

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 1.

Janvier

1902.

- Sommaire:** 1. M. L. MARCHLEWSKI: Étude sur les dérivés de la chlorophylle.
2. M. A. WITKOWSKI: Note sur l'électricité atmosphérique à Zakopane dans les Tatras.
3. M. M. RYBIŃSKI: Coleopterorum species novae minusve cognitae in Galicia inventae.
4. M. M. STRZEŁECKA: Contribution à l'étude de la désoxybenzoïne.
5. M. A. KORCZYŃSKI: L'action du brome sur le durol, le pentaméthylbenzol et le hexaméthylbenzol.
6. M. L. NATANSON: Sur la propagation d'un petit mouvement dans un fluide visqueux.
7. M. S. ZAREMBA: Détermination du cas où les fonctions fondamentales de M. Poincaré sont déductibles de celles de M. Le Roy ou de celles de M. Stekloff.
8. M. M. RACIBORSKI: Sur les fleurs épiphyllées de l'orge sans barbes de l'Himalaya (*Hordeum trifurcatum* Schlch.).
9. M. M. RACIBORSKI: Sur la reproduction par bourgeonnement de la Marattiacée *Angiopteris evecta*.
10. M. M. RACIBORSKI: Sur une réaction chimique se produisant à la surface des racines.
11. M. M. RACIBORSKI: Sur quelques fougères nouvelles de l'Archipel malais.
12. M. S. KĘPIŃSKI: Sur l'intégration des solutions d'équations différentielles linéaires auto-conjuguées du deuxième ordre.
13. PUBLICATIONS DE LA CLASSE.

Séance du mardi 7 Janvier 1902.

PRÉSIDENCE DE M. N. CYBULSKI.

1. M. L. MARCHLEWSKI m. c.: *Ze studyów nad chlorofilem, (On chlorophyll derivatives), (Études sur les dérivés de la chlorophylle).*

I.

The conversion of phylloporphyrin into haematic acid.

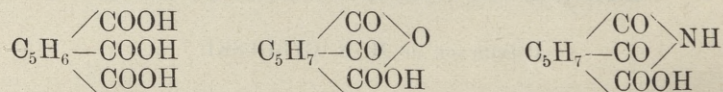
The following facts hitherto discovered and described may be quoted as proofs of the close chemical relationship of chlorophyll and the blood colouring matter. 1) The empirical formula of phylloporphyrin, a derivative of chlorophyll, is similar to that ascribed to haematoporphyrin, a derivative of the blood colouring matter¹⁾.

¹⁾ E. Schunck and Marchlewski. Proc. Roy. Society. London 59, 233.



2) The absorption spectra of phylloporphyrin and haematoporphyrin are very much alike, almost identical, no matter whether examined in neutral, basic or acid solvents. The same holds good of the spectra of the corresponding zinc compounds²⁾. 3) Towards bromine and nitric acid phylloporphyrin and haematoporphyrin behave very much alike³⁾. 4) A base of the formula $C_8H_{13}N$, which may be converted into urobiline by oxidation, can be obtained from haemin or haematoporphyrin and also from phylloeyanin, by treating these bodies with solutions of hydroiodic acid in presence of phosphonium iodide⁴⁾.

The present paper is devoted to the oxidation products of phylloporphyrin. These experiments were commenced as early as three years ago, but the amount of the quite pure oxidation product necessary for a combustion has been obtained only in the course of last summer. The oxidation of the blood colouring matter has been the object of very important studies by William Küster⁵⁾. The most important result of those researches being the discovery, that haemin may be converted by the action of bichromic acid into a body $C_8H_9NO_4$, which undergoes a change under the influence of alkalies or acids becoming converted into a new compound of the formula $C_8H_8O_5$. These substances stand in very simple relationship to each other, namely the compound last named may be considered as an anhydride of the threebasic acid and the first as the corresponding imide, thus:



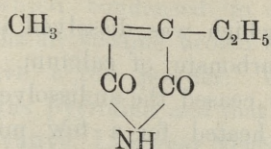
The imide undergoes under certain conditions a further change, it loses carbon dioxide and yields a new body of the formula $C_7H_9NO_2$, which according to Küster might be identical with the imide of methyl-ethyl-maleic acid:

²⁾ l. c.

³⁾ Marchlewski a. C. A. Schunck. Journal Chem. Society **77**, 1080.

⁴⁾ Marchlewski a. Nencki. Bull. intern. de l'Académie des Sciences de Cracovie **1901**.

⁵⁾ Ann. Chem. und Pharm. **317**, 174.



The said transformation of haematoporphyrin takes place judging by Küster's description, very easily and I hoped therefore, that even the oxidation of small quantities of phylloporphyrin at my disposal might lead to positive results. These hopes have been justified as will be shown in the course of this paper.

I used phylloporphyrin which contained a small admixture of some other substance, probably phyllorubin. Its solution caused a faint band in the red part of the spectrum, which is not shown by pure phylloporphyrin. It has been prepared from phylloeyanin; the latter was converted into phyllotaonin by treatment with an alkali and then heated in a solution of alcoholic potash to 190° in sealed tubes. The crude product obtained has been purified by alcohol, which dissolves chiefly phylloporphyrin leaving other substances undissolved. Not quite 5 gr. of the preparation obtained were dissolved in 500 cm³ of glacial acetic acid, 41 gr. of bichromate of sodium, dissolved in a little water, added and the whole heated on the water bath as long as a sample drawn gave the chromic acid reaction distinctly. As soon as the latter test became but faint the acetic acid was distilled off, at first by direct flame, afterwards on a water bath under reduced pressure. The residue I treated with an amount of sulphuric acid necessary to decompose the acetates of chromium and sodium, formed in the course of the reaction, filtered off some undissolved matter and extracted the filtrate three times with ether. The joint extracts were evaporated to dryness and a mass obtained, which at first thick and oily became after standing crystalline. Assuming, that similarly as in the case of haematoporphyrin two substances were formed, namely the imide and anhydride of the threebasic haematic acid I decided, in order to simplify matters, to decompose the imide and to obtain if possible the anhydride named and identify it. With this end in view I dissolved the ethereal residue in some warm water and an excess of carbonate of sodium and left the solution at rest for 24 hours, after which time the mass has been acidulated with sulphuric acid and again extracted with ether. The ethereal extract gave on evapora-

tion a crystalline mass, which was dissolved in cold water and treated with precipitated carbonate of calcium. As soon as the evolution of carbon-dioxide ceased the undissolved carbonate was filtered off and the filtrate heated for a few minutes to the boiling point. There was in this way produced a white precipitate, which proved to be the basic calcium salt of haematic acid. The precipitate I stirred into water, decomposed with some hydrochloric acid and extracted the liquid with ether; after evaporating the latter white crystals were obtained, which after two recrystallisations from as little as possible water showed the melting point of $95.5-96^{\circ}$, that is nearly the same as given by Küster for his anhydride of haematic acid. In all 0.8 gr. of the substance has been obtained:

Analysis: 0.1228 gr. subst. gave 0.2339 gr. CO_2 and 0.0522 gr. H_2O
 obtained 51.95% 4.72% H
 calcul. $\text{C}_8\text{H}_8\text{O}_5$ 52.17 " 4.34 " "

In order to get further proofs of identity of this substance with Küsters acid, 0.5 gr. were dissolved in water, neutralised with ammonia and precipitated with silver nitrate. The amorphous white precipitate gave the following results on being analysed:

0.6282 gr. gave 0.4380 gr. Ag_2S
 calc. for $\text{C}_8\text{H}_7\text{Ag}_3\text{O}_6 + \frac{1}{2}\text{H}_2\text{O}$ — 60.83% Ag
 found 60.64 " "

The properties of the oxidation product of phylloporphyrin described viz. its melting point, its composition, the readiness to give a basic calcium salt and the composition of the silver salt make it evident, that the oxidation of phylloporphyrin by means of bichromate of sodium leads to a substance identical with the anhydride of the threebasic haematic acid, obtained under similar conditions from haemin, haematoporphyrin and bilirubin.

II.

The reduction of phyllocyanin by zinc dust.

E. Schunck and myself¹⁾ have as far back as the year 1895 studied the change, which derivatives of chlorophyll undergo, when heated with zinc dust. We noticed that there were formed peculiar-

¹⁾ Proc. Roy. Soc. London 59, 233.

ly smelling fumes, which condensed to a colourless oily liquid, which on standing in the air became brown and on being heated with hydrochloric acid gave a red powder. We concluded that the substance produced was pyrroline and that chlorophyll may be possibly a pyrroline derivative. Last year Nencki and I²⁾ obtained from phyllocyanin cupric acetate by treating it with hydroiodic acid and phosphonium iodide a base which under the influence of air gave urobilin. The properties of the base mentioned reminded me forcibly of the substance we had obtained with Dr. Schunck by means of the reaction described above and I thought it interesting enough to ascertain in what relationship the two substances, the one obtained by dry reduction the other by hydroiodic acid stand to each other. I found, that the two substances were identical. This is proved by the following experiments. 1 gr. phyllocyanin, obtained by E. Schuncks method was mixed with 10 gr. of zinc dust and the mixture heated in a glass tube. Very soon there may be noticed in the cold parts of the tube oily drops of a liquid, which turns rapidly reddish brown. After cooling the tube was extracted with warm alcohol, filtered, to the filtrate water added and filtered again. A sample of the filtrate gave with mercuric chloride a white precipitate. The remaining liquid was left to stand in the air; after some time a red colouration was noticeable and on closer examination a very fine red precipitate observed. By adding alcohol to this mixture and boiling up a reddish brown solution was obtained, which on being examined through the spectroscop showed an absorption band in front of the F line. The addition of a solution of zinc chloride in alcoholic ammonia caused a green fluorescence and the liquid on being again examined spectroscopically showed also a band in front of F. These tests show, that the red colouring matter obtained from phyllocyanin in the manner described above is identical with urobilin and that the volatile substance, obtained by heating phyllocyanin with zinc dust, cannot be anything else but haemopyrrol.

III.

The absorption spectra of phylloporphyrin salts in aqueous solutions.

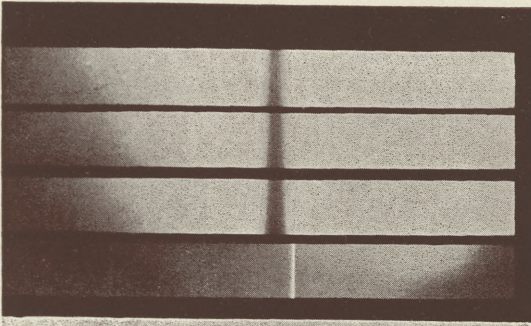
It is well known, that one of the inferences of the theory of electrolytic dissociation is, that in the case of quantitatively disso-

²⁾ l. c.

ciated salts, possessing a common coloured ion, the light absorption of aequimolecular solutions must be identical. The researches by Ostwald have shown this conclusion to be correct. The scientist named examined however chiefly solutions of salts with coloured negative ions.

Phylloporphyrin is a comparatively strong base, the salts of which produce quite different absorption spectra than the free base and may be used therefore as an excellent example of salts with coloured positive ions. The solutions of phylloporphyrin in neutral solvents produce, as far as the less refrangible part of the spectrum is concerned, 7 bands, whilst the solutions in mineral acids cause, when examined in dilute solutions, only three bands. Assuming that the formula $C_{16}H_{18}N_2O$ expresses correctly the composition of phylloporphyrin, the formula of the hydrochloric acid compound might be $C_{16}H_{18}N_2O.HCl$ or $C_{16}H_{19}N_2OCl$, similarly as in the case of haematoporphyrin. The same will hold good in the case of salts derived from other strong acids. Assuming further, that these salts are dissociated electrolytically in aequous solutions, we will obtain in all cases the coloured ion $C_{16}H_{19}N_2O$ and the equimolecular solutions of these salts ought to produce in the spectrum identical absorptions. Direct observations show that the assumption made is a correct one. The spectra of phylloporphyrin dissolved in diluted solutions of hydrochloric, nitric and sulphuric acids show three bands in the less refrangible part of the spectrum in absolutely the same position and a band just behind the k_β line, discovered by C. A. Schunck³⁾ The reproductions of photographs, accompanying this paper, show this clearly although they do not do justice to the originals. The solutions were prepared as follows: Equal quantities of an alcoholic solution of phylloporphyrin were added to equal quantities of normal hydrochloric, nitric and sulphuric acids and the solutions obtained diluted by adding the same quantities of water in each case till suitable strengths for the spectroscopic examinations were produced. The solutions used for photographing the ultraviolet spectrum were diluted to such an extent, that a colouration of the liquid was scarcely perceptible.

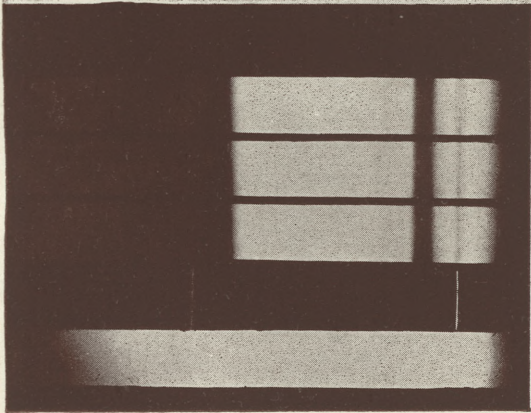
³⁾ Proc. Roy. Soc. London 63, 389.



Phylloporphyrin dissolved in dil. HCl
 " " " " H_2SO_4
 " " " " HNO_3
 kβ

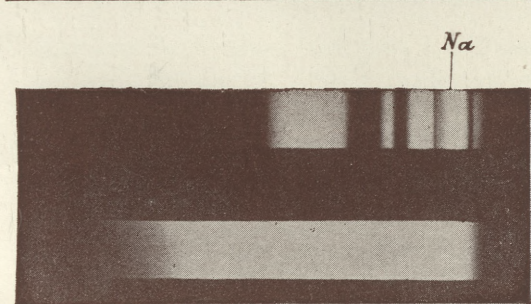


Various concentrations of phylloporphyrin in dil. HCl.



Phylloporphyrin dissolved in dil. HCl
 " " " " H_2SO_4
 " " " " HNO_3
 Na

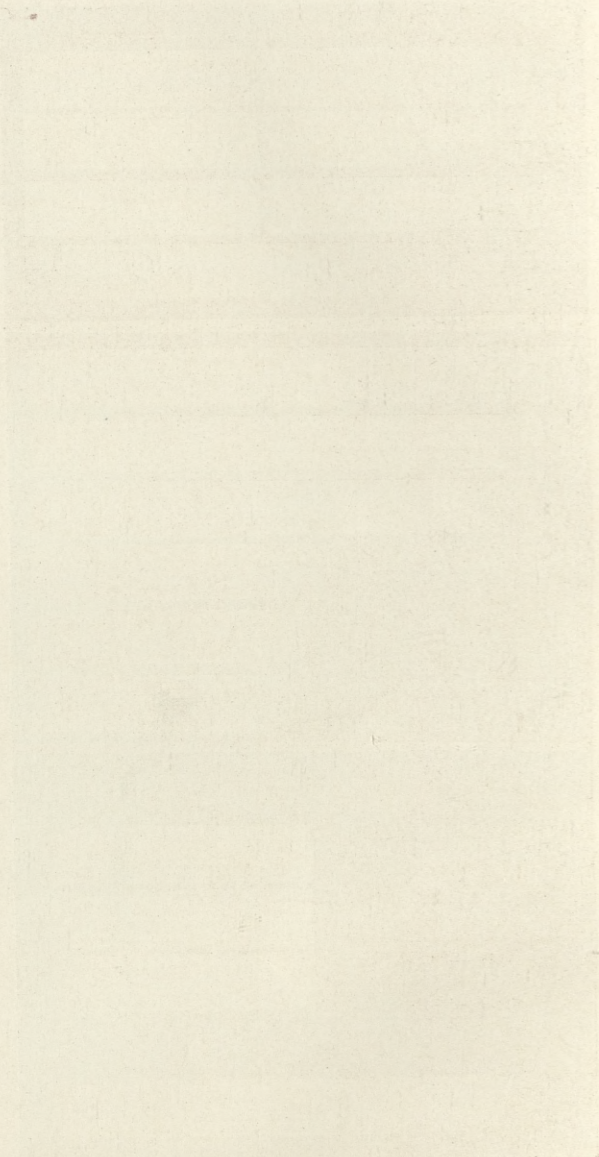
source of light.



Phylloporphyrin dissolved in ether

source of light.

L. Marchlewski.



2. M. A. WITKOWSKI m. t.: **Spostrzeżenia nad elektrycznością atmosferyczną w Zakopanem.** (*Note sur l'électricité atmosphérique à Zakopane dans les Tatras.*)

Le rapport „sur l'électricité atmosphérique,” présenté par M Exner au Congrès international de physique en 1900¹⁾ a mis en évidence le nombre très insuffisant des données expérimentales sur la valeur absolue du champ électrique en terrain plat. Il ne sera donc pas inutile de communiquer à l'Académie les résultats de quelques observations faites pendant les mois de vacances (Août. Septembre 1901) à Zakopane, dans une vallée large et à fond plat située du côté nord des monts Tatras, à une altitude de 850 m

Actuellement les observations de cette nature sont considérablement facilitées grâce à la découverte par M. et Mme Curie de substances fortement radioactives et ionisantes, Polonium et Radium, qui ont déjà été employées à la construction d'électrodes collectrices par M. Paulsen²⁾. Etant en possession d'une petite quantité de

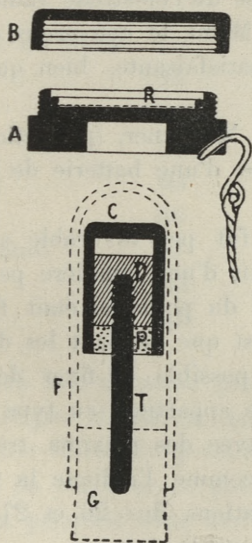


Fig. 1.

