ordinaire.

De la bactériose généralisée des pommiers. Cette

maladie n'a pas encore été décrite jusqu'à présent. Elle échappait d'autant plus facilement à l'attention des observateurs, que l'aspect des arbres succombant à la bactériose généralisée rappelle jusqu'à un certain point celui des arbres gelés. Si même la bactériose généralisée de l'arbre se produisait après un hiver élément, on reportait son origine aux froids rigoureux d'un hiver de deux, trois ou quatre années auparavant, ce qui répondait à la théorie acceptée par les praticiens — fausse cependant, que dans certains cas l'arbre pouvait ne pas montrer de trace d'altération immédiatement après un hiver rigoureux, mais seulement dans les années suivantes.

Nous avons remarqué pour la première fois les symptômes de la bactériose générale sur un arbre artificiellement infecté (Calville blanc d'hiver), ce que nous avons déjà mentionné plus haut. En comparant ces faits avec ceux que nous avons observés sur les arbres du jardin, nous sommes arrivés à la conclusion, que la bactériose généralisée des arbres est une manifestation bien commune de la maladie du chancre. Ajoutons qu'il nous a été donné de l'observer sur des arbres absolument résistants à l'action du froid dans notre climat, comme p. ex. la variété russe „Borovinka bielaia“, connue généralement sous le nom de „Charlamowski“.

L'arbre atteint de bactériose généralisée accuse un état maladif, cesse de s'accroître et se couvre de feuilles rares, pâles et de dimensions plus petites que les feuilles normales. On y voit en même temps de petits rameaux se dessécher sans cause apparente. Un arbre ou une branche, atteint de cette manière, peut encore pendant un certain temps porter des fruits, mais en petit nombre et en général de peu de valeur. Au bout d'un temps plus ou moins long, l'arbre dépérit par dessèchement, en commençant par les sommets des branches. L'arbre ou la branche malade porte au surplus souvent des tumeurs ou des plaies chancreuses, qui cependant ne sont pas de dimension à provoquer à elles seules la mort de l'arbre. La branche qui périt à la suite de la bactériose peut d'ailleurs ne présenter aucune des manifestations extérieures du chancre.

L'examen des arbres malades au moyen de coupes permet de constater une modification générale de la teinte du bois qui devient jaune canari, plus foncé ou plus clair par places. A un état très avancé de la maladie, la teinte des couches du bois qui se trouvent immédiatement au dessous de l'écorce et sont donc les plus jeunes, devient beaucoup plus foncée que celle du bois plus vieux

dans l'intérieur des branches. Ce symptôme doit être regardé comme le précurseur de la mort prochaine de l'arbre, et nous pouvons le comparer à la nécrose qui se serait généralisée, sans avoir encore provoqué le dessèchement de l'écorce.

Le bois des branches malades montre à l'examen microscopique des bactéries à profusion. Nous en avons obtenu en décembre 1902 des cultures pures du *bacterium mali*.

Un exemplaire d'arbre atteint de bactériose généralisée est représenté sur la Fig. 19. C'est un arbre âgé de 25 ans à peu près, appartenant à la variété „Charlamowski“, qui se trouve planté dans l'établissement de la société d'Horticulture de Cracovie „Glinka“. Il porte deux ramifications principales dont l'une est tout à fait bien portante, tandis que l'autre est atteinte de bactériose généralisée et semble ne pas pouvoir vivre plus d'une année ou de deux tout au plus. Cette partie de l'arbre avait été pendant longtemps à l'ombre d'un groupe tout proche de sapins et de robiniers. C'est donc probablement le manque de lumière, joint aux difficultés que trouvaient les racines à se développer de ce côté, qui a — en affaiblissant la végétation — permis à la bactériose de se généraliser dans les tissus de cette partie de l'arbre.

De la bactériose des pousses du pommier. Cette maladie est le résultat de l'infection des jeunes pousses par les bactéries, à la suite de l'envahissement de ces pousses par les pucerons (*Aphis mali*), cette infection étant secondée par les mauvaises conditions de la végétation des arbres, telles qu'un été trop froid et pluvieux, la mauvaise qualité du sol etc. Nous avons observé cette bactériose dans de jeunes pépinières, où elle faisait des ravages considérables dans les scions de l'année.

Les pousses de pommier dont les extrémités et les jeunes feuilles ont été envahies par les pucerons, commencent à noircir et à se dessécher. Les sommets succombent les premiers et le mal s'étend graduellement vers le bas des pousses, en occupant bientôt les parties qui n'avaient point été attaquées par les pucerons. En faisant des coupes de ces pousses, nous apercevons que c'est la moelle qui souffre le plus et c'est par elle que l'altération descend le plus bas. On peut notamment trouver, vers la base des pousses, des points où la moelle visiblement altérée est entourée de bois encore sain.

Le bois des pousses, là où il est atteint, change de couleur et

de blanc verdâtre devient plus ou moins brun. Cette modification de teinte n'apparaît pas de haut en bas uniformément, mais fait des taches irrégulières, de manière qu'on peut trouver des régions saines encore parmi des places détruites presque entièrement. Les pétioles dans les places attaquées noircissent et se dessèchent, ainsi que les limbes des feuilles. Il est à remarquer que l'altération des feuilles de la partie de la pousse qui n'avait point été envahie par les pucerons, commence par la partie du pétiole attachée au bourgeon, tandis que si c'est l'attaque des pucerons qui est la cause immédiate de la destruction des feuilles, cette destruction suit une voie inverse.

L'examen microscopique des diverses parties des pousses malades montre une grande abondance de bactéries dans les tissus. La moelle, de même que le bois et l'écorce altérés des pousses, nous ont fourni en été 1902 des cultures pures du *Bacterium mali*.

Certaines pousses attaquées sont détruites jusqu'à leur base et se dessèchent complètement; chez d'autres, la partie inférieure reste plus ou moins saine. Les pousses qui ne sont pas détruites entièrement donnent des bourgeons anticipés. Mais comme le bois des régions d'où partent ces bourgeons est, malgré l'apparence extérieure de santé, plus ou moins altéré par la bactériose, cette partie de l'arbre futur garde dans son sein le germe de la maladie, quoique les parties altérées y soient masquées par les couches du bois jeune normal.

Les nodosités des racines. Cette maladie est fort bien connue des arboriculteurs, car elle se rencontre très fréquemment sur les arbres jeunes arrachés des pépinières. Elle n'a cependant jamais été l'objet de recherches sérieuses et on ne la trouve pas mentionnée dans les traités des maladies des plantes.

Les nodosités des racines se rencontrent principalement chez les arbres qui croissent dans les sols argileux, forts et humides, où quelquefois la moitié presque des arbres en est atteinte. On les trouve aussi chez les arbres qui vivent dans les terres de bonne composition, mais alors la proportion des arbres atteints est minime.

Sur les racines des arbres arrachés, on peut voir des excroissances de différentes grosseurs, depuis la grosseur d'une tête d'épingle jusqu'à celle d'un oeuf de poule. Ces nodosités ont l'aspect de corps irrégulièrement arrondis, à surface inégale, plissée et verru-

queuse. Elles ne se distinguent pas par leur couleur des racines qui les portent.

L'observation de nodosités des différents âges prouve qu'elles peuvent se former sur des racines fort jeunes et s'accroître à mesure du grossissement de la racine. On peut déjà voir des nodosités se formant sur des racines de l'année. A la place où il s'est formé une nodosité de grandes dimensions, la racine est visiblement affaiblie; au dessous de ce point, elle devient souvent mince et peut même périr complètement. Les vieilles nodosités pourrissent et s'effritent dans le sol.

Les racines d'un arbre sont quelquefois tellement couvertes de nodosités qu'il devient difficile de trouver une seule ramification bien portante. Indépendamment de la nature de ces nodosités, le fait seul qu'elles arrêtent la croissance des racines et gênent leurs fonctions suffit à établir leur influence fâcheuse sur la végétation ultérieure de l'arbre.

En examinant les nodosités au moyen de coupes microscopiques, nous voyons que les nodosités plus jeunes ont leur parenchyme cortical fort développé et constitué de cellules à cloisons minces; elles présentent donc sur ce point la structure ordinaire des racines. Dans la partie ligneuse, qui occupe ici une étendue relativement faible, l'élément parenchymateux est prédominant. Le caractère distinctif du bois des nodosités consiste dans l'abondance du tissu jeune, à cellules non encore différenciées. On pourrait supposer que la présence des bactéries provoque la multiplication des cellules de la zone cambiale, mais en empêche et ralentit la différenciation. — La partie médullaire parenchymateuse occupe dans les nodosités une place très considérable.

Là où le cambium est irrité, le tissu se développe plus rapidement et en conséquence le cylindre central grossit irrégulièrement, ce qui est la cause des contournements et des plissements de la surface de l'excroissance et ce qui lui donne son aspect verruqueux.

Dans les nodosités plus vieilles, on peut voir des filons foncés, cheminant dans toutes les directions. Les couches du bois y sont comme tourmentées, les vaisseaux et les fibres traversant la masse parenchymateuse en tous les sens, sans aucun ordre déterminé.

On aperçoit dans les racines mêmes des filons de bois bruni qui se trouvent en relation avec les nodosités portées par ces racines (Fig. 20).

Justement intéressés par la maladie des excroissances sur les racines des arbres, nous nous sommes mis à l'examiner déjà en 1895 pour en rechercher la cause. Nous supposions au commencement que cette cause était due à l'action d'un insecte ou d'un champignon parasite quelconque. Les recherches faites dans ce sens n'amènèrent aucun résultat et furent délaissées.

Après la découverte du *bacterium mali* en 1899, nous commençâmes à supposer que le même parasite pourrait bien être la cause de la formation des nodosités sur les racines des arbres. Aussi, immédiatement après avoir obtenu des cultures pures de bactéries, nous les avons inoculées à des racines d'un pommier (rouge de Stettin), cultivé en caisse. La difficulté de rechercher dans la terre les racines inoculées, sans nuire à l'arbre et sans arrêter sa végétation normale, fut cause que nous en fîmes un examen général seulement le 12 décembre 1902. Les résultats de cet examen furent les suivants: Deux inoculations, faites sur une racine plus grosse et plus ancienne, au moyen d'incisions longitudinales de l'écorce et le passage par la plaie d'une aiguille contaminée, s'étaient cicatrisées sans avoir formé d'excroissances; l'observation des coupes de ces racines démontra cependant que la bactérie s'était développée dans le bois des racines de la même manière que dans le bois des branches infectées. Deux autres inoculations, pratiquées sur une autre racine d'un certain âge, ne purent être retrouvées, à cause sans doute d'une destruction accidentelle de la racine. Quatre inoculations, faites sur de jeunes racines au moyen de piqûres avec une aiguille contaminée, avaient formé des nodosités caractéristiques. Trois autres inoculations, faites au moyen de piqûres, ne purent être retrouvées.

Au mois de février 1902, nous avons examiné au microscope de jeunes nodosités des racines et toujours nous avons trouvé dans leur bois de grandes quantités de bactéries, se comportant dans les tissus d'une manière identique à celle du *bacterium mali*.

Les essais tentés pour obtenir des cultures pures de ces bactéries furent couronnés d'un succès complet. Les cultures pures ainsi obtenues ne montrèrent aucune différence du *bacterium mali*, ce qui nous permet de les regarder comme absolument identiques.

Les inoculations des bactéries prises dans les nodosités des racines furent effectuées le 27 juin 1902 sur des branches d'un pommier. Elles démontrèrent à l'examen, fait le 12 décembre de la même année, un fort développement de la bactériose dans le bois.

Les filons de bois à teinte modifiée atteignaient déjà en plusieurs endroits une longueur de 2 ctm. à partir du point de l'inoculation.

De toutes ces recherches, nous tirons la conclusion que les nodosités sur les racines du pommier ne sont qu'une manifestation de la bactériose du bois de ces racines et répondent à ce que nous voyons comme bosses, tumeurs et plaies chancreuses sur les branches.

L'observation des arbres atteints de la maladie des nodosités des racines démontre la relation intime de ces nodosités avec la bactériose des parties aériennes de l'arbre. Ainsi notre Fig. 21 représente un pommier (Reine des reinettes), greffé depuis 3 ans, qui porte des nodosités sur ses racines et accuse une bactériose du tronc. Cette bactériose, partant d'en bas, atteint la tête même de l'arbre à la hauteur de 1 m. 80 ctm. au dessus du niveau du sol. La bactériose du tronc se trahit par un changement de couleur du bois, dont seule une couche fort mince au dessous de l'écorce a conservé une teinte normale, tandis que le reste a pris une couleur jaune foncée, passant vers le centre du tronc au brun, presque au noir. Les filons bruns, cheminant dans le fond du bois sans interruption à partir des racines, en passant par le point de soudure de la greffe, jusqu'aux parties les plus jeunes de l'arbre — nous montrent bien clairement quel est le point de départ de la maladie. D'ailleurs, la partie aérienne de l'arbre ne comptant que 3 années, il est impossible d'admettre que la bactériose ait pu commencer dans cette partie, descendre dans les racines et y provoquer la formation d'excroissances aussi volumineuses, visiblement d'ailleurs plus âgées. Il est clair que la bactériose a commencé ici dans la partie souterraine de l'arbre, plus vieille de quelques années.

Il y a cependant des cas où la bactériose suit une voie inverse, notamment quand un sauvageon bien portant a été enté par un greffon bactériosé, qui lui a communiqué la maladie. Dans de pareils cas, la bactériose, très développée au point du greffage, descend vers les racines, mais on voit alors une diminution graduelle dans l'intensité de la coloration du bois de ces racines, quoique de jeunes excroissances commencent déjà à s'y former. La manière dont s'effectue la pénétration des bactéries du sol environnant dans les tissus des jeunes racines et les conditions qui favorisent l'infection des arbres par cette voie ne sont pas encore élucidées.

Bacterium pyri (Brzez.)**Bactéries du poirier.**

Le poirier est sujet à la maladie du chancre de même que le pommier, mais plus faiblement. La découverte du bactérium mali facilita donc nos recherches sur la cause du chancre des poiriers et nous permit de découvrir le microorganisme qui provoque cette maladie.

Nous avons obtenu au mois d'août 1899 les premières cultures pures des bactéries du poirier, sans plus de difficulté que celles du pommier. La bactérie du poirier, examinée au microscope, se présente comme absolument semblable au bacterium mali. Elle est en forme de bâtonnets courts, presque toujours en état de division. Sa ressemblance avec le bacterium mali est telle, que pour ne pas se répéter, nous trouvons superflu de la décrire d'une manière plus détaillée.

Les bactéries du poirier se distinguent de celles du pommier uniquement par la couleur que prennent leurs cultures. Cependant, comme ce fait est constant et se présente d'une manière frappante, nous avons trouvé nécessaire de donner à la bactérie du poirier un nom différent.

Le bacterium pyri, de même que le b. mali, se développe le mieux en culture sur de l'agar avec du moût de bière, mais il y forme des colonies de couleur jaune d'ambre, qui diffèrent nettement des cultures blanc-grisâtres des bactéries du pommier. Il prend la même teinte caractéristique dans les cultures sur de la gélatine. Cultivé dans un milieu liquide, il ne se distingue pas du bacterium mali. Il ne diffère pas aussi du bacterium mali en ce qui concerne la vitalité des cultures et leurs exigences au point de vue de la température. Enfin, il réagit de la même manière que la bactérie du pommier en présence de divers colorants.

Dans les tissus végétaux, les bactéries du poirier se comportent de même que celles du pommier. Elles détruisent le protoplasme et l'amidon des cellules attaquées et corrodent les cloisons.

Le bois du poirier envahi par les bactéries change plus ou moins fortement de couleur, en passant au jaune-canari, jaune couleur de chair, jusqu'au brun foncé. On peut aussi remarquer quelquefois que le bois du poirier, à part une modification de teinte relativement faible, prend une consistance qui le distingue nettement

du bois sain: il devient mou et friable, se laissant facilement enlever par parcelles avec les ongles. On trouve des filons d'un bois ainsi altéré dans les branches des poiriers atteints de bactériose.

Inoculations expérimentales des bactéries du poirier et inoculations croisées. Le 26 du mois de juin 1902 nous avons inoculé un poirier en caisse (Baltet père) au moyen de piqûres faites avec une aiguille trempée dans une culture pure du *bacterium pyri*. Le 10 juillet 1902, nous avons pratiqué des inoculations sur un autre arbre en caisse, de la variété Délices d'Hardenpont, en procédant d'une manière déjà décrite, qui consiste à inciser longitudinalement l'écorce, à la soulever légèrement d'un côté et à passer au dessous de l'écorce ainsi soulevée l'extrémité d'une aiguille contaminée; ces incisions étaient ensuite ligaturées et couvertes de mastic.

L'examen, fait le 14 décembre, de cinq inoculations pratiquées sur l'arbre „Baltet père“ montra dans toutes un développement de bactériose, déterminant une modification de la teinte du bois. Ce dernier avait pris une couleur jaune rougeâtre sur une longueur d'un centimètre à partir de la piqûre. L'examen à la même date de trois inoculations faites sur l'arbre „Délices d'Hardenpont“ vint démontrer que les plaies s'étaient, il est vrai, cicatrisées, mais le tissu cicatriciel était atteint lui-même de bactériose. Dans une de ces inoculations, l'altération du tissu cicatriciel avait déjà atteint l'écorce. A part ces altérations, la bactériose se développait comme d'habitude dans le bois de la branche, dans la direction de sa longueur.

Déjà au mois d'août 1899, nous avons fait au moyen de piqûres et d'incisions des inoculations croisées des bactéries du pommier sur un poirier en caisse, appartenant à la variété Duchesse d'Angoulême. En examinant cet arbre au cours de l'automne 1899 ainsi que pendant les années 1901 et 1902, nous y avons remarqué un développement de bactériose, mais celle-ci se développait avec une lenteur extrême. Un dernier examen, fait le 14 décembre 1902, montra la formation de filons rougeâtres du bois à une distance d'un centimètre à peine du point de l'inoculation, tandis que les mêmes bactéries, inoculées à des pommiers, formaient déjà des filons d'une longueur considérable, ou avaient même déterminé la bactériose généralisée de la branche.

Des inoculations croisées furent pratiquées encore le 27 juin

1902 sur un poirier le Lectier, au moyen de piqûres avec une aiguille infectée du bacterium mali. Ces inoculations, soumises à un examen le 14 décembre de la même année, accusèrent un développement de bactéries très faible, mais qu'il était néanmoins possible de constater grâce aux sujets témoins absolument sains.

D'autres inoculations croisées furent faites en 1902 avec les bactéries du poirier, que nous introduisîmes le 14 juin au moyen de piqûres dans un pommier d'une variété indéterminée, et que nous inoculâmes le 6 juillet — au moyen d'incisions ligaturées et couvertes de mastic — à une branche d'un pommier Reinette du Canada. L'examen de ces arbres, fait le 14 décembre, démontra un développement de bactériose beaucoup plus faible que dans les pommiers inoculés avec le bacterium mali. Ce développement était cependant un peu plus fort que dans le cas des inoculations du bacterium mali sur des poiriers.

Au mois de Février 1903, nous avons tenté une contre-épreuve dans le but de trancher définitivement la question de savoir si les bactéries du pommier et du poirier forment ou non des espèces différentes. Nous avons fait une dizaine de cultures du bois des pommiers infectés précédemment avec les bactéries du poirier et autant de cultures du bois des poiriers qui avaient été inoculés avec les bactéries du pommier. Le bacterium mali, malgré un séjour prolongé dans les tissus du poirier, nous a donné dans tous les cas des cultures ayant l'aspect ordinaire des bactéries du pommier. D'autre part, les bactéries du poirier, quoique tirées du bois des pommiers, ont montré dans toutes les cultures la couleur jaunâtre caractéristique, propre au bacterium pyri. Les bactéries ne changent donc pas de nature selon l'influence du milieu où elles se développent, et la différence dans la couleur de leurs cultures peut être regardée comme un caractère tout à fait stable.

La contre-épreuve a donc réussi parfaitement et nous a convaincus définitivement que le bacterium mali et le bacterium pyri sont deux espèces différentes qui, placées dans un milieu qui ne leur est pas absolument propre, peuvent néanmoins s'y développer, mais ne le font alors que très faiblement.

Les manifestations extérieures de la bactériose du poirier.

Le bacterium pyri provoque dans les arbres les mêmes manifestations morbides que le bacterium mali; la bactériose du bois

détermine ici de même des plaies chancreuses, des tumeurs et des nécroses sur les parties aériennes de l'arbre, ainsi que des nodosités sur les racines et enfin la bactériose généralisée de l'arbre.

Les plaies chancreuses et tumeurs des branches du poirier se rencontrent plus rarement que celles du pommier. Surtout le chancre caractéristique, à bourrelets se formant et périssant tour à tour, est assez rare chez le poirier. Les plaies du poirier présentent d'habitude un aspect intermédiaire entre la plaie chancreuse et la tumeur. Elles déterminent souvent un grossissement en forme d'anneau tout autour de la branche, à la place où une plaie s'était formée.

La nécrose chancreuse apparaît sur le poirier sous la forme, d'un dessèchement de l'écorce par taches irrégulières; le bois y est toujours corrodé et bruni.

Sur des arbres jeunes, à écorce lisse, on peut souvent prédire la formation d'une nécrose longtemps avant son apparition définitive et cela grâce à l'aspect de l'écorce, qui devient ici fortement rugueuse.

Le caractère distinctif de la nécrose du poirier se trouve dans ce fait que de nombreuses raies et filons bruns de longueur considérable cheminent dans l'écorce encore saine, près de la place nécrosée — fait que nous n'observons point dans la nécrose du pommier. Nous expliquons cela de cette manière, que le progrès de la bactériose dans le bois et le cambium du poirier est plus lent que dans celui du pommier; les bactéries donc, qui pénètrent dans l'écorce environnante la plaie, ont suffisamment de temps pour s'y développer et former des filons bruns, indépendamment de la bactériose du bois. Dans les pommiers au contraire, le développement de la bactériose dans le bois s'effectue si énergiquement et l'écorce qui recouvre le bois corrodé est tuée avec une telle rapidité tout autour de la plaie primitive, que la bactériose n'a point le temps de déterminer dans l'écorce des altérations partielles visibles à une certaine distance de la plaie.