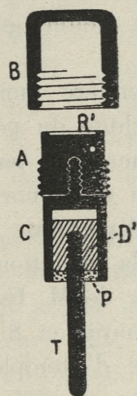


Fig. 2.

chlorure de baryum radifère dont l'activité a été désignée par le nombre 1200 par M. et Mme Curie, qui ont présenté ce corps en 1899

¹⁾ Rapports, tome III. p. 415.

²⁾ Rapport sur l'aurore polaire, (Congrès de phys. tome III, p. 445).

au Laboratoire de physique de l'Université de Cracovie, j'ai pu construire des électrodes collectrices beaucoup plus petites que celles de M. Paulsen; quelques milligrammes de la substance radioactive suffisent. Je me suis servi de deux types qui sont représentés par les fig. 1 et 2 en grandeur naturelle (*A* boîte au radium en laiton. *B* deux rondelles de papier à filtrer superposées, frottées sur leur surface intérieure avec du chlorure de radium; *R'* [fig. 2] cavité de 0.5 mm remplie de chlorure, recouverte d'une feuille de papier mince, fixée par les bords au moyen de gomme-laque et d'une seconde feuille en aluminium. *B* couvercle. *C* isolateur en laiton. *D* pièce d'ébonite, [*D'* pièce d'ambre jaune] fixée dans la cavité de *C*, recouverte de paraffine *P*. *T* tige métallique servant à fixer l'isolateur à une tige en bois de 1 m 70. *F* tube en verre, *G* bouchon, destinés à protéger l'isolateur pendant le transport).

Je me suis assuré que les indications de l'électromètre, obtenues à l'aide de l'électrode au radium sont identiques à celles que fournit une flamme réceptrice; celles de l'électrode radioactive sont d'ailleurs beaucoup plus stables. Même le couvercle étant fermé, l'électrode agissait d'une manière satisfaisante, bien que beaucoup plus lentement.

L'électromètre était celui de M. Exner, (perfectionné par M. M. Elster et Geitel) gradué à l'aide d'une batterie de petits accumulateurs.

La première moitié de l'été fut peu favorable aux observations. La chute du potentiel variait d'une manière peu régulière; pendant le mauvais temps le signe du potentiel était fréquemment contraire au signe normal. Ce n'est que pendant les dernières semaines de Septembre qu'il devint possible de fixer définitivement le type de la variation diurne. Elle appartient au type *a*, selon la classification de M. Exner (l. c.), avec des maxima très accentués à 8 h. du matin, et 8 h. du soir, comme l'indique la fig. 3, résumant à titre d'exemple les observations des 26 et 27 Septembre, effectuées par un ciel parfaitement serein.

La moyenne générale de toutes les mesures effectuées en Août et Septembre 1901 (environ 150) conduit au tableau suivant des chutes du potentiel, en volts par mètre, correspondantes aux différentes heures du jour¹⁾:

¹⁾ Temps du 15-me méridien; l'heure locale est de 20 min. en avance.

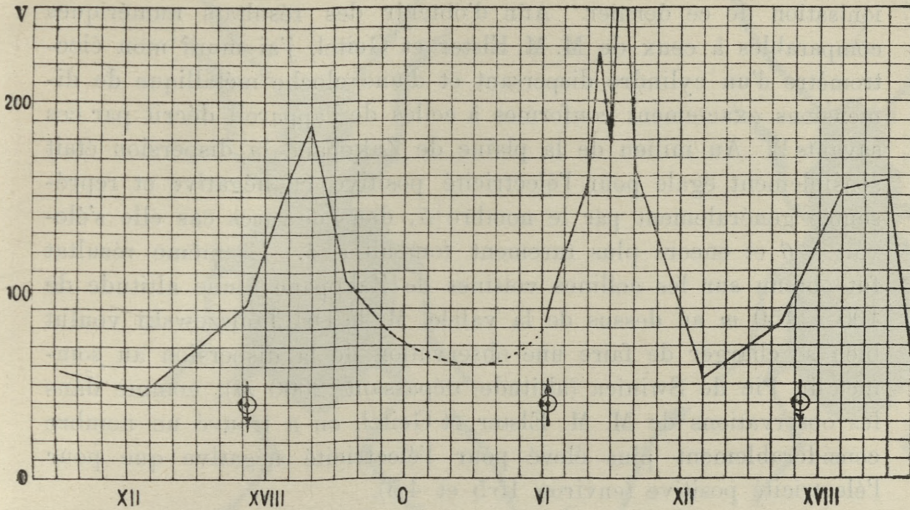


Fig. 3.

VI h. du matin	85	III	58
VII	135	IV	65
VIII	190	V	75
IX	85	VI soir	95
X	65	VII	135
XI	60	VIII	190
XII midi	57	IX	145
I	55	X	85
II	56	XI	55

J'ai donné une attention particulière au phénomène très intéressant, signalé par M. Exner, qui consiste en une élévation brusque et de courte durée du potentiel au moment précis du coucher du soleil. J'ai pu observer ce phénomène plusieurs fois; dans l'un des cas, il s'est présenté sous une forme particulièrement accentuée (variation brusque de plus de 120 volts dans l'espace de quelques minutes). Bien que je n'aie laissé passer presque aucune occasion favorable, je n'ai trouvé dans la plupart des cas que des variations accidentelles ordinaires.

En dernier lieu, je me suis occupé de la vérification des résultats obtenus par M. M. Elster et Geitel concernant la dispersion de l'électricité dans l'air atmosphérique, phénomène attribué à une

ionisation de ce dernier. Afin d'obtenir des résultats numériques comparables à ceux de M. M. Elster et Geitel, j'ai muni mon électromètre d'un cylindre dispersant et d'une cloche métallique de dimensions exactement conformes à celles de l'appareil décrit par ces savants¹⁾. Au milieu de la plaine de Zakopane la dispersion était sensiblement égale pour l'électricité positive et négative et représentée généralement par le nombre 5; dans de rares cas elle s'élevait à 6 et encore plus rarement tombait à 4. Le même résultat fut obtenu sur les collines voisines de Zakopane à une altitude de 100 à 150 *m* au dessus de la vallée. M. le Dr. Janiszewski voulut bien se charger de faire une observation de la dispersion au sommet du Pic de Swinica (altitude dépassant 2000 *m*); comme dans les observations de M. M. Elster et Geitel, on a trouvé un nombre considérablement plus élevé pour l'électricité négative que pour l'électricité positive (environ 15.5 et 4.5).

3. M. M. RYBIŃSKI: **Coleopterorum species novae, minusve cognitae, in Galicia inventae.** Accedunt tab. 2. Mémoire présenté par M. A. Wierzejski, m. c.

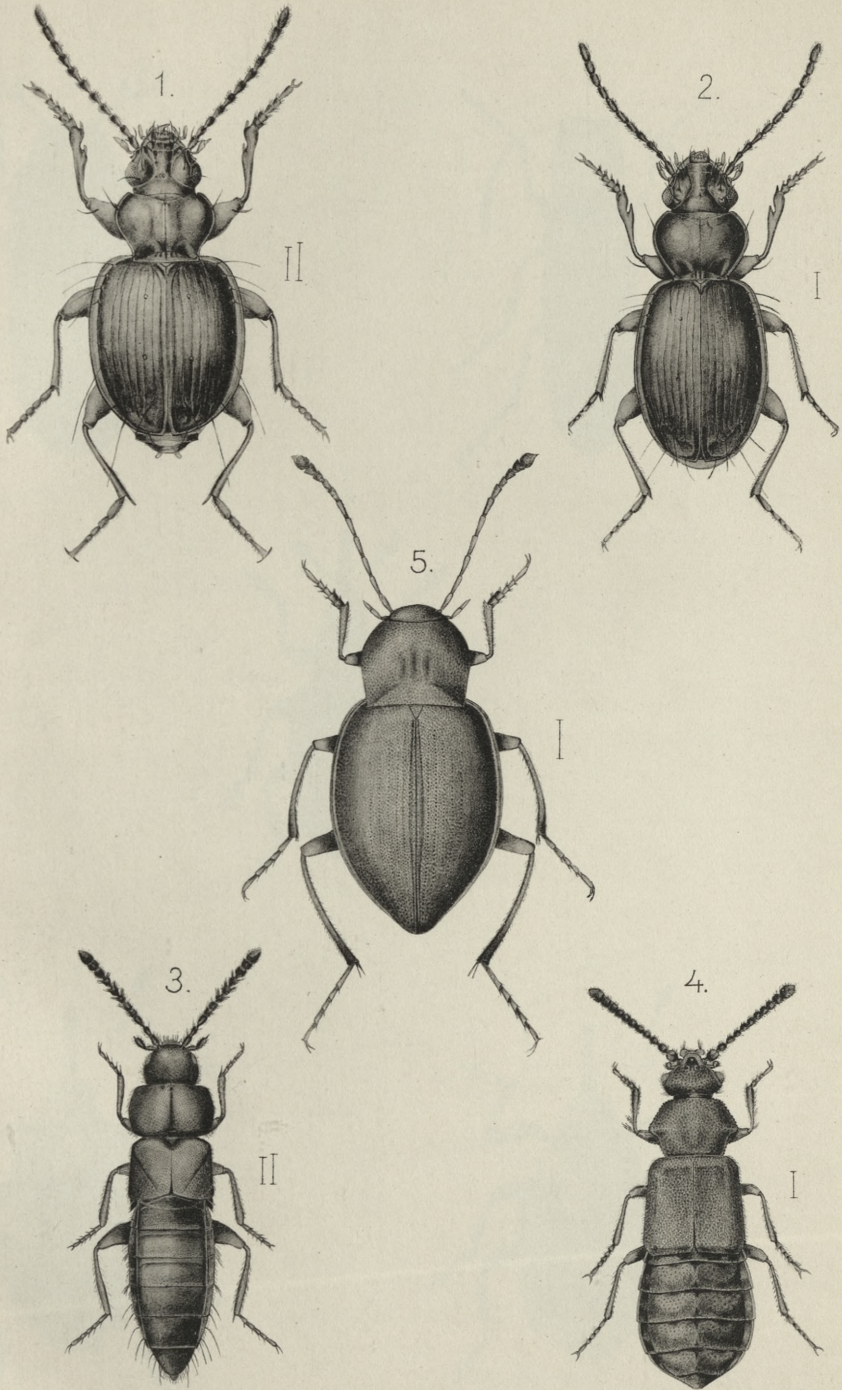
Der Verfasser beschreibt folgende elf neue Käferarten aus Galizien:

1. *Nebria Reitteri*, nov. sp. Der *N. Reichi* v. *bisenica* Biecz. zunächst verwandt. Dieselbe unterscheidet sich von ihr durch bedeutendere Grösse, das Verhältnis des Kopfes zum Halsschild, sowie des letzteren zum Hinterleib, mehr vortretende Vorderwinkel des Halsschildes und durch je zwei borstentragende Punkte beiderseits auf den mittleren Ventralsegmenten. 12 mm lang. In den Ost-Karpaten (Czarna Hora).

2. *Trechus fontinalis*, Ryb.²⁾. Der nächste Verwandte des *Trechus latus* Putz., demselben sehr ähnlich und wahrscheinlich mit selbigem verwechselt. Derselbe unterscheidet sich von letzterem hauptsächlich durch das erste Glied der Hintertarsen, welches bei *T. fontinalis* länger und verbreitert ist. Die Länge beträgt 4.5—

¹⁾ Annalen der Physik, 2, 1900, p. 425.

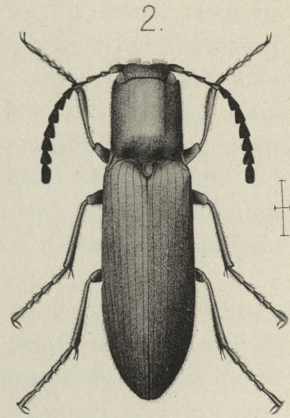
²⁾ Sprawozdanie Komisji fizyograficznej Tom XXXV, str. 66. *Trechus fontinalis*, Ryb. nov. sp. Vorläufige Diagnose.



1. *Trechus fontinalis*. 2. *Tr. carpathicus*. 3. *Atheta Smolkai*.

4. *Eudectus Kuiczyński*. 5. *Choleva magnifica*.





1. *Throscus laticollis*. 2. *Ludius Ganglbaueri*, 3. *Ceuthorrhynchus formosus*,
4. *C. galiciensis*. 5. *Apion podolicum*.



5 mm. Aus den Ost-Karpaten (Czarna Hora). Er wurde auch im Tatra Gebirge gesammelt, und ist wahrscheinlich weiter verbreitet.

3. *Trechus carpaticus*, nov. sp. Dem *T. pulchellus* Putz. ähnlich, jedoch von mehr depressen und länglichem Körperbau, längeren Fühlern, mit sehr fein, aber deutlich gestreiften Flügeldecken. Die ersten fünf Streifen deutlich, der sechste weniger, nur der letzte ist fast erloschen. Die Zwischenräume der Streifen sind ganz eben. 3·5 mm lang. Aus den Ost-Karpaten (Czarna Hora). Lebt in Gesellschaft mit *T. pulchellus* Putz.

4. *Atheta (Oreostiba) Ganglb. Smolkai*, nov. sp. Der *A. tibialis* Heer. zunächst verwandt und sehr ähnlich, jedoch mehr als doppelt so gross, mit breiterem Halsschild, robusteren Fühlern, an denen das dritte Glied viel länger als das zweite ist, auch sind die kurzen Flügeldecken gleich breit. 3·5 - 4 mm lang. Aus den Ost-Karpaten (Czarna Hora) in einer Höhe von 2018 m aus Gras und Moos gesiebt.

5. *Eudectus Kulczyński* nov. sp. Mit *E. Giraudi* verwandt, jedoch grösser, durch schwarze Farbe des Körpers und feinere dichtere Punktierung verschieden. Auch ist die Lebensweise und das Vorkommen desselben ein anderes. 3·5 mm lang. Lebt auf den höchsten Stellen des Tatra Gebirges im Grase und Moos.

6. *Choleva magnifica*, nov. sp. Unter den bekannten *Choleva*-Arten, durch kurze gedrungene Gestalt, breit ovale Flügeldecken und scharf rechtwinkelige (nahezu spitzige) Hinterecken des Halsschildes leicht zu unterscheiden. 5 mm lang. Aus den Ost-Karpaten (Czarna Hora) unter grossen Steinen am Schnee.

7. *Throscus laticollis*, Ryb.³⁾ Unter den bekannten *Throscus*-Arten die grösste, leicht kenntlich an den ungetheilten Augen und dem Halsschild, welcher im letzten Drittel stark erweitert und plattgedrückt ist. 4 mm lang. West-Galizien. Klaj.

8. *Ludius Ganglbaueri*, nov. sp. Von der Gestalt eines kleinen *Sericus subaeneus* Redt., jedoch durch die Fühlerbildung, durch den nach vorn nur wenig verengten ziemlich langen Halsschild, die bis zum letzten Drittel parallelen Flügeldecken und die feine und dichte Punktierung des erstere leicht zu unterscheiden. Nach der

³⁾ Sprawozdanie Komisji fizyograficznej Tom XXXII, str. 56. *Throscus laticollis* Ryb. Vorläufige Diagnose.

Halsschildbildung auch einem *Athous* ähnlich. 7·5 mm lang. 2 mm breit. Ost-Karpaten. Tuchla.

9. *Ceuthorrhynchus formosus*, nov. sp. Eine sehr ausgezeichnete schwarze Art mit schwarzblauen, tief punktiert gestreiften Flügeldecken, deren Zwischenräume eben und scharfkantig und mit einer regelmässigen Punktreihe versehen sind. Die Flügeldeckenspitzen sind gekörnt. Der Rüssel ist von der Einlenkungsstelle der Fühler bis zum Kopfe tief punktiert gestreift. Der Halsschild hochgewölbt, vorn stark, rückwärts schwächer eingeschnürt, mit aufgebogenem Vorder- und geleistetem Hinterrande, kaum erkennbar gehöckert. Die Schenkel sind schwach gezähnt. 3 mm lang, ohne Rüssel. Ost-Galizien. Tarnopol.

10. *Ceuthorrhynchus galiciensis*, nov. sp. Dem *C. scapularis* Gyll. sehr ähnlich, etwas grösser, stahlblau mit grünlich blauen Flügeldecken, schwarzem längerem Rüssel, schwarzen Schienen und Tarsen, und ohne den drei weissbehaarten Längsbinden auf dem Halsschilde. 2·5 mm lang, ohne Rüssel. West-Galizien. Krakau.

11. *Apion podolicum*, nov. sp. Dem *A. rubens* Steph. am nächsten verwandt. Derselbe unterscheidet sich von diesem durch einen längeren Rüssel und durch den nach rückwärts nicht erweiterten Körper, dessen grösste Breite in der Mitte liegt. Die Flügeldecken sind parallel, in der Mitte schwach erweitert, mässig gewölbt. 2·2—2·5 mm lang, ohne Rüssel. Ost-Galizien. Tarnopol.

-
4. MARYA STRZELECKA. **Przyczynek do znajomości homologów desoksybenzoiny.** (*Zur Kenntnis der Homologen des Desoxybenzoins*). (*Contribution à l'étude de la desoxybenzoïne*). Note présentée par M. B. Radziszewski, m. t.

Eine Methode, nach welcher die aromatischen Ketone zu erhalten sind, ist die trockene Destillation der Baryumsalze entsprechender Säuren (Br. Radziszewski Ber. 3—198). Auf diesem Wege wurde von der Verfasserin Phenyl-p-xylylketon ($C_6H_5 - CO - CH_2 - C_6H_4 - CH_3$) erhalten, welches Strassman (Ber. 22—1231) durch Einwirkung des Aluminiumchlorids auf die Mischung des p-Toluyllessigäurechlorids und des Benzols gewonnen hat.

Die Verfasserin hat die Mischung des toluylessig- und benzoesäuren Baryums der trockenen Destillation unterzogen. Die p-Toluylessigsäure wurde nach Radziszewski und Wispek (Ber. 15—1744, 18—1281) erhalten.

Die entsprechenden Mengen der beiden Säuren wurden in einer heissen Baryumhydroxydlösung gelöst, der Überschuss der Base durch Kohlensäure gefällt und die klare Flüssigkeit abgedampft. Durch Destillation des trockenen pulverisierten Überrestes unter vermindertem (60 mm) Drucke gewinnt man einen gelblichen Körper, der aus Alkohol umkrystallisiert. wasserhelle Säulen bildet. Sie schmelzen bei 57° C (nach Strassman soll dieses Keton bei 94° C schmelzen) und sind in heissem Wasser, Alkohol und Aether leicht löslich. Die Elementaranalyse giebt befriedigende Resultate.

Sein Oksim, durch Einwirkung von salzsaurem Hydroxylamin und Natronlauge erhalten, bildet feine Nadeln, die bei 109° schmelzen und in Alkohol und Aether leicht, in heissem Wasser schwer löslich sind.

Die Verfasserin machte die Probe, ob die Gruppe CNS im p-Xylylbromid das Brom substituieren kann. Das Bromid wurde zu diesem Zwecke mit Sulfoeyankalium in alkoholischer Lösung einige Stunden erhitzt. Dann wurde der Alkohol abgedampft, das Kaliumbromid in Wasser gelöst und die ausgeschiedene öhliche Flüssigkeit durch Schütteln mit Wasser zum Erstarren gebracht. Aus einem Gemische von Anilin und Aether umkrystallisiert, bildet das p-Xylylsulfoeyanat ($\text{CH}_3 - \text{C}_6\text{H}_4 - \text{CH}_2 - \text{CNS}$) feine, weisse, bei längerem Stehen in der Luft vergilbende Nadeln, welche bei 134° C schmelzen und in Wasser, Alkohol und Aether unlöslich sind.

Die Schwefelbestimmung nach I. Messinger (Ber. 21—2910) hat 19·73% statt 19·64% ergeben.

Aus dem chem. Laboratorium der Universität in Lemberg.

wird. Dieser Vorgang findet auch statt, wenn zu dem Kohlenwasserstoff bloß ein Theil der Mischung hinzugefügt wird.

Nach Beendigung der erwähnten Reaction wurde mit dem Einleiten von Methylchlorid angefangen.

2. Frisches Pseudocumol hat sich leichter methylieren lassen als schon einmal gebrauchtes, was durch Wägen des Kolbens, in dem man die Reaction ausgeführt hatte, constatirt wurde. Nachdem derselbe ungefähr das Gewicht erlangt hat, welches der äquivalenten Menge von Durol entspricht, trat ein Zustand ein, wo Methylchlorid nicht mehr absorbiert wurde. Das Product wurde dann mit Wasser zerlegt, getrocknet und von den festen Körpern abdestillirt. Auf diese Art erhielt man ungefähr 50% des unveränderten Pseudocumols zuzück, das man zwecks weiterer Methylierung mit frischem vermischte.

3. Nach Verbrauch der ganzen Menge frischen Pseudocumols hinterblieb eine Quantität (ca. 200 gr) Pseudocumol, welche von obigen Experimenten herstammte und sich sowohl bei der Temperatur von 90—110°, bei welcher die anderen Versuche ausgeführt wurden, wie auch bei einer höheren äusserst schwer methylieren liess.

4. Eine merklich bessere Ausbeute in Penta- und Hexamethylbenzol erhielt man, wenn man während der Methylierung die berechnete Mischung von Sublimat und Aluminium portionenweise hinzufügte.

Die Menge der letzteren entsprach dem Gewichte des fertigen Aluminiumchlorids, das Friedl und Crafts angewandt haben.

Man erhielt 5% Durol und kleine Mengen von Penta- und Hexamethylbenzol, die durch fractionierte Destillation und Krystallisation, sowie nach den von Jacobsen angegebenen Methoden gereinigt wurden.

Das Bromieren des Durols im Dunkeln.

2 gr Durol wurden in Eisessig gelöst und in der Dunkelkammer mit $\frac{3}{4}$ der auf das Monoproduct berechneten Menge Brom versetzt. Das vollkommen vor Licht geschützte Gefäß wurde in der Zimmertemperatur eine Woche lang stehen gelassen, wonach sich hie und da Krystalle abgeschieden haben. Das Product wurde mit Wasser gefällt und getrocknet, dann mit kleinen Mengen kalten Alkohols (je 6 ccm) mehrmals digeriert und die einzelnen Fractionen hierauf auskrystallisiert. Die ersten in kaltem Alkohol leicht

löslichen Fractionen enthielten Monobromdurol neben unverändertem Durol, was man durch Bestimmung des Schmelzpunktes festgestellt hat. Der in kaltem Alkohol unlösliche Theil, der ebenso wie der vorige mit alkoholischem Silbernitrat selbst beim Kochen keine Fällung gab, wurde aus heissem Alkohol umkrystallisiert und durch Bestimmung des Schmelzpunktes mit dem von Fittig und Jannasch¹⁾ beschriebenen Dibromdurol (Schm. P. 199—200°) identificiert.

Im Dunkeln entstehen also Mono- und Dibromdurol nebeneinander.

Das Bromieren des Durols im Sonnenlicht.

Zu der Lösung von 2 gr Durol in Eisessig fügte man tropfenweise im starken Sonnenlicht $\frac{3}{4}$ der berechneten Menge Brom hinzu, wobei die braune Färbung rasch verschwand. Nach einer Viertelstunde wurde die strohgelbe Lösung mit Wasser gefällt und in der beim vorigen Experiment beschriebenen Weise weiter verfahren. Das Product gab mit alkoholischer Silbernitratlösung keine Fällung und war ein Gemisch von Monobromdurol und unverändertem Durol.

Das Bromieren des Durols bei erhöhter Temperatur.

Eine kleine Tubulus-Retorte aus Glas wurde mit einem Erlenmayer-Kolben verbunden, der die abgemessene Quantität von Brom enthielt und durch dessen Pfropfen zwei Glasröhrchen führten. Das eine diente dazu, um die durch conc. H_2SO_4 getrocknete Luft aus einem Gasometer in den Kolben zu leiten, das andere Röhrchen führte die durch den langsamen Luftstrom mitgerissenen Bromdämpfe durch den Tubulus ins Innere der Retorte. Letztere, deren Hals mit einem Absorbtiionsapparat verbunden war, enthielt die abgewogene Menge Durol und befand sich auf einem lebhaft siedenden Wasserbade. Nachdem die Reaction, die bei 7 gr Durol und einer für das Monoproduet berechneten Menge Brom 3 Stunden lang gedauert hatte, beendet war, wurde der Inhalt der Retorte in Benzol gelöst. Die durch Abtreiben des Benzols erhaltene weiche, mit Krystallen durchsähte Masse, die einen zu Thränen reizenden Geruch besitzt, wurde auf einer Thonplatte getrocknet und aus Alkohol umkrystallisiert. Schm. P. 157°. Mit alkoholischer Silber-

¹⁾ Zeitschrift für Chem. J. 1870, 161.

nitratlösung Fällung von AgBr. Kleine weisse Nadelchen, leicht in Benzol, Aether, CS_2 , Ligroin, etwas schwerer in Eisessig löslich.

Die Brombestimmung nach Schutze gab 55% Br anstatt 54.79% Br, berechnet für die Formel $\text{C}_6\text{H}_2(\text{CH}_3)_2(\text{CH}_2\text{Br})_2$.

Da es augenscheinlich war, dass man es mit zwei Körpern, einem flüssigen und einem festen, zu thun hat, und es unmöglich erschien, beide mechanisch von einander vollkommen zu trennen, so trachtete man zuerst, die Derivate des einen kennen zu lernen, um zu versuchen, vermittelst der letzteren eine Trennung der beiden Körper herbeizuführen und im flüssigen Theil analog zum Mesitylbromid Durylbromid nachzuweisen.

Zu diesem Zwecke sammelte man zuerst Duryldibromid und erhielt bei 12 gr Durol eine Ausbeute von 0,85 gr.

Durylenacetat $\text{C}_6\text{H}_2(\text{CH}_3)_2(\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2)_2$. Man kocht unter Rückflusskühlung Duryldibromid in alkoholischer Lösung mit einer berechneten Menge von essigsauerm Kalium, lässt erkalten und fällt mit Wasser aus. Dünne, irisierende Blättchen (aus Alkohol) vom Schm. P. 65°.

Die Analyse ergab 67.36% C u. 7.50% H statt 67.20% C u. 7.20% H.

Durylen-Alkohol (Glykol) $\text{C}_6\text{H}_2(\text{CH}_3)_2(\text{CH}_2\text{OH})_2$ erhielt man durch verseifen des Acetats in alkoholischer Lösung; er bildet weisse, dünne Schüppchen vom Schm. P. 74°.

Die Säure $\text{C}_6\text{H}_2(\text{CH}_3)_2\text{COOH}_2$ erhielt man durch Oxydation des Glykols mit 4%-ger Chamäleonlösung. Durchsichtige, dicke Blättchen (aus Alkohol) vom Schm. P. 123°.

Die Analyse gab 61.66% C und 5.42% H anstatt 61.85% C und 5.15% H.

Eine grössere Menge des rohen Monobromproductes wurde in Ligroin gelöst und im Scheidetrichter mit sehr verd. NaOH gewaschen, wobei ein in allen Lösungsmitteln unlöslicher Niederschlag entstand. Das Filtrat wurde nach Abtreiben des Ligroins mit essigsauerm Kalium und nachher mit NaOH, wie oben angegeben, gekocht. Es resultierte eine schwere, braune Flüssigkeit, deren Oxydation keine Resultate gab und deren Destillation bei

25 mm Druck kleine Mengen von unverändertem Durol und Durylenglykol lieferte. Man kann daher die Vermuthung aussprechen, dass Durylbromid schon unter dem Einfluss sehr schwacher Reagentien sich condensiert — eine Vermuthung, die auch darin eine Stütze findet, dass der erwähnte unlösliche Körper sich auch beim Kochen des rohen Reactionsproductes mit Na_2CO_3 -Lösung sowie bei 5-stündigen Erhitzen mit Wasser im Bombenrohr bei 150° bildet. Sein Gewicht (0,3 gr bei 7 gr Durol) liesse nach Vergleich mit dem Gewicht der Producte des Duryldibromids (0,26 gr) darauf schliessen, dass die beiden Bromderivate des Durols nebeneinander entstehen.

Pentamethylbenzol lieferte sowohl im Sonnenlicht wie auch nach der bei Durol beschriebenen Bromierungsmethode bei erhöhter Temperatur das bekannte Kernsubstitutionsproduct $\text{C}_6\text{Br}(\text{CH}_3)_5$ vom Schm. P. 160° .

Hexamethylbenzol wurde weder im Sonnenlicht noch bei erhöhter Temperatur (wegen seines höheren Schmelzpunktes wurde die Retorte auf einer Asbestplatte erhitzt) von Brom angegriffen. Erst im Bombenrohre, mit der für das Monobromproduct berechneten Menge Brom (bei Anwesenheit von etwas H_2O) 5 Stunden bei 100° erhitzt, lieferte es Hexabrom-hexamethylbenzol.

Obige Experimente ergaben:

1. Die kettensubstituierende Wirkung des Sonnenlichtes macht sich bei der Bromierung der höheren Methylbenzole nicht geltend.

Hexamethylbenzol wird unter seinem Einfluss nicht angegriffen, Pentamethylbenzol und Durol liefern kernsubstituierte Derivate. Durol bildet Monobromdurol im Sonnenlicht und eine Mischung von Mono- und Dibromdurol im Dunkeln.

2. Bei erhöhter Temperatur tritt Brom beim Durol in die Seitenkette, beim Pentamethylbenzol in den Kern. Durol verhält sich also sowohl unter dem Einfluss des Sonnenlichtes wie auch der erhöhten Temperatur dem Mesitylen analog.

Das Hexamethylbenzol braucht eine längere Einwirkung des Broms bei erhöhter Temperatur, um im Bombenrohre (bei Anwesenheit von etwas Wasser) Hexabrom-hexamethylbenzol zu liefern.

6. M. LADISLAS NATANSON m. t.: **O rozchodzeniu się małych ruchów w płynach lepkich.** (*Sur la propagation d'un petit mouvement dans un fluide visqueux*).

Dans notre Mémoire „Sur les lois de la Viscosité“, présenté à l'Académie le 4. Février 1901¹⁾, nous avons défini un corps fictif qui nous paraît propre à représenter, en Théorie, la classe des corps réels appelés visqueux. Ce n'est qu'après avoir poursuivi les conséquences logiques des hypothèses que nous avons ainsi adoptées que l'on pourra juger jusqu'à quel point un tel mode de représentation est conforme à la réalité. Dans ce Travail, nous nous proposons d'étudier les lois de la propagation d'un mouvement infiniment petit dans un corps constitué ainsi qu'il est dit dans le Mémoire cité.

§ 1. Reprenons les équations (9) et (10) du § 8. de la Communication précédente. Elles peuvent s'écrire ainsi :

$$p_{xx} - p = (p_{xx} - p)^0 \varepsilon^{-t/T} - \varepsilon \int_0^t dt \varepsilon^{t/T} \{2ne + (k - h - \frac{2}{3}n) \tilde{\omega}\} \quad (1a)$$

$$p_{yy} - p = (p_{yy} - p)^0 \varepsilon^{-t/T} - \varepsilon \int_0^t dt \varepsilon^{t/T} \{2nf + (k - h - \frac{2}{3}n) \tilde{\omega}\} \quad (1b)$$

$$p_{zz} - p = (p_{zz} - p)^0 \varepsilon^{-t/T} - \varepsilon \int_0^t dt \varepsilon^{t/T} \{2ng + (k - h - \frac{2}{3}n) \tilde{\omega}\} \quad (1c)$$

$$p_{yz} = p_{yz}^0 \varepsilon^{-t/T} - \varepsilon \int_0^t dt \varepsilon^{t/T} na \quad (2a)$$

$$p_{zx} = p_{zx}^0 \varepsilon^{-t/T} - \varepsilon \int_0^t dt \varepsilon^{t/T} nb \quad (2b)$$

$$p_{xy} = p_{xy}^0 \varepsilon^{-t/T} - \varepsilon \int_0^t dt \varepsilon^{t/T} nc . \quad (2c)$$

Les valeurs $(p_{xx} - p)^0$, $(p_{yy} - p)^0$, $(p_{zz} - p)^0$, p_{yz}^0 , p_{zx}^0 , p_{xy}^0 sont celles qui correspondent au moment initial $t=0$. Pour rattacher ces valeurs aux constantes C_{xx} , C_{yy} , C_{zz} , C_{yz} , C_{zx} , C_{xy} qui figurent dans les équations de la Communication précédente, on a la série d'égalités dont la première est la suivante :

¹⁾ Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie, Année 1901, p. 95. Voyez aussi p. 161. du même Volume.

$$(p_{xx} - p)^o = C_{xx} - \left[\int dt \varepsilon^{t/T} \{ 2ne + (k - h - \frac{2}{3}n) \tilde{\omega} \} \right]_{t=0}; \quad (3a)$$

les autres s'écrivent d'une manière analogue.

D'ailleurs, d'après les équations (1) et (2) du § 2. du Mémoire précédent, les valeurs initiales des inégalités de pression ont pour expression:

$$(4a) \quad (p_{xx} - p)^o = -2n \varepsilon^o - (k - \frac{2}{3}n) \Delta^o$$

$$(4b) \quad (p_{yy} - p)^o = -2n \varphi^o - (k - \frac{2}{3}n) \Delta^o$$

$$(4c) \quad (p_{zz} - p)^o = -2n \psi^o - (k - \frac{2}{3}n) \Delta^o$$

$$(5a) \quad p_{yx}^o = -n\alpha^o$$

$$(5b) \quad p_{zx}^o = -n\beta^o$$

$$(5c) \quad p_{xy}^o = -n\gamma^o$$

Dans tout ce qui précède nous avons conservé les notations adoptées dans le mémoire cité plus haut: „Sur les lois de la Viscosité“.

§ 2. Les équations du mouvement s'obtiennent en portant dans les équations

$$(1) \quad \rho \frac{du}{dt} = \rho X - \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right)$$

les valeurs de $\partial p_{xx}/\partial x$, $\partial p_{yx}/\partial y$, $\partial p_{zx}/\partial z$ etc. tirées des équations (1), (2), (4) et (5) du paragraphe précédent. On trouve trois équations dont la première est la suivante:

$$(2) \quad \rho \frac{du}{dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^{-t/T} \{ n \nabla^2 \xi^o + (k + \frac{1}{3}n) \frac{\partial \Delta^o}{\partial x} \} + \varepsilon^{-t/T} \int_0^t dt \varepsilon^{t/T} \{ n \nabla^2 u + (k - h + \frac{1}{3}n) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} \}.$$

Tous les symboles, dans ces équations, ont la signification qui leur a été attribuée dans le Mémoire précédent.

§ 3. Dans ce qui va suivre nous supposons nulles les forces extérieures données auxquelles le fluide est soumis; donc les termes X , Y , Z disparaîtront de nos équations. Nous supposons le fluide animé de mouvements infiniment petits; par conséquent, nous pourrons traiter les quantités u , v , w ainsi que les dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

comme des infiniment petits du premier ordre et nous négligerons les infiniment petits d'ordre supérieur.

Dans notre Mémoire précédent nous avons donné plusieurs formes plus ou moins générales de l'équation qui définit la valeur de la dérivée dp/dt (voir aux §§ 5., 6., 7. de la dite Communication). Comme dans le Mémoire cité (voir § 8.) nous admettrons que cette dérivée est déterminée par l'équation suivante :

$$dp/dt = -h\bar{\omega};$$

d'ailleurs, en même temps que l'équation précédente, la relation $h=k$ peut être vérifiée rigoureusement ou approximativement.

Nous poserons

$$\frac{n}{\rho} = a^2 \quad (2)$$

$$\frac{k + \frac{4}{3}n}{\rho} = b^2 \quad (3)$$

$$\frac{k - h + \frac{4}{3}n}{\rho} = c^2. \quad (4)$$

De ces définitions on conclut que les dimensions des quantités a , b , c sont celles d'une vitesse. Nous pourrons, par la suite, traiter ces quantités comme des constantes.