L'écorce crevassée — à la place où apparaît la nécrose chez le poirier — est plus épaisse que l'écorce normale; elle est spongieuse et prend en outre une teinte brune, visible dans des coupes transversales.

Les nodosités des racines se rencontrent chez les poiriers de même que chez les pommiers et y sont presque aussi fréquen-

tes, surtout lorsque les arbres sont plantés dans un sol argileux et froid.

La bactériose généralisée a plus fréquemment lieu chez le poirier que les autres formes de bactériose et prend un caractère distinctif de celle du pommier. Elle se manifeste principalement comme la maladie bien connue sous le nom de chlorose.

Les caractères de la chlorose étaient connus et décrits depuis longtemps. On comptait la chlorose parmi les maladies dites physiologiques, c'est à dire dues aux troubles dans les fonctions physiologiques de la plante, la cause primitive de ces troubles demeurait cependant inconnue. La chlorose des poiriers, à l'égal du chancre des pommiers, a été toujours regardée par les arboriculteurs comme la maladie la plus dangereuse des arbres, celle qui amène à sa suite les plus grandes pertes. Cela fait qu'on trouve des descriptions plus ou moins justes des symptômes du mal dans tous les auteurs s'occupant spécialement des maladies des plantes. On décrit aussi d'habitude comme une maladie à part le dessèchement des sommets des pousses, dû à la chlorose, sous le nom de brûlure¹⁾.

Il est de toute notoriété que les poiriers plantés dans un sol ne leur convenant pas, p. ex. dans un terrain calcaire, succombent facilement à la chlorose. De même les arbres plantés dans un sol argileux, imperméable, trop humide et froid, sont plus disposés à contracter la chlorose que ceux placés dans un sol qui leur convient. Cela suffisait pour qu'on affirmât que la mauvaise nutrition des arbres peut elle-même provoquer la chlorose.

Il demeurait cependant absolument inexplicable comment, parmi des poiriers croissant dans un sol tout à fait favorable à leur végétation, on trouva çà et là des sujets plus ou moins fortement atteints de chlorose, et cela dans le proche voisinage d'autres poiriers parfaitement sains.

La chlorose se manifeste par une modification dans la couleur des feuilles, qui deviennent vert clair ou jaunâtres. Cette modification peut aller si loin, que les feuilles se font presque blanches, et en même temps celles qui sont le plus fortement atteintes se dessèchent, soit entièrement, soit en partie. La maladie apparaît généralement dans toute sa force vers le milieu de l'été ou plus tard.

¹⁾ Pierre Passy. Les maladies du poirier et du pommier. Alençon 1899. p. 102 et 111.

Au printemps, les feuilles des arbres malades sont de couleur presque normale. On peut voir souvent en été que les feuilles d'une pousse malade ne sont pas toutes atteintes de chlorose au même degré: tandis que les feuilles du bas de la pousse, formées au printemps, restent vertes, celles placées plus haut et qui ont été formées pendant l'été sont plus ou moins jaunes; celles enfin du sommet sont déjà presque blanches, mal développées et se dessèchent peu à peu. Quand la chlorose se déclare d'une façon violente, les sommets des pousses aussi sont desséchés sur une longueur plus ou moins grande, ce qui a lieu d'habitude assez tard en automne. Cette destruction rappelle la manière dont succombent les pousses des pommiers atteints de bactériose, et cela par le fait, qu'à part le sommet qui brunit et se dessèche entièrement, on trouve plus bas sur les pousses des régions malades parmi des places saines. Les points où se trouvent les boutons semblent être altérés les premiers.

La chlorose attaque soit un arbre tout entier, soit quelques unes de ses branches. La situation des branches sur l'arbre n'a ici aucune influence; quelquefois c'est le sommet de l'arbre qui est atteint, d'autres fois c'est une ou plusieurs branches inférieures qui succombent à la maladie.

La saison, où la vraie chlorose se présente dans toute sa force, distingue absolument cette maladie d'une espèce de chlorose provoquée quelquefois chez les arbres peu résistants par les froids rigoureux d'un hiver. Dans ce dernier cas, l'arbre endommagé gravement dans ses tissus forme au printemps des pousses plus faibles qu'à l'ordinaire et se couvre de feuilles vert clair. Cependant, à mesure que l'arbre se rétablit pendant l'été, ses feuilles prennent une teinte plus foncée et sa végétation devient plus ou moins normale. Au moment donc où la fausse chlorose disparaît ou s'atténue, c'est à dire vers la moitié de l'été, la chlorose bactérienne arrive justement au plein de son développement.

La chlorose, qui apparaît chez diverses plantes comme une anomalie innée, ne doit pas non plus être confondue avec la chlorose bactérienne. Elle est accidentelle, se montre indépendamment de l'époque plus ou moins avancée de l'été et ne semble pas être à proprement parler une maladie. Les parties des plantes qui présentent cette anomalie ont généralement une végétation faible, mais ne périssent point et peuvent même, étant reproduites par la greffe, donner naissance aux variétés à feuilles argentées.

L'âge des arbres ne semble avoir aucune influence sur l'apparition de la chlorose bactérienne. Nous la voyons attaquer aussi bien les arbres vieux que les sujets tout jeunes, cultivés dans les pépinières. En revanche, la température de l'été joue ici un rôle prépondérant. Dans les années chaudes et ensoleillées, la chlorose ne se montre pas ou apparaît faiblement; dans les années humides au contraire, elle fait de grands ravages. Un exemple excellent de cette relation de la maladie avec la température de l'été nous a été fourni par un poirier du jardin de M. le Prof. de Janczewski à Cracovie. Ce poirier, appartenant à la variété Doyenné blanc, taillé en pyramide, était atteint depuis un certain temps d'une chlorose générale peu prononcée. Au cours de l'été pluvieux et assez froid de l'an 1899, la chlorose s'était manifestée avec une grande force. Durant l'été chaud de 1900 l'arbre s'était rétabli et pendant l'été favorable de 1901 il semblait être tout à fait normal. En revanche, au cours de l'été exceptionnellement froid de 1902, la chlorose apparut avec une force redoublée, de sorte que les feuilles pâlirent presque totalement et beaucoup de pousses de l'année eurent leur sommet desséché.

Tout ce qui diminue en général la quantité de chaleur et de lumière regue par les arbres, comme p. ex. l'ombre projetée par d'autres arbres ou par des bâtiments, une plantation trop serrée etc., prédispose visiblement les arbres à la chlorose.

La chlorose qui se manifeste à un fort degré et qui se répète chaque année, affaiblit au plus haut point les arbres attaqués, empêche leur végétation et les tue peu à peu, par le dessèchement graduel des branches.

La chlorose se complique d'habitude par l'apparition sur les branches chlorotiques des nécroses chancreuses qui hâtent la mort de ces branches. On peut voir aussi bien souvent de fortes nécroses se formant sur le tronc, à la place d'où partent les branches chlorotiques, après quelque temps de durée de la maladie.

La chlorose du poirier a été l'objet de nos recherches depuis longtemps; nous n'arrivions cependant point à nous rendre compte de la cause de cette maladie énigmatique. Les explications adoptées jusqu'ici ne nous semblaient ni suffisantes, ni bien établies. Ainsi, si nous acceptions que la mauvaise qualité du sol est la seule cause immédiate de la maladie, il serait impossible d'expliquer, comment il se fait que la chlorose peut attaquer aussi des arbres dans les

terres les plus convenables à la culture du poirier et qu'elle y envahit un arbre çà et là, tandis que les arbres voisins restent absolument bien portants. Il est impossible d'admettre que les conditions du sol, dont le caractère peut être absolument uniforme sur une étendue fort considérable, puissent changer aussi remarquablement d'un arbre à l'autre. Il serait certes bien difficile d'expliquer, comment des arbres plantés très près l'un de l'autre, p. ex. à 1 m. ou même 30 ctm. d'intervalle, trouveraient pour leurs racines des conditions de sol tellement différentes, que les uns succombent à la chlorose, tandis que les autres restent tout à fait sains. Il est également significatif qu'une ou plusieurs branches d'un arbre peuvent être atteintes fortement et pendant longtemps de chlorose, tandis que les autres sont complètement normales.

L'observation des formes différentes que présente la bactériose des pommiers vint éveiller notre attention et nous amena à rechercher si la chlorose des poiriers n'est pas simplement une manifestation de la bactériose de l'arbre, comparable à la bactériose généralisée du pommier.

Les recherches dans cette voie, effectuées pendant l'hiver de 1902/1903, quoique bornées aux parties ligneuses seulement de l'arbre malade et non complétées par l'étude des feuilles, nous ont montré cependant que nos soupçons étaient justifiés et qu'il existe une relation intime entre la chlorose des feuilles et la bactériose généralisée du bois.

En soumettant à l'examen de nombreuses branches des arbres qui avaient souffert pendant l'été de la chlorose, nous avons trouvé toujours une bactériose prononcée du bois, s'accusant par les modifications caractéristiques. Les recherches microscopiques décelèrent la présence de bactéries aussi bien dans le vieux bois des branches atteintes de chlorose, que dans celui des pousses de l'année. En examinant au microscope une pousse de l'année à divers points de sa hauteur, nous avons partout trouvé dans son tissu des quantités considérables de bactéries, et cela aussi bien dans le sommet desséché que dans les parties inférieures de la pousse, apparemment saines.

Les cultures, faites en décembre 1902 du bois des branches âgées de quelques années et atteintes de chlorose, ainsi que du bois des jeunes pousses partant de ces branches, confirmèrent entièrement

les résultats des observations microscopiques. Nous avons obtenu des cultures caractéristiques du bacterium pyri.

Les résultats obtenus jusqu'à présent nous permettent de croire que c'est la bactériose généralisée du poirier qui est la cause immédiate de la chlorose. La bactériose, partant du bois des branches, atteint en été les jeunes pousses et provoque les manifestations connues de la maladie.

Le développement vigoureux des arbres au printemps devance la marche ascendante de la bactériose, et c'est pourquoi la chlorose ne se montre pas en cette saison ou se manifeste très faiblement. Mais aussitôt que la végétation de l'arbre se ralentit normalement et, à plus forte raison, quand la végétation est contrariée par un temps froid et pluvieux à l'excès, les parties les plus jeunes des pousses sont bientôt atteintes par la bactériose et leurs tissus peu résistants sont corrodés au point de provoquer le dessèchement des sommets des pousses. C'est pourquoi la maladie gagne de plus en plus en force, à mesure que commencent les froids de l'automne. Il convient aussi de rappeler ici qu'une température relativement basse de l'été, visiblement nuisible à la croissance des arbres, ne nuit point au développement des bactéries.

N'ayant eu jusqu'à présent, comme objet de recherches, que des poiriers croissant dans un sol qui leur convient parfaitement, nous ne pouvons affirmer aujourd'hui avec une sûreté absolue, que la cause immédiate de la maladie est la même partout et toujours, p. ex. dans les sols humides et froids ou calcaires à l'excès. Cependant, tout fait supposer que cette cause est toujours la même et que les mauvaises qualités du sol ne sont ici qu'un agent secondaire, prédisposant les arbres à la maladie par l'affaiblissement de leur végétation, c'est à dire agissant de la même manière que le manque de lumière ou des froids excessifs en été.

La Bactériose se manifestant par le crevassement de l'écorce. Il nous reste encore à mentionner que sur des jeunes poiriers la bactériose du bois peut se manifester à l'extérieur de l'arbre principalement sous la forme de crevassement de l'écorce, tandis que les autres manifestations habituelles de la bactériose connues, comme p. ex. la chlorose ou les nécroses, sont peu prononcées ou n'arrivent que fort tard.

Nous avons eu l'occasion d'observer et d'examiner après l'arrachement un poirier de 10 ans (var. de Curé), taillé en pyramide,

dont la partie supérieure, c'est à dire la plus jeune était couverte d'écorce rugueuse et profondément crevassée. La flèche de l'arbre ne donnait depuis quelques années que des pousses chlorotiques dont les sommets se desséchaient; mais les branches latérales, même supérieures, ne montraient rien d'anormal dans leur végétation, excepté le crevassement mentionné de l'écorce. Les parties inférieures de l'arbre, c'est à dire les plus anciennes, avaient une écorce encore lisse.

L'examen de cet arbre au moyen de coupes montra que le crevassement de l'écorce était le résultat de l'envahissement de l'écorce par la bactériose venant de l'intérieur du bois; la bactériose, ayant atteint l'écorce, s'y présente sous forme de raies longitudinales. Dans le point où le filon linéaire de la bactériose arrive à la surface du bois, l'écorce meurt et il se forme par conséquence une crevasse (Fig. 22 et 23). La crevasse augmente avec le temps en profondeur, car le bois sur ses bords s'accroît d'une manière plus ou moins normale et l'écorce qui recouvre ces bords devient même plus épaisse que partout ailleurs.

Les recherches microscopiques décèlent dans les couches profondes de cette écorce épaissie une quantité considérable de bactéries du poirier.

Bacterium corylli (Brzez.).

Bactéries du noisetier.

Sur de vieux arbrisseaux de noisetiers, on constate quelquefois l'apparition du chancre sous forme de plaies et de tumeurs, atteignant de grandes dimensions. Cette maladie se rencontre d'ailleurs rarement sur les noisetiers. Sur de jeunes sujets, nous n'en avons jamais trouvé la moindre trace.

Au jardin botanique de Cracovie, deux vieux arbrisseaux: *Coryllus avellana* et *Coryllus colurna*, qui croissent dans le voisinage l'un de l'autre, sont couverts de plaies chancreuses et de tumeurs. Ils nous ont servi à obtenir au mois d'avril 1902 des cultures pures des bactéries, dont la présence est la cause de leur maladie.

Les recherches faites au laboratoire ne permettent d'établir aucune différence entre le *bacterium mali* et le *bacterium corylli*; ils présentent le même aspect aussi bien dans les préparations microscopiques que dans les cultures artificielles.

Les inoculations croisées, faites dans l'été de 1902, n'ont pas encore donné de résultats permettant de conclure si la bactérie du chancre des noisetiers est identique ou non au *Bacterium mali*. Nous sommes enclins cependant à supposer que, malgré leur identité apparente, ces bactéries diffèrent en réalité. Il serait difficile d'admettre que la même bactérie puisse provoquer la maladie d'arbres aussi éloignés dans l'ordre de la nature que le pommier et le noisetier quand, d'autre part, le pommier et le poirier — étant si proches — sont attaqués par des bactéries différentes.

Conclusion.

D'après l'opinion généralement adoptée, les bactéries ne provoquent que rarement et exceptionnellement les maladies des végétaux; aussi a-t-on tendance à rechercher dans ces cas la cause du mal dans l'action des champignons parasites. On voit cependant, ainsi que nous venons de le décrire, que la bactériose des arbres est leur maladie principale et la plus dangereuse, qui, dans certaines conditions, amène aussi facilement la mort de l'organisme végétal que la tuberculose p. ex. celle de l'organisme animal. Nous voyons aussi que l'organisme de l'arbre, quoique moins disposé à la généralisation des maladies que l'organisme animal, peut cependant être envahi entièrement par la bactériose, se manifestant à l'extérieur par des symptômes en apparence indépendants les uns des autres, comme p. ex. les nodosités des racines et la chlorose des feuilles. De même que cela a lieu dans l'envahissement d'un organisme animal par les bactéries — la résistance innée de l'organisme, sa force et les conditions favorables de sa vie préservent l'arbre de la maladie ou au moins en diminuent les effets, tandis qu'au contraire la faiblesse de l'arbre, due à sa nature ou aux conditions extérieures, accélère le développement de la bactériose et amène la mort de l'organisme.

Il convient d'ajouter que la bactérie du chancre n'est pas la seule qui ait été observée dans les arbres fruitiers mentionnés dans cet ouvrage. En Amérique (Illinois), les poiriers et pommiers, ainsi que les pruniers, pêchers et peupliers sont attaqués par le *Micrococcus amylovorus* (Burill), qui y détermine les manifestations d'une maladie inconnue en Europe, notamment la destruction de l'écorce, amenant la mort de l'arbre entier. D'autre part, en dehors des arbres cités dans cette étude (poirier, pommier, noisetier), d'autres

arbres et arbrisseaux sont aptes à être attaqués par les bactéries, comme cela a été prouvé par Prillieux et Delacroix pour la vigne ¹⁾, par Prillieux pour l'olivier ²⁾ et par Vuillemin pour le Pin d'Alep ³⁾. Il est facile de prévoir que des recherches ultérieures amèneront la découverte de nouvelles bactéries pathogènes des végétaux, appartenant soit au même type que les bactéries du chancre, soit à des types différents.

Nous pouvons ajouter que la maladie de la gomme des arbres fruitiers à noyaux, tels que le pêcher, le cerisier etc., est également, d'après le résultat de nos recherches, d'origine bactérienne. Les bactéries de la gomme, observées au microscope, ressemblent à ce point aux bactéries du chancre qu'il est impossible de les en distinguer ⁴⁾. Elles diffèrent cependant d'une manière distincte des bactéries du chancre par le fait qu'elles produisent dans les tissus des arbres attaqués une gomme; dont l'écoulement caractérise la maladie; la même gomme est produite par ces bactéries, quand elles sont cultivées artificiellement dans des milieux nutritifs appropriés. Comme les bactéries du chancre ne forment jamais de gomme, ni à l'état naturel, ni cultivées artificiellement, nous avons donc ici, comprenant les bactéries du chancre et celles de la gomme, une série nouvelle de bactéries végétales pathogènes, appartenant au même type quant à leur forme et dimensions, mais pouvant être aisément divisées en deux groupes: celles qui produisent la gomme et celles qui n'en produisent pas.

Explication des figures.

Fig. 1. Bacterium mali cultivé sur de l'agar-agar.

Fig. 2. Bacterium mali. Colonies formées sur la gélatine.

Fig. 3. Bacterium mali. Coupe du bourrelet cicatriciel d'un chancre.

¹⁾ Prillieux et Delacroix. La gommose bacillaire des Vignes. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, juin 1894.

²⁾ Prillieux. Les tumeurs à Bacilles de l'Olivier, comparées à celles du Pin d'Alep. Comptes rendus de l'Acad. des Sc. CVIII, p. 249 et Ann. de l'Inst. Nat. agronomique, t. XI, 1890.

³⁾ Vuillemin. Sur une bactériocécidie du Pin d'Alep. Comptes rendus de l'Acad. des Sc. CVII p. 874. Sur la relation des Bacilles du Pin d'Alep avec les tissus vivants, *ibid.*, p. 1184.

⁴⁾ P. J. Brzeziński. Etiologie du chancre et de la gomme des arbres fruitiers. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1902.

Fig. 4. Diverses phases de la destruction des grains d'amidon dans les cellules du parenchyme ligneux. Coupe des tissus d'une bosse chancreuse.

Fig. 5. Une cellule du parenchyme médullaire où les grains d'amidon se sont fondus en partie en une masse informe, tandis que les autres gardent encore leur forme intacte. Coupe d'une branche de pommier âgée de deux ans, atteinte de bactériose généralisée.

Fig. 6. Les bactéries corrodant les cloisons du parenchyme ligneux. Les bactéries adhèrent aux parois frangées de la cellule et sont visibles au fond des trous faits dans ces parois. Coupe d'une tumeur chancreuse d'une branche de pommier.

Fig. 7. Destruction par les bactéries des cloisons cellulaires du parenchyme ligneux. Coupe du bois bactériosé d'une plaie chancreuse sur un rameau de pommier âgé de trois ans. 1, 1 débris du contenu cellulaire; 2, 2 brunissure des cloisons cellulaires.

Fig. 8. Destruction du parenchyme ligneux et des vaisseaux. Coupe transversale du bois d'une plaie chancreuse sur un rameau de pommier âgé de trois ans. a — tissu ligneux et vaisseaux fortement détériorés; b, b — parenchyme des rayons médullaires à cloisons non encore altérées. Le contenu des cellules du parenchyme des rayons médullaires n'a pas été marqué sur le dessin.

Fig. 9. *Bacterium mali* dans le protoplasme des cellules du parenchyme médullaire d'une jeune pousse de pommier, 15 jours après l'infection artificielle.

Fig. 10. Une branche de pommier âgée de 4 ans, inoculée avec le *Bacterium mali* au mois d'août 1899. En bas — le point de l'inoculation par piqûre. Le développement de la bactériose est marqué le long de la branche par le filon à couleur foncée partant du point de l'inoculation. La branche a été coupée le 12 décembre 1902.

Fig. 11. Coupe transversale d'une bosse chancreuse détachée du tronc d'un pommier. On y voit l'excroissance de la bactériose, qui a été la cause de la formation de la bosse.

Fig. 12. Une plaie chancreuse sur le rameau d'un pommier.

Fig. 13. Coupe longitudinale du rameau portant la plaie chancreuse représentée sur la Fig. 12. 1, 1 — bactériose du bois qui a provoqué l'apparition de la plaie; 2, 2, 2 — bourrelets cicatriciels, placés un au dessus de l'autre et corrodés graduellement.

Fig. 14. Tumeur chancreuse sur le rameau d'un pommier.

Fig. 15. Coupe longitudinale du rameau (représenté sur la Fig. 14), passant par la tumeur. La plaie primitive se présente comme une fente entre les bourrelets cicatriciels très développés et qui forment le corps même de la tumeur.

Fig. 16. Nécrose sur un rameau de pommier.

Fig. 17. Coupe longitudinale du rameau nécrosé présenté sur la Fig. 16. Les filons bruns montrent la direction de la bactériose dans le bois.

Fig. 18. Nécrose occupant le tronc et la base des rameaux d'un pommier. Dans les places où l'écorce et les couches extérieures du bois ont été enlevées, on voit que le bois, sous l'écorce encore saine, est déjà complètement bactériosé.

Fig. 19. Un pommier dont la partie droite est atteinte de bactériose généralisée.

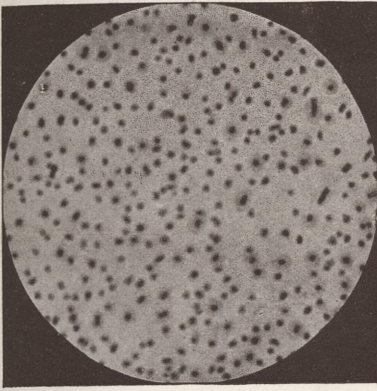


Fig. 1.