§ 4. En vertu des hypothèses que nous venons d'énoncer le terme $\rho du/dt$ du premier membre de l'équation (2) au § 2. prend la forme $\rho \partial u/\partial t$ et le terme X disparaît. Dérivons par rapport à la variable t l'équation ainsi modifiée, négligeons le produit $\partial \rho/\partial t \cdot du/dt$ qui est un infiniment petit d'ordre supérieur et posons, conformément aux conventions précédentes,

$$-\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} = h \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \quad (1)$$

Si l'on tient compte des égalités (2), (3), (4) du paragraphe précédent, on parvient ainsi à l'équation



$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u + (b^2 - a^2) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} - \frac{\varepsilon^{-t/T}}{T} \{ a^2 \nabla^2 \xi^0 + (b^2 - a^2) \frac{\partial \Delta^0}{\partial x} \} - \varepsilon^{-t/T} \int_0^t \frac{dt}{T} \varepsilon^{t/T} \{ a^2 \nabla^2 u + (c^2 - a^2) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \}.$$

L'équation (2) et les équations analogues qui se rapportent aux composantes v et w constituent les équations fondamentales qui expriment la loi suivant laquelle se propage une perturbation (u, v, w) dans le fluide considéré.

Dérivées par rapport à x, y, z , ces équations donnent

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 \bar{\omega} - \frac{\varepsilon^{-t/T}}{T} b^2 \nabla^2 \Delta^0 - \varepsilon^{-t/T} \int_0^t \frac{dt}{T} \varepsilon^{t/T} c^2 \nabla^2 \bar{\omega}.$$

Cette équation exprime la loi suivant laquelle se propage la dilatation $\bar{\omega}$; avec M. Duhem, nous la nommerons „l'équation aux dilatations“. Soient de même Λ^0, M^0, N^0 les composantes de la rotation instantanée au moment initial:

$$(4) \quad 2\Lambda^0 = \frac{\partial \zeta^0}{\partial y} - \frac{\partial \eta^0}{\partial z}; \quad 2M^0 = \frac{\partial \zeta^0}{\partial z} - \frac{\partial \xi^0}{\partial x}; \quad 2N^0 = \frac{\partial \eta^0}{\partial x} - \frac{\partial \xi^0}{\partial y};$$

soient U, V, W les composantes de la vitesse de rotation au moment t :

$$(5) \quad 2U = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad 2V = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad 2W = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y};$$

les équations (2) entraînent visiblement trois égalités dont la première est la suivante:

$$(6) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 U - \frac{\varepsilon^{-t/T}}{T} a^2 \nabla^2 \Lambda^0 - \varepsilon^{-t/T} \int_0^t \frac{dt}{T} \varepsilon^{t/T} a^2 \nabla^2 U;$$

ce sont les équations de la propagation du mouvement tourbillonnaire. Nous les nommerons, avec M. Duhem, „les équations aux rotations“.

§ 5. On sait que Clebsch¹⁾ le premier a décomposé un petit mouvement qui peut se propager au sein d'un solide isotrope en un

¹⁾ Borchardt's Journal f. d. reine u. angew. Mathematik, Bd. LXI. 1863. Cf. G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathemat. Optik, Leipzig 1891, erste Vorlesung, § 3; P. Duhem, Mémoires de la Société d. Sciences phys. et nat. de Bordeaux (5) Vol. III. p. 325. 1898; Journal de Mathématiques pures et appl. de Liouville (5). Vol. VI. p. 215. 1900.

petit mouvement de dilatation et un petit mouvement de rotation. Proposons-nous de vérifier si une proposition analogue est vraie dans le cas qui nous occupe. Nous constatons aisément qu'une perturbation qui se compose d'une perturbation dilatationnelle et d'une perturbation rotationnelle satisfait aux équations fondamentales (2) du paragraphe précédent. Soient deux fonctions

$$\Omega(x, y, z, t) \text{ et } \Psi^{\circ}(x, y, z)$$

vérifiant l'équation

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 \Omega - \frac{\varepsilon^{-t/T}}{T} b^2 \nabla^2 \Psi^{\circ} - \varepsilon^{-t/T} \int_0^t \frac{dt}{T} \varepsilon^{t/T} c^2 \nabla^2 \Omega \quad (1)$$

Posons:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = u_1; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = v_1; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = w_1; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Psi^{\circ}}{\partial x} = \zeta_1^{\circ}; \quad \frac{\partial \Psi^{\circ}}{\partial y} = \eta_1^{\circ}; \quad \frac{\partial \Psi^{\circ}}{\partial z} = \zeta_1^{\circ}; \quad (3)$$

En vertu de l'équation (1) nous aurons la relation

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 u_1 - \frac{\varepsilon^{-t/T}}{T} b^2 \nabla^2 \zeta_1^{\circ} - \varepsilon^{-t/T} \int_0^t \frac{dt}{T} \varepsilon^{t/T} c^2 \nabla^2 u_1 \quad (4)$$

ainsi que deux équations analogues.

Prenons pareillement six fonctions

$$E(x, y, z, t), \quad F(x, y, z, t), \quad G(x, y, z, t) \quad (5)$$

$$H^{\circ}(x, y, z), \quad \Phi^{\circ}(x, y, z), \quad \Gamma^{\circ}(x, y, z) \quad (6)$$

vérifiant l'équation

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 E - \frac{\varepsilon^{-t/T}}{T} a^2 \nabla^2 H^{\circ} - \varepsilon^{-t/T} \int_0^t \frac{dt}{T} \varepsilon^{t/T} a^2 \nabla^2 E \quad (7)$$

ainsi que deux équations analogues. Posons:

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial z} = u_2; \quad \frac{\partial E}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial x} = v_2; \quad \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial y} = w_2; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Gamma^{\circ}}{\partial y} - \frac{\partial \Phi^{\circ}}{\partial z} = \zeta_2^{\circ}; \quad \frac{\partial H^{\circ}}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma^{\circ}}{\partial x} = \eta_2^{\circ}; \quad \frac{\partial \Phi^{\circ}}{\partial x} - \frac{\partial H^{\circ}}{\partial y} = \zeta_2^{\circ}; \quad (9)$$

nous aurons alors l'égalité

$$(10) \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u_2 - \frac{\varepsilon^{-t/T}}{T} a^2 \nabla^2 \zeta_2^0 - \varepsilon^{-t/T} \int_0^t \frac{dt}{T} \varepsilon^{t/T} a^2 \nabla^2 u_2$$

ainsi que deux équations analogues que vérifient : v_2 et η_2^0 , w_2 et ζ_2^0 .
Je dis que les sommes

$$(11) \quad u_1 + u_2 = u; \quad v_1 + v_2 = v; \quad w_1 + w_2 = w$$

$$(12) \quad \zeta_1^0 + \zeta_2^0 = \zeta^0; \quad \eta_1^0 + \eta_2^0 = \eta^0; \quad \zeta_1^0 + \zeta_2^0 = \zeta^0$$

vérifient les équations fondamentales (2) du paragraphe précédent. Soient en effet

$$(13) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = \tilde{\omega}_1; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = \tilde{\omega}_2;$$

$$(14) \quad \frac{\partial \zeta_1^0}{\partial x} + \frac{\partial \eta_1^0}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_1^0}{\partial z} = \Delta_1^0; \quad \frac{\partial \zeta_2^0}{\partial x} + \frac{\partial \eta_2^0}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_2^0}{\partial z} = \Delta_2^0.$$

En vertu des égalités (2), (3), (8), (9) nous pouvons écrire

$$(15) \quad \tilde{\omega}_1 = \nabla^2 \Omega; \quad \tilde{\omega}_2 = 0;$$

$$(16) \quad \Delta_1^0 = \nabla^2 \Psi^0; \quad \Delta_2^0 = 0;$$

en sorte que nous aurons :

$$(17) \quad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} = \nabla^2 u_1; \quad \frac{\partial \Delta^0}{\partial x} = \nabla^2 \zeta_1^0;$$

$$(18) \quad b^2 \nabla^2 u_1 + a^2 \nabla^2 u_2 = a^2 \nabla^2 u + (b^2 - a^2) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x};$$

$$(19) \quad c^2 \nabla^2 u_1 + a^2 \nabla^2 u_2 = a^2 \nabla^2 u + (c^2 - a^2) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x};$$

$$(20) \quad b^2 \nabla^2 \zeta_1^0 + a^2 \nabla^2 \zeta_2^0 = a^2 \nabla^2 \zeta^0 + (b^2 - a^2) \frac{\partial \Delta^0}{\partial x}.$$

Ajoutons membre à membre les équations (4) et (10) de ce paragraphe. En tenant compte des relations (18), (19) et (20) nous trouvons que les quantités u , v , w , ζ^0 , η^0 , ζ^0 définies par les égalités (11) et (12) vérifient des équations identiques aux équations (2) du § 4. Cela prouve la proposition que nous avons énoncée.

Il est aisé de voir que les trois équations (4) entraînent l'équation aux dilatations [(3) du paragraphe précédent] tandis que les équations (10) conduisent immédiatement aux équations aux rotations [(6) du paragraphe précédent].

§ 6. Considérons les équations (4) du paragraphe précédent qui régissent la propagation de la perturbation (u_1, v_1, w_1) dans le fluide considéré. Dérivons-les par rapport à la variable t ; il viendra, en tenant compte des équations initiales (4):

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - (b^2 - c^2) \nabla^2 u_1 + T \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - b^2 \nabla^2 u_1 \right) = 0. \quad (1)$$

Traitées de la même manière, les équations (10) du paragraphe précédent qui régissent la propagation dans le fluide de la perturbation (u_2, v_2, w_2) , conduisent à trois égalités de la forme

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + T \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u_2 \right\} = 0. \quad (2)$$

Enfin, les équations fondamentales (2) du § 4. qui se rapportent à la perturbation totale (u, v, w) se transforment d'une façon analogue et fournissent trois équations dont la première est la suivante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (b^2 - c^2) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} + T \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u - (b^2 - a^2) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right\} = 0. \quad (3)$$

Ces équations donnent lieu à des considérations analogues à celles qui nous ont servi à démontrer la proposition énoncée au paragraphe précédent en partant des équations (2) du § 4. On trouve facilement que les sommes

$$u_1 + u_2, \quad v_1 + v_2, \quad w_1 + w_2$$

vérifient les équations (3) à la condition de définir u_1, v_1, w_1 par les équations (2), § 5. [la fonction Ω vérifiant l'équation (1) du présent paragraphe] et de prendre, pour u_2, v_2, w_2 , les valeurs (8), § 5., dans lesquelles les fonctions E, F, G vérifient l'équation (2) du présent paragraphe. Ainsi définies, les composantes u_1, v_1, w_1 vérifient évidemment les équations (1) et les composantes u_2, v_2, w_2 vérifient les équations (2).

Les équations (1), (2), (3) de ce paragraphe reproduisent les lois de la propagation du mouvement sous une forme nouvelle et évidemment simplifiée. Il est évident que toute intégrale de l'équation (2) du § 4. vérifie aussi l'équation (3) de ce paragraphe. Mais la réciproque n'est pas exacte: une intégrale de l'équation (3) ne vérifie pas forcément l'équation (2) du § 4. Une remarque analogue s'applique, d'une part, aux équations: (4) du § 5. et (1) du présent

paragraphe et d'autre part aux équations: (10) du § 5. et (2) du présent paragraphe.

§ 7. Ainsi la décomposition, par la méthode de Clebsch, des perturbations qui se propagent dans le fluide, sera permise tout au moins dans certains cas. Il est aisé de s'assurer qu'elle sera toujours possible dans les conditions où nous nous sommes placés. En effet, la proposition suivante se démontre sans peine:

Soient $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$, $\xi^{\circ}(x, y, z)$, $\eta^{\circ}(x, y, z)$, $\zeta^{\circ}(x, y, z)$ six fonctions quelconques vérifiant les trois équations de la forme (2), § 4. On peut toujours mettre ces fonctions sous la forme

$$(1) \quad u_1 + u_2, \quad v_1 + v_2, \quad w_1 + w_2, \quad \xi_1^{\circ} + \xi_2^{\circ}, \quad \eta_1^{\circ} + \eta_2^{\circ}, \quad \zeta_1^{\circ} + \zeta_2^{\circ},$$

ces nouvelles composantes étant définies par les égalités:

$$(2) \quad u_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad v_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad w_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

$$(3) \quad \xi_1^{\circ} = \frac{\partial \Psi^{\circ}}{\partial x} \quad \eta_1^{\circ} = \frac{\partial \Psi^{\circ}}{\partial y} \quad \zeta_1^{\circ} = \frac{\partial \Psi^{\circ}}{\partial z}$$

$$(4) \quad u_2 = \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial z} \quad v_2 = \frac{\partial E}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial x} \quad w_2 = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial y}$$

$$(5) \quad \xi_2^{\circ} = \frac{\partial \Gamma^{\circ}}{\partial y} - \frac{\partial \Phi^{\circ}}{\partial z} \quad \eta_2^{\circ} = \frac{\partial H^{\circ}}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma^{\circ}}{\partial x} \quad \zeta_2^{\circ} = \frac{\partial \Phi^{\circ}}{\partial x} - \frac{\partial H^{\circ}}{\partial y},$$

dans lesquelles Ω et Ψ° désignent deux fonctions: $\Omega(x, y, z, t)$ et $\Psi^{\circ}(x, y, z)$ vérifiant l'équation

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 \Omega - \frac{\varepsilon^{-t/T}}{T} b^2 \nabla^2 \Psi^{\circ} - \varepsilon^{-t/T} \int_0^t \frac{dt}{T} \varepsilon^{t/T} c^2 \nabla^2 \Omega$$

et $E, F, G, H^{\circ}, \Phi^{\circ}, \Gamma^{\circ}$ désignent six fonctions $E(x, y, z, t)$, $F(x, y, z, t)$, $G(x, y, z, t)$, $H^{\circ}(x, y, z)$, $\Phi^{\circ}(x, y, z)$, $\Gamma^{\circ}(x, y, z)$ assujetties à satisfaire à trois équations de la forme:

$$(7) \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 E - \frac{\varepsilon^{-t/T}}{T} a^2 \nabla^2 H^{\circ} - \varepsilon^{-t/T} \int_0^t \frac{dt}{T} \varepsilon^{t/T} a^2 \nabla^2 E.$$

Les quantités u_1, v_1, w_1 vérifient alors les équations (4) du § 5.; les quantités u_2, v_2, w_2 vérifient les équations (10) du même paragraphe.

La démonstration du théorème que nous venons d'énoncer est

facile à donner en répétant le raisonnement dont M. Duhem ¹⁾ s'est servi pour établir le théorème de Clebsch pour les solides isotropes. En effet, le principe du raisonnement est le même; en se reportant au mémoire cité, on verra sans peine quels sont les changements, d'ailleurs peu importants, qu'il convient d'apporter dans les calculs, lorsqu'on part de nos équations.

Dans un second beau mémoire ²⁾ M. Duhem a montré que le théorème de Clebsch peut être étendu aux perturbations les plus diverses pourvu qu'elles obéissent à un type, d'ailleurs très-général, d'équations aux dérivées partielles simultanées. Ce type, on le voit tout de suite, comprend nos équations (3) du § 6. comme cas particulier. On peut donc énoncer la proposition suivante: étant données trois fonctions quelconques des coordonnées et du temps: u, v, w qui vérifient les équations (3), § 6., on peut toujours les mettre sous la forme

$$u_1 + u_2, \quad v_1 + v_2, \quad w_1 + w_2, \quad (8)$$

les quantités u_1, v_1, w_1 étant données par les égalités (2) du § 5., dans lesquelles Ω est une fonction qui vérifie l'équation (1) du § 6.; les quantités u_2, v_2, w_2 se déduisant, moyennant les égalités (8) du § 5., des fonctions E, F, G qui, à leur tour, vérifient trois équations de la forme (2), § 6. En vertu de la remarque que nous avons faite à la fin du § 6., la proposition que nous venons d'énoncer s'applique également à toutes les fonctions u, v, w qui satisfont aux équations (2) du § 4.

§ 8. Considérons les équations du mouvement, c'est-à-dire les équations (2) du § 2; elles se prêtent à une transformation analogue à celle que nous avons fait subir aux équations de propagation (§ 6). Dérivées par rapport à la variable t et transformées ensuite au moyen des équations initiales, les équations (2) du § 2. permettent d'écrire trois égalités de la forme:

¹⁾ Mémoires de la Société d. Sc. phys. et nat. de Bordeaux (5) Vol. III. 1898. p. 327—333.

²⁾ Journal de Mathématiques pures et appl. (5) Vol. VI. p. 228: § 11; équations (26).

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{du}{dt} - \rho X + \frac{\partial p}{\partial x} + \\ + T \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{du}{dt} - \rho X + \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \mu \nabla^2 u - (\lambda + \mu) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} = 0. \end{array} \right.$$

On a posé ici:

$$(2) \quad nT = \mu ;$$

$$(3) \quad (k - h - \frac{2}{3}n)T = \lambda ;$$

ce sont les équations données au § 8. de notre Communication précédente.

Les équations (1) reproduisent les équations du mouvement du fluide sous une forme qui nous paraît digne d'intérêt. Par l'introduction des hypothèses particulières au problème qui nous occupe (voir plus haut, au § 3.) elles conduisent immédiatement aux équations (3) du § 6.

§ 9. La forme que nous venons de donner aux équations du mouvement se prête naturellement à faire ressortir l'un des caractères essentiels de la Théorie qui est l'objet de notre exposé. Les équations du mouvement que l'on adopte généralement pour les fluides visqueux en Hydrodynamique sont, en conservant nos notations habituelles,

$$(1) \quad \rho \frac{du}{dt} - \rho X + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \nabla^2 u - (\lambda + \mu) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} = 0.$$

Or, ces équations se déduisent des équations (1) du paragraphe précédent moyennant deux hypothèses: 1) en posant $T = 0$ 2) en supposant finis les produits:

$$nT, \quad (k - h - \frac{2}{3}n)T.$$

Par conséquent, la théorie classique de la Viscosité, celle de Navier, de Poisson, de Stokes, Maxwell, Stefan, O. E. Meyer et d'une foule d'autres savants, appartient à ce type de théories simplifiées que l'on peut appeler théories Fourieriennes¹⁾; elle constitue un cas particulier, on pourrait dire un cas extrême, de la Théorie

¹⁾ Voir Bulletin Int. de l'Académie des Sciences de Cracovie pour l'année 1901, séance du 14. Octobre, p. 335.

ici discutée. On arriverait aux mêmes conclusions en partant des équations (7) et (8) du § 8. de notre Mémoire précédent.