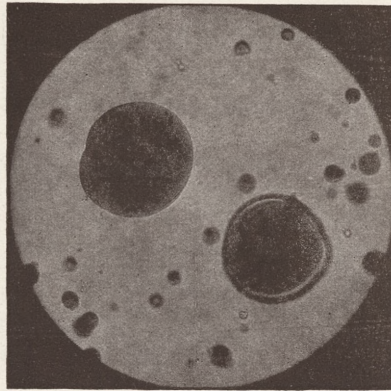


Fig. 2.

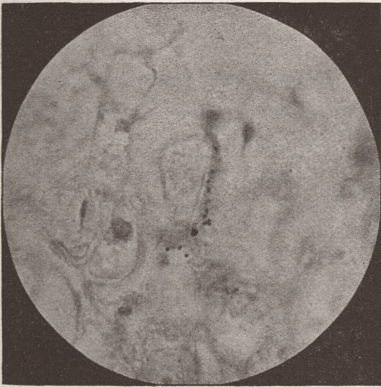


Fig. 3.

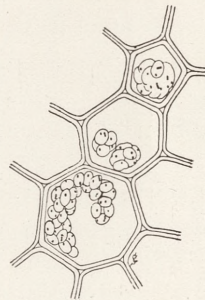


Fig. 4.

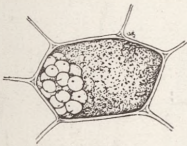


Fig. 5.

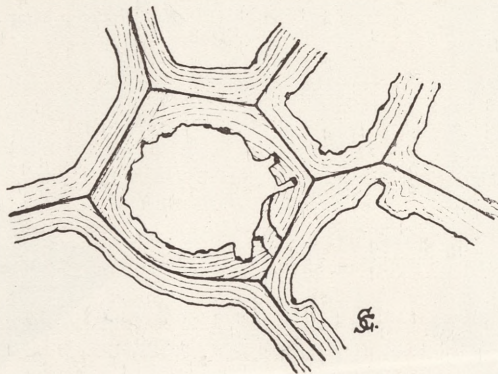


Fig. 6.

J. Brzeziński.

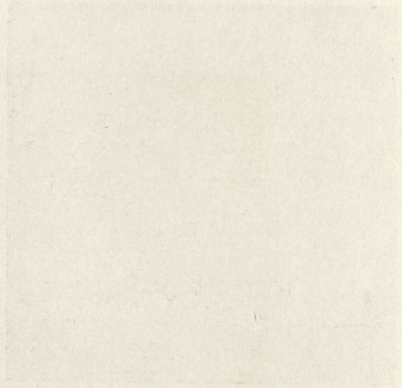
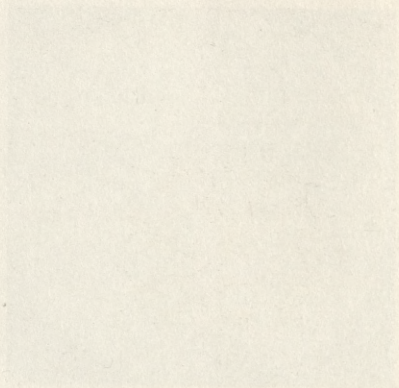
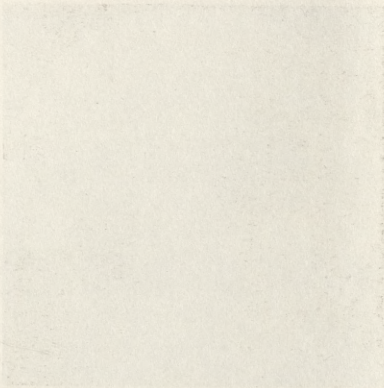




Fig. 7.

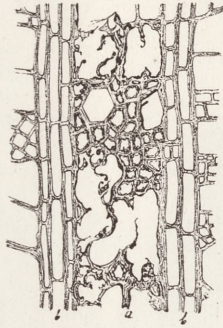


Fig. 8.



Fig. 9.

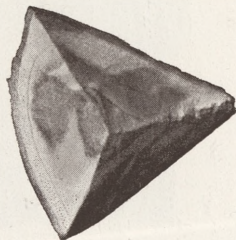


Fig. 11.



Fig. 10.





Fig. 12.



Fig. 13.



Fig. 14.

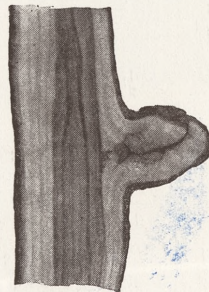


Fig. 15.





Fig. 16.



Fig. 17.



Fig. 20.



Fig. 23.

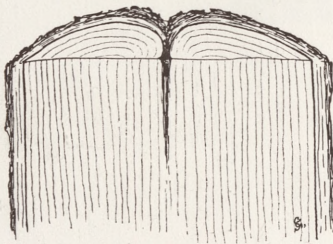


Fig. 22.





Fig. 18.



Fig. 1



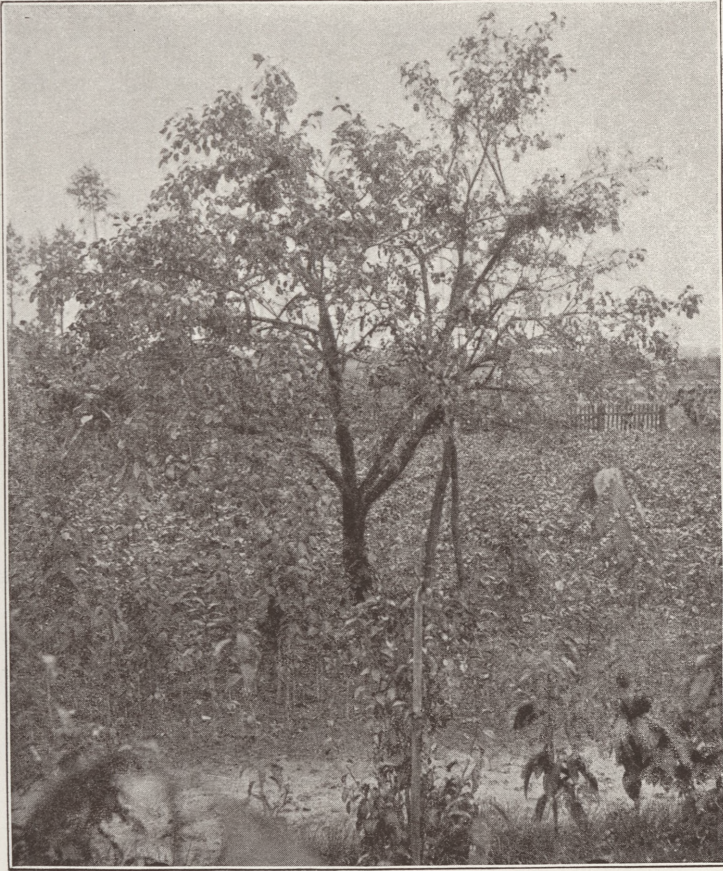


Fig. 19.

J. Brzeziński.



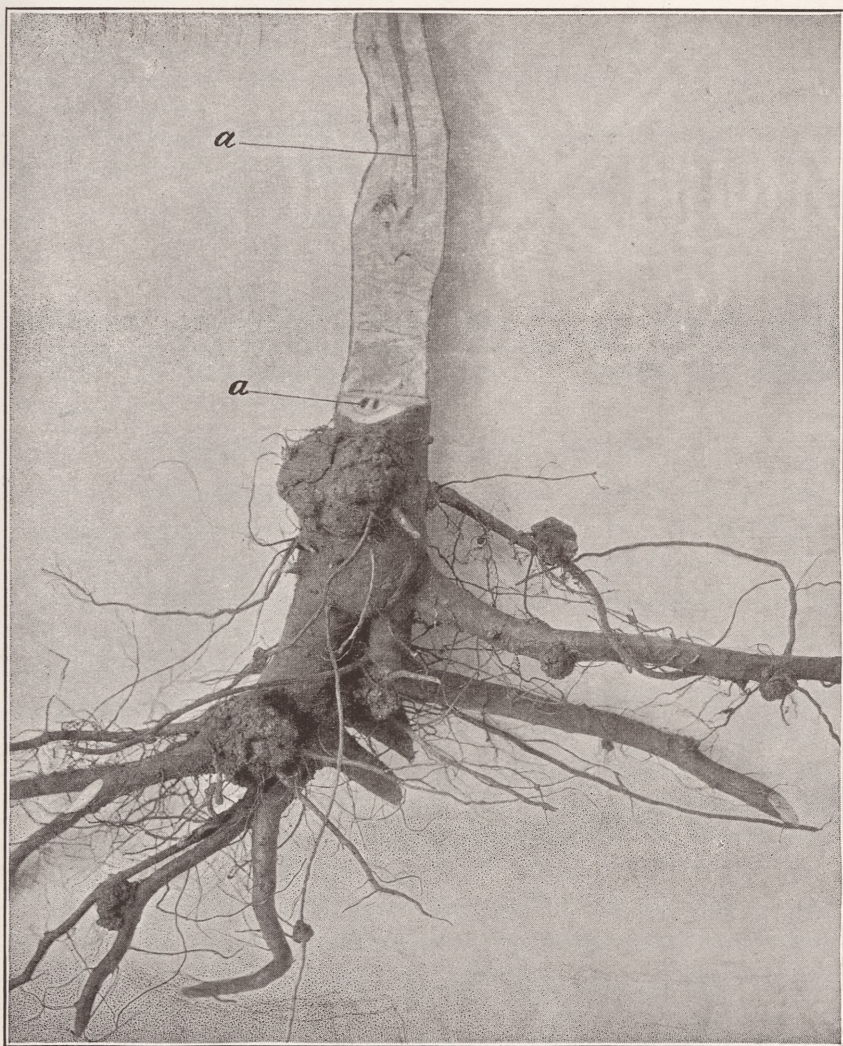
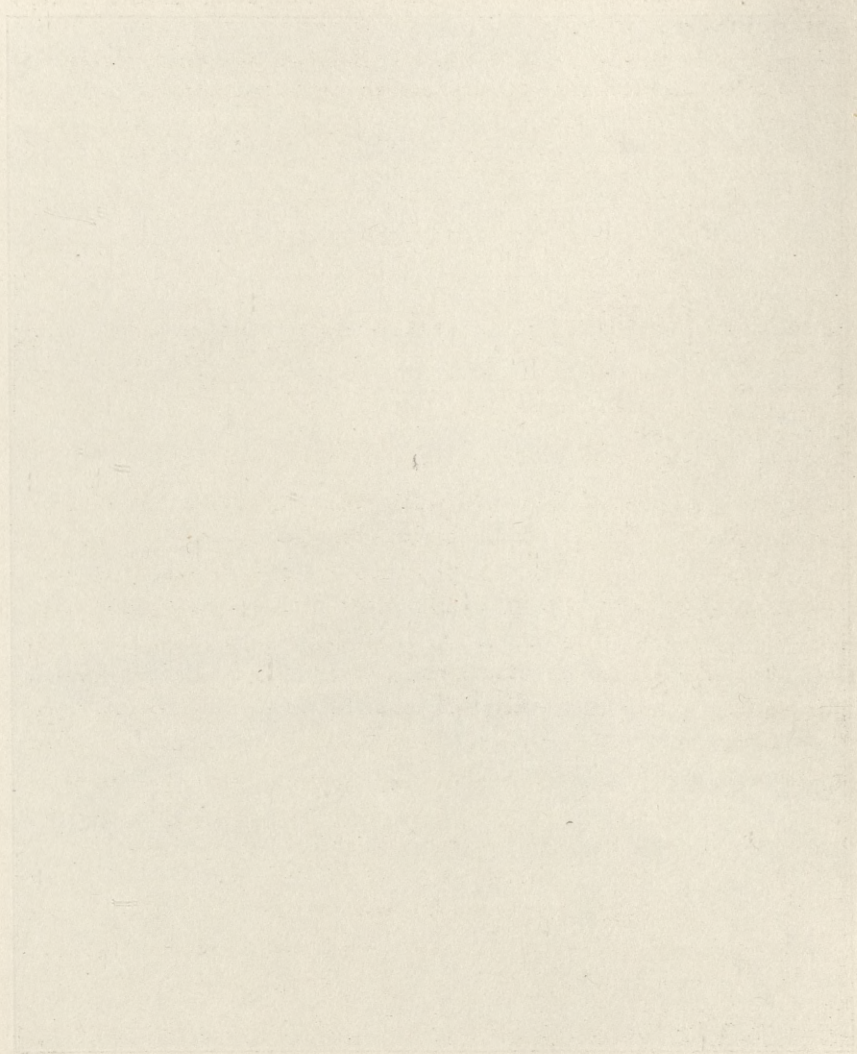


Fig. 21.

J. Brzeziński.



12.01.2012



Fig. 20. Coupe transversale d'une racine de pommier, faite tout près d'une nodosité chancreuse portée par cette racine.

Fig. 21. Nodosités chancreuses sur les racines d'un pommier de trois ans. La partie souterraine est âgée de cinq ans. a, a — bactériose des racines, pénétrant dans le tronc de l'arbre.

Fig. 22. Envahissement de l'écorce du pommier par la bactériose venant de l'intérieur de bois sous forme de raies longitudinales, provoquant la formation des crevasses de l'écorce.

Fig. 23. Coupe longitudinale, montrant la direction de la bactériose dans le bois recouvert de l'écorce crevassée.

12. M. MARIE SMOLUCHOWSKI. O zjawiskach aerodynamicznych i towarzyszących im objawach cieplnych. (*Sur les phénomènes aérodynamiques et les effets thermiques qui les accompagnent*). Mémoire présenté par M. Lad. Natanson m. t.

I. Équations fondamentales de l'Aérodynamique.

§ 1. L'Aérodynamique est restée très en arrière de l'Hydrodynamique qui, depuis les recherches fondamentales de Stokes, de Helmholtz et de Kelvin, a fait des progrès énormes, grâce surtout à l'intérêt qu'elle a éveillé chez les savants anglais (Lord Rayleigh, MM. Lamb, Love, Hicks, Reynolds, Thomson etc.). En dehors de l'Acoustique, il n'y a que fort peu de cas particuliers (transpiration par des tubes Poiseuille, effusion par une ouverture dans une lame mince, disques oscillants de Maxwell et Meyer, résistance des corps projetés etc.) qui aient été traités avec quelque approximation, très vague quelquefois; mais pas une loi générale, pas une solution précise n'a été trouvée jusqu'à présent.

Les problèmes les plus importants sont à peine abordés, surtout en ce qui concerne les applications à l'aérostatique et à la météorologie lesquelles par conséquent sont plongées dans un état d'empirisme chaotique.

C'est qu'on ne peut pas, en général, comme dans les calculs de l'Hydrodynamique, regarder les gaz comme incompressibles et surtout que la compressibilité, déterminée par la loi de Boyle-Charles, dépend d'une nouvelle variable, de la température, dont les variations jouent un rôle aussi considérable que les différences de pression. Par conséquent il faut ajouter, aux équations ordinaires

de l'Hydrodynamique, une équation déduite de la Thermodynamique. La complication du problème consiste en ce qu'il est impossible, en général, de séparer ce côté thermique de la recherche du côté mécanique.

Dans les travaux antérieurs, on admettait un état isothermique ou un état adiabatique du gaz sans justifier ces hypothèses d'une manière suffisante ou bien on se contentait de supposer que la réalité est comprise entre ces limites, souvent très éloignées¹⁾. Ce n'est qu'en 1894 qu'a été précisée la loi thermique sur laquelle ces considérations doivent être basées, et qui, par conséquent, devrait aussi servir de fondement à l'exposé systématique de l'Aérodynamique. Elle a été déduite²⁾ en même temps par Kirchhoff et, sous une forme plus générale, par M. Lad. Natanson à l'aide de considérations cinématiques ainsi que par M. C. Neumann à l'aide de la Thermodynamique. Comme cette loi n'a pas été jusqu'aujourd'hui appliquée à ces questions³⁾, nous nous proposons, dans ce travail, de présenter un essai dans cette direction.

§ 2. Adoptons le procédé de Stokes⁴⁾ qui consiste à déduire les équations de la viscosité sans hypothèse moléculaire, en supposant seulement que les forces du frottement intérieur soient proportionnelles à la vitesse des déformations élémentaires. Pour être exact, il faut y ajouter une correction si la température du gaz n'est pas partout la même; puisque le coefficient de viscosité en dépend. En effet, on ne saurait négliger cette circonstance s'il s'agit, par exemple, des mouvements de l'océan atmosphérique dans les régions supérieures duquel règne sans doute une température extrêmement basse⁵⁾.

Dans ce cas, la substitution des équations bien connues

$$(1) \quad p_{xx} = p + \frac{2\mu}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \text{ etc.}$$

¹⁾ Nous trouvons la théorie isothermique de l'effusion par une petite ouverture dans les ouvrages de Duhamel, Mousson, Wüllner, Lang, la théorie adiabatique [d'après St. Venant et Wantzel] chez: Zeuner, Wilde, Lamb; toutes les deux chez Winkelmann, Chwolson etc.

²⁾ Voir Natanson, Bulletin Intern. de l'Acad. de Cracovie 1902, p. 144.

³⁾ Nous en avons donné une application dans notre étude „Sur l'atmosphère de la terre et des planètes“, voir Physik. Zeitschr. 2, p. 307 (1901).

⁴⁾ D'après Lamb, Hydrodynamics p. 509.

⁵⁾ Smoluchowski „Sur l'atmosphère etc.“ loc. cit.

dans

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \quad (2)$$

donnerait

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} = & \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \quad (3) \\ & + \frac{\partial \mu}{\partial x} \left[\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \text{ etc.} \end{aligned}$$

Mais dans les applications ordinaires, les différences de température n'étant pas grandes, on peut négliger les termes de la seconde ligne, et c'est ce que nous ferons en général.

Dans ces équations, p représente la moyenne arithmétique des trois tensions perpendiculaires:

$$p = \frac{1}{3} (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}). \quad (4)$$

Il n'en résulte pas que p soit identique à la pression qui figure dans l'expression de la loi de Boyle-Charles, ce qui est néanmoins une hypothèse bien probable, admise par presque tous les auteurs récents¹⁾. La même supposition peut être énoncée sous une autre forme: si nous avons considéré la loi Boyle-Charles au lieu de l'équation (4) comme définition de p , nous serions parvenus à l'équation

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta^2 u + \nu \frac{\partial \text{div}}{\partial x}$$

[où le symbole div est une abréviation pour $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$] et nous devrions formuler l'hypothèse de Stokes de la manière suivante: le coefficient de viscosité ν pour les changements de volume est le tiers du coefficient μ pour les changements de forme. C'est ce que nous admettrons, eu égard à la théorie cinétique qui, d'après Maxwell²⁾, fournit le même résultat³⁾; mais nous insistons sur l'import-

¹⁾ Voir Natanson: Bulletin de l'Acad. d. Sc. de Cracovie 1901, p. 95.

²⁾ Scientific Papers II. p. 69 (1890).

³⁾ Voir à ce sujet Natanson, Bulletin Internat. de l'Académie de Cracovie, Année 1901, pp. 108-110.

tance d'une vérification expérimentale de cette relation et nous ne croyons pas avec M. Meyer¹⁾ que ce soit une question indifférente, parce que la viscosité de volume se superpose à la pression et n'en peut pas être distinguée. On verra plus loin des exemples qui démontrent la fausseté de cette opinion (§ 24, § 25); on y pourrait encore ajouter l'extinction des ondes sonores par suite de la viscosité à laquelle la „viscosité de volume“ contribue aussi.

§ 3. La méthode la plus simple pour déduire l'équation thermique fondamentale consiste dans l'application du principe de la conservation de l'énergie à un élément de masse $dm = \rho dx dy dz$, se déplaçant dans le gaz. La variation de l'énergie totale, comprenant les énergies calorifique, cinétique et potentielle (par rapport aux forces extérieures), sera égale au travail effectué par les tensions agissant sur sa surface, augmenté de la quantité de chaleur transmise en vertu de la conductibilité calorifique. Cette relation est exprimée par l'équation:

$$(6) \quad \frac{D}{Dt} \left[\frac{c_v}{A} \theta + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + U \right] dm = \left[\frac{\partial}{\partial x} (up_{xx} + vp_{xy} + wp_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (up_{xy} + vp_{yy} + wp_{zy}) + \frac{\partial}{\partial z} (up_{xz} + vp_{yz} + wp_{zz}) + \kappa \Delta^2 \theta \right] dx dy dz$$

qui par le développement des opérations différentielles et par l'introduction des valeurs (1) et des équations de mouvement se transforme en:

$$(7) \quad \frac{c_v}{A} \rho \frac{D\theta}{Dt} + p \operatorname{div} = \Phi + \kappa \Delta^2 \theta$$

où Φ représente la quantité de chaleur dégagée grâce au frottement intérieur (par seconde et cm^3) ce qu'on appelle, d'après Lord Rayleigh, fonction dissipative:

$$(8) \quad \Phi = -\frac{2}{3} \mu \operatorname{div}^2 + \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

¹⁾ Gastheorie p. 114; Crelle Journal 75 p. 337, (1873). M. Meyer trouve $\nu = 2\mu$ en s'appuyant sur les principes de la théorie cinétique des gaz (d'après Maxwell-Clausius), mais ce résultat est erroné. Voir Boltzmann, Gastheorie I p. 93 (1895).

La déduction peut être rendue plus rigoureuse, en appliquant le théorème en question à une quantité finie de gaz, en transformant l'intégrale de surface en intégrale triple et en la spécialisant pour une quantité élémentaire¹⁾.

§ 4. Il faut remarquer cependant que cette équation ne sera pas rigoureusement exacte, pas plus que les équations (3), puisqu'on ne peut pas supposer que le frottement intérieur et la conductibilité de la chaleur soient des phénomènes tout-à-fait indépendants. On pourrait même douter qu'il y ait en général des phénomènes quelconques, simultanés et coexistants, qui soient rigoureusement indépendants l'un de l'autre. Dans notre cas, M. Natan son²⁾ a démontré, en effet, que la théorie moléculaire cinématique fournit, pour les phénomènes de conductibilité dans un gaz, des expressions différentes suivant que ce gaz est en repos ou en mouvement; mais en général, la différence sera très petite et il sera difficile d'en démontrer l'existence par la voie expérimentale. Nous nous bornerons donc au degré d'exactitude auquel permet d'atteindre l'hypothèse de „l'indépendance“ ou de la „superposition“ des phénomènes de viscosité et de conductibilité. De même, nous omettrons la considération des écarts de la loi de Boyle-Charles, en supposant l'exactitude de la formule

$$\frac{p}{\rho} = R\theta. \quad (9)$$

§ 5. En somme, les équations fondamentales de l'Aérodynamique seront, outre la formule citée (9), les suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \operatorname{div}}{\partial x} + \mu \Delta^2 u \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \operatorname{div}}{\partial y} + \mu \Delta^2 v \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \operatorname{div}}{\partial z} + \mu \Delta^2 w \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

l'équation de continuité:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

¹⁾ Smoluchowski „Sur l'atmosphère etc.“, loc. cit.

²⁾ Bulletin Internat. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie 1902, p. 137.

et l'équation thermique (7) qui peut être écrite, en considérant la relation

$$\frac{c}{A} = \frac{R}{k-1}$$

ainsi que (9) et (10), sous la forme suivante:

$$(12) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} + k p \operatorname{div} = (k-1) [\Phi + \kappa \Delta^2 \theta]$$

où Φ désigne l'expression (8).

On remarque que cette équation jointe à (11) donne la formule ordinaire de la détente adiabatique:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k$$

dans le cas où les termes du second membre sont négligeables en comparaison de ceux du premier. Ceux-ci, en effet, représentent la réaction thermique de la compression ou de la dilatation adiabatique.

Pour définir des problèmes spéciaux, il faut préciser les conditions pour u , v , w , p , θ à la surface et, pour un système variable avec le temps, l'état primitif. Dans la plupart des applications, le gaz est contenu dans des parois solides et dont la température est approximativement constante¹⁾; u , v , w doivent être supposés nuls sur ces parois conformément aux expériences qui ont démontré l'adhésion complète des couches superficielles. Dans le cas d'un mouvement stationnaire, l'équation (11) donne: $\operatorname{div} = 0$ pour ces surfaces, d'où résulte, la direction normale étant prise pour axe des Z et la vitesse normale étant désignée par v_n :

$$\frac{\partial v_n}{\partial \zeta} = 0;$$

c'est-à-dire que la direction des lignes de flux dans les couches superficielles est parallèle à la surface. En désignant la vitesse dans cette direction par V , on trouve que l'équation (12) se réduit à la surface à

$$(13) \quad \Phi = \mu \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^2 = -\kappa \Delta^2 \theta.$$

¹⁾ Des différences de température entre les parties diverses des parois produiraient des courants de convection. Voir: Oberbeck [Wiedem. Ann., 7 p. 271 (1876)], Lorenz [Wied. Ann., 13 p. 582 (1881)].

Près des parois, par conséquent, l'effet thermique de la compression ou de la dilatation disparaît, tandis que la production de chaleur par frottement, balancée par la déperdition en vertu de la conductibilité, y joue le rôle principal.

Dans un gaz pour lequel le coefficient de conductibilité calorifique α serait égal à zéro, un mouvement stationnaire serait impossible, puisque les couches superficielles se réchaufferaient sans cesse. Cela suffit pour démontrer qu'on n'est pas en droit, en général, de traiter la viscosité et la conductibilité comme des facteurs secondaires.

II. Théorèmes généraux sur la symétrie et la similitude dynamiques.

§ 6. Supposons les forces extérieures égales à zéro. Nous remarquerons que les équations de l'Hydrodynamique ordinaire ne seront pas changées par la substitution de $-u, -v, -w, a-p$, à u, v, w, p , pourvu qu'il s'agisse d'un mouvement „calme“¹⁾, c'est-à-dire pourvu qu'on puisse négliger les termes du second ordre par rapport aux vitesses et à leurs dérivées partielles (ce qui permet de

remplacer $\frac{D}{Dt}$ par $\frac{\partial}{\partial t}$). Cela veut dire que les mouvements „calmes“ des fluides sont ce qu'on pourrait appeler „renversables“: en changeant les signes de toutes les différences de pression, on obtient un mouvement analogue, caractérisé par les mêmes lignes de flux et la même vitesse, mais en sens inverse.

Le mouvement inerte, objet de l'Hydrodynamique classique ou „idéale“, qui résulte de l'omission contraire, est aussi renversable s'il est stationnaire, mais sans inversion de pression, puisque celle-ci dépend alors du carré de la vitesse.

Au contraire, les équations complètes qui tiennent compte de la viscosité et de l'inertie et qui correspondent aux mouvements „violents“, ne sont pas renversables.

Notons aussi cette conclusion: si le liquide s'écoule par un tube ou par une ouverture dans une paroi, symétrique par rapport au plan YZ situé dans cette paroi, les lignes de flux seront aussi sy-

¹⁾ Ce terme nous paraît plus juste que „lent“, puisque des mouvements très rapides pourront appartenir aussi à cette catégorie pourvu que la densité soit suffisamment petite.

métriques (fig. 1), lorsque le mouvement est calme. Si la différence de pression augmente à un degré tel que le mouvement devienne „violent“, celui-ci devient asymétrique, ce qui explique la tendance

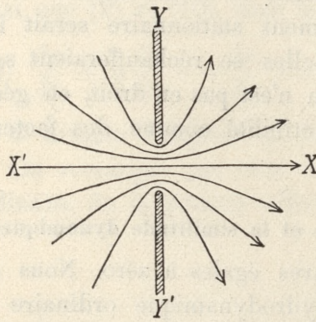


Fig. 1.

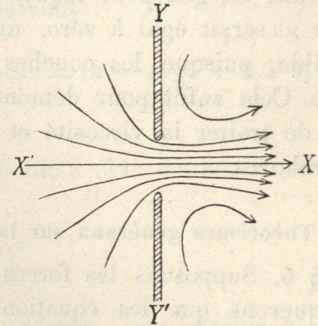


Fig. 2.

des liquides à former des jets et des tourbillons dans de pareils cas (fig. 2).

Il est vrai que Helmholtz¹⁾ ne voyait pas d'autre hypothèse propre à expliquer la formation des jets que celle de l'existence des „surfaces de discontinuité“; je crois cependant que l'asymétrie mentionnée y suffit pleinement; c'est ce que j'ai l'intention de démontrer en détail dans un autre travail, en appuyant mon opinion de considérations théoriques et de données expérimentales.

Dans l'Aérodynamique, la valeur absolue de la pression entre aussi dans le calcul des équations (9) et (12) qui par conséquent ne permettent point de procéder par la méthode de l'inversion dont il a été question plus haut. Ici l'asymétrie est un phénomène très général; mentionnons le „jet“ de gaz, se formant si celui-ci s'écoule sous forte pression²⁾, la formation des tourbillons annulaires de fumée (d'après la méthode de Tait), les mouvements asymétriques et les tourbillons autour d'un corps projeté (Mach). C'est seulement pour des mouvements très calmes, avec des différences de pression très petites, qu'il y aura des cas de symétrie approximative (voir par exemple au § 28).

¹⁾ „Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen“. Berl. Akad. Ber. 1868 p. 215; Ges. Abh. I p. 146.

²⁾ Voir § 9 z.

§ 7. Un principe qui est très fertile en applications diverses, est le principe de la similitude dynamique, employé par exemple par Helmholtz¹⁾ dans l'Hydrodynamique ordinaire.

Lorsqu'on connaît la solution d'un problème donné, on peut se demander si les mêmes équations ne peuvent pas être satisfaites en substituant

$$\begin{array}{l} \text{les valeurs } nx \text{ à } x \text{ (de même pour } y, z) \\ mu \quad n \quad u \quad (\quad n \quad n \quad n \quad v, w) \\ bp \quad n \quad p \\ h\theta \quad n \quad \theta \\ \frac{n}{m} t \quad n \quad t \end{array}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes qui résultent de la substitution de ces variables en (10) et (12), sont les suivantes

$$\text{(d'après 10):} \quad \frac{b}{h} \frac{m^2}{n} \equiv \frac{b}{n} \equiv \frac{m}{n^2}$$

$$\text{(d'après 12):} \quad \frac{mb}{n} \equiv \frac{m^2}{n^2} \equiv \frac{h}{n^2}$$

¹⁾ Wied. Annalen, VII p. 375 (1879). Après avoir achevé la présente étude j'ai remarqué que Helmholtz, dans un autre travail (Berl. Akad. Ber. 1873, p. 501; Ges. Abhandlgen. I p. 158), avait étendu ses recherches pour y comprendre l'Aérodynamique et les applications à la navigation aérienne. Mais le raisonnement dont il se sert donne lieu à quelques objections fondamentales, qui rendent plus que douteuses ses conclusions définitives. En dehors d'une erreur numérique

[le rapport des coefficients de viscosité $\frac{\mu}{\rho}$ pour l'air et pour l'eau n'est pas 0.8082 mais 8.082] qui change complètement les résultats quantitatifs, nous mentionnons trois points importants: 1) l'omission complète de l'influence de la température dans les équations fondamentales, 2) la compressibilité de l'air est négligée dans

le cas d'un ballon énorme, se mouvant avec une vitesse de $9 \frac{m}{sec}$, 3) la viscosité est négligée dans le même cas et dans le cas analogue d'un bateau dans l'eau. L'importance du dernier point est mise en évidence par le résultat bien connu qu'une sphère animée d'une vitesse constante ne subirait point de résistance dans un liquide sans viscosité. Je crois que l'on ne peut pas étendre la notion de „similitude“ à des cas aussi différents que ces deux-là. Ce terme sera employé, dans ce qui suit, d'une façon différente, au sens strict du terme. Une partie considérable de la résistance d'un bateau provient de la formation des ondes qui dépendent évidemment de la gravité; sous ce rapport il n'y a aucune analogie avec un ballon.

qui se réduisent à deux identités indépendantes¹⁾ entre quatre variables:

$$(14) \quad h \equiv m^2; \quad b \equiv \frac{m}{n}.$$

Voici des exemples particuliers qui mettront en évidence l'importance pratique de cette similitude dynamique:

§ 8. Posons $n = 1$, donc: $b = \sqrt{h} = m$. Dans le même vase, il y aura un mouvement tout-à-fait analogue au mouvement primaire, lorsque les pressions seront élevées en proportion de la racine de la température; les vitesses alors seront élevées dans la même proportion;

α) Ainsi la vitesse du son, qui est donnée par $c = \sqrt{kR\theta}$, augmente en raison de la racine de la température, indépendamment de la pression. Mais cette formule n'est exacte que pour des amplitudes très petites et comporte l'omission des effets de viscosité et de conductibilité; si l'on n'adopte point ces hypothèses simplificatrices, on aura une formule compliquée dans laquelle entrera aussi la pression. Notre conclusion restera pourtant exacte, pourvu qu'on la rapporte à des sons dont le nombre de vibrations est proportionnel à $\sqrt{\theta}$ et pourvu qu'on mesure la vitesse pour des pressions correspondantes [proportionnelles à $\theta^{\frac{2\alpha+1}{2}}$ dans le cas général]. Elle s'applique aussi à la propagation dans des tuyaux étroits.

β) La résistance (dimension x^2p) qu'éprouve un corps se mouvant avec une petite vitesse, est à peu près proportionnelle à celle-ci. Ceci est exact pour des vitesses quelconques, si la pression s'élève en raison de la vitesse et la température dans une proportion quadratique.

γ) Applications semblables à l'écoulement des gaz.

§ 9. Posons $h = 1$; par conséquent $m = 1$, $b = \frac{1}{n}$: la température reste invariable; la vitesse sera aussi la même dans deux vaisseaux semblables dont les dimensions sont en raison inverse des pressions du gaz.

¹⁾ Si l'on tient compte de la variabilité des coefficients μ et α , en les supposant proportionnels à θ^α , on doit remplacer l'équation (14, 2) par:

$$b \equiv \frac{m^{2\alpha+1}}{n}.$$

α) En effet, il est facile de voir que la formule approximative de Kirchhoff pour la vitesse du son dans des tuyaux étroits (rayon r):

$$v = \sqrt{\frac{k p}{\rho}} \left\{ 1 - \frac{\gamma}{2 r \sqrt{\pi N}} \right\}; \quad \text{où } \gamma = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} + \sqrt{\frac{\alpha}{c \rho}} \left\{ \sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right\};$$

satisfait à cette proposition (en considérant que N doit être changé en raison inverse des dimensions).

β) La formule de Poiseuille-Meyer:

$$M = \frac{p_2 - p_1}{l} \frac{\pi R^4}{8 \mu} \quad (15)$$

n'est applicable que dans le cas du mouvement „calme“ dans un tube long et étroit. Notre théorème démontre que son application à un tube de dimensions n fois plus grandes n'est justifiée que lorsque les pressions sont diminuées en raison inverse¹). Dans ce cas, la vitesse sera la même, le volume qui s'écoule sera augmenté proportionnellement à n^2 . Mais ce résultat ne dépend pas de la validité de la formule (15) et n'est même pas limité au flux stationnaire, ni aux mouvements „calmes“; il peut être appliqué par exemple à l'écoulement d'un gaz d'un vase clos par une ouverture.

γ) La résistance de corps, de grandeur différente mais semblables, projetés avec une certaine vitesse dans un gaz de pression inverse à leurs dimensions, sera proportionnelle à celles-ci. Un mouvement semblable très rapide cause des sons sibillants (Reibungstöne); la théorie est restée impuissante jusqu'à présent à expliquer ce phénomène. Néanmoins, nous pouvons prédire que le nombre des vibrations sera en proportion inverse des dimensions des corps, si la pression est réduite dans la même proportion (puisque N a la dimension de $\frac{u}{x}$). Une loi semblable a été établie en effet par M. Strouhal²) dans ses recherches sur les sons qui accompagnent

¹) Tandis que dans l'Hydrodynamique il faut, d'après Helmholtz, une diminution de pression en raison de $\frac{1}{n^2}$, puisqu'il n'y existe qu'un genre de similitude:

$$b \equiv m^2 \equiv \frac{1}{n^2}.$$

²) Wiedem. Ann., 5, p. 216 (1878).

le mouvement rapide d'un cylindre (tube de verre, fil métallique etc.) dans l'air; la loi empirique énoncée par ce savant prétend que le nombre des vibrations dans l'air à la pression atmosphérique est proportionnel à la vitesse divisée par le rayon du cylindre:

$$N = c \frac{v}{r}.$$

Nous en concluons par notre méthode que cette formule entraîne la conclusion que la hauteur du son est indépendante de la pression et de la température. M. Strouhal, au contraire, prétend qu'un abaissement de la température produit une élévation du son, mais l'examen des nombres correspondant aux températures de 9.5°C et de 37°C ne paraît pas devoir être favorable à cette opinion. La formule citée n'est d'ailleurs qu'une relation approximative.

δ) Saint Venant et Wantzel¹⁾ ont observé que la vitesse d'un gaz qui s'écoule par un orifice ne peut être augmentée par l'élévation de la pression que jusqu'à une certaine limite, qui ne dépend pas de la différence des pressions, intérieure p_2 et extérieure p_1 , mais de leur rapport $\frac{p_2}{p_1}$. Ceci posé, imaginons deux expériences exécutées avec le même orifice, mais avec des pressions différentes, où cette valeur critique a été atteinte:

$$(1) \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{P_2}{P_1} \quad (2).$$

Le mouvement caractérisé par p_2 et p_1 sera semblable au cas (3) où les pressions sont P_2 , P_1 et où les dimensions de l'orifice ont été diminuées en raison de $\frac{p_2}{P_2} = \frac{p_1}{P_1}$. Puisque la vitesse ne change pas, la comparaison avec la deuxième expérience nous apprend que la vitesse sera indépendante des dimensions de l'orifice²⁾. Cette conclusion, qui est la conséquence de l'existence d'un rapport critique $\frac{p_2}{p_1} = 1.89$, s'accorde avec les résultats des expériences.

¹⁾ Journal de l'Ecole polytechnique XVI (1839). Comptes Rendus 17 (1843). Ces observations ont été confirmées par Zeuner, Hirn, Wilde, Salcher et Whitehead etc.

²⁾ Égale approximativement à la vitesse du son (voir Lamb, Hydrodynamics p. 28).

Mach et Salcher¹⁾ et Emden²⁾ ont remarqué la formation de cannelures dans le jet d'un gaz qui s'écoule, aussitôt que le rapport des pressions dépasse la valeur critique. Emden explique ce phénomène par des changements de densité correspondant à un train d'ondes sonores fixes. La mesure des distances des cannelures lui a suggéré la formule empirique

$$\lambda = 0.88 d \sqrt{\frac{p_2}{p_1} - 1.9}$$

où d est le diamètre de l'orifice. Cette recherche aussi aurait pu être facilitée par des considérations pareilles. On sait que dans un autre cas semblable, où les valeurs correspondantes sont $D, p_1 \frac{d}{D}, p_2 \frac{d}{D}$, la longueur λ deviendra $\lambda \frac{D}{d}$. On ne saurait déterminer λ a priori dans un troisième cas, où les valeurs D, P_1, P_2 satisferaient à la relation

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{p_1 \frac{d}{D}}{p_2 \frac{d}{D}} = \frac{p_1}{p_2}$$

mais si l'on a établi le fait que λ ne dépend pas des valeurs absolues des pressions, mais seulement de leur rapport, on sait que cette grandeur conserve la valeur $\lambda \frac{D}{d}$. C'est-à-dire qu'on aura établi la proportionnalité de λ avec les dimensions de l'orifice en général: $\lambda = d \text{ fc. } \left(\frac{p_1}{p_2}\right)$, sans avoir eu besoin d'entreprendre des expériences spéciales à ce sujet.

ε) L'exemple suivant servira aussi à démontrer l'utilité de la méthode en question:

Kohlrausch³⁾ a fait des recherches sur les sons qui naissent dans un gaz passant par une fente étroite (Spaltentöne). Les mesures s'étendaient à la dépendance entre le nombre des vibrations N , la largeur de la fente s et la pression p_1 du gaz dans le résér-

¹⁾ Sitzungsber. d. Wien. Akad., 98 (1889), Wiedem. Ann., 42 p. 144 (1890).

²⁾ Wiedem. Ann., 69, p. 264, 426, 453 (1899).

³⁾ Wiedem. Ann., 13, p. 545 (1881).

voir. Comme celui-ci s'écoulait dans l'atmosphère libre, l'influence de la pression extérieure p_2 ne pouvait pas s'y manifester. Mais nous pouvons déterminer a priori la manière dont elle se manifestera. Ce que nous cherchons, c'est la formule générale $N = f(s, p_1, p_2)$, dont le résultat empirique de Kohlrausch: $N = f(s, p_1, p_0) = \varphi(s, p_1)$, avec $p_2 =$ pression atmosphérique constante, égale à p_0 , est un cas particulier. Profitons de la similitude du mouvement s, p_1, p_2 avec celui où ces variables ont les valeurs

$$s \frac{p_2}{p_0}, p_1 \frac{p_0}{p_2}, p_0,$$

et où nous aurons

$$N_0 = \varphi \left(s \frac{p_2}{p_0}, p_1 \frac{p_0}{p_2} \right).$$

Les nombres de vibrations dans ces deux cas seront en raison inverse du temps [comme au § 8, α, γ et au § 9, α] c'est-à-dire: $N_0 : N = p_0 : p_2$, et, par conséquent, on aura le résultat cherché:

$$N = \frac{p_2}{p_0} \varphi \left(s \frac{p_2}{p_0}, p_1 \frac{p_0}{p_2} \right) = f(s, p_1, p_2).$$

On pourrait trouver d'une manière analogue (voir § 8) l'effet d'un changement de température. Il est à regretter qu'on ne puisse pas utiliser de cette façon les mesures de Kohlrausch parce qu'elles ne contiennent pas des valeurs explicites de p_1 , mais seulement les vitesses moyennes U qui en dépendent, et parce que les résultats, condensés dans la formule approximative $N = A(U - B)$ et dans un tableau des valeurs de A, B , en fonction de la variable s , ne fournissent pas la loi finale sous une forme explicite.

§ 10. Le troisième cas spécial $b = 1, m = 1$ de la similitude, ainsi que les modifications produites par la dépendance de la viscosité de la température, présente moins d'intérêt.

Notons encore qu'il n'y a qu'un genre de similitude lorsque la pesanteur intervient comme force extérieure:

$$m \equiv \sqrt{n}; \quad h \equiv n; \quad b \equiv \frac{1}{\sqrt{n}};$$

c'est ce qui peut être appliqué aux courants de convection qui naissent par suite de différences de température.

§ 11. La similitude dynamique s'applique-t-elle aussi aux mou-

vements de différents gaz? Pour trancher cette question, on changera dans les équations (10, 12) les coefficients R , k , μ , α . Évidemment, par suite de (12), toute similitude est exclue pour des gaz pour lesquels les valeurs de k sont différentes.

Supposons donc k égal, et posons αR au lieu de R

$$\begin{array}{ccc} \beta \mu & \text{,} & \mu \\ \gamma \alpha & \text{,} & \alpha \end{array}$$

On trouve les conditions suivantes:

$$\text{(d'après 10):} \quad \frac{b}{a h} \frac{m^2}{n} \equiv \frac{b}{n} \equiv \beta \frac{m}{n^2}$$

$$\text{(d'après 12):} \quad \frac{m b}{n} \equiv \beta \frac{m^2}{n^2} \equiv \gamma \frac{h}{n^2}$$

qui se réduisent à

$$\frac{\alpha \beta}{\gamma} \equiv 1; \quad \alpha h \equiv m^2; \quad n b \equiv m \beta. \quad (16)$$

Comme R est proportionnel à l'inverse du poids moléculaire M , il résulte de la première de ces identités que la similitude n'est possible que pour des gaz pour lesquels la valeur de la constante $\frac{\mu}{\alpha M}$ est la même.