Il est intéressant de rechercher quelles sont les lois que donne la théorie habituellement acceptée pour la propagation d'un petit mouvement dans un fluide visqueux et de les rapprocher ensuite des résultats que nous venons d'établir. Les équations de propagation du mouvement, dans la théorie classique, sont de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (b^2 - c^2) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} - T \frac{\partial}{\partial t} \left\{ a^2 \nabla^2 u + (c^2 - a^2) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right\} = 0. \quad (2)$$

Elles impliquent une perturbation dilatationnelle dont l'équation est

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - (b^2 - c^2) \nabla^2 u_1 - T \frac{\partial}{\partial t} (c^2 \nabla^2 u_1) = 0 \quad (3)$$

ainsi qu'une perturbation rotationnelle déterminée par l'équation

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - T \frac{\partial}{\partial t} (a^2 \nabla^2 u_2) = 0 \quad (4)$$

Les équations (2) peuvent se comparer aux équations (3) du § 6.; les équations (3) et (4) peuvent se comparer aux équations (1) et (2) du même paragraphe. La conclusion à laquelle on arrive ainsi est qu'entre nos résultats et ceux que fournit la théorie classique, il y a une différence marquée, même dans le cas où la durée du temps T serait petite; elle se rapporte à la perturbation rotationnelle (u_2, v_2, w_2).

Les équations (3) du présent paragraphe sont connues depuis longtemps; elles ont été données en 1845 par Sir G. G. Stokes²⁾ qui s'en est servi pour élucider le rôle joué par la viscosité dans la propagation du son. Il est évident, en effet, que la différence $b^2 - c^2$ représente la vitesse avec laquelle une onde sonore se propagerait dans le fluide si l'on le supposait dénué de viscosité. D'autre part si, avec Stokes, l'on admet

$$\lambda = -\frac{2}{3} \mu. \quad (5)$$

¹⁾ Voir Duhem, *Journal de Mathém. pures et appl.* (5) Vol. VI. p. 256.

²⁾ *Transactions of the Cambridge Phil. Society*, Vol. VIII. p. 287. *Mathematical and physical Papers*, Vol. I. p. 101. Cambridge 1880.

c'est-à-dire si l'on fait $k=h$ dans nos notations (voir le § 9. de notre Mémoire précédent) on trouve

$$(6) \quad c^2 T = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho}$$

et les équations (3) deviennent

$$(7) \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - (b^2 - c^2) \nabla^2 u_1 - \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 u_1) = 0.$$

Ce sont les équations de Stokes. Si l'on préfère les comparer aux équations de la perturbation (u_1, v_1, w_1) sous leur forme initiale, on se reportera aux équations (4) du § 5. que l'on écrira

$$(8) \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - (b^2 - c^2) \nabla^2 u_1 + \frac{\varepsilon^{-t/T}}{T} b^2 \nabla^2 \zeta_1 - c^2 T \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \varepsilon^{-t/T} \int_0^t dt \varepsilon^{t/T} \nabla^2 u_1 \right\} = 0.$$

Rapprochées des équations (7), ces équations confirment la conclusion déjà énoncée: tant que la durée du temps de relaxation est très-petite, nos équations ne peuvent pas donner sur la perturbation dilatationnelle des renseignements essentiellement différents de ceux que fournit la théorie habituellement acceptée.

§ 10. Considérons les équations qui déterminent la propagation de la perturbation rotationnelle; ce sont, en première ligne, les équations (10) du § 5. Nous en avons déduit les équations (2) du § 6. qui par intégration donnent trois égalités de la forme

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{1}{T} \frac{\partial u_2}{\partial t} - a^2 \nabla^2 u_2 = A(x, y, z).$$

Donnons au symbole *Pot* la signification définie par l'égalité¹⁾

$$(2) \quad \text{Pot} = -4\pi \nabla^{-2};$$

posons ensuite

$$(3) \quad f = u_2 - \text{Pot} \left(\frac{A(x, y, z)}{4\pi a^2} \right).$$

Jointe à l'égalité (3) l'équation (1) permet d'écrire:

¹⁾ Heaviside, *Electromagnetic Theory*, Vol. I. p. 205. London 1893.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{1}{T} \frac{\partial f}{\partial t} - a^2 \nabla^2 f = 0 ; \quad (4)$$

c'est l'équation des télégraphistes généralisée; elle a fait l'objet de travaux de plusieurs géomètres parmi lesquels nous citerons MM. Heaviside, Poincaré, Picard, Boussinesq, Birkeland, Voigt.

On établit sans peine une relation entre la fonction $A(x, y, z)$ qui figure dans l'équation (1) et les valeurs initiales des variables c'est-à-dire celles qui correspondent au moment $t = 0$. Posons

$$\partial u_2 / \partial t = U ; \quad (5)$$

l'équation (1) nous donnera :

$$U = U^0 \varepsilon^{-t/T} + \varepsilon^{-t/T} \int_0^t dt \varepsilon^{t/T} (a^2 \nabla^2 u_2 + A) ; \quad (6)$$

cette équation peut donc se mettre sous la forme

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u_2 - \frac{\varepsilon^{-t/T}}{T} (U^0 - TA) - \varepsilon^{-t/T} \int_0^t \frac{dt}{T} \varepsilon^{t/T} a^2 \nabla^2 u_2 . \quad (7)$$

La comparaison des égalités: (7) du présent paragraphe et (10) du § 5. nous apprend que l'on a:

$$A(x, y, z) = \frac{1}{T} (U^0 - a^2 \nabla^2 \zeta_2^0) ; \quad (8)$$

à U^0 on peut substituer ici $(\partial f / \partial t)^0$. Dès lors, si l'on se reporte à l'égalité (3), on est assuré que l'expression

$$u_2 = f + \frac{\zeta_2^0}{T} + \text{Pot} \left(\frac{(\partial f / \partial t)^0}{4\pi a^2 T} \right) \quad (9)$$

est l'intégrale de l'équation (10) du § 5., c'est-à-dire de l'équation de la perturbation partielle (u_2, v_2, w_2) . Nous sommes libres d'ailleurs d'y ajouter une fonction harmonique quelconque des coordonnées indépendante du temps. Dans l'expression ainsi obtenue, f est le seul terme qui dépende simultanément des coordonnées et du temps. La perturbation (u_2, v_2, w_2) se compose, par conséquent, en premier lieu: d'une onde transversale (f, g, h) dont la tête s'avance avec la vitesse a tandis qu'en arrière d'elle il y a un résidu qui peu à peu faiblit et s'efface; en second lieu, d'une distribution dans l'espace de certaines fonctions indépendantes du temps qui se déterminent par l'état initial du milieu; cette distri-

bution vient simplement s'ajouter à la perturbation ondulatoire proprement dite que représente l'équation (4) du présent paragraphe et qui, en raison de la relation exprimée par l'égalité (2) du § 3, mériterait peut-être d'être nommée onde de rigidité.

Il est aisé de voir que, parmi les perturbations diverses qui se superposent constituent la perturbation totale (u, v, w), l'onde de rigidité est la seule qui subsiste dans le cas d'un fluide absolument incompressible. En effet, supposons:

$$(10) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0;$$

nous avons alors:

$$(11) \quad \tilde{\omega} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Dans ces conditions, les équations (1) du § 8. donnent (moyennant les hypothèses fondamentales du § 3.) trois égalités de la forme

$$(12) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{T} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \nabla^2 u = 0,$$

ce qui démontre l'exactitude de la proposition énoncée plus haut.

§ 11. Dans ce paragraphe nous discuterons une intégrale particulière de l'équation (4) du paragraphe précédent; ce cas, si élémentaire qu'il soit, présentera néanmoins quelque intérêt. Pour les propriétés générales des intégrales de cette équation, nous renvoyons le lecteur aux travaux énumérés dans le paragraphe précédent. Soient

$$(1) \quad u_2 = 0; \quad v_2 = v_2(x, t); \quad w_2 = w_2(x, t).$$

La perturbation sera plane. Nous pouvons nous borner à considérer la composante v_2 . Désignons par B, β, σ trois nouvelles constantes, par i^2 la quantité -1 et posons:

$$(2) \quad v_2 = B \varepsilon^{i\sigma t} \varepsilon^{\beta x} + \frac{\zeta_0}{T} + \text{Pot} \left(\frac{i\sigma B \varepsilon^{\beta x}}{4\pi a^2 T} \right).$$

Cette expression de v_2 portée dans l'équation (10) du § 5. la vérifie sous la condition:

$$(3) \quad \beta^2 = \frac{i\sigma}{a^2 T} (1 + i\sigma T)$$

ce qui peut s'écrire lorsque le rapport σT est petit,

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{\sigma}{2a^2 T}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sigma T + i \left(1 + \frac{1}{2} \sigma T \right) \right\}. \quad (4)$$

Imaginons un fluide limité par le plan $x = 0$ et s'étendant à l'infini du côté des x positifs. La partie variable de la perturbation pourra se mettre sous la forme

$$B e^{-x/l} \cos \sigma \left(t - \frac{x}{q} \right) \quad (5)$$

en posant:

$$a \sqrt{2\sigma T} \left(1 - \frac{1}{2} \sigma T \right) = q ; \quad a \sqrt{2T/\sigma} \left(1 + \frac{1}{2} \sigma T \right) = l. \quad (6)$$

La longueur d'onde λ est donnée par l'égalité

$$\lambda/l = 2\pi (1 - \sigma T) ; \quad (7)$$

l'onde en avançant faiblit rapidement¹⁾. C'est, on le voit aisément, un mouvement forcé, provoqué par la vibration $B \cos \sigma t$ de la surface solide qui se confond avec le plan $x = 0$.

On observera que le produit $a^2 T$ peut être remplacé, dans les formules précédentes, par le rapport μ/ρ (appelé parfois „coefficient cinématique de viscosité“) en sorte que les valeurs de q , λ , l peuvent se calculer d'avance, au moins approximativement, dans chaque cas particulier.

Lorsque la valeur du rapport σT est très-grande, nous avons les égalités approchées:

$$q = a ; \quad \lambda = 2\pi a/\sigma ; \quad (8)$$

$$l = 2aT ; \quad \lambda/l = \pi/\sigma T ; \quad (9)$$

dans ce cas l'absorption qui se produit dans la propagation de l'onde est presque insensible. Supposons toujours que l'on connaisse la valeur de $a^2 T$ ou μ/ρ pour le fluide en question sans qu'on puisse dire quelles sont les valeurs des facteurs a et T pris isolément. Dans ces conditions il n'est pas possible de prévoir d'avance les valeurs de q , λ , l ; si l'on réussissait à déterminer l'une d'elles par l'observation directe, on pourrait en déduire, au contraire, les valeurs de a et de T pour le fluide étudié.

Posons :

¹⁾ Lamb, *Hydrodynamics*, p. 538. Cambridge 1895.

$$(10) \quad \sqrt{\sigma^2 T^2 + 1} - \sigma T = R.$$

On a rigoureusement :

$$(11) \quad q = a\sqrt{2\sigma TR} \quad \lambda = 2\pi a\sqrt{2TR/\sigma}$$

$$(12) \quad l = a\sqrt{2T/\sigma R} \quad \lambda/l = 2\pi R.$$

En résumé, les résultats que nous venons de trouver nous autorisent à dire que l'onde de rigidité qui peut s'observer dans les fluides visqueux est parfaitement accessible aux procédés de mesure de la Science actuelle.

§ 12. Dans ce qui précède, pour étudier la propagation d'un petit mouvement dans un milieu continu, nous avons fait un constant usage des composantes de la vitesse de déplacement u, v, w . Tant que l'on admet que le milieu en question jouit des propriétés d'un corps fluide, ce mode de représentation est particulièrement convenable. Considérons cependant que rien ne s'oppose à ce que l'on assigne telles valeurs qu'on voudra aux constantes du milieu appelées n, k, h, T . Attribuons des valeurs excessivement grandes soit aux modules n, k, h , soit à la période T , soit enfin aux unes et à l'autre; dans ces conditions les propriétés du milieu seront telles que l'on sera en droit de le regarder comme représentant cette nombreuse classe de corps que l'on appelle communément plastiques (ou même solides) et que, en Physique, on s'accorde à considérer¹⁾ comme des fluides dont la viscosité est extrême. Dans l'analyse du mouvement qui peut avoir lieu dans un milieu ainsi constitué, il sera préférable d'avoir recours aux composantes du déplacement même ξ, η, ζ . Nous avons, en vertu des §§ 1. et 5. du Mémoire précédent, l'égalité

$$(1) \quad \frac{dp}{dt} = -h\ddot{\omega} = -h\frac{d\Delta}{dt};$$

d'autre part, nous avons les équations (2) du § 2. Si l'on y joint les égalités qui expriment les hypothèses adoptées plus haut au § 3. on trouve trois équations de la forme

¹⁾ Voir, dans le premier Volume des Rapports présentés au Congrès de Physique réuni à Paris en 1900, les Mémoires de Sir W. Roberts-Austen et M. A. Stansfield, de M. W. Spring et de M. B. Weinberg.

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (h \Delta - p^0 - h \Delta^0) + \varepsilon^{-t/T} \left\{ n \nabla^2 \xi^0 + (k + \frac{1}{3} n) \frac{\partial \Delta^0}{\partial x} \right\} + \varepsilon^{-t/T} \int_0^t dt \varepsilon^{t/T} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ n \nabla^2 \xi + (k - h + \frac{1}{3} n) \frac{\partial \Delta}{\partial x} \right\} \quad (2)$$

Pour plus de brièveté posons

$$\Phi = \frac{p^0 + h \Delta^0 (1 - \varepsilon^{-t/T})}{\rho}; \quad (3)$$

dans l'équation (2) effectuons l'intégration du dernier terme du second membre; nous trouvons

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \xi + (b^2 - a^2) \frac{\partial \Delta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \varepsilon^{-t/T} \int_0^t \frac{dt}{T} \varepsilon^{t/T} \left\{ a^2 \nabla^2 \xi + (c^2 - a^2) \frac{\partial \Delta}{\partial x} \right\}. \quad (4)$$

Les équations (4) appartiennent au même type que les équations (2) du § 4. et peuvent se traiter d'une manière analogue. Il est intéressant de les comparer aux équations qui ont été proposées par M. O. E. Meyer, en 1873, dans le but de rendre compte des phénomènes d'élasticité résiduelle.

7. M. S. ZAREMBA: Wyznaczenie przypadku, w którym funkcye zasadnicze Poincaré'go mogą być wyprowadzone z funkcyj zasadniczych Le Roy albo z funkcyj Stekłowa. (*Détermination du cas où les fonctions fondamentales de M. Poincaré sont déductibles de celles de M. Le Roy ou de celles de M. Stekloff*). Mémoire présenté par M. L. Natanson, m. t.

N° 1. C'est M. Le Roy¹⁾ le premier qui a tenté de démontrer l'existence des fonctions fondamentales de M. Poincaré²⁾. Après M. Le Roy, M. Stekloff³⁾ a étudié le même problème par une

¹⁾ Sur l'intégration des équations de la Chaleur; Annales de l'Ecole normale supérieure 1898.

²⁾ Poincaré. La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. Acta mathematica 1896.

³⁾ Stekloff. Sur l'existence des fonctions fondamentales C. R. de l'Académie des Sc. de Paris, 27 Mars 1899.

méthode analogue à celle de M. Le Roy. Enfin j'ai¹⁾ établi l'existence des fonctions en question par une méthode tout à fait différente de celles des précédents auteurs. M. Stekloff s'est aperçu lui-même, ainsi qu'il a bien voulu me le communiquer, que sa démonstration était illusoire et que l'objection qui pouvait lui être faite était aussi applicable à la démonstration de M. Le Roy. M. Korn a fait de son côté la même remarque et il a eu l'obligeance de m'en faire part dans une lettre que j'ai reçue à peu près en même temps que celle de M. Stekloff.

Cela posé, il est d'un grand intérêt, pour la théorie des fonctions fondamentales, de s'assurer si, malgré l'insuffisance des démonstrations, les théorèmes sur lesquels reposent les méthodes de M. Le Roy et de M. Stekloff sont exacts.

C'est précisément ce qui sera le but de ce travail. La réponse à la question qui nous occupe peut être donnée sous une forme très simple et tout à fait générale mais, pour l'énoncer, il est nécessaire de rappeler les définitions qui servent de point de départ aux recherches concernant les divers genres de fonctions fondamentales.

Pour plus de brièveté, je renverrai à mon mémoire: Sur la théorie de l'équation de Laplace et les méthodes de Neumann et de Robin²⁾ pour l'énoncé des hypothèses que doit vérifier la surface fermée (S) que nous allons avoir à considérer constamment ainsi que pour la définition précise des dérivées $\left(\frac{dF}{dN}\right)_e$ et $\left(\frac{dF}{dN}\right)_i$ d'une fonction F suivant la normale à la surface (S); je me bornerai simplement à rappeler que la normale est supposée être dirigée vers l'intérieur de la surface et que les indices e et i servent à distinguer la dérivée calculée pour le côté extérieur de la surface, de la dérivée calculée pour le côté intérieur. Dans les cas particuliers où l'existence de la relation $\left(\frac{dF}{dN}\right)_e = \left(\frac{dF}{dN}\right)_i$ en chaque point de la surface serait évidente, nous supprimerons les indices. Cela posé, les fonctions fondamentales correspondant aux diverses définitions ont

¹⁾ Zaremba. Sur la théorie de l'équation de Laplace et les méthodes de Neumann et de Robin. Bulletin de l'Ac. des S. de Cracovie, Mars 1901. Zaremba. Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles $\Delta u + \xi u = 0$. C. R. de l'Ac. de Paris 24 Juin 1901. Voir aussi Korn: Ueber ein Satz von Zaremba und die Methode des arithmetischen Mittels im Raume. Berlin 1902.