Le tableau suivant des coefficients $\frac{\alpha}{\mu}$ (rapportés à l'air) multipliés par M , prouve que pour plusieurs gaz cette condition est satisfaite avec une approximation remarquable:

$k=1.4$	H ₂	O ₂	N ₂	CO	NO
$\frac{\alpha M}{\mu}$	$\frac{6.7.2}{0.50} = 27$	$\frac{1.0.32}{1.1} = 29$	$\frac{1.0.28}{0.97} = 29$	$\frac{0.98.28}{0.97} = 28$	$\frac{0.95.30}{0.98} = 29$
$k=1.3$	CO ₂	N ₂ O	CH ₄	NH ₃	
$\frac{\alpha M}{\mu}$	$\frac{0.64.44}{0.82} = 34$	$\frac{0.67.44}{0.82} = 36$	$\frac{1.37.16}{0.62} = 35$	$\frac{0.92.17}{0.57} = 27$	

Voici quelques applications des considérations précédentes:

§ 12. Posons $h = 1$, $b = 1$; donc $m^2 = \alpha$, $n = m\beta = \beta\sqrt{\alpha}$. Pour une certaine température et une certaine distribution de pression, il y a des mouvements semblables dans deux vases semblables, dont les dimensions sont proportionnelles aux coefficients $\frac{\mu}{\sqrt{M}}$ des gaz renfermés; les vitesses seront alors proportionnelles à $\frac{1}{\sqrt{M}}$.

α) En rapprochant ce théorème de la loi (approximative) de Graham et Bunsen, qui admet la proportionnalité du volume des différents gaz passant à travers une ouverture dans une lame mince, à $\frac{1}{\sqrt{M}}$, on en déduit le résultat suivant: la quantité de gaz s'écoulant par des ouvertures différentes — à différence constante de pression — est proportionnelle à la surface de l'ouverture.

β) Supposons un conduit long et étroit qui serait traversé par des volumes de gaz différents, proportionnels à leur coefficient de fluidité $\frac{1}{\mu}$. Notre théorème prouve que le volume du gaz, passant par de semblables conduits, sera proportionnel au cube de leurs dimensions linéaires. Ce résultat est plus général, en quelque sorte, que la formule de Poiseuille-Meyer qui s'applique dans le cas particulier d'un tube régulier circulaire.

γ) Un raisonnement analogue concernant des corps projetés, montre que la pression de résistance sera proportionnelle à leurs dimensions linéaires, si l'on suppose que, pour des gaz différents, elle change en raison du produit de la viscosité et de la vitesse; et qu'elle sera proportionnelle aux dimensions superficielles, si le produit de la densité et du carré de la vitesse en définit la valeur.

Citons un autre exemple:

δ) Joule et Kelvin¹⁾ ont mesuré l'élévation de température $\Delta\Theta$ que subissent des corps (thermomètres, fils formant des couples thermoélectriques) qui traversent l'air avec une certaine vitesse. Les expériences des savants anglais démontrent la proportionnalité très approximative de $\Delta\Theta$ au carré de la vitesse [comprise entre

¹⁾ Kelvin. Mathem. Phys. Papers, I p. 400, 445.

$30 \frac{m}{sec}$ et $100 \frac{m}{sec}$] et son indépendance de la forme et de la grandeur du corps [à peu près $1^\circ C$ par $55 \frac{m}{sec}$]. Imaginons 1) un corps donné dont la vitesse serait v dans l'air 2) un deuxième, pareil, dans un autre gaz 3) un troisième dans le dernier gaz, à dimensions augmentées en raison de $\frac{\mu}{\mu_0} \sqrt{\frac{M_0}{M}}$, et doué d'une vitesse $v \sqrt{\frac{M_0}{M}}$; en appliquant notre théorème à la comparaison des corps 1—3, le résultat empirique de Kelvin à la comparaison des corps 3—2, nous pouvons dire que: dans des gaz différents (mais pour lesquels k a la même valeur) un corps animé de la vitesse v s'échauffe proportionnellement à la quantité $\Delta\theta = a M v^2$, c'est-à-dire en raison du poids spécifique du gaz et du carré de la vitesse. Il résulte en outre, de l'application des théorèmes du § 8 et du § 9, le résultat inattendu que la constante a est indépendante de la pression du gaz et de sa température. Si l'extension de cette formule à des vitesses supérieures à la vitesse du son était permise, on pourrait évaluer, par exemple, l'échauffement d'un météore traversant l'air à une vitesse de 2.8 km. à $2500^\circ C$.

Il faut noter que la formule empirique ne s'applique plus aux petites vitesses (moindres que $30 \frac{m}{sec}$), mais les mesures n'étaient pas suffisamment exactes pour mettre en évidence les écarts de la loi en question.

§ 13. Supposons: $h = 1$, $n = 1$; donc: $m = \sqrt{\alpha}$, $b = \beta \sqrt{\alpha}$:

Même vase; même température; les mouvements de différents gaz seront semblables, pourvu que les pressions soient en raison de $\frac{\mu}{\mu_0}$; alors les vitesses (et les volumes) seront proportionnels à $\frac{1}{\sqrt{M}}$.

α) En effet, cette proposition s'accorde avec la formule ordinaire pour la vitesse du son, et aussi avec la formule de Kirchhoff [§ 9 α] pour des tuyaux. De plus, on voit facilement que la formule de M. Strouhal (§ 9 γ) pour la hauteur du son produit par le mouvement d'un corps cylindrique, entraîne l'identité de la constante c pour les divers gaz, c'est-à-dire que le son est indépendant de la qualité du gaz. Nous ne connaissons pas encore d'expériences à ce sujet. De même que M. Emden, ayant établi la formule (§ 9 δ) pour

l'air, aurait pu en conclure a priori que la largeur des cannelures λ est indépendante de la nature du gaz, ce qu'ont démontré ses expériences, de même nous pouvons prédire (d'après le § 8) qu'on la trouvera indépendante de la température. De semblables considérations peuvent souvent faciliter les recherches expérimentales et étendre la portée des résultats obtenus.

β) Le rapport du volume d'un gaz qui s'écoule à l'active différence de pression sera, pour des gaz différents, proportionnel à leur fluidité:

$$\frac{V}{p_1 - p_2} \sim \frac{1}{\mu},$$

si l'on emploie des pressions correspondantes. En vertu de cette conclusion, on peut appliquer un procédé plus exact aux mesures de la viscosité. La formule de Poiseuille-Meyer

$$\frac{V}{p_1 - p_2} = \frac{R^4 \pi l}{8 L \mu}$$

ne tient compte ni de l'inertie du gaz, ni de l'effet visqueux de la variabilité de la vitesse le long du tube, ni des différences de température (§ 27). On peut trouver pourtant la valeur exacte de la viscosité relative, en employant des pressions non pas quelcon-

ques, mais proportionnelles à $\frac{\mu}{\sqrt{M}}$ pour les divers gaz. Il est remarquable que ce résultat est indépendant de la forme du tube ou de l'orifice, et qu'il subsiste même pour l'écoulement par un trou dans une lame mince.

γ) La méthode des „disques oscillants“ de Maxwell-Meyer qui n'est pourtant pas à l'abri des objections, à cause de l'inexactitude de la théorie mathématique sur laquelle elle repose, peut aussi servir à des mesures exactes de la viscosité; seulement, il faut y employer des pressions correspondantes, et la suspension du disque doit varier de sorte qu'on puisse produire des durées d'oscillation proportionnelles à \sqrt{M} .

Évidemment, tout ce qui a été dit s'applique rigoureusement, sous la condition seulement que k et $\frac{\mu}{\sqrt{M}}$ soient égaux, aux gaz com-

parés, et même lorsqu'il y a de petites différences, ces mesures seront plus exactes que d'après les méthodes ordinaires¹⁾.

III. Phénomènes thermiques d'écoulement.

§ 14. Dans ce chapitre, nous nous proposons d'appliquer nos équations à l'examen des phénomènes thermiques qui se manifestent dans un gaz s'écoulant par des tubes ou des orifices, phénomènes qui ont fait le sujet des célèbres recherches de Joule et de Kelvin²⁾. Il est vrai qu'il n'y a pas de doute possible quant à l'interprétation générale de ces expériences, lesquelles sont classiques en Thermodynamique; cependant, leur explication détaillée offre des difficultés qui ne peuvent être résolues que par une théorie aérodynamique détaillée. Ainsi l'explication usuelle du phénomène Joule-Kelvin ne tient pas compte de la variabilité de la vitesse et peut être de la température dans les différentes couches du gaz; on comprend aisément qu'il y ait un abaissement de température dans un gaz qui se dilate, mais la manière dont il se répartira sur le gaz qui s'écoule et sur celui qui reste dans le réservoir, n'est pas évidente.

Nous transformerons l'équation (12) en la multipliant par un élément de volume et en l'intégrant sur tout l'espace en question. Remarquons, en outre, que

$$\iiint p \operatorname{div} d\omega = \iint p (ul + vm + wn) dS - \iiint \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) d\omega \quad (17)$$

introduisons les valeurs de $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$ données par (10) et transformons les intégrales triples, exceptée celle qui renferme $\frac{\partial}{\partial t}$ en intégrales doubles. En désignant la vitesse normale à la surface par v_n , la vitesse totale par $V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, nous obtenons l'équation

¹⁾ On pourrait en profiter pour élucider la cause des divergences, problématique jusqu'à présent, qui existent entre les résultats donnés par les deux méthodes mentionnées. [Schumann, Wied. Ann., 23 p. 353 (1884)].

²⁾ Kelvin, Mathem. Physic. Papers, I p. 333; Joule, Mechan. Wärmeäquivalent, Braunschweig 1872.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \iiint \left[\frac{p}{k-1} + \rho \frac{V^2}{2} \right] d\omega + \\
 & + \iint \left[\left(\frac{k}{k-1} p + \rho \frac{V^2}{2} \right) v_n - \frac{\mu}{3} v_n \operatorname{div} - \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] dS + \\
 & + \mu \iiint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \dots + \frac{1}{3} (\operatorname{div})^2 \right] d\omega = \\
 (18) \quad & = \iiint \Phi d\omega + \kappa \iint \frac{\partial \theta}{\partial n} dS.
 \end{aligned}$$

L'intégrale triple de gauche multipliée par μ , annule les termes correspondants de Φ , les autres peuvent être transformés par intégration partielle, d'après la formule

$$(19) \quad \iiint \left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\omega = \iint w \left(m \frac{\partial v}{\partial z} - n \frac{\partial v}{\partial y} \right) dS,$$

en une intégrale, désignée par l'expression symbolique

$$\begin{aligned}
 & \iint \left[\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) (ul + vm + wn) - v_n \operatorname{div} \right] dS = \\
 & = \iint \left[\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) v_n - v_n \operatorname{div} \right] dS.
 \end{aligned}$$

Le résultat final est l'équation:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \iiint \left[\frac{p}{k-1} + \rho \frac{V^2}{2} \right] d\omega + \iint \left\{ \left[\frac{k}{k-1} p + \rho \frac{V^2}{2} \right] v_n + \right. \\
 & \left. + \frac{2}{3} \mu v_n \operatorname{div} - \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \mu \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) v_n \right\} dS = \\
 (20) \quad & = \kappa \iint \frac{\partial \theta}{\partial n} dS.
 \end{aligned}$$

§ 15. Lorsque le courant du gaz est stationnaire, le premier terme de cette équation disparaît. Le reste, l'intégrale double, peut être appliquée à la surface d'un tube de flux, de longueur s , fermé par deux sections transversales q_1 et q_2 . Eu égard à l'équation de continuité qui prend la forme $\rho v q = \text{const.}$, on aura:

$$\begin{aligned}
 (21) \quad & \frac{kR}{k-1} (\theta_1 - \theta_2) + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} + \frac{2}{3} \mu \left[\frac{\operatorname{div}_1}{q_1} - \frac{\operatorname{div}_2}{q_2} \right] - \\
 & - \mu \left[\frac{1}{q_1} \frac{\partial V_1}{\partial s} - \frac{1}{q_2} \frac{\partial V_2}{\partial s} \right] = \frac{1}{\rho V q} \iint \left[\mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{V^2}{2} \right) + k \frac{\partial \theta}{\partial n} \right] dS.
 \end{aligned}$$

Donc, la différence de température en deux points de la même ligne de flux est en relation avec les valeurs de $\frac{\partial V}{\partial s}$ et div. et du carré de la vitesse, en ces deux points, et aussi avec la longueur du chemin entre les deux points, qui définit la valeur de la dernière intégrale. Dans les endroits où le gaz se meut avec une lenteur et une uniformité suffisantes, comme par exemple à l'intérieur de deux réservoirs qui communiquent par un tube étroit, on peut négliger ces premiers termes, mais on ne peut pas faire de même avec l'intégrale qui dépendra de la distribution des vitesses et de la température entre ces deux points et qui, en général, ne sera pas négligeable. Cela serait vrai, par exemple, si l'équation

$$\nabla^2 \left[\mu \frac{V^2}{2} + \alpha \theta \right] = 0;$$

avait lieu, mais évidemment, ce serait là un cas exceptionnel.

A) Donc, on ne peut pas prétendre que la température d'un gaz, s'écoulant d'une manière stationnaire, reste invariable; ses différentes couches auront des températures différentes.

§ 16. Le théorème de constance de la température ne s'applique que dans un cas particulier, à la température moyenne. Ce que nous appelons température moyenne d'un profil, c'est la température qui s'établirait dans le gaz passant par une surface orthogonale aux lignes de flux, si toutes ses couches étaient mélangées d'une façon complète, c'est-à-dire:

$$\theta = \frac{\sum \theta \rho V q}{\sum \rho V q} \quad (22)$$

où la sommation s'étend sur tous les éléments de la surface orthogonale. Supposons, pour fixer les idées, que le point I soit situé à l'intérieur du réservoir I , où les conditions de lenteur et d'uniformité du mouvement sont satisfaites. Envisageons maintenant les équations (21) ou (20) et notons le fait que les parois du réservoir et du conduit sont formées par des tubes de flux adhérents, c'est-à-dire qu'on peut développer V — en désignant la distance d'un point des parois par δn — de la façon suivante:

$$V = \delta n \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_0, \text{ par conséquent: } \frac{\delta}{\delta n} (V^2) = 2 \delta n \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_0^2$$

ce qui disparaît à la surface (pour $\delta n = 0$) de même que V . Donc on aura, pour la température moyenne, l'équation

$$(23) \quad \frac{kR}{k-1} [\theta_0 - \theta] = \frac{\frac{1}{2} \Sigma \rho q V^2 + \mu \Sigma \left(\frac{2}{3} \operatorname{div} + 2 \frac{\partial V}{\partial s} \right) q V + \int \kappa \frac{\partial \theta}{\partial n} dS}{\Sigma \rho q V}$$

L'intégrale $\int \kappa \frac{\partial \theta}{\partial n} dS$ peut être divisée en trois parties qui correspondent aux parois du vaisseau et aux deux sections transversales. La première partie sera nulle, si l'on suppose que les parois sont des isolateurs idéaux de la chaleur; de même les deux autres, si la section passe par des endroits où il y a uniformité suffisante.

B) Donc, dans des endroits où le courant stationnaire est assez lent et uniforme, la température moyenne du gaz qui s'écoule est égale à celle qui règne dans le réservoir primaire. C'est ce qu'ont démontré les expériences de Joule et de Kelvin sur le gaz qui présente les moindres écarts de la loi Boyle-Charles, l'hydrogène, et où le bouchon de ouate remplace un système de tubes d'efflux. Il serait intéressant, d'autre part, de vérifier notre résultat précédent, concernant les différences de température dans les couches diverses d'un gaz quittant un tube étroit, résultat qui distingue notre théorie du raisonnement usuel. Cette différence provient de ce que le travail dans un gaz visqueux n'est pas donné par $\int (ul + vm + wn) p dS$, mais par $\int (up_{zn} + vp_{ym} + wp_{zn}) dS$. L'identité de ces deux expressions peut être démontrée facilement, pour le mouvement stationnaire, à l'aide de transformations semblables à celles du § 14, mais seulement pour toute la quantité du gaz comprise entre les parois et les deux sections dans les réservoirs, et non pas pour des tubes de flux considérés isolément. Evidemment, ces remarques ne concernent pas du tout les conclusions qu'on tire du phénomène de Joule et Kelvin, concernant les écarts de la loi Boyle-Charles.

§ 17. Envisageons encore l'équation (21) et considérons que, pour les tubes de flux adhérents aux parois: V , div et $\frac{\partial V}{\partial s}$ sont nuls. Puisque la température dans ces couches doit rester finie, ceci entraîne la conclusion que l'intégrale de droite disparaît. Transformons cette intégrale en

$$\iiint \left[\mu \nabla^2 \left(\frac{V^2}{2} \right) + \alpha \Delta^2 \theta \right] d\omega,$$

et considérons que V peut être développé dans la proximité des parois (la normale étant prise pour direction ζ) de la manière suivante:

$$V = \zeta \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_0 + \frac{\zeta^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial n^2} \right)_0 + \zeta \eta \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial n} \right)_0 + \dots$$

ce qui donne la valeur limite de

$$\nabla^2 \left(\frac{V^2}{2} \right) = \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^2;$$

nous retrouvons ainsi la condition

$$\mu \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^2 = -\alpha \Delta^2 \theta$$

qui a été établie auparavant comme équation (13). D'ailleurs, la température des couches superficielles sera égale, naturellement, à celle des parois.

§ 18. Considérons encore un détail: la manière dont se manifeste l'effet de l'énergie cinétique, en supposant, pour l'accroître et pour simplifier le calcul, que la vitesse soit si grande qu'on puisse négliger les termes du premier degré en comparaison des carrés des vitesses. Nous aurons pour chaque tube de flux

$$\frac{kR}{k-1} (\theta_0 - \theta) = \frac{V^2}{2}. \quad (24)$$

Un gaz idéal, sans viscosité, satisfait à l'équation¹⁾

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{const.}, \quad (25)$$

où l'intégrale s'étend sur la longueur s de la ligne de flux allant du réservoir jusqu'au point considéré. La différentiation des deux équations (24) et (25) donne:

$$-\frac{k}{k-1} R \frac{d\theta}{ds} = V \frac{dV}{ds} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds}$$

¹⁾ Voir p. ex. Lamb, p. 23.

dont l'intégration, en combinaison avec la loi B. Ch., mène à la formule ordinaire de détente adiabatique:

$$(26) \quad \frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{k-1}.$$

On est habitué à considérer cette formule comme évidente a priori, dans de pareils cas. Mais cette hypothèse est tout à fait fautive dans le cas des gaz réels visqueux. C'est ce que l'on démontre en remarquant que la formule (26) exigerait un refroidissement d'un courant stationnaire, correspondant à la chute de pression de p_1 à p_2 :

$$\theta_2 = \theta_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}},$$

tandis que nous avons vu au § 16 que la température moyenne reste invariable.

C) L'équation (24), au contraire, reste approximativement applicable dans ce cas, pour un gaz visqueux, puisque l'abaissement de température ne correspond pas à l'expansion du gaz, mais au gain de son énergie cinétique. La température s'abaisse le plus où la vitesse est maxima, p. ex. à l'orifice d'une bombe à gaz comprimé, et c'est cet abaissement¹⁾ qui a été utilisé par divers observateurs pour la liquéfaction des gaz, d'après la méthode dynamique. A mesure que le gaz perd sa vitesse, il regagne aussi sa température première par suite de la chaleur de friction. Donc, l'emploi direct de l'équation (26) n'est justifié que dans le cas d'une expansion infiniment lente; autrement il faut employer l'équation complète (21), dans le cas des grandes vitesses l'équation approximative (24) et dans le cas où la conductibilité de la chaleur est prépondérante, on peut supposer l'isothermie.

§ 19. Jusqu'ici nous avons supposé que le courant reste stationnaire, par conséquent que la pression dans les réservoirs est maintenue constante — p. ex. à l'aide d'un dispositif pareil à celui des gazomètres, ou de la bouteille de Mariotte, ou bien par suite de la communication avec une source constante de gaz. Mais au moment où nous interrompons l'efflux, de sorte que le gaz ne sort du réservoir que par expansion, la distribution de la température changera puisqu'alors il faut ajouter, à la partie droite de l'équation (21), le terme

¹⁾ Augmenté par suite du phénomène Joule-Kelvin.

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R\theta}{k-1} + \frac{V^2}{2} \right) dm.$$

A l'intérieur du réservoir 1, où les vitesses sont petites et la température uniforme, on aura, d'après (20):

$$\frac{\partial p}{\partial t} \iiint d\omega = -kp \iint v_n dS \quad (27)$$

ce qui, joint à l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \iiint d\omega = -\rho \iint v_n dS \quad (28)$$

donne

$$-\frac{k}{\Omega} \iiint v_n dS dt \quad (29)$$

$$p = p_0 e$$

[Ω désignant le volume total du réservoir 1] et la formule (26).

D) Donc, à l'intérieur du réservoir 1, la pression et la température s'abaissent d'après la formule ordinaire de détente adiabatique.

§ 20. Dans le tuyau de décharge, le problème sera plus compliqué et ne peut être analysé que par le moyen d'une solution détaillée, mais on peut trouver la température approximative du gaz qui l'a traversé. Appliquons les équations (27, 28) à deux sections transversales des lignes de flux, l'une située dans le réservoir 1, près de son issue, l'autre au réservoir 2, près de l'entrée, et désignons les volumes correspondants par Ω_1 et Ω_2 . On obtient les équations: pour Ω_1 , comme plus haut:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 \frac{dp_1}{dt} + kp_1 \iint_1 v dS &= 0 \\ \Omega_1 \frac{d\rho_1}{dt} + \rho_1 \iint_1 v dS &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Pour $\Omega_1 + \Omega_2$, en négligeant le volume du conduit, d'une manière analogue

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (\Omega_1 p_1 + \Omega_2 p_2) + k \iint_2 p_2 v dS &= 0 \\ \frac{d}{dt} (\Omega_1 \rho_1 + \Omega_2 \rho_2) + \rho_2 \iint_2 v dS &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

En divisant (31,1) par (31,2) et en diminuant Ω_2 en comparaison avec Ω_1 , on obtient

$$k \frac{p_2}{Q_2} = \frac{d(\Omega_1 p_1 + \Omega_2 p_2)}{d(\Omega_1 Q_1 + \Omega_2 Q_2)} = \frac{dp_1}{dQ_1} = k \frac{p_1}{Q_1}$$

c'est-à-dire: $\Theta_2 = \Theta_1$.

E) Donc, pourvu que les hypothèses de l'énoncé B soient remplies, la température moyenne du gaz entrant dans le réservoir 2 sera (approximativement) la même que celle du gaz renfermé dans le réservoir 1, qui s'écoule d'après la formule adiabatique (quoique la pression soit inférieure).

On peut vérifier ce résultat, en calculant le travail extérieur et la quantité de chaleur „absorbée“, ce qui donne des valeurs égales à $V \frac{(p_0 - p_1)}{k}$, moindres évidemment que les valeurs qui correspondent à une expansion réversible.

§ 21. Ces résultats méritent d'attirer l'attention des physiciens qui étudient l'effusion, la transpiration et les phénomènes analogues, parce qu'ils démontrent l'inexactitude des recherches sur l'efflux stationnaire exécuté à l'aide de réservoirs fermés où la pression diminue. Ainsi M. Donnan¹⁾, en mesurant le temps nécessaire à un abaissement de la pression de 525 mm. à 322 mm. dans le réservoir, n'a pas obtenu, en réalité, des nombres relatifs pour le temps d'effusion des divers gaz, puisque la température ne restait pas constante et, comme il le croyait, égale à 25°C, mais pouvait s'abaisser: pour l'air à -14°C; pour CO₂ à -9°C; pour l'argon à -28°C. Ces nombres sont sans doute exagérés puisque les différences devaient être diminuées par suite de la conduction de la chaleur aux parois du vaisseau, mais en tout cas, cette grave source d'erreurs indique la nécessité de l'emploi de gazomètres à pression constante. (§ 19). C'est une condition dont l'importance a été bien appréciée par Joule et Kelvin dans leurs travaux. Les mêmes considérations s'appliquent à la plupart des recherches semblables et aussi, en quelque sorte, aux travaux intéressants de M. Emden (loc. cit.). Cet expérimentateur n'y a pas remédié par l'emploi de la soupape régulatrice (Druckreducirungsventil), puisqu'il n'a pas pris soin de réchauffer le gaz sortant à une température invariable. Cette ob-

¹⁾ Philos. Magazine 49 p. 423 (1900).

jection est encore plus importante pour les expériences de Mach et Salcher, faites à une pression plus haute et avec un réservoir de moindre capacité, ce qui peut expliquer aussi l'écart entre les observations de l'abaissement de la température dans le jet de gaz (une dizaine de degrés d'après M. Emden, une centaine d'après M. Mach). Le thermomètre, d'ailleurs, n'est nullement applicable à la mesure de la température d'un gaz animé d'une grande vitesse, puisque le mouvement du gaz et la distribution de chaleur changeraient complètement par suite de sa présence.

IV. Solutions spéciales de quelques problèmes d'Aérodynamique.

§ 22. Nous nous bornerons à l'étude de quelques problèmes simples dont quelques-uns toutefois montreront l'application de méthodes plus générales.

L'exemple le plus simple est le mouvement stationnaire d'un gaz compris entre deux parois cylindriques, concentriques; l'extérieure dont le rayon est r_2 est fixe, et l'intérieure, de rayon r_1 , effectue une rotation de n tours par seconde. Désignons par ω la vitesse angulaire correspondant au rayon r ; nous aurons la solution des équations (10) et (11)

$$u = -\omega \frac{y}{r}; \quad v = \omega \frac{x}{r},$$

sous la condition que ω satisfasse à l'équation:

$$\omega = -\frac{a}{2r^2} + b = \frac{2\pi n}{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2} \right] \quad (33)$$

Les pressions résultent de $\frac{dp}{dr} = \omega^2 r \rho$, si la température est connue.

Celle-ci est déterminée par l'équation (12) qui, intégrée, donne

$$\theta = \theta_0 + \frac{\mu}{4\kappa} a^2 \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2} \right] + c \log \frac{r}{r_2} \quad (34)$$

où θ_0 désigne la température de la paroi extérieure. Pour déterminer le coefficient c , supposons que le cylindre intérieur soit isolé au point de vue thermique. Il atteindra l'équilibre thermique lorsque:

$$\kappa \frac{d\theta}{dr} \Big|_{r=r_1} = 0.$$

La température correspondante est

$$(35) \quad \theta_2 = \theta_0 + \frac{\mu a^2}{4\alpha} \left[\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1^2} \log \frac{r_1}{r_2} \right]$$

ou approximativement, pour une petite épaisseur $r_1 - r_2$,

$$(36) \quad \theta_2 = \theta_0 + \frac{2\mu}{\alpha} (\pi n r_2)^2$$

indépendamment de l'épaisseur, ce qui donne p. ex. pour $n = 100$, $r_2 = 10$ cm., dans l'air: $\theta_2 = \theta_0 + 1.4^\circ$.

§ 23. En supposant $r = \infty$ dans l'exemple précédent, ou bien en supposant $u = w = 0$; $v = f.c.(x)$, on aura un flux lamelliforme, stationnaire, qui est identique à celui qui se produit dans des circonstances analogues dans les liquides: $v = bx + c$. Mais, au sein des liquides, un mouvement variable lamelliforme est aussi possible: lorsque le plan OYZ exécute des oscillations dans la direction des Y : $v_0 = A \cos \gamma t$. Ce mouvement se propage dans la direction des X , en vertu de l'équation $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, de la même manière que la chaleur dans un corps chauffé:

$$(37) \quad v = Ae^{-x\sqrt{\frac{\rho_0}{2\mu}}} \cos\left(\gamma t - x\sqrt{\frac{\rho_0}{2\mu}}\right)$$

Dans les gaz, au contraire, il y a cette singularité que les équations (10, 11, 12) ne peuvent pas être satisfaites par l'hypothèse $u = w = 0$, $v = f(x, t)$, puisque la chaleur produite par le frottement donnera naissance à des vitesses dans la direction des X . Il est facile d'en faire l'évaluation approximative.

Voilà un exemple intéressant de la manière dont des vibrations transversales peuvent produire des ondulations longitudinales sonores; ce sont les premières qui seront prédominantes dans la proximité de la paroi OYZ , les autres dans des distances plus grandes, puisque leur coefficient d'extinction sera plus petit. L'effet d'une raréfaction du gaz sera d'augmenter l'extinction pour les ondes longitudinales et de la diminuer pour les ondes transversales.

§ 24. Un autre exemple qui met en évidence une différence des liquides et des gaz, est le suivant: un courant stationnaire dans

la direction X , dont la vitesse ne dépend que de la valeur de x , les parois étant parfaitement polies ou à une distance telle qu'on peut négliger leur présence. En négligeant la conduction, on aura donc les équations:

$$\left. \begin{aligned} \rho u \frac{du}{dx} &= \frac{dp}{dx} + \frac{4\mu}{3} \frac{d^2u}{dx^2}; \\ \frac{d}{dx}(\rho u) &= 0 \\ u \frac{dp}{dx} + k p \frac{du}{dx} &= (k-1) \frac{4\mu}{3} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Ce qui est intéressant c'est que, dans ce cas, on a une solution exacte, tandis que dans l'Hydrodynamique, on ne connaît pas de solution exacte des équations complètes, sauf dans quelques cas très simples comme le précédent. Un mouvement stationnaire analogue d'un liquide serait impossible, puisqu'il n'y aurait pas de forces d'expansion visqueuse qui pourraient s'opposer à l'accélération produite par les différences de pression.

Les équations (38,2) et (38,1) peuvent être intégrées immédiatement:

$$\rho u = b \quad (39,2)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{4\mu} (bu + p - a). \quad (39,1)$$

De même (38,3) après avoir été divisée par $\frac{du}{dx}$, dont la valeur est donnée par l'équation précédente:

$$p = \frac{(k-1)}{2} b u - \frac{c}{u} - (k-1) a. \quad (39,3)$$

La substitution de cette valeur dans (39,1) et l'intégration donnent:

$$x = m + \frac{4\mu}{3} \int \frac{u du}{(k+1) \frac{b}{2} u^2 - k a u - c} \quad (40)$$

où l'intégrale peut être évaluée par des fonctions cyclométriques ou logarithmiques.

Le problème est résolu, mais il paraît assez douteux qu'il possède des applications dans la pratique. Nous avons trouvé ici quatre constantes arbitraires, alors que nous sommes habitués à définir le

flux, p. ex. dans les tubes de Poiseuille, par trois données: la pression en deux points et la température du gaz. Mais, comme nous le verrons plus loin, il n'y a là qu'une apparente simplicité de la loi de Poiseuille, causée par l'omission de facteurs secondaires, notamment de l'influence de l'état de mouvement dans la proximité des extrémités du tube.

§ 25. Un exemple qu'il serait plus facile de réaliser est le mouvement variable défini par les conditions: $v = w = 0$; $u = f(x, t)$; mais ce problème ne pourrait être résolu dans toute sa généralité.

Nous supposons donc que le gaz, à pression initiale p_0 et température θ_0 , soit contenu dans un cylindre, à parois polies, fermé d'un côté, de l'autre côté admettant un piston, à masse négligeable, qui y soit enfoncé par une force constante a ; pour simplifier, nous négligerons aussi l'effet de l'inertie du gaz, en supposant un mouvement instantané, analogue dans toute son étendue:

$$(41) \quad u = x f(t).$$

Or, la force extérieure a doit être balancée par la somme de la pression intérieure du gaz et du frottement intérieur, c'est-à-dire, d'après (1):

$$(42) \quad p_{xx} = a = p - \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x}.$$

L'introduction de $\frac{\partial u}{\partial x} = f(t)$ et la substitution de p dans l'équation thermique:

$$(43) \quad \frac{dp}{dt} + k p \frac{\partial u}{\partial x} = (k - 1) \frac{4\mu}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

donne l'équation:

$$(43) \quad \frac{df}{dt} + \frac{3ak}{4\mu} f + f^2 = 0.$$

On en déduit par intégration:

$$(44) \quad \frac{1}{f} = A e^{\alpha t} - \frac{1}{\alpha}; \quad \text{où: } \alpha = \frac{3ak}{4\mu}$$

et, en introduisant la valeur initiale

$$\frac{4\mu}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{t=0} = p_0 - a,$$

on obtient:

$$u = \frac{ax}{\left(\frac{ak}{p_0 - a} + 1\right) e^{\alpha t} - 1}. \quad (45)$$

Pour trouver la densité, intégrons l'équation de continuité:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

ce qui donne:

$$\rho = \rho_0 e^{-\int_0^t f dt} \quad (46)$$

où l'intégrale peut être développée de la manière suivante:

$$\int \frac{dt}{A e^{\alpha t} - B} = \frac{1}{\alpha B} \log \left(\frac{A e^{\alpha t} - B}{A e^{\alpha t}} \right).$$

C'est-à-dire:

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \frac{p_0 - a}{ak} (1 - e^{-\alpha t}) \right]^{-1}. \quad (47)$$

La densité, la pression et la température approcheront, par conséquent, d'une manière asymptotique des limites:

$$\left. \begin{aligned} \rho_\infty &= \frac{\rho_0}{1 + \frac{p_0 - a}{ak}}; & p_\infty &= a; \\ \theta_\infty &= \frac{p_\infty}{R \rho_\infty} = \frac{a \left(1 + \frac{p_0 - a}{ak} \right)}{R \rho_0} = \theta_0 \left[\frac{1}{k} + \frac{a}{p_0} \frac{k-1}{k} \right] \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Ce qu'il y a d'intéressant dans cet exemple, c'est la comparaison avec la formule adiabatique ordinaire qui donnerait:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a}{p_0} \right)^{\frac{1}{k}}; \quad \frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{a}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Les valeurs qui en résultent pour l'élévation de la température finale, sont inférieures à celle de notre calcul (48), ce qui est naturel, puisque la formule adiabatique n'est applicable qu'au cas d'une expansion infiniment lente et ne tient pas compte du frottement intérieur.

Il est vrai que nous aussi, nous avons négligé un facteur: l'effet de l'inertie du gaz, qui diminuera cette différence et produira des oscillations qui tendront à s'évanouir. Par conséquent, notre calcul ne serait exact que pour un gaz très raréfié. Cependant, cet exemple prouve qu'une erreur — très petite peut-être — est inévitable si l'on emploie la formule adiabatique à l'évaluation des mesures de la chaleur spécifique des gaz faites d'après la méthode de Clément-Desormes. Leur effet sera une augmentation apparente du coefficient k , le contraire de l'effet de la conductibilité. D'ailleurs, il dépendra de la manière dont se produit la compression; si le réservoir avait, par exemple, une forme sphérique, à parois dilatables, la diminution des longueurs serait la même dans toutes les directions:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = \text{const.}$$

et, par conséquent, $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p$, c'est-à-dire que la viscosité n'aurait aucun d'effet, ni mécanique, ni thermique (puisque $\Phi = 0$).

§ 26. Le système des équations aérodynamiques est si compliqué qu'on ne peut espérer de le résoudre directement que dans des exemples d'une simplicité exceptionnelle, tels que ceux que nous venons de citer. On peut aussi employer, outre les méthodes des § 7 — § 13, la méthode des approximations successives. En voici des cas particuliers: Si le coefficient α de conductibilité thermique était infini, on aurait un mouvement rigoureusement isothermique. La même conclusion s'applique approximativement à tous les cas où la conductibilité joue un rôle prépondérant, comme les mouvements „calmes“ dans les conduits étroits; à mesure que $\frac{1}{\alpha}$ diffère de zéro, la distribution de chaleur et de mouvement s'écarte de l'état limite, de sorte qu'on pourra développer toutes les variables en séries potentielles de la forme

$$(49) \quad \left. \begin{aligned} u &= u_0 + \frac{u_1}{\alpha} + \frac{u_2}{\alpha^2} + \frac{u_3}{\alpha^3} + \dots \\ \theta &= \theta_0 + \frac{\theta_1}{\alpha} + \frac{\theta_2}{\alpha^2} + \dots \end{aligned} \right\}$$

En décomposant les équations (10, 11, 12) après avoir substitué ces expressions, d'après les degrés de $\left(\frac{1}{\alpha}\right)$, on aura une série d'équa-

tions à approximations progressives (pourvu que la convergence soit établie) dont les trois premières représentent l'état le plus simple isothermique:

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= \text{const} = \frac{p_0}{R \varrho_0} \\ \frac{\partial p_0}{\partial x} &= \mu \Delta^2 u_0 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \text{div}_0}{\partial x} \text{ etc.} \\ \frac{\partial (p_0 u_0)}{\partial x} + \frac{\partial (p_0 v_0)}{\partial y} + \frac{\partial (p_0 w_0)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

$$\left. \begin{aligned} (k-1) \Delta^2 \theta_1 &= u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial p_0}{\partial z} + k \text{div}_0 - (k-1) \Phi_0 \\ \frac{\partial p_1}{\partial x} &= \mu \Delta^2 u_1 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \text{div}_1}{\partial x} \text{ etc.} \\ \frac{\partial (\varrho_0 u_1 + \varrho_1 u_0)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho_0 v_1 + \varrho_1 v_0)}{\partial y} + \frac{\partial (\varrho_0 w_1 + \varrho_1 w_0)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

§ 27. Essayons d'appliquer cette méthode d'approximation à la théorie ordinaire¹⁾ du mouvement dans les tubes Poiseuille. Le raisonnement usuel correspond aux équations (50), simplifiées encore par l'hypothèse $v = w = 0$ et par l'omission des termes $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ etc. Pour obtenir une approximation plus grande, il faut substituer les formules qui en résultent, c'est-à-dire:

$$p = \sqrt{p_1^2 - \frac{x}{l} (p_1^2 - p_2^2)} = \sqrt{a - cx} \quad (52)$$

$$u = \frac{\delta^2 - r^2}{8\mu} \frac{c}{\sqrt{a - cx}} \quad (53)$$

dans l'équation (51,1) qui se transforme en

$$\Delta^2 \theta_1 = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \right) = \frac{c^2}{16\mu} \frac{\delta^2 - 2r^2}{a - cx} \quad (54)$$

L'intégration donne:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -\frac{c^2}{128 \cdot \mu} \frac{(\delta^2 - r^2)^2}{a - cx} = -\frac{1}{128 \cdot \mu} \left[\frac{(\delta^2 - r^2) (p_1^2 - p_2^2)}{lp} \right]^2 = \\ &= -\frac{u^2 \mu}{2} \end{aligned} \quad (55)$$

¹⁾ O. E. Meyer, Pogg. Ann., 127, p. 253, 353 (1866); 148, p. 1 (1873).

Nous aurons donc:

$$\theta = \theta_0 - \frac{\mu}{2\alpha} u^2$$

et, ce qui est remarquable, $\frac{\partial \theta}{\partial r} = 0$, c'est-à-dire: le gaz n'échange pas de chaleur avec les parois du tube. L'abaissement maximum, dans l'axe du tube, s'élève à

$$(56) \quad \Delta \theta = \frac{9 \cdot \delta^4}{16 \cdot 128 \cdot \alpha \mu} \left[\frac{p_1^2 - p_2^2}{lp} \right]^2.$$

Ainsi on trouve, pour les expériences de Koch¹⁾ sur la viscosité de la vapeur de mercure, avec les nombres approximatifs:

$$p_1 = 100 \text{ cm.}, \quad p_2 = 1 \text{ cm.}, \quad l = 10 \text{ cm.}, \quad r = 0.00425 \text{ cm.}$$

un abaissement sur l'axe de 0.04° jusqu'à 400°C.

Ce résultat n'est point exact, sans doute, mais il suffit pour démontrer que la formule de Poiseuille, fondée sur l'hypothèse d'un mouvement lent et isothermique, n'est pas applicable dans un pareil cas et que le résultat final de ce travail — proportionnalité de μ à $\theta^{1.6}$ — est dénué de fondement. Des objections de même nature s'attachent aux travaux de L. Meyer et Steudel²⁾ et même à quelques-unes des mesures de O. E. Meyer (loc. cit.), quoique l'influence sur les nombres définitifs de celles-ci ne soit probablement pas importante. Elles font apprécier l'importance des conditions: petitesse du diamètre et de la différence des pressions; et longueur du tube. La formule (56) d'ailleurs ne servira qu'à la vérification de la supposition d'isothermie. On ne serait pas en droit de pousser plus loin le calcul d'approximation, à cause de l'inexactitude de la formule primaire (52, 53) qui provient des simplifications mentionnées³⁾.

D'autre part, si l'on voulait exécuter le calcul en tenant compte de ces effets secondaires — de la viscosité „de volume“ et de l'inégalité de pression dans les différentes couches d'un profil, — on

¹⁾ Wiedem. Ann., 19, p. 857 (1883).

²⁾ Wiedem. Ann., 16, p. 368, 394 (1882).

³⁾ Il y faut ajouter l'omission des termes d'inertie

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \text{ etc.}$$

rencontrerait un autre obstacle: la connaissance de la pression en deux points de l'axe, p_1 , p_2 et de la température initiale ne suffirait pas à la détermination des constantes et des fonctions arbitraires du calcul; il faudrait connaître encore la distribution détaillée de la vitesse et de la pression dans le profil initial. Cela veut dire que le problème n'est pas défini d'une façon exacte, si l'on n'a pas précisé la forme des deux réservoirs qui communiquent par le tube, surtout dans le voisinage de ses extrémités. L'effet de ces circonstances, qui se manifeste par exemple dans les phénomènes de la „vena contracta“, peut modifier d'une manière considérable la transpiration par des tubes larges, de petite longueur. Cependant la méthode de Poiseuille, employée de la manière décrite au § 13, peut toujours servir à des mesures exactes de la viscosité relative.

§ 28. Une autre catégorie de problèmes peut être illustrée par l'exemple suivant. Supposons une sphère, en repos, dans un gaz animé d'un mouvement „calme“ stationnaire, avec une vitesse uniforme c à l'infini; cette hypothèse, qui implique l'omission des termes $qu \frac{\partial u}{\partial x}$ en comparaison avec $\mu \Delta^2 u$, exige que $\frac{\rho c a}{\mu}$ soit une quantité petite. La solution serait très simple, si le gaz était comprimé à une densité infinie, parce que dans ce cas div serait égal à zéro [d'après (11)] et le mouvement serait celui d'un liquide incompressible. Pour trouver les corrections qui résultent de la compressibilité, considérons que la distribution de la densité et aussi des autres variables dépend de la valeur constante de la pression à l'infini, que nous appellerons P . A mesure que $\frac{1}{P}$ s'éloigne de zéro, le mouvement s'écartera du type incompressible. Donc, on pourrait développer toutes les variables en séries d'après les degrés de $\frac{1}{P}$ comme au § 26, ce qui permettrait de décomposer les équations (10, 11, 12) en un système d'équations à approximations progressives. Pour simplifier, nous nous bornerons à la considération de deux termes, en supposant que toutes les variables soient composées de la manière suivante:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + u_1; & v &= v_0 + v_1; & w &= w_0 + w_1; \\ p &= p_0 + p_1; & \varrho &= \varrho_0 + \varrho_1; & \theta &= \theta_0 + \theta_1; \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

où les premiers termes représentent le type limite d'incompressibi-

lité, les seconds termes les corrections à y ajouter, petites en comparaison avec ceux-là. L'équation (9) donne:

$$(58) \quad \frac{p_0}{\varrho_0} = R\theta_0; \quad \frac{p_1}{p_0} = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} + \frac{\theta_1}{\theta_0}.$$

Puisque nous supposons que les variations de la pression, définies par $\frac{\partial p_0}{\partial x}$ etc., sont petites par rapport à p_0 etc., on pourra déduire de l'équation (11), comme première approximation:

$$\operatorname{div}_0 = 0$$

approximation seconde:

$$(59) \quad \varrho_0 \operatorname{div}_1 + u_0 \frac{\partial \varrho_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \varrho_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \varrho_0}{\partial z} = 0.$$

De l'équation (12):

$$(60) \quad u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial p_0}{\partial z} + k p_0 \operatorname{div}_1 = (k-1) [\Phi_0 + \alpha \Delta^2 \theta_0]$$

qui se transforme, eu égard à (59,2) et (58,1), en:

$$(61) \quad \begin{aligned} & u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial p_0}{\partial z} + \Phi_0 = \\ & = \frac{k}{k-1} R \varrho_0 \left[u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right] = -\alpha \Delta^2 \theta_0 \end{aligned}$$

De l'équation (10) enfin:

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_0}{\partial x} = \mu \Delta^2 u_0; \quad \frac{\partial p_1}{\partial x} = \mu \Delta^2 u_1 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div}_1; \\ \frac{\partial p_0}{\partial y} = \mu \Delta^2 v_0; \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = \mu \Delta^2 v_1 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div}_1; \\ \frac{\partial p_0}{\partial z} = \mu \Delta^2 w_0; \quad \frac{\partial p_1}{\partial z} = \mu \Delta^2 w_1 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div}_1. \end{array} \right.$$

L'approximation première est représentée par le système (62,1) qui détermine avec (59,1), le problème analogue de l'Hydrodynamique, dont voici la solution:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= -\frac{3}{4} ca \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \frac{x^2}{r^3} + c \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a}{r} - \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3}\right) \\ v_0 &= -\frac{3}{4} ca \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \frac{xy}{r^3} \\ w_0 &= -\frac{3}{4} ca \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \frac{xz}{r^3} \\ p_0 &= P - \frac{3\mu}{2} \frac{cax}{r^3} \end{aligned} \right\} (63)$$

Nous en ferons usage pour évaluer les variations de la température d'après (61). Le côté gauche de cette équation a la valeur:

$$\begin{aligned} & u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial p_0}{\partial z} = \\ & = -\frac{3}{2} \mu \frac{c^2 a}{r^3} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a}{r} - \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3}\right) + \frac{9}{2} \mu \frac{c^2 a x^2}{r^3} \left(1 - \frac{5}{4} \frac{a}{r} + \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3}\right) \end{aligned} \quad (64)$$

$$\Phi_0 = \frac{9}{4} \mu \frac{c^2 a^3}{r^4} \left(3 \frac{x^2}{r^2} + \frac{a^4}{r^4} - 6 \frac{a^2 x^2}{r^4} + 2 \frac{a^4 x^4}{r^6}\right) \quad (65)$$

ce qui démontre que la chaleur provenant de la compression et du frottement intérieur sont des grandeurs du même ordre.