²⁾ Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie, Mars 1901

cela de commun que toutes sont des potentiels de simples couches répandues sur la surface (S). Elles se distinguent par contre par les conditions qu'elles doivent vérifier dans chaque cas sur la surface (S). Désignons par

$$u_1, u_2, u_3, \dots \quad (1)$$

une suite complète¹⁾ de fonctions fondamentales de M. Poincaré, par

$$v_1, v_2, v_3, \dots \quad (2)$$

une suite complète de celles de M. Le Roy et soit enfin

$$w_1, w_2, w_3, \dots \quad (3)$$

une suite complète de fonctions fondamentales de M. Stekloff. Ces fonctions seront caractérisées respectivement par les conditions suivantes:

$$\left(\frac{du_k}{dN}\right)_e - \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i = \lambda_k \left\{ \left(\frac{du_k}{dN}\right)_e + \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i \right\}, (k=1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

$$\left(\frac{dv_k}{dN}\right)_e - \left(\frac{dv_k}{dN}\right)_i = \zeta_k \varphi v_k, (k=1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

et

$$\left(\frac{dw_k}{dN}\right)_i + \tau_k \varphi w_k = 0 (k=1, 2, 3, \dots) \quad (6)$$

où les λ_k , les ζ_k et les τ_k sont des constantes, appelées nombres caractéristiques des diverses fonctions, la lettre φ désignant une fonction positive et continue définie a priori sur la surface (S). M. M. Le Roy et Stekloff ont affirmé successivement que les suites (2) et (3) se réduisent à des suites analogues à la suite (1) en égalant la fonction arbitraire φ à la densité de l'électricité en équilibre sur la surface (S) (naturellement isolée et soustraite à toute influence étrangère).

Nous allons montrer que ces assertions, inexactes dans le cas général, sont exactes pour les surfaces (S) caractérisées par la propriété suivante: Désignons par A et B deux points quelconques pris sur une de ces surfaces et par α et β les angles formés par les

¹⁾ Nous dirons qu'une suite de fonctions fondamentales d'un genre donné est complète, lorsque toute fonction fondamentale du genre considéré est une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants de fonctions de la suite proposée et lorsque de plus cette suite ne contient que des fonctions linéairement indépendantes.

normales en A et B avec les directions AB et BA , il sera possible de trouver une fonction $\psi(M)$ de la position d'un point M mobile sur la surface (S) , fonction telle que l'on ait

$$(7) \quad \psi(A) \cos \beta = \psi(B) \cos \alpha.$$

pour toutes les positions des points A et B sur la surface.

J'ajoute ceci: lorsqu'une surface (S) jouit de la propriété précédente, la densité de l'électricité en équilibre sur elle sera proportionnelle à $\psi(M)$.

N° 2. On reconnaît sans grande peine que les assertions de M. M. Le Roy et Stekloff sont exactes ou erronées dans les mêmes cas, nous pourrions donc nous borner à considérer les fonctions de M. Le Roy. Démontrons d'abord que la condition énoncée plus haut est nécessaire et supposons à cet effet que l'on ait¹⁾:

$$(1) \quad u_k = v_k, (k = 1, 2, 3, \dots),$$

nous aurons:

$$(2) \quad \left(\frac{du_k}{dN}\right)_e - \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i = \lambda_k \left\{ \left(\frac{du_k}{dN}\right)_e + \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i \right\} = \xi_k \varphi u_k$$

Cela posé, conservons les notations du N° précédent, désignons par ds l'élément de surface relatif au point B et posons encore:

$$r = \overline{AB}.$$

On aura:

$$(3) \quad \left\{ \left(\frac{du_k}{dN}\right)_e + \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i \right\}_A = \frac{\lambda_k}{2\pi} \int \left\{ \left(\frac{du_k}{dN}\right)_e + \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i \right\}_B \frac{\cos \alpha}{r^2} ds$$

$$(4) \quad (u_k)_A = \frac{\lambda_k}{2\pi} \int (u_k)_B \frac{\cos \beta}{r^2} ds$$

On déduit de l'équation (3), au moyen d'une des relations (2), que:

$$(5) \quad (\varphi)_A (u_k)_A = \frac{\lambda_k}{2\pi} \int (\varphi)_B (u_k)_B \frac{\cos \alpha}{r^2} ds$$

Les équations (4) et (5) donnent:

$$(6) \quad \int (u_k)_B \left\{ (\varphi)_B \cos \alpha - (\varphi)_A \cos \beta \right\} \frac{ds}{r^2} = 0$$

¹⁾ On peut le faire sans nuire à la généralité.

Désignons par h une fonction continue, mais d'ailleurs arbitrairement définie sur la surface (S) , par ds' l'élément de surface relatif au point A et posons:

$$(f)_B = \int_{(S)} \{ (\varphi)_B \cos \alpha - (\varphi)_A \cos \beta \} \frac{h}{r^2} ds' \quad (7)$$

L'équation (6) nous donnera:

$$\int_{(S)} (u_k)_B (f)_B ds = 0$$

ou, bien en tenant compte de la relation (1) et en supprimant les indices devenus inutiles:

$$\int_{(S)} v_k f ds = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

On en conclut que le potentiel F défini par l'équation

$$\left(\frac{d\mathcal{F}}{dN} \right)_e - \left(\frac{d\mathcal{F}}{dN} \right)_i = t \varphi \mathcal{F} + f$$

où t est un paramètre, sera, considéré comme fonction de ce paramètre, une fonction entière. Or cela ne peut arriver que lorsque l'on a identiquement

$$f = \mathcal{F} = 0.$$

En d'autres termes la fonction f , définie par l'équation (7), sera nulle identiquement quelle que soit la fonction h . Or cela exige que l'on ait identiquement

$$(\varphi)_B \cos \alpha - (\varphi)_A \cos \beta = 0$$

Cela prouve bien que la condition en question est nécessaire.

N° 3. Il faut prouver maintenant que la condition (7) du N° 1 est suffisante. Prouvons d'abord que la fonction $\psi(M)$, quand elle existe, donne la solution du problème de l'équilibre électrique sur la surface (S) . Nous avons:

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \frac{\cos \beta}{r^2} ds$$

d'où, en vertu de la relation (7) du No 1:

$$\psi(A) = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \psi(B) \frac{\cos \alpha}{r^2} ds$$

relation qui prouve l'exactitude de notre assertion.

Voici quelles sont les propositions que nous avons encore à établir en nous plaçant dans l'hypothèse où l'on a

$$(1) \quad \psi(A) \cos \beta = \psi(B) \cos \alpha$$

$$(2) \quad \varphi = \psi(M)$$

I. La suite (2) du N° 1 peut être mise sous une forme ¹⁾ telle que chacun de ses termes puisse être considéré comme une fonction fondamentale de M. Poincaré.

II La suite (1) du N° 1 peut être mise sous une forme telle que chacun de ses termes soit une fonction fondamentale de M. Le Roy.

Démontrons en premier lieu le théorème I et à cet effet, considérons le potentiel de simple couche défini par l'équation

$$(3) \quad \left(\frac{dU}{dN}\right)_e - \left(\frac{dU}{dN}\right)_i = t \left\{ \left(\frac{dU}{dN}\right)_e + \left(\frac{dU}{dN}\right)_i \right\} + 2\varphi v_k$$

La fonction U est, comme on sait, développable en une série procédant suivant les puissances entières et positives de t , série dont le rayon de convergence sera au moins égal à 1. Posons donc:

$$(4) \quad U = \sum_{k=0}^{\infty} U_k t^k$$

Nous aurons:

$$(5) \quad \left(\frac{dU_0}{dN}\right)_e - \left(\frac{dU_0}{dN}\right)_i = 2\varphi v_k$$

$$(6) \quad \left(\frac{dU_1}{dN}\right)_e - \left(\frac{dU_1}{dN}\right)_i = \left(\frac{dU_0}{dN}\right)_e + \left(\frac{dU_0}{dN}\right)_i$$

$$(7) \quad \left(\frac{dU_k}{dN}\right)_e - \left(\frac{dU_k}{dN}\right)_i = \left(\frac{dU_{k-1}}{dN}\right)_e + \left(\frac{dU_{k-1}}{dN}\right)_i (k=2, 3, \dots)$$

La comparaison de l'équation (5) de ce N° à l'équation (5) du N° 1 nous donne:

¹⁾ Les transformations que peuvent subir les suites (1), (2) et (3) du N° 1 sont les suivantes: on peut remplacer dans chaque suite les fonctions ayant un même nombre caractéristique par autant de combinaisons linéaires, homogènes, indépendantes et à coefficients constants de ces fonctions.

$$U_o = \frac{2}{\xi_k} v_k \quad (8)$$

D'ailleurs

$$(U_I)_A = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} (U_o)_B \frac{\cos \beta}{r^2} ds$$

d'où, à cause des relations (1) et (2):

$$(U_I)_A(\varphi)_A = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} (U_o)_B(\varphi)_B \frac{\cos \alpha}{r^2} ds$$

ou encore, en tenant compte de l'équation (8):

$$\xi_k (U_I)_A(\varphi)_A = \frac{1}{\pi} \int_{(S)} (\varphi)_B (v_k)_B \frac{\cos \alpha}{r^2} ds \quad (9)$$

d'ailleurs:

$$\left(\frac{dU_o}{dN}\right)_e + \left(\frac{dU_o}{dN}\right)_i = \frac{1}{\pi} \int_{(S)} (\varphi)_B (v_k)_B \frac{\cos \alpha}{r^2} ds \quad (10)$$

Les équations (6), (9) et (10) donnent:

$$\left(\frac{dU_I}{dN}\right)_e - \left(\frac{dU_I}{dN}\right)_i = \xi_k U_I \varphi$$

Donc la fonction U_I est une fonction fondamentale de M. Le Roy et cette fonction a le même nombre caractéristique que la fonction v_k . On s'assurera aisément que toutes les fonctions U_2, U_3, \dots sont des fonctions fondamentales de M. Le Roy ayant toutes la même nombre caractéristique. Or il ne peut y avoir qu'un nombre fini de fonctions fondamentales linéairement distinctes correspondant à un même nombre caractéristique; donc il sera possible de trouver un nombre entier positif et fini p et des constantes non toutes nulles a_0, a_2, \dots, a_{p-1} telles que l'on ait identiquement:

$$a_0 U_o + a_1 U_1 + \dots + a_{p-1} U_{p-1} = 0$$

Cette relation étant vérifiée, l'on aura en général

$$a_0 U_k + a_1 U_{k+1} + \dots + a_{p-i} U_{k+p-i} = 0 \quad (k=0, 1, 3, \dots).$$

Donc la fonction U qui est comme on sait¹⁾ une fonction méromorphe du paramètre t aura au plus $p-1$ pôles à distance finie.

¹⁾ Consulter les travaux cités au début.

Les résidus relatifs à ces pôles seront des fonctions fondamentales de M. Poincaré, mais ces résidus seront aussi des fonctions fondamentales de M. Le Roy et auront toutes pour nombre caractéristique le nombre ξ_k .

Il est aisé de conclure de tout cela la proposition suivante: Dans les conditions où nous nous sommes placés, il est possible de former un ensemble dénombrable de fonctions dont chacune est une fonction fondamentale à la fois au sens de M. Poincaré et de M. Le Roy; en outre toute fonction fondamentale de M. Le Roy est une combinaison linéaire homogène et à coefficients constants d'un nombre fini de fonctions appartenant à l'ensemble précédent. Donc, il est aisé de le voir, le théorème I est démontré. La démonstration du théorème II est absolument analogue à celle du théorème I, on aura soin seulement de considérer, au lieu de la fonction U définie par l'équation (3) la fonction V , potentiel de simple couche défini par l'équation suivante:

$$\left(\frac{dV}{dN}\right)_e - \left(\frac{dV}{dN}\right)_i = t \varphi V + \left(\frac{du_k}{dN}\right)_e - \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i$$

No 4. Nous désirons, en terminant, faire quelques remarques au sujet des résultats précédents.

Observons en premier lieu que lorsqu'une surface jouit de la propriété exprimée par la relation (7) du N^o 1 il est très aisé de résoudre, pour cette surface, le problème de la distribution électrostatique; ainsi par exemple, on retrouve très simplement, par cette voie, le résultat bien connu relatif à l'ellipsoïde. Voici maintenant une extension que l'on peut apporter à la théorie exposée dans les numéros précédents. J'ai montré ailleurs ¹⁾ que la notion de chacune des trois espèces de fonctions fondamentales pouvait s'étendre au cas où l'on remplace l'équation de Laplace par l'équation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\xi^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \xi F = 0$$

où ξ est un nombre réel et négatif. On peut donc se poser dans ce cas général une question tout à fait analogue à celle qui nous a

¹⁾ Voir, outre les travaux déjà cités, mon mémoire: Sur les fonctions dites fondamentales dans la théorie des équations de la Physique. Bulletin de l'Ac. de Cracovie, Février 1901. On pourra aussi consulter Korn: Ueber die Differentialgleichung $\Delta U + k \varphi^2 U = f$ und die harmonischen Functionen Poincarés. Berlin 1902.

occupés dans les numéros précédents. Les mêmes méthodes se trouvent être applicables à l'étude de ce cas général. On trouve que la condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions fondamentales généralisées de M. Poincaré soient déductibles de celles de M. Le Roy et de celles de M. Stekloff est identique à celle que nous avons trouvée en nous occupant des fonctions harmoniques. Il se trouve même que, pour réduire les fonctions de M. Le Roy et celles de M. Stekloff aux fonctions de M. Poincaré il faut, dans le cas général comme dans le cas de l'équation de Laplace, évaluer la fonction φ à la densité de l'électricité en équilibre sur la surface.

8. M. M. RACIBORSKI: O kwiatach na plewach jęczmienia widlastego. (*Ueber die epiphyllen Blüten der Gabelgerste (Hordeum trifurcatum Schleich.)*). (*Sur les fleurs épiphyllées de l'orge sans barbes de l'Himalaya*); note lue par le secrétaire M. Rostafiński m. t.

Hordeum trifurcatum Schleich., Gabel- oder Löffelgerste, Orge sans barbes de l'Himalaya, Nepaul-Wheat ist eine Abart der vierzeiligen Gerste, deren Deckspelze grannenlos oder sehr kurz und weich begrannt, dagegen unterhalb der Spitze kapuzenartig vertieft und erweitert ist und unterhalb der Kapuze zwei seitliche Auswüchse trägt. Diese Varietät, von der mehrere Unterabarten bekannt und durch F. Koernicke (Die Arten und Varietäten des Getreides p. 164. Nr. 14, 15, 16, 21, 22, 23) beschrieben sind, ist offenbar an verschiedenen Stellen der Gerste cultivierenden Länder entstanden; so ist z. B. die Varietät *cucullatum*, welche W. Schimper in Abessinien gesammelt hat, dort in Cultur; *Hordeum trifurcatum* Schl. ist „im Himalaya Gebirge einheimisch und soll unter dem Namen „Nepaul Wheat“ im Jahre 1817 vom Himalaya nach England eingeführt worden sein“ (Werner: die Sorten und der Anbau des Getreides pag. 623). In Europa sind, wie es scheint, bis heute die Gabelgerstevarietäten nirgendwo im grossen angebaut, obwohl in letzter Zeit die Zahl der hierher gehörenden Abarten infolge der gelungenen Kreuzungen des *Hordeum trifurcatum* mit *Hord. tetrastichum pallidum*, *Hordeum distichum Steudeli* und *H. Zeocriton* bedeutend vermehrt worden ist. Die glänzenden Versuche Rimpau's haben zwei, — vier — und sechszeilige Gabelgersten,

solche mit nackten und beschalten, weissen oder schwarzen Samen geliefert.

Bei vielen Grasarten sind begrannte neben unbegrannten sogar als nahe verwandte Formen vorhanden, z. B. bei mehreren Weizenarten. Die unbegrannte Gabelgerste ist jedoch von der gewöhnlichen vierzeiligen Gerste nicht nur durch das Fehlen der Grannen, sondern durch die eigenthümliche Ausbildung der Deckspelze verschieden. Die Deckspelze trägt nämlich zwei seitliche lanzettförmige oder lineare Auswüchse, ist dabei oberhalb derselben kapuzenartig ausgehöhlt, und trägt in der Vertiefung, wie es Ermisch, Henslov, Hoffmann, Baillon, Masters, Penzig, Koernicke bemerkt haben, die Spuren einer „rudimentären Blüthe in verschiedener Ausbildung“ (Koernicke l. c. 171). Bei einer Varietät der Gabelgerste, der var. *Horsfordianum* Wittm. konnte Wittmack sogar zwei Blüthen finden, in welchen die Blüthe der Deckspelze fruchtbar war, indem die Deckspelze „ein vollständiges, normales, wenn auch etwas kleineres Korn ausgebildet“ hat. (Berichte der d. b. Gesellschaft 1884 p. LXI). Eben die sonderbare Ausbildung der Deckspelze war für E. Meyer die Ursache, die Gabelgerste generisch von den anderen Gerstenarten zu trennen unter dem Namen *Critho Aegiceras* E. Meyer.

Die sonderbaren morphologischen Verhältnisse der Deckspelze der Gabelgerste, die ich bei dem gewöhnlichen *H. trifurcatum* sowie bei der Varietas *Horsfordianum* und bei mehreren der berühmten Kreuzungsproducte Rimpau's studirt habe, will ich in den folgenden Zeilen besprechen.