Les équations de la forme (61), appartenant au type „elliptique“

$$\Delta^2 \vartheta + u_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = F$$

qui se rencontre souvent dans des problèmes semblables, sont peu étudiées jusqu'à présent. Elles peuvent être intégrées par la méthode laborieuse d'approximations successives, en résolvant les équations

$$\Delta^2 \vartheta' = F$$

$$\Delta^2 \vartheta'' = F - \left(u_0 \frac{\partial \vartheta'}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \vartheta'}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \vartheta'}{\partial z}\right)$$

$$\Delta^2 \vartheta''' = F - \left(u_0 \frac{\partial \vartheta''}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \vartheta''}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \vartheta''}{\partial z}\right) \text{ etc.}$$

et en tenant compte de la condition de surface $\vartheta = \Theta$.

On peut se restreindre à la première approximation, lorsque le coefficient $\frac{caR\varrho_0}{k}$, qui détermine la convergence de la série, est

petit, condition qui ne diffère pas beaucoup, au point de vue quantitatif, de la supposition antérieure d'un mouvement „calme“. Dans ce cas, on déduirait la valeur suivante de (61), qui définit l'écart de l'isothermie:

$$(66) \quad \theta_0 = \Theta + \frac{\mu c^3}{32 \alpha} \left\{ \frac{a}{r} \left[19 + 13 \frac{a^2}{r^2} + 24 \frac{x^2}{r^2} - 39 \frac{x^2 a^2}{r^4} \right] + \frac{3a^3}{r^2} \left[-9 + \frac{3x^2}{r^2} - \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a^4}{3r^4} + \frac{4a^2 x^2}{r^4} - \frac{2a^4 x^2}{r^6} \right] \right\}$$

En substituant cette valeur dans (58,1), (59,2), on déduit la correction de la pression qui correspond à la compressibilité et à la variabilité de la température. Elle sera très petite, d'ailleurs, en comparaison avec la pression de résistance p , lorsqu'on suppose un mouvement „calme“¹⁾.

§ 29. Puisque la température s'élève, d'après cette formule, suivant la direction de la normale à la surface, en raison de

$$(67) \quad \left. \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right|_{r=a} = \frac{\mu c^2}{32 \alpha a} [20 + 111 \cos^2 \varphi],$$

une sphère solide, animée d'une vitesse c dans l'air tranquille devrait s'échauffer de même; l'effet serait plus grand aux „pôles“, qu'à „l'équateur“; sa valeur moyenne serait, d'après un calcul approximatif

$$(68) \quad \delta \theta = \frac{57 \mu c^2}{32 \alpha}$$

indépendamment des dimensions de la sphère. La considération des corrections suivantes dans la série ϑ' , ϑ'' , ϑ''' changerait ce résultat de telle façon que la distribution deviendrait asymétrique, le réchauffement étant plus considérable au pôle „postérieur“ qu'à l'„antérieur“. Ce résultat, de même que l'excès comparatif de la température à l'équateur, est en accord avec les expériences de Joule et Kelvin²⁾ pour de petites vitesses; et la formule (68) s'accorde aussi avec leurs mesures pour des vitesses moyennes, en ce qui concerne l'indépendance de l'échauffement des dimensions du corps

¹⁾ Voir un calcul analogue approximatif, sans considération de la variabilité de la température: O. E. Meyer, Crelle Journal, 75 (1873).

²⁾ Voir § 12, 2.

et la proportionnalité au carré de la vitesse, seulement le coefficient numérique est plus petit $\left[1^{\circ}\text{C. pour } 28 \frac{\text{m}}{\text{sec.}}\right]$, tandis que l'on a $1^{\circ}\text{C. pour } 55 \frac{\text{m}}{\text{sec.}}$ d'après Kelvin].

Cependant, on aurait tort de considérer ceci comme une confirmation de la théorie, puisque les conditions de ces expériences s'écartent de beaucoup des suppositions du calcul. Rappelons que $\rho c a$ doit être petit en comparaison de μ ($= 0.00018$) afin que le mouvement soit „calme“; par conséquent les vitesses employées par Kelvin ne seraient admissibles que dans un gaz très raréfié.

§ 30. Nous voyons que l'importance pratique de pareils exemples est limitée assez sérieusement par l'hypothèse du „calme“. Un intérêt beaucoup plus considérable s'attacherait aux mouvements „violents“ (voir § 6), où d'ailleurs la compressibilité et les phénomènes thermiques jouent un rôle beaucoup plus considérable. Les méthodes approximatives qui pourraient être appliquées à des phénomènes pareils, où l'omission des termes d'inertie ne serait plus justifiée, sont les suivantes:

1) En considérant que le mouvement d'un gaz plus léger [c'est-à-dire ayant un coefficient R plus grand] sera plus rapproché du type „calme“, on peut développer toutes les variables en séries de $\frac{1}{R}$, ce qui donne des corrections successives à ajouter aux formules du type limite, d'après un procédé semblable à celui des § 26, 28.

2) Un développement pareil, d'après les degrés de μ , donnerait les corrections à faire dans les résultats se rapportant au type limite du gaz idéal, à cause de la viscosité.

L'avantage de ces méthodes consiste dans la linéarité des équations résultantes, mais leur complication est cependant plus considérable que dans les exemples précédents. En outre, lorsqu'une certaine limite d'inertie est dépassée, par suite de l'augmentation de la vitesse ou de la densité, l'état devient instable et les mouvements „turbulents“ prennent naissance.

Nous avons noté, dans les chapitres précédents, quelques cas semblables comme les ondulations fixes dans le jet d'un gaz, et les sons de friction, qui semblent être la cause primaire du son dans les instruments à vent. Il faudrait chercher d'autres méthodes pour le traitement de ces phénomènes, puisque les développements pré-

cédents supposent la continuité des fonctions. Mais nous ne nous occuperons pas ici des problèmes du mouvement visqueux inerte, considérant que dans un cas beaucoup plus simple — dans l'Hydrodynamique des liquides visqueux — les recherches analogues sont à peine abordées et, jusqu'à présent, n'ont fourni que des résultats très insuffisants.

-
14. M. MARIE SMOLUCHOWSKI. *Przyczynek do teoryi endosmozy elektrycznej i niektórych zjawisk pokrewnych. (Contribution à la théorie de l'endosmose électrique et de quelques phénomènes corrélatifs).*
Mémoire présenté par M. Lad. Natanson m. t.

§ 1. Nous avons été amenés à cette étude par une question concernant la stabilité des solutions colloïdales et des milieux troubles: il s'agissait notamment de savoir si la théorie¹⁾ qui explique cette stabilité par des forces semblables à celles qui produisent l'endosmose électrique et les courants diaphragmatiques, pouvait être justifiée. Dans ce but, il fallut d'abord généraliser la théorie de ces phénomènes, développée par Helmholtz²⁾ pour le cas spécial d'un liquide contenu dans un tube Poiseuille. Nous croyons que cette extension de la théorie en question, pour le cas général, présente en soi-même quelque intérêt d'autant plus que — comme nous le verrons plus loin — les expériences fondamentales de Wiedemann et Quincke dépassaient déjà les conditions où le calcul primitif de Helmholtz est applicable.

Ce qui nous paraît aussi intéressant c'est la comparaison avec la théorie rivale de Lamb³⁾, basée sur des hypothèses simplifiées, mais un peu différentes. Toutes les deux donnent des résultats tout-à-fait analogues dans le cas des tubes Poiseuille, mais on aurait pu croire que le cas général présenterait une différence qui permettrait d'arriver à une conclusion. Les résultats définitifs démentent pourtant cet espoir, car l'analogie subsiste toujours; au point de vue

¹⁾ Proposée par J. J. Thomson et M. Hardy: Proc. Roy. Soc. 66, p. 123 (1900).

²⁾ Wiedem. Ann. 7, p. 337 (1879); Ges. Abhandlg. I, p. 855.

³⁾ Philos. Mag. 25, p. 52 (1888); elle n'est pas mentionnée dans le résumé, assez bon, des phénomènes analogues dans Winkelmann Handb. III, 1, p. 493, et je n'en ai eu connaissance qu'après avoir trouvé les résultats exposés ci-dessus.

mathématique, on pourrait même considérer la théorie de Lamb comme une spécialisation de notre calcul.

Tel est l'objet principal de ce travail. Nous y ajouterons quelques considérations sur le problème mentionné au commencement, et sur quelques autres phénomènes qui sont en connexion avec cette théorie.

§ 2. On désigne par endosmose électrique un phénomène connu depuis longtemps, étudié surtout par Wiedemann et Freund¹⁾: le passage d'un liquide par un diaphragme, ou bien par des tubes étroits, des fentes etc., par suite d'un courant électrique qui circule dans la même direction²⁾ ou dans la direction inverse.

Si le passage du liquide est interrompu, le vaisseau étant fermé, il s'y établit une différence de pression: agrandissement à la cathode, diminution à l'anode, que nous appellerons pression électro-osmotique. Le phénomène inverse, qui sera appelé courant diaphragmatique, consiste dans la production d'une différence de potentiel (respectivement d'un courant électrique) par suite du passage du liquide par des diaphragmes, tubes etc., causé par la pression extérieure.

Ces phénomènes ont été expliqués par Quincke, en considérant la réaction entre le mouvement mécanique du liquide et les couches électriques, étendues sur les parois du vaisseau. Dans le premier cas, la partie positive des couches, du côté de l'électrolyte liquide, mise en mouvement par l'influence du champ électrique extérieur, entraîne le liquide; dans le cas inverse, le mouvement de cette couche produit un courant électrique de convection.

En effet, le calcul de Helmholtz, qui s'applique au mécanisme de ces phénomènes dans des tubes réguliers, à section circulaire et satisfaisant à la formule d'écoulement de Poiseuille, est en accord parfait avec les mesures analogues de Quincke et Dorn³⁾, en ce qui concerne leur dépendance des dimensions des tubes, des pressions — respectivement des forces électromotrices — et de la conductibilité électrique du liquide. Cet accord, cependant, est lié

¹⁾ Wiedemann, Pogg. Ann. 87, p. 321 (1852); Freund, Wied. Ann. 7, p. 53 (1879).

²⁾ Les directions sont identiques pour l'eau et les électrolytes, inverses p. ex. pour l'huile de térébenthine en contact avec du soufre.

³⁾ Quincke, Pogg. Ann. 113, p. 513 (1861); 107 p. 1 (1859), 110 p. 38 (1860); Dorn, Wied. Ann. 9, p. 513 (1880); 10 p. 46 (1880).

à la validité de la loi de Poiseuille, et les tubes plus larges, qui n'y obéissent plus, comme ceux de Clark et de Edlund¹⁾, s'écartent tout-à-fait des formules de Helmholtz. Par conséquent, il nous semble fort risqué d'appliquer les mêmes calculs aux diaphragmes d'argile de Wiedemann (et Freund), qui sont considérés par Helmholtz comme un système de tubes Poiseuille²⁾.

Leur structure ressemble certainement plutôt à celle d'un tas de petits grains, dont les pores ont une forme très irrégulière, peu semblable aux tubes Poiseuille; et ceci s'applique d'autant plus aux diaphragmes de Quincke, formés de sable, de soufre ou de laque pulvérisés, de retaille d'ivoire, d'étoffes de soie etc. L'application à priori des résultats de Helmholtz n'est pas justifiée dans ces cas. La généralisation indispensable de sa théorie peut être effectuée de la manière suivante.

§ 3. Lorsque le liquide est à l'état normal, en repos, le potentiel électrique φ , qui correspond à l'action des couches superficielles, aura une valeur constante φ_i à l'intérieur du liquide, et la valeur constante φ_a à l'intérieur des parois; il varie brusquement dans les couches de passage, d'épaisseur δ , dans la direction de la normale, mais reste constant dans la direction des tangentes. Par conséquent, la densité électrique

$$\varepsilon = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2},$$

positive du côté de l'eau, négative de l'autre côté, est une grandeur de l'ordre $\frac{1}{\delta^2}$.

Lorsqu'il y aura un champ électrique extérieur, défini par le potentiel Φ , le potentiel total correspondra à la superposition:

$$U = \varphi + \Phi.$$

Puisque les forces mécaniques qui en résultent produisent un mou-

¹⁾ Clark, Wied. Ann. 2 p. 335 (1877); Edlund, Wied. Ann. 1 p. 184 (1877).

²⁾ Le fait qu'ils laissent passer un volume de liquide proportionnel à la pression active, ne prouve rien autre que ceci, c'est qu'on a à faire à un mouvement „lent“, où les équations

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu \Delta^2 u$$

etc. sont applicables.

vement tangentiel, il faudrait y ajouter encore, pour être exact, un troisième terme V , pour rendre compte de la modification des couches de passage qui se produit par ce mouvement. Nous nous bornerons cependant à l'étude des mouvements „lents“ où l'on peut négliger cette réaction du phénomène secondaire sur le phénomène primaire, en comparaison avec φ et Φ . Dans ce cas, on peut négliger aussi l'inertie du liquide, et les équations de l'Hydrodynamique, eu égard aux forces mécaniques $-\varepsilon \nabla U$, seront:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \Delta^2 u - \varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \Delta^2 v - \varepsilon \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \Delta^2 w - \varepsilon \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Les facteurs $\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ etc. feront naître le mouvement du liquide, tandis que les facteurs $\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ne serviront qu'à produire une pression uniforme dans chaque couche individuelle. Pour éliminer cette partie des forces, qui ne nous intéresse pas, introduisons une grandeur définie [en désignant la distance normale par ζ] par

$$P = p - \int_{\delta}^{\zeta} \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} d\zeta = p - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right)^2 \Big|_{\zeta} \quad (2)$$

Par conséquent, on aura:

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = \frac{\partial p}{\partial \zeta} - \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \quad (3)$$

et d'autre part, en supposant ξ et η dirigés dans les directions tangentées, p. ex. des lignes de courbure:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \zeta};$$

puisque partout $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ est égal à zéro, à cause de l'uniformité de la couche, ce résultat se simplifie et devient:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial p}{\partial \xi}; \text{ et de même } \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial p}{\partial \eta}. \quad (4)$$

En appliquant les équations (1) aux directions ζ , ξ , η , on aura le système:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial \zeta} = \mu \Delta^2 v_\zeta - \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial P}{\partial \xi} = \mu \Delta^2 v_\xi - \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial P}{\partial \eta} = \mu \Delta^2 v_\eta - \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \end{array} \right.$$

Pour mettre mieux en évidence la signification de P , dérivons les équations (5) par rapport à ζ , ξ , η , ce qui donne, eu égard à la condition d'incompressibilité et à l'équation $\Delta^2 \Phi = 0$:

$$(6) \quad \Delta^2 P = - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}$$

tandis qu'en opérant d'une manière analogue sur les équations (1) on aurait

$$(7) \quad \Delta^2 p = - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right).$$

Puisque la dérivée $\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}$ devient zéro à la surface des parois isolantes, le courant électrique ayant une direction tangente, elle aura une valeur de l'ordre δ dans la couche de passage. Nous en concluons ceci: en dehors de la couche, P est identique à la pression hydraulique p ; mais, tandis que p subit une variation brusque (de l'ordre $\frac{1}{\delta^2}$) dans ces couches, à cause de la pression électrostatique, la grandeur P en est approximativement dépourvue; il y reste seulement les termes d'ordre plus petit qui ne peuvent produire que des différences finies de P dans les divers points de la couche.

§ 4. Envisageons maintenant les équations (5, 2), (5, 3) et remarquons que les forces tangentes $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$ sont finies, par conséquent les termes de droite ont une valeur de l'ordre $\frac{1}{\delta^2}$, ceux de gauche sont finis. Donc, en multipliant ces équations par ζ et en les intégrant entre les limites 0 et δ , on fera disparaître les termes de gauche:

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial P}{\partial \xi} \xi d\xi = 0 \quad (8)$$

pendant que, du côté droit, on obtiendra des quantités finies de la manière suivante:

L'opérateur Δ^2 ne peut pas être remplacé, en général, par

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2},$$

puisque nous avons supposé les directions des axes ξ , η , ζ variables, suivant la direction normale à la surface. Mais en tout cas, le terme de l'ordre le plus grand, qui seul entre dans ce calcul, puisque les autres disparaissent par l'intégration, sera $\frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \zeta^2}$, (ou $\frac{\partial^2 v_\eta}{\partial \zeta^2}$ respectivement). Lorsqu'on considère que $\frac{\partial v_\xi}{\partial \zeta}$ est fini dans la distance δ , et que v_ξ disparaît pour $\zeta = 0$, l'intégration partielle donne par conséquent:

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \zeta^2} \xi d\xi = \xi \frac{\partial v_\xi}{\partial \zeta} \Big|_0^{\delta} - \int_0^{\delta} \frac{\partial v_\xi}{\partial \zeta} d\xi = \delta \left(\frac{\partial v_\xi}{\partial \zeta} \right)_\delta - v_\xi \Big|_0^{\delta} = -v_\xi \Big|_0^{\delta} \quad (9)$$

Dans l'intégrale

$$\int_0^{\delta} \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \xi d\xi,$$

on peut supposer la constance approximative de $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$, ce qui donne lieu à un développement semblable:

$$\int_0^{\delta} \varepsilon \xi d\xi = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \xi d\xi = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi} \quad (10)$$

Le résultat définitif est que la vitesse tangente, à la distance δ des parois, aura une valeur finie, notamment:

$$v_\xi = -\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}; \quad v_\eta = -\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}; \quad (11)$$

§ 5. Il est évident que les lignes de flux seront approximativement parallèles aux parois; par conséquent, les vitesses normales ne peuvent pas excéder l'ordre de grandeur δ , puisque le flux traversant la couche d'épaisseur δ suivant une direction tangente sera

égal au flux passant par une partie finie de la surface suivant la direction normale. La distribution de ces vitesses et de la pression P sera définie par l'équation de continuité et par (5₁); mais nous n'en aborderons pas la discussion, puisqu'il suffit pour ce qui suit de savoir que la vitesse normale est évanescence par rapport aux vitesses tangentes.

Il est facile maintenant de déterminer la distribution des vitesses dans l'intérieur du liquide. Elles seront définies par les équations:

$$(12) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta^2 u; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \Delta^2 v; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \Delta^2 w; \quad \Delta^2 p = 0;$$

et par les conditions de surface, correspondant, avec omission de différences infiniment petites, à:

$$v_z = 0; \quad v_\xi = -\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}; \quad v_\eta = -\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta};$$

Eu égard aux propriétés de Φ , on en déduit la solution:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = -\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v = -\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \\ w = -\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad p = \text{const.} \end{array} \right.$$

C'est à dire que les courants mécaniques seront proportionnels aux courants électriques et auront la même direction, si $\varphi_i - \varphi_a$ est positif.

Cependant, il faut restreindre ce résultat en ce qui concerne les électrodes auxquelles ce calcul, qui suppose des parois isolantes, ne peut être appliqué. D'ailleurs, il mènerait à une conclusion absurde, car il exigerait qu'une quantité $\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} \frac{I}{\lambda}$ du liquide [I désignant l'intensité du courant électrique] passe à travers la surface des électrodes. On évite cette difficulté en superposant un mouvement correspondant à une source du liquide $\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} \frac{I}{\lambda}$ dans la cathode et un écoulement de la même quantité dans l'anode, avec adhésion complète aux parois. Les vitesses et les pressions qui en résultent, conformément aux problèmes ordinaires de l'Hydrodynamique d'un fluide visqueux, seront désignées par u_0, v_0, w_0, p_0 . Donc, le mouvement caractérisé par:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} \frac{\partial\Phi}{\partial x}; & v &= v_0 - \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} \frac{\partial\Phi}{\partial y}; \\ w &= w_0 - \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

satisfera aux équations fondamentales, aux conditions aux limites pour les parois isolantes, et à la condition de repos à la surface des électrodes; ce sera la solution cherchée¹⁾.

§ 6. Supposons maintenant, afin d'introduire les conditions qui correspondent aux travaux expérimentaux: un vaisseau sous forme de deux réservoirs, dans lesquels sont plongées les électrodes, avec un conduit resserré quelconque (tube ou diaphragme) qui opposerait une résistance considérable au passage du liquide.

Il faut distinguer deux cas:

α) le liquide a toute liberté d'effluer de l'extérieur dans les réservoirs ou de les quitter, de sorte qu'il n'y peut naître aucune différence de pression, ou

β) les réservoirs sont fermés et le liquide ne peut circuler que dans l'intérieur du vaisseau.