Die Blütenverhältnisse der Gerste sind in mehrerer Hinsicht von denen der verwandten Grasarten verschieden. Die Blütenähre ist aus Blüthendrillingen aufgebaut, von denen jeder für sich deck- und vorblattlos auf den Absatzstufen der Ahrenspindel sitzt. Eine einzelne Blüthe hat zwei Hüllblätter, welche bei der medianen Blüthe vorne seitlich, bei den seitlichen Blüthen eines Blüthendrillings transversal sitzen. Ein Ährchen, welches an der Basis die beiden seitlichen Hüllblätter trägt, besitzt höher oben und vorne eine Deckspelze, noch höher hinten eine winzig kleine Blattanlage und schliesst damit ihr Wachsthum ab. In der Achsel der Deckspelze sitzt die Blüthe, welche hinten durch die zweikielige Vorspelze geschützt wird. Bei der zweizeiligen Gerste sind nun die seitlichen Blüthen mehr oder weniger verkümmert und unfruchtbar, ihre

Deckspelze im Gegensatz zu derjenigen der Mittelblüthe grannenlos, während die letzte in eine lange Granne ausläuft.

Bei einer Gabelgerste, möge sie zum Typus des *H. distichum*, *H. tetrastichum* oder *H. hexastichum* gehören, fehlen die langen und steifen Grannen der Deckspelzen, wodurch die ganze Ähre ein für die Gerste ganz fremdartiges Aussehen bekommt. Der merkwürdige Habitus einer Gabelgerstenähre wird noch dadurch gesteigert, dass die Deckspelzen nahe der Spitze zwei mehr oder weniger starke und lange seitliche Auswüchse tragen. Diese seitlichen Auswüchse, welche in mehrfacher Hinsicht einer Granne ähneln entstehen verhältnismässig spät auf dem schon gut differenzierten Deckspelzenprimordium, in dem solches kurz unterhalb der Spitze zwei zur Seite wachsende Höcker ausbildet. Die Nerven der Deckspelze anastomosieren auf dieser Höhe transversal und von der Verbindungsstelle derselben läuft je ein starker Nerv in die seitlichen Auswüchse hinein. Diese sind bald 1—2 mm lang und breit, gewöhnlich bis 1 cm lang, bei einer zweizeiligen Gabelgerste erreichen dieselben sogar ausnahmsweise die Länge von 3 cm und sind dann den Grannen ähnlich gebaut, doch schwächer, weicher und nicht nach vorne sondern zur Seite nach hinten gerichtet. Diese Auswüchse sind seitliche Auszweigungen der Lamina der Deckspelze.

Diejenigen Anlagen der Deckspelze, in deren Achsel eine schon als Primordium differenzierte Blütenanlage vorhanden ist, zeigt noch keine Spur von den seitlichen Auswüchsen, welche eine spätere Bildung sind. Dagegen fängt jetzt der Spitzentheil des Deckblattes an in die Dicke zu wachsen, und in einer kleinen Entfernung unterhalb der Spitze entsteht dadurch in der Medianebene der Oberseite ein Höcker. Dieser Höcker, das Primordium der sonderbaren Spitzenblüthe der Deckspelze, entsteht durch wiederholte Theilungen der Periblemzellen. Auf den zahlreichen Längsschnitten ist mir kein Fall vorgekommen, wo die Bildung derselben auf eine einzige, und noch weniger auf eine Epidermzelle zurückzuführen wäre. Er entsteht auch, wie schon erwähnt, recht spät, wenn die Achselblüthenanlage schon verhältnismässig gross ist und in einer zwar nicht sehr grossen Entfernung oberhalb derselben, aber doch in einer so grossen, dass ein einheitlicher Ursprung der beiden Blütenprimordien, der Knospe und der Deckblattblüthe, weder vorhanden ist, noch durch die Zellanordnungen

sich andeuten lässt. Die beiden erwähnten Blütenanlagen entstehen unabhängig von einander.

Das Primordium der Deckspelzenblüte bildet bald die einzelnen Blattanlagen, und in dieser Hinsicht finden wir zwischen verschiedenen Blüten derselben Ähre und zwischen verschiedenen Abarten der Gabelgerste manche Differenzen. Ich beschreibe hier zunächst das Verhalten der gewöhnlichen vierzeiligen Gabelgerste, welche am meisten Stabilität im Blütenbau aufweist, während die zahlreichen Kreuzungsproducte der Gabelgerste gewöhnlich mehr Abweichungen zeigen.

In den allermeisten Fällen bildet sich auf der Blütenanlage der Deckspelze zunächst eine Anlage des ersten Blattes, auf der der Basis der Spelze abgekehrten oberen Seite. Diese Anlage wächst zu einer durchsichtigen Schuppe aus, welche eine Länge von $\frac{1}{2}$ bis 4 mm, eine Breite von 0.4 bis 1.5 mm erlangt, mit 1 bis 3 Nerven versehen ist, ohne jede Granne oder grannenähnliche Spitze endet und, indem sie nach unten gebogen wird, von oben her die übrigen Organe der Deckspelzblüte bedeckt. Während dieses Blattoorgan schuppenartig sich ausbildet und mit seiner Basis die obere Seite wie auch die beiden Flanken der Blüte, häufig mit den Rändern auch die Basis derselben umgiebt, bilden sich auf der entgegengesetzten, also basalen Seite ein oder zwei kleine Höcker aus, welche ihr Wachstum bald einstellen und als Lodiculae functionieren. Gegen die Mitte des Blütenprimordiums bilden sich weitere drei Höcker zu den Staubblättern aus, manchmal und zwar nicht selten sind jedoch die Staubblätter in zwei dreigliedrigen Wirteln, also zu 6 ausgebildet. Im Inneren der Blüte wird eine Fruchtblattanlage, nicht selten jedoch zwei median über einander stehende gebildet.

Die weitere Entwicklung aller dieser Blütenorgane ist gewöhnlich mehr oder weniger gehemmt, manchmal auch nicht normal. Nicht selten kommt es vor, dass zwei Staubblätter mit ihren Filamenten verwachsen sind, oder dass ein Fruchtblatt mit 4 Narben endet. Die Ausbildung der Staubblätter schreitet in verschiedenen Fällen sehr verschieden weit fort. Bald erscheinen sie nur als kleine Höcker, oder es werden die Antheren gebildet, in welchen bald entweder nur die Archesporgruppen oder Pollenmutterzellen oder sogar normale Pollenkörner gebildet werden. Die innere Ausbildung der Fruchtblätter endet gewöhnlich sehr frühzeitig. Bald

wird ein Nucellus mit oder ohne Spuren des Integumentes gebildet, oder es kommt sogar zu der Bildung eines Embryosacks. Ein Fall, wie der von L. Wittmack beschriebene, der vollständigen Ausbildung der Früchte in der Deckspelzblüthe, ist in meiner Anpflanzung nicht vorgekommen.

Die Granne der Deckspelze, welche eine Blüthe trägt ist immer stark verkümmert. Häufig ist die Spitze der Deckspelze oberhalb der Blüthe nur wenige Mikrometer lang, manchmal bis 1 mm lang, bei den zweizeiligen (und manchen 4-zeiligen) Gabelgerstevarietäten sogar bis 2 cm lang, aber nicht steif, sondern weich und gebogen. Da wo diese rudimentäre Deckblattspitze etwas stärker entwickelt ist, trägt sie oberhalb der beschriebenen noch eine zweite, mehr rudimentäre Blüthe, um welche gewöhnlich zwei seitliche, winzig kleine Schuppen transversal, manchmal auch median ausgebildet sind. Auch die Anlagen der oberen Blüthe sind ebenso wie die der unteren Deckspelzblüthe von oben her nackt, ohne Bedeckung, ohne Schutzorgane.

Die sonderbare Erscheinung der Deckspelzblüthen der Gabelgerste ist in mehrerer Hinsicht interessant genug. Zunächst will ich betonen, dass wir es in diesem Falle mit keiner Anomalie oder mit etwas Teratologischem zu thun haben. Ist doch die Gabelgerste eine längst bekannte, stabile und erbliche Varietät.

In biologischer Hinsicht bleibt uns die Erscheinung ganz räthselhaft. Klar ist nur, dass zwischen der Ausbildung der Granen und der Deckspelzblüthen eine Correlation besteht, indem die Ausbildung eines dieser Organe hemmend auf die Entwicklung des anderen wirkt.

Die biologische Bedeutung der Blüthen auf der Oberseite der Spelze bleibt mir unbekannt, dieselben machen auf mich sogar mehr als irgend andere Erscheinungen des Pflanzenreiches den Eindruck zweckloser Gebilde. Es bleiben zwar viele Blüthen verschiedener Pflanzen rudimentär, doch erfüllen sie dann andere Functionen, dienen als Schauapparate, als Nectarien, oder endlich als Reserveblüthen in den Fällen, wenn andere in der Entwicklung behindert werden. Bei der Gabelgerste ist keine dieser Erklärungen zutreffend, die Blüthen der Deckspelze bleiben in den allermeisten Fällen unfruchtbar.

Nicht minder interessant bleibt die Gabelgerste in morphologischer Hinsicht, denn wir haben es hier mit echten blattbürtigen

Blüthen zu thun. Die Zahl der Pflanzen mit echten blattbürtigen Blüthen ist gering (cfr. de Candolle, *Recherches sur les inflorescences épiphyllés* 1890) und wird in Zukunft noch mehr reducirt werden, denn „in den meisten dieser Fälle dürfte es sich um eine Verschiebung der in der Blattachsel angelegten Knospe und um eine Verwachsung mit dem Blatte handeln“. (Goebel, *Organographie* II, pag. 622). Bei der Gabelgerste zeigt doch die Entwicklungsgeschichte verhältnismässig leicht, dass die Blüthen der Deckspelze keine Achselgebilde derselben sind. Wir haben es bei der Gabelgerste mit einer sonderbaren Mutation der gewöhnlichen Gerste zu thun, welche ausser den gewöhnlichen normalen auch epiphyllé Blüthen trägt, und welche als eine Ausnahme von der allgemeinen Regel, dass die neuen Sprosse nur als Achselgebilde entstehen, volle Beachtung verdient.

-
9. M. M. RACIBORSKI: **O rozmnażaniu rostowem paproci *Angiopteris evecta*. (Ueber die vegetative Vermehrung der *Marattiaceae Angiopteris evecta*). Sur la reproduction par bourgeonnement de la *Marattiacée Angiopteris evecta*; note lue par le secrétaire M. Rostafiński m. t.**

Es ist den Gärtnern wohl bekannt, dass die Marattiaceen leicht vegetativ zu vermehren sind. Die abgeschnittenen Stücke der dicken und saftigen Nebenblätter bilden nämlich, in passenden Vegetationsverhältnissen gehalten, mit Leichtigkeit Adventivknospen, die sich bewurzeln und die Mutterpflanze regenerieren. Es war mir dagegen unbekannt, ob die Marattiaceen im Freien im Stande sind, vegetativ sich zu vermehren und zu verbreiten. Einen diesbezüglichen Fall, *Angiopteris evecta* betreffend, will ich deswegen im folgenden beschreiben.

Angiopteris evecta Hoffm. ist ein Riesenfarn mit einem fast kugligen, bis 0·8 Meter breiten und hohen Stamm und bis 3·5 Meter langen Blättern. Diese Art ist auf den Inseln des malaischen Archipels besonders häufig, ausserdem ist sie nördlich bis zum Himalaya und bis Japan, südlich bis Caledonien verbreitet. Auf Java ist sie in der unteren Waldzone der dortigen Vulkane, also in einer Höhenzone zwischen 1000—1500 m über dem Meeresspiegel, besonders an den steilen, beschatteten Abhängen ungemein häufig.

Die Blätter dieser Art, wie auch der anderen Marattiaceen sind auch im erwachsenen Zustand deutlich in zwei Theile, in den Blattgrund und das Oberblatt differenziert. Der Blattgrund der erwachsenen Blätter ist als Blattkissen entwickelt, welche am Querschnitt rhombisch und bis 2 dem lang sind und an ihren Flanken die fleischigen Lappen der Nebenblätter tragen. Das Oberblatt dagegen ist in Blattstiel und die zwei- (seltener 3-) fach gefiederte Blattlamina getheilt.

Die beiden Haupttheile der Blätter sind von einer ungleich langen Lebensdauer. Das Oberblatt (also Blattstiel und Blattlamina) ist gewöhnlich 2 bis 3 Jahre lebensfähig, verwelkt und fällt ab, nachdem sich zwischen dem Blattstiel und dem Blattgrund eine verkorkte Trennungsschicht gebildet hat. Diese korkähnliche Schicht (*Pseudophechoid Hannig's Botanische Zeitung, 1898*) überzieht die ganzen resistenten Blattstielbasen, entwickelt sich dagegen nicht auf den schneller vergänglichen Blattstielen der Pflanze.

Die dicken, kugligen Stämme der Pflanze sind von den dichtstehenden Blattstielbasen, die einander gegenseitig tangieren, und von den langen fingerdicken Adventivwurzeln der Pflanze, welche zwischen jenen nach unten verlaufen, bedeckt.

Die alten Blattstielbasen sind mit einer dicken braunen humificierten Schicht bedeckt, die Nebenblattlappen gehen langsam zu Grunde, während das Gewebe im Inneren sehr lange am Leben bleibt. Dieses parenchymatische Gewebe fungiert zugleich als Wasserreservoir, in welchem sehr zahlreiche charakteristische Gänge der Marattiaceen verlaufen. Diese Gänge (gewöhnlich Gummi- oder Schleimgänge genannt, meiner Ansicht nach den Milchröhren ganz homologe Gebilde) sind mit Hilfe der Leptominreactionen sehr leicht und schön auf dem Querschnitt der Blattstielbasen für unbewaffnete Augen sichtbar zu machen.

Ähnliche Blattstielbasen, die nach dem Verwelken und Abfallen der Blätter dem Wurzelstock der Pflanze als Wasserreservoir dienen, sind bei mehreren tropischen Farnarten vorhanden, ich habe solche nämlich bei der *Lastraea Boryna* und allen *Plagiogyria*arten gesehen, lauter Arten, die auf feuchten Waldstellen wachsen.

Die Blattstielbasen der *Angiopteris evecta* bleiben viele Jahre am Stamm lebend, wie lange überhaupt, kann ich nicht bestimmt sagen, vermuthet jedoch, etwa 10 oder mehr Jahre. Langsamer geht

jedoch die Pseudophechoidschicht, welche zugleich zu einer Trennungsschicht wird, auf die Basis derselben über an die Grenze zwischen Stamm und die Blattkissen, welche nur ziemlich lose mit Hilfe der Gefässbündel am Stamm haften und endlich infolge der eigenen Schwere abfallen.

Solche abgefallenen, losen Blattkissen der Angiopteris, welche auf der Oberfläche braunschwarz, häufig angefault oder sogar halb verrottet sind, sind in den javanischen Wäldern nicht selten zu finden. Bei ihrer bedeutenden Grösse und Schwere rollen sie an den steilen Abhängen der javanischen bewaldeten Vulkane tief nach unten herab und sind dann in eventuellen Vertiefungen etc. liegend, losen Lava-Steinen habituell ganz ähnlich, zu finden.

Ich habe viele solche Blöcke gewogen, diejenigen der gewöhnlichen Grösse wogen zwischen 1300—1500 Gramm, die ganz alten, halb verfaulten 890 bis 1060 Gramm, manche ganz kleine 230 bis 260 Gramm.

Diese abgefallenen, alten Blattstielbasen bilden nun normal auf ihren Flanken starke Adventivknospen, welche sich schnell bewurzeln und die Pflanze verbreiten. Eben deswegen ist es so häufig, sehr alte Exemplare der Angiopteris von zahlreichen jüngeren umgeben zu sehen, auf diese Weise verbreitet sich Angiopteris auf den steilen Abdachungen der Berge nach unten zu.

Ich dachte mir, diese Blattstielbasen eignen sich vielleicht dazu, die Marattiaceen auf weite Strecken leicht lebend zu versenden. Die erste Probe, die ich mit den Blattstielbasen von Angiopteris eveceta gemacht habe, welche die Direction des Gartens in Buitenzorg nach Dublany gesandt hat, ist jedoch ohne Erfolg geblieben, indem, wie ich vermuthete, dieselben unterwegs von der Winterkälte des Jahres 1900 gelitten haben. Eine zweite Sendung der Blattkissen, welche trocken in Holzkohle verpackt hierher kamen, lieferte günstige Resultate, die Stücke keimten gut in Dublany trotz einer einen Monat langen Reise.

Die vegetative Vermehrung der Pflanzen durch die abgeschnittenen Blätter ist den Gärtnern bei vielen Pflanzen bekannt, es scheint doch in der freien Natur eine Verbreitung der Pflanzen durch abgefallene Blätter oder Blattheile selten vorzukommen. Ich will nicht von den Adventivknospen sprechen, wie solche an den im Zusammenhang mit der Mutterpflanze bleibenden Blättern vieler Farne, Begonien, Tolmiea oder Ornithogalum sich bilden. Bei Bryophytum

calycinum habe ich dagegen auf Java mehrere Male die Bildung der Adventivknospen auf den schon spontan abgeworfenen Blättern gesehen. Am schönsten dagegen demonstriert die vegetative Vermehrung und Verbreitung der Pflanze durch die abgefallenen Blattheile (neben der Angiopteris) eine Aroidee aus Zanzibar, *Gonatopus Boiveni*, Decaisne (*cf. Engler, Nat. Pflanzenfamilien I, 2, pag. 103*). Das einzige Blatt der Pflanze ist dreitheilig, die einzelnen Blattheile fiederig oder gewöhnlich an der Basis doppelfiederig, wobei die einzelnen Blättchen gegenzeilig stehen. Ist nun das junge Blatt schon etwas erhärtet und mehr steif, dann fallen manche, gewöhnlich 2—5, der grünen Blättchen ohne eine ersichtliche äussere Ursache ab, fallen zu Boden, verdicken sich an ihrer Basis zu einem Knöllchen, welches sich bald bewurzelt und eine junge Pflanze bildet. Es fallen gewöhnlich weder die apicalen noch die basalen Blatthiedern, sondern die des ersten oder zweiten subapicalen Paares ab. Nachdem einige der Blättchen in der erwähnten Zeit abgefallen sind, bleiben die anderen auf dem Blatt noch mehrere Monate thätig, fallen nicht weg und gehen mit dem ganzen Blatt in der Trockenzeit zu Grunde. Die abfallenden Blättchen sind den bleibenden ganz ähnlich. Die Ursache, warum jene abfallen, diese aber an der Pflanze bleiben, ist mir unbekannt geblieben.