Le premier cas servira à réaliser l'endosmose électrique: la pression p_0 sera évanescente et de même les u_0 , v_0 , w_0 dans le conduit. Il n'y reste que les expressions (13). La quantité totale de liquide passant par le diaphragme (dans le sens du courant électrique) sera: $M = \int v_n ds$ où l'intégrale s'étend sur tout un profil équipotentiel $\Phi = \text{const.}$ dans le conduit, donc:

$$M = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} \int \frac{\partial\Phi}{\partial n} ds = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} I\sigma. \quad (15)$$

Ici σ désigne la conductibilité électrique. Dans le second cas, il y aura, en dehors du courant mentionné, un courant (u_0 , v_0 , w_0) superposé en sens inverse, animé d'une vitesse telle que la quantité totale du liquide passant devienne égale à zéro:

¹⁾ On pourrait se demander si les surfaces des électrodes ne pourraient pas donner naissance à des mouvements tangents comme les parois isolantes; mais en tout cas la modification du mouvement qui en résulterait, serait limitée à la proximité des électrodes; d'ailleurs, si les électrodes sont de bons conducteurs, leur surface sera une surface équipotentielle, ce qui ne donne pas lieu à des forces tangentes.

$$0 = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} I \sigma + \int v_{no} ds.$$

D'autre part, le passage de cette quantité $\int v_{no} ds$, à travers le diaphragme, correspond à une différence de pression p_0 , proportionnelle au produit de cette quantité par le coefficient de viscosité, c'est-à-dire que la pression cathodique sera supérieure, à celle qui règne auprès de l'anode, de $p_1 - p_2$ (ce que nous appelons pression électrosmotique):

$$(16) \quad p_1 - p_2 = - C \mu \int v_{no} ds = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi} C I \sigma.$$

§ 7. Notons d'abord le fait que la formule générale pour l'endosmose électrique (15) est identique à celle qui a été déduite par Helmholtz pour le cas des tubes Poiseuille, et aussi que sa formule pour la pression électrosmotique est contenue comme cas spécial dans notre résultat général; ce qui devient évident par la substitution de la loi de Poiseuille:

$$C = \frac{8l}{R^4\pi}$$

et de la loi d'Ohm:

$$\sigma I = \frac{R^2\pi(V_2 - V_1)}{l}$$

dans (16), d'où résulte l'équation de Helmholtz:

$$(17) \quad p_1 - p_2 = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi} \frac{8(V_2 - V_1)}{R^2}.$$

Remarquons aussi que les mesures de Wiedemann et Freund sont en accord parfait avec la formule (15). Elles ont démontré, en effet, la proportionnalité du courant mécanique au courant électrique indépendamment de l'épaisseur ou de la surface du diaphragme; la dépendance de σ est aussi confirmée approximativement pour des solutions de concentrations différentes. On ne peut pas s'attendre à rencontrer une preuve tout à fait exacte, puisque $\varphi_i - \varphi_a$ aussi dépend de la concentration.

D'autre part, la pression électrosmotique est, d'après les expériences de Wiedemann¹⁾, proportionnelle à $\frac{I\sigma d}{\Omega}$, [où d = épais-

¹⁾ Voir aussi Tereschin, Wied. Ann. 32 p. 333 (1887).

seur, Ω = surface du diaphragme], ce qui résulte aussi de la formule (16), en considérant que la constante C (définie plus haut) doit être proportionnelle, pour des diaphragmes à structure homogène, à $\frac{d}{\Omega}$.

§ 8. Mais il y a un troisième phénomène, outre ceux-ci, qui est embrassé par notre théorie: celui du transport électrique des petites particules suspendues dans un liquide, phénomène étudié surtout par Quincke²⁾.

Imaginons une sphère isolante, plongée dans un liquide, sous l'influence d'un champ électrique homogène. En acceptant la direction de celui-ci comme axe d'un système de coordonnées polaires, nous aurons l'expression suivante du potentiel extérieur Φ :

$$\Phi = -c x \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) = -c \cos \theta \left[r + \frac{a^3}{2r^2} \right]. \quad (18)$$

Done, si la sphère était fixe, elle produirait d'après (13) un mouvement potentiel du liquide environnant dans la direction des lignes de force; la vitesse à grande distance aurait la valeur constante

$$u = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} c. \quad (19)$$

Mais si nous la supposons mobile, dans un liquide sans mouvement, il est évident qu'elle sera poussée avec cette vitesse dans la direction de la cathode vers l'anode. Pour donner une idée de la valeur de cette vitesse, qui est indépendante des dimensions de la sphère, supposons:

$$\varphi_i - \varphi_a = 2 \text{ Volt}, \quad \mu = 0.018, \quad c = 1 \frac{\text{Volt}}{\text{cm}};$$

ce qui donne

$$u = 0.000093 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

C'est justement l'ordre des vitesses des ions dans l'électrolyse, fait curieux, qui pourrait suggérer des spéculations d'ailleurs hasardées.

Les mesures de Quincke mettent en évidence la proportionnalité de u avec la force électromotrice, mais il est à regretter qu'on n'y trouve pas toutes les données nécessaires à une compa-

²⁾ Wiedem. Ann. 113 p. 546 (1861).

raison complète avec les expériences. Toutes les substances étudiées par ce physicien se mouvaient vers l'anode dans l'eau, pendant que dans l'huile de thérébenthine le sens du mouvement était, pour la plupart, l'inverse (c'est à dire que la différence $\varphi_i - \varphi_a$ avait le signe contraire). En outre, il y avait cette singularité dans des tubes étroits que (l'intensité du courant dans l'eau étant très petite) les particules situées dans la proximité des parois avaient un mouvement inverse qui faisait place cependant au mouvement régulier lorsque le courant augmentait. Le premier fait est explicable par la circonstance que, dans des tubes étroits, il y a (d'après § 6 β) un courant du liquide dirigé vers la cathode près des parois, vers l'anode dans l'axe du tube, courants qui s'ajoutent au mouvement propre des particules. Ceci donnera lieu, en outre, à des mouvements rotatoires qui, en effet, ont été observés par Quincke. Mais la réversion du mouvement par augmentation du courant ne peut être expliquée ni par notre calcul, ni de la manière indiquée par Quincke (loc. cit.). Elle semble dépendre de facteurs secondaires, négligés dans ce calcul, ou d'autres phénomènes qui se manifestent dans des rotations des corps mauvais conducteurs dans le champ électrique¹).

Dans ces dernières années, des observations nombreuses ont été faites sur ce transport électrique, à propos des recherches sur les milieux troubles, émulsions, solutions colloïdales etc. Spring²) a énuméré les difficultés à vaincre pour obtenir une pureté parfaite des solutions (solutions optiquement vides); il trouve que la purification par un courant électrique en est le meilleur moyen.

§ 9. Passons maintenant à la théorie du phénomène inverse; les courants diaphragmatiques. Nous nous bornerons, comme auparavant, à une première approximation: en négligeant cette fois la réaction du champ électrique produit par le mouvement, sur celui-ci. Le calcul sera basé sur l'équation fondamentale des courants stationnaires qui exige dans ce cas que l'ensemble des courants de convection et de conductibilité ne produise pas d'accumulation d'électricité.

¹) Quincke, Wied. Ann. 59 p. 417 (1896); Schweidler, Sitzgber. Wien. Akad. 106, p. 526 (1857); Heydweiller, Wied. Ann. 69 p. 521 (1899); Graetz, Drudes Ann. 1 p. 530 (1900).

²) Bull. de Belg. (1899) p. 174, p. 300.

Puisque le premier terme du potentiel total:

$$U = \varphi + \Phi + V$$

ne produit pas de courant, et que le second est supposé nul dans ce cas, il ne reste que V pour la conduction, de sorte qu'on aura, en employant les symboles vectoriels:

$$\operatorname{div} \left[\frac{1}{\sigma} \nabla V + \varepsilon v \right] = 0 \quad (20)$$

ou sous la forme explicite:

$$\frac{1}{\sigma} \Delta^2 V + \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon u) + \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon v) + \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon w) = 0$$

ce qui se transforme, grâce à l'équation d'incompressibilité, en

$$\Delta^2 V = -\sigma \left[u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + w \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right]. \quad (21)$$

Il en résulte la valeur de V , en considérant que le courant normal à la surface de l'isolateur $\frac{1}{\sigma} \frac{\partial V}{\partial n}$ doit être nul:

$$V = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\sigma}{r} \left[u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + w \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right] d\omega. \quad (22)$$

L'expression intégrée ne diffère de zéro que dans la couche superficielle; nous pouvons donc admettre pour élément de volume une couche de surface dS et d'épaisseur $d\zeta$: $d\omega = dS \cdot d\zeta$, et puisque ε varie dans la direction normale à la surface, on peut écrire:

$$V = \frac{\sigma}{4\pi} \iiint \frac{v_\zeta}{\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} d\zeta dS.$$

Pour des points situés à une distance assez grande en comparaison de δ , l'intégrale peut être développée de la façon suivante:

$$V = \frac{\sigma}{4\pi} \iint \frac{dS}{r} \int v_\zeta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} d\zeta \quad (23)$$

où l'intégration de $d\zeta$ peut être effectuée par opération partielle répétée, en considérant que v_ζ , $\frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta}$ deviennent zéro à la surface de même $\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2}$ à des distances supérieures à δ :

$$(24) \quad 4\pi \int_0^{\delta} v_{\zeta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} d\zeta = - \int_0^{\delta} v_{\zeta} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \zeta^3} d\zeta = \int_0^{\delta} \frac{\partial^2 v_{\zeta}}{\partial \zeta^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} d\zeta.$$

Considérons maintenant l'équation mécanique formée d'après (5), mais avec Φ égal à zéro:

$$(25) \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = \mu \Delta^2 v_{\zeta}$$

où P satisfait à l'équation $\Delta^2 P = 0$ et, à la surface de la couche, se transforme d'une façon continue en la pression hydraulique ordinaire p . Par conséquent, on peut considérer P comme constant dans l'étendue de la couche δ ; d'autre part, en négligeant les termes plus petits, on aura:

$$\Delta^2 v_{\zeta} = \frac{\partial^2 v_{\zeta}}{\partial \zeta^2}.$$

Donc, la valeur de l'intégrale (24) sera:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \zeta} \int_0^{\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} d\zeta = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \zeta}.$$

Nous aurons:

$$(26) \quad V = \frac{\sigma}{4\pi} \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} \iint \frac{\partial P}{\partial \zeta} \frac{dS}{r}$$

et par suite de $\Delta^2 P = 0$:

$$(27) \quad V = \sigma \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} P + \text{const.}$$

Donc, la différence du potentiel en deux points de l'intérieur du liquide sera:

$$(28) \quad V_2 - V_1 = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} \sigma (p_2 - p_1).$$

§ 10. Cette formule aussi paraît identique avec le résultat analogue de Helmholtz, avec cette différence qu'elle ne s'applique pas seulement aux tubes capillaires, mais à des vaisseaux quelconques, où le liquide est animé d'un mouvement lent. En effet, les mesures de Quincke, où la pression et les dimensions des diaphragmes variaient, ont démontré la proportionnalité de la force électromotrice à la pression active et l'indépendance des dimensions du diaphragme. La relation avec σ est indiquée par l'observation

que l'addition de sels ou d'acides diminuait de beaucoup l'effet. Mais les conductibilités n'ont pas été mesurées, ce qui ne permet pas d'utiliser les nombres $\frac{V_2 - V_1}{p_2 - p_1}$ [p. ex. pour le soufre dans l'eau $10 \frac{\text{Volt}}{\text{atm}}$] pour une détermination de $\varphi_i - \varphi_a$.

Remarquons qu'on ne peut pas appliquer les formules (15), (16) et (28) au cas des mouvements rapides (p. ex. pour des tubes larges), dans lesquels l'effet de l'inertie $ou \frac{\partial u}{\partial x}$ etc., omis dans (1) et (25), est sensible. C'est l'inertie du liquide qui pourrait peut-être expliquer aussi un phénomène singulier d'asymétrie, observé par M. C. Zakrzewski¹⁾, avec des tubes argentés à l'intérieur. Car ce fait que la différence du potentiel entre la surface argentée et une électrode située auprès du bout du tube capillaire, changeait en valeur absolue, lorsque le sens du courant d'eau était inversé — ce phénomène ressemble à l'asymétrie du mouvement de l'eau dans un cas analogue, la formation d'un jet d'écoulement, qui est causée de même par l'inertie du liquide. D'ailleurs, ces expériences dépassent la portée de notre théorie, parce qu'on ne peut pas considérer la surface argentée comme isolante.

§ 11. Dans le § 1 nous avons mentionné la théorie de Lamb, rivale de celle de Helmholtz. La différence consiste en ce que Lamb n'accepte pas le principe de continuité dans la double couche électrique, mais qu'il la considère comme un condensateur dont les lames, à une distance d , sont couvertes d'une densité superficielle: $\rho = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi d}$. D'autre part, au lieu de la variabilité continue des vitesses, il suppose un glissement de ces lames avec une vitesse $u = \frac{lX}{\mu}$ sous l'influence d'une force tangente $X \left[\frac{\mu}{l} \right]$ désignant le coefficient de glissement].

Ces suppositions, simplifiées (et un peu généralisées), comparées à celles de Helmholtz, lui servent de fondement à des calculs qui mènent à des résultats presque identiques avec (15), (16) et (28), et qui en diffèrent seulement en ce que la valeur $\varphi_i - \varphi_a$ y est

¹⁾ Bull. de l'Acad. de Cracovie (1900) p. 224.

remplacée par $\frac{l}{d}(\varphi_i - \varphi_a)$. La question de savoir laquelle de ces hypothèses est la plus justifiée, ne peut être tranchée, ni „a priori“, ni par des expériences directes, puisque nous ne connaissons ni $\frac{l}{d}$, ni $(\varphi_i - \varphi_a)$, à moins qu'on puisse mesurer la différence de potentiel à l'aide d'une méthode indépendante. Mais si l'on pouvait démontrer, par des mesures faites sur des corps divers, que les valeurs considérées par Helmholtz comme $(\varphi_i - \varphi_a)$, par Lamb comme $(\varphi_i - \varphi_a)\frac{l}{d}$, se rangent dans une série de tension¹⁾, on serait alors en droit d'accepter un tel fait comme preuve indirecte de la théorie de Helmholtz, puisque en tout cas $\frac{l}{d}$ devrait avoir un caractère plutôt accidentel. On aurait alors, pour déterminer la différence du potentiel de contact entre de mauvais conducteurs, trois méthodes très faciles à appliquer, puisque, l'usage de tubes capillaires n'étant plus indispensable, on pourrait employer ces substances sous forme de diaphragmes (comme Quincke). Une application bien intéressante serait la vérification de l'hypothèse énoncée par Coehn: que le potentiel de contact entre des isolateurs dépend de leurs constantes diélectriques.

§ 12. Revenons encore à l'hypothèse, mentionnée au commencement, qui tâche d'expliquer la stabilité merveilleuse de certaines solutions troubles par les mêmes forces électriques. D'après cette hypothèse, les particules suspendues produiraient en tombant des courants, analogues à ceux des diaphragmes, qui empêcheraient leur mouvement et retarderaient la sédimentation. En effet, la sensibilité extrême de ces solutions pour une augmentation de conductivité, produite par des doses minimes de sels ou d'acides — suffisantes pour précipiter la matière suspendue — semble prêter appui à cette hypothèse. Notre théorie ne peut pas servir à un calcul exact d'un tel phénomène, puisque nous avons négligé la réaction de l'effet secondaire sur la cause primaire, mais on pourra du moins se rendre compte de l'ordre des grandeurs en question. Voici comment on peut raisonner:

¹⁾ C'est à dire que p. ex. les différences entre les valeurs pour l'eau et l'huile de térébenthine en contact avec d'autres corps seraient toujours les mêmes.

α) Le potentiel V [équation (27)] auprès d'une sphère animée d'une vitesse c dans le liquide, est proportionnel à la pression¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{3}{2} \frac{c \mu a x}{r^3}, \\ \text{donc } V &= \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi} \frac{3}{2} \frac{c a \sigma x}{r^3} = \frac{3}{2} \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\mu} \frac{c a \sigma \cos \theta}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

La composante tangente de la force électrique

$$\frac{\partial V}{\partial (a \theta)} = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi} \frac{3}{2} \frac{c \sigma \sin \theta}{a^2}$$

produirait, dans un liquide libre, un mouvement défini par les vitesses:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial}{\partial y} \\ w &= \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \right\} \left(\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi} \right)^2 \frac{c \sigma x}{\mu a^2} \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \quad (30)$$

correspondant, pour une grande distance, à la vitesse constante:

$$c' = \left(\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi} \right)^2 \frac{c \sigma}{a^2 \mu};$$

mais comme le liquide ne peut pas traverser les parois du vaisseau fermé, à sa place une pression électrosmotique prendra naissance:

$$p = \frac{3}{2} c' \frac{\mu a x}{r^3},$$

dans la direction opposée au mouvement primaire. Les forces résultantes satisferont à la condition d'équilibre:

$$6 \pi \mu a c \left[1 + \left(\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi} \right)^2 \frac{\sigma}{a^2 \mu} \right] = g (\varrho' - \varrho) \frac{4 a^3 \pi}{3}. \quad (31)$$

β) Considérons quelle sera l'énergie W dissipée par le courant électrique correspondant à V . La formule générale

$$W = \iiint \lambda \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] d\omega$$

¹⁾ Voir p. ex. Lamb, Hydrodynamics p. 532.

donne la valeur:

$$(32) \quad W = \frac{6 \pi c^2 \sigma}{a} \left(\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi} \right)^2.$$

Puisque cette énergie est produite aux dépens de l'énergie mécanique, il faut ajouter une force convenable à la résistance de friction $\sigma \pi \mu a c$. Il en résulte la même équation que plus haut.

L'expression

$$a = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi} \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}$$

détermine la petitesse des particules. En y substituant pour l'eau

$$\sigma = 10^9 [\text{Hg} = 1] = 1.17 \cdot 10^{-7} [\text{C. G. S.}]$$

$$\varphi_i - \varphi_a = 2 \text{ Volt} = \frac{2}{300} [\text{C. G. S.}],$$

on aura: $a = 10^{-6}$ cm. Donc cette théorie n'explique pas la stabilité des solutions troubles lorsque les particules sont de grandeur plus considérable, p. ex. de grandeur microscopique; pour des particules de dimensions si petites que ci-dessus, au contraire, la viscosité elle-même suffit à expliquer l'extrême petitesse des vitesses; on a:

$$c = \frac{2}{\rho} \frac{a^2 g}{\mu} (\rho - \rho') = 10^{-8} \text{ cm} [\text{pour } \rho - \rho' = 1]$$

c'est-à-dire que les particules ne s'abaisseront durant une année que d'un centimètre. L'épaisseur de la couche électrique d n'est peut-être pas négligeable devant de telles dimensions; mais en tout cas, ce raisonnement paraît démontrer que l'hypothèse mentionnée est insuffisante.

§ 13. Notons encore un détail qui n'a pas été observé jusqu'à présent: de même qu'au § 12, *b* on pouvait conclure de l'augmentation de l'énergie dissipée, par le courant diaphragmatique, un agrandissement correspondant de la résistance mécanique, de la même manière on peut conclure (en se basant sur la dissipation de l'énergie mécanique) que l'intensité du courant électrique augmente par suite de l'endosmose électrique. Cette conclusion est mise en évidence par la considération du mécanisme de ce phénomène, qui consiste dans la production d'un courant électrique de convection dans les couches superficielles. Nous avons l'intention de con-

sacrer une étude spéciale à ce phénomène, qui peut jouer un rôle important dans les mauvais conducteurs.

§ 14. La portée de ces phénomènes n'est pas restreinte aux cas discutés plus haut; mentionnons encore quelques sujets qui mériteraient d'être soumis à une étude expérimentale.

D'abord c'est l'électrisation par friction, dont nous voyons ici le mécanisme dans le cas le plus simple; cette remarque a déjà été faite par Helmholtz. Il est probable que l'explication d'autres cas, p. ex. du frottement des corps solides sera analogue. Ces théories s'appliquent aussi aux gaz: d'après Quincke, de petites bulles d'air, d'hydrogène etc. sont conduites vers l'anode. Il est probable que le phénomène inverse est présenté par l'électricité des chutes d'eau [d'après Lenard]¹⁾ et par la méthode de Kelvin²⁾ d'électriser l'air en le faisant passer en bulles par l'eau. L'air peut jouer aussi le rôle de fluide conducteur, comme dans les tubes Geissler et Crookes; dans ce cas, on devrait trouver le phénomène de la pression électroosmotique: une différence de pression entre la cathode et l'anode, qui pourrait être mise en évidence, lorsqu'il s'agit de raréfactions très grandes³⁾. D'autre part, il y a des phénomènes analogues au transport électrique, comme l'épuration de l'air des poussières, fumées etc., par des décharges électriques, qui manifestent une polarité marquée.

¹⁾ Wiedem. Ann. 46 p. 584 (1892).

²⁾ Proceedings Roy. Soc. 57 p. 335 (1895).

³⁾ Des observations pareilles ont été faites p. ex. par Séguy, Comptes Rendus 127, p. 385 (1898).

15. PUBLICATIONS DE LA CLASSE.

Le Secrétaire dépose sur le bureau les dernières publications de la Classe:

M. Federowski. „Lud białoruski na Rusi Litewskiej“. Materyały do etnografii słowiańskiej zgromadzone w latach 1877—1894. Tom II. Baśnie, powieści i podania ludu z okolic Wołkowyska, Słonima, Lidy, Nowogródka i Sokółki. Część II. Tradycje historyczno-miejsowe, oraz powieści obyczajowo-moralne. (*Les Blancs-Ruthènes de la Ruthénie lithuanienne; Contribution à l'Ethnographie Slave. Résultats de recherches effectuées en 1877—1894. Second Volume, deuxième partie*). 8-o, p. 314.

Katalog literatury naukowej polskiej, wydawany przez Komisję bibliograficzną Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności. Tom II. Rok 1903, zeszyt III. (*Catalogue of Polish Scientific Literature, vol. II., fasc. III. 1903*). 8-o, str. 47—65.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Pod redakcją

Członka delegowanego Wydziału matem.-przyr., Dra Władysława Natansona.

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządkiem J. Filipowskiego.

29 Kwietnia 1903.