-
10. M. M RACIBORSKI: **O pewnej chemicznej reakcyi powierzchni korzeni.** (*Ueber eine chemische Reaction der Wurzeloberfläche*). (*Sur une réaction chimique se produisant à la surface des racines*); note lue par M. Godlewski m. t.

Seit den fundamentalen Versuchen Liebig's und Sachs' ist es bekannt, dass die Wurzeloberfläche aus Zellen aufgebaut ist, deren Wände mit einer sauren Flüssigkeit durchtränkt sind. Eben vermöge dieser sauren Flüssigkeit kommen auf der Oberfläche von polierten Marmorstücken jene Corrosionsbilder der Wurzeln zu Stande, die wir zu Demonstrationszwecken benutzen. Wie aus der Arbeit Czapek's und der Zusammenstellung in Pfeffer's Physiologie Bd. I pag. 153 zu ersehen ist, scheint die Acidität des Wurzelsecretes durch die Anwesenheit freier Kohlensäure sowie meistens durch das in kleinen Mengen ausgeschiedene Monokaliumphosphat bedingt

zu werden. Dass das Secret der Wurzel und der Wurzelhaare ausser den sauren auch reducierende Eigenschaften besitzt, war schon Sachs bekannt. H. Molisch (Über Wurzelausscheidungen, 1888, Wien) verdanken wir weitere Mittheilungen darüber, die jedoch durch Höveler (Jahrb. d. wiss. Botanik 1892 pag. 311 sq.) angegriffen worden sind. Dass im Secret der Wurzelhaare und der jungen Wurzeln Leptomin vorhanden ist, habe ich vor kurzem (Üb. d. Keimung der Tabaksamen, Bull. de l'institut botanique de Buitenzorg Nr. VI) nachgewiesen.

Das Vorhandensein des Leptamins im Secret der thätigen Wurzel kann man bequem und instructiv auf folgende Weise als Vorlesungsversuch demonstrieren. Ich benutze dazu Fliesspapier, welches entweder mit einer alkoholischen Guajaklösung oder mit einer alkoholischen α -Naphthollösung durchtränkt und getrocknet war. Die Wurzel einer beliebigen Pflanze, welche im Wasser oder auf nassem Fliesspapier cultiviert war, auf dem erwähnten Guajak- oder α -Naphtholpapier ausgebreitet und nachher mit einer verdünnten Wasserstoffsperoxydlösung begossen, zeigt momentan eine intensive Färbung ihrer Spuren (eine blaue auf Guajak —, eine violette auf Naphtholpapier). Dass das reactionsfähige Leptomin thatsächlich durch die Wurzel nach aussen ausgeschieden wird, kann auf verschiedene Weisen nachgewiesen werden. Sind die Samen einer Pflanze auf mehrfacher Lage des Fliesspapiers zur Keimung gebracht, so erscheint die Leptominreaction der Wurzelspuren der Keimlinge nicht nur auf der oberflächlichen Lage des Papiers, sondern auch auf den tieferen, bis zu welchen das Leptomin hinein diffundiert ist. Bringt man die Samen in ein wenig Wasser zur Keimung, so zeigt das Wasser bald nach der Keimung eine intensive Leptominreaction. Haben die Pflanzen in einer Erde gekeimt, welche — was nicht immer der Fall ist — mit Guajak und Wasserstoffsperoxyd keine Reaction zeigt, so tritt doch die Reaction in der Nähe der Keimlinge hervor. Endlich zeigt die mikroskopische Observation, dass das Leptomin, welches in dem Plasma der Wurzelhaare vorhanden ist, auch die Wand derselben total durchtränkt. Durch alle diese Versuche, die man beliebig abändern kann, ist zur Genüge bewiesen, dass in dem Wurzelsecret nicht nur anorganische Salze oder Säuren sondern auch das Leptomin vorhanden ist.

Das Leptomin in dem Wurzelsecret scheint bei den Phanerogamen allgemein verbreitet zu sein. Als beste Demonstrations-

pflanzen kann ich Zea Mays und andere Gramineen, wie Hirse, Weizen, Roggen, Gerste, Hafer; Leguminosen, wie Erbsen oder Bohnen; Cruciferen, wie Lepidium oder Raphanus, auch Cucurbita oder Lein empfehlen. Es ist mir keine Pflanze vorgekommen, deren Wurzelsecret ganz frei von Leptomin wäre, wenn auch, was die Stärke der Reaction anbelangt, grosse Differenzen zwischen einzelnen Pflanzenarten herrschen. So gehört der Buchweizen zu denjenigen, deren Wurzel eine nur schwache Leptominreaction zeigen.

Was die Localisation des Leptomins anbelangt, so herrscht in dieser Hinsicht bei verschiedenen Pflanzenarten eine reiche Mannigfaltigkeit. Was die Wurzel betrifft, so kann man im allgemeinen sagen: das Leptomin tritt bald oberhalb der Vegetationspitze der Wurzel auf, ist regelmässig in den Wurzelhaaren vorhanden, verschwindet dagegen auf den älteren Wurzeltheilen. Es scheint somit die Vertheilung des Leptomins besonders auf diejenigen Wurzelzonen zu fallen, welche zur Aufnahme des Wassers und der anorganischen Salze dienen, wobei sogleich einer Ausnahme gedacht werden soll, indem auf älteren Wurzeltheilen die Austrittstellen der seitlichen Wurzeln eine starke Leptominreaction zeigen. Vielfach zeigen verschiedene oberflächliche Zellen des hypocotylen Gliedes der Stengel und Blätter die Leptominreaction, und doch ist die Reaction besonders schön auf der Oberfläche der Wurzel entwickelt. Mit ihrer Hilfe ist die Grenze der Wurzel und des hypocotylen Gliedes in den meisten Fällen enorm scharf gezeichnet, ja man kann die Reaction (soweit es sich um die Oberfläche der Pflanze handelt) geradezu eine Wurzelreaction nennen.

Ob die Bildung und die Secretion des Leptomins durch die Wurzel von den Ernährungsverhältnissen derselben abhängig ist, scheint mir unwahrscheinlich. Die Reaction kommt doch während der Keimung zu Stande, während welcher die Pflanze ihre eigenen Reservestoffe verbraucht; ich konnte auch keine Differenz in der Stärke der Reaction zwischen den Maispflanzen sehen, welche in verschiedenen Nährlösungen cultiviert waren.

Ob das Leptomin, welches durch die thätigen Wurzeltheile nach aussen secerniert wird, für das Pflanzenleben indifferent bleibt oder von irgend welcher physiologischen Bedeutung ist, lässt sich zur Zeit nur vermuthen. Thatsächlich fehlt bis heute irgend ein Experiment über die physiologische Rolle des Leptomins. Die Oxydationen, mit deren Hilfe das Leptomin nachgewiesen wird,

treten nur in Gegenwart des Wasserstoffsperoxyds und nicht in der Natur auf.

11. M. M. RACIBORSKI m. c.: **O kilku nieznanych paprociach archipelagu malajskiego.** (*Ueber einige unbekannte Farne des malayischen Archipels*). (*Sur quelques fougères nouvelles de l'Archipel malais*). Note lue par le secrétaire M. Rostafiński m. t.

Während meines Aufenthaltes auf Java habe ich einige bisher noch unbekannte Farnarten theils zwischen den Pflanzenschätzen des Buitenzorger Gartens, theils auf meinen Ausflügen beobachtet und gebe hier ihre Beschreibungen. Besondere Beobachtung verdient eine neue Marattiaceae: *Angiopteris Smithii*.

Angiopteris Smithii Rac.

In dem botanischen Garten zu Buitenzorg wird seit vielen Jahren eine *Angiopteris*art cultiviert, welche von der gewöhnlichen *Ang. evecta* schon durch ihre viel kleineren, einfach gefiederten Blätter leicht zu unterscheiden ist. Es ist nun vor kurzem durch Christ und Giesenhagen (*Pteridographische Notizen, Flora, 1899*) eine andere verwandte Art, und zwar als eine neue Gattung der Marattiaceen, *Archangiopteris Henryi*, aus dem südwestlichen China beschrieben worden, und dadurch bekommt die bisher unbeschriebene Art des botanischen Gartens in Buitenzorg ein neues Interesse, indem sie genau in der Mitte steht zwischen der altbekannten *Angiopteris evecta* und der neu beschriebenen chinesischen Gattung.

Leider ist die Localität, von welcher die Pflanze stammt, wie auch der Name des Sammlers nicht bekannt. Mit grosser Wahrscheinlichkeit lässt sich jedoch annehmen, dass dieselbe auf einer der Inseln der holländischen Insulinde, vielleicht auf Sumatra oder Borneo gefunden und nach Buitenzorg gesandt worden ist.

Der Wurzelstock ist einer jungen *Angiopteris evecta* ähnlich, aufrecht, spiralig beblättert, 1 dem breit. Die Blätter sind bis 1 m lang, mit einem bis 8 mm dicken Stiel, einfach gefiedert. Die Seitenblätter auf jeder Seite der Hauptspindel zu 5—10, sehr kurz gestielt, articuliert, länglich oval, an der Basis abgerundet, an der Spitze lanzettförmig, ganzrandig, lederartig, oberseits dunkelgrün, unterseits hellgrün, 5—9 cm breit, 2—3 dem lang. Die Mittelrippe an der Basis bis zu 3 mm dick. Die secundären Nerven gewöhnlich gleich

bei der Ursprungsstelle, seltener wenige Millimeter höher gegabelt, die Gabeläste manchmal noch einmal gegabelt, parallel, gegen den Rand flach bogig aufsteigend, und daselbst 1 mm von einander entfernt. Die Scheinnerven, welche bei *Angiopteris evecta* zwischen den Nervillen bis zum Blattrande verlaufen, fehlen.

Die Sori stehen an den Seitennerven subapical, 0.5—0.7 mm von dem Blattrande entfernt, sind etwas länger als bei *Angiopteris evecta*, linear oval, 2—4 mm lang. Die Indusialschuppen kurz, mit blossem Auge unsichtbar, ähnlich der *A. evecta*; ebenso fehlen die Haare auf der medianen und schwächer als bei *A. evecta* entwickelten Crista in der Mitte des Sorus. Die zweizeiligen Sori tragen auf jeder Seite 8—14 Sporangien, die Zahl der Sporangien eines Sorus (mit den apicalen) beträgt 18—30; an der Basis der Blättchen sind jedoch kürzere Sori vorhanden, welche der Grösse, Gestalt und dem Bau nach von *A. evecta* nicht verschieden sind und 10—16 Sporangien tragen.

Die Anatomie des Blattes ist nur wenig verschieden von *Angiopteris evecta*, stimmt dagegen mehr mit *Archangiopteris Henryi* überein. Das Hypoderm ist einschichtig, mit wenig verdickten Wänden, Pallisadenzellen kurz, Schwammparenchym mächtig entwickelt. der Oberfläche parallel.

Die Abweichungen unserer Art von den zwei anderen zeigt folgende Zusammenstellung:

	<i>Archangiopteris Henryi</i>	<i>Angiopteris Smithii</i>	<i>A. evecta</i>
Blätter . . .	einfach gefiedert	einfach gefiedert	doppelt gefiedert
Die Blättchen	breit	breit	schmal
Die Scheinnerven . .	fehlen	fehlen	vorhanden
Hypoderm . . .	schw. entwickelt	schwach	stark
Pallisadenzellen . . .	kurz	kurz	länglich
Sori	lang linear	linear oval	oval
Die Zahl der Sporangien .	80—120	18—30	1—15
Sori	median	subapical	subapical
Indusialhaare	viele und lang	wenig u. kurz	wenig u. kurz

Was die Gattungszugehörigkeit unserer Art anbetrifft, so lässt sich dieselbe sehr bequem unter *Angiopteris* einreihen. Nach meinem systematischen Geschmack lässt sich sogar, und zwar eben wegen des Vorhandenseins der *Ang. Smithii*, die *Archangiopteris* ebenfalls zur *Angiopteris* einrechnen, und zwar wegen der medianen Sori als eine Untergattung, so dass diese Gattung in folgender Weise nachträglich zu gliedern wäre:

Angiopteris.

A) Sori subapical

a) Blätter mehrfach gefiedert, die Scheinnerven vorhanden.

A. evecta.

b) Blätter einfach gefiedert, die Scheinnerven fehlen.

A. Smithii.

B) Sori median, Scheinnerven fehlen.

Archangiopteris Henryi.

Dr. Bitter, der letzte Bearbeiter der *Marattiaceae* (in *Nat. Pflanzenfamilien* I, 4, p. 438) hat die Unterfamilie der *Angiopterideae* in 2 Genera (*Angiopteris* und *Archangiopteris*), *Angiopteris* dagegen in zwei Subgenera und zahlreiche Arten getrennt. Wollte man diese Eintheilung behalten, dann müsste *Angiopteris Smithii* als Typus einer neuen, noch unbenannten Gattung gelten. Doch scheint mir, dass Presl, de Vriese und Bitter mit der Zersplitterung der *Angiopteris evecta* in Arten viel zu weit gegangen sind, meine Untersuchungen zahlloser Exemplare auf Java, Sumatra und Ceylon, sowie auch meine Herbarbeobachtungen sprechen gegen solche Zersplitterung.

Ophioglossum (Ophioderma) pendulum L.

Diese interessante Art tritt auf Java in zwei Varietäten auf, welche zwar nicht besonders stark different sind, doch habituell verschieden und in der Cultur stabil sind. Die gewöhnliche Varietät (und so weit ich die Litteratur übersehen kann, die allein bis jetzt bekannte) kommt an schattigen Stellen vor, wo die Luftfeuchtigkeit immer bedeutend hoch ist, als Epiphyt der Bäume. Besonders reichlich ist sie anzutreffen in der 800–1200 Meter hohen Zone der javanischen Vulkane, an den Stellen, wo der Wald den Kaffee- und Theeplantagen noch nicht gewichen ist, oder sogar in den dichten Obstbaumbeständen der in jener Höhe liegenden Dörfer. Diese Varietät ist ausgezeichnet durch die Weichheit und Geschmeidigkeit ihrer sehr langen Blätter, welche 2–5,5 cm breit, 0,5–2 m

lang sein können. Ich habe zahlreiche Exemplare dieser Art in Kagok bei Tegal, in der warmen und mehr trocknen Ebene längere Zeit in Cultur gehabt, doch konnte ich keine Differenzen zwischen den dort cultivierten und wilden Formen finden. Auch in Buitenzorg wächst die Pflanze ganz normal, wenn auch nicht besonders kräftig.

Dagegen habe ich bei Klaten, in dem Dorfe Mipitan in Mitteljava am Südfuss des Vulkanes Merapi, also in einer Gegend mit ausgesprochenem Wechsel der trocknen und feuchten Jahreszeit, in der Höhe von etwa 200 m eine auffallend verschiedene Varietät gefunden. Die Pflanze wurzelte in einem Riesenexemplar des *Platyterium aleicorne* zwischen den Nischenblättern desselben, die jungen Exemplare, welche sehr reichlich neben den ganz alten vorhanden waren, kamen nach dem Durchbrechen der Nischenblätter nach aussen. Die Blätter sind 1—1·5 mm dick, dicklederig, 1—1·2 cm breit, 0·5—1 m lang. Ihre Nervatur ist von der gewöhnlichen Varietät etwas verschieden, indem die Maschen sehr verlängert sind, häufig 2—5 cm lang. Diese Varietät habe ich nach Buitenzorg verpflanzt, wo dieselbe in der ursprünglichen Form weiter wächst, sogar bildeten die ersten Blätter der jungen Knospen, welche ich aufgepflanzt habe in Buitenzorg die dicklederigen und schmalen Blätter. Da diese Form sich also als beständig erwiesen hat, nenne ich dieselbe *O. pendulum* L. var. *Soloense*.

Bei dieser Gelegenheit will ich die zweite bis jetzt bekannte Art der Untergattung *Ophioderma* erwähnen, nämlich das *O. intermedium* Hook. Diese Art war bis jetzt nur aus Borneo bekannt, und in der Litteratur finde ich bei Prantl eine unrichtige Angabe über ihre Verwandtschaft. Diese Pflanze wächst sehr reichlich in dem ausgedehnten Bambusgebüsch neben dem Irrenhause in Tij Keumeuh bei Buitenzorg, als eine typische Humuspflanze zwischen faulenden Blättern und Wurzeln zusammen mit *Schizaea dichotoma*, zahlreichen saprophytischen Orchideen, *Cotylanthera tenuis*, *Sciaphila tenella* u. s. w. Ihre Blätter sind steif und gerade nach oben gerichtet, die Sporangienähre entspringt aus dem mittleren, manchmal sogar aus dem apicalen Theile des sterilen, ungetheilten 0·8—2 cm breiten, 1—2·5 dem langen Blattes. Auch die Nervation entspricht der Untergattung *Ophioderma*.

Polybotrya Nieuwenhuisenii Rac.

Stamm aufrecht, bis 1 dem lang, bis 0·5 cm dick, dicht mit Wurzeln überdeckt, an der Spitze mit Schuppen geschützt. Die Schup-

pen braungelb, lanzettförmig, abstehend, am Rande behaart, 5—7 mm lang, 1 mm breit. Die Blätter sehr zahlreich an der Spitze des Stammes stehend, dimorph. Die Blattstiele 1—2 mm dick, braunschwarz, stielrund, unten mit spärlichen Schuppen besetzt, sonst mit mehrzelligen, abstehenden, 0·5—1 mm langen, farblosen Haaren dicht bedeckt, mit 5 Gefässbündeln versehen. Blattlamina der sterilen Blätter im Umriss dreieckig, 7—14 cm breit, 16—30 lang, einfach gefiedert. Die Fieder linear, fiederig tief gelappt, die Lacinien linear oval, ganzrandig, an der Spitze abgerundet, 3—4 mm breit, 6—9 mm lang. Rhachis behaart grün, Lamina glatt, kräutig. In jeder Lacinie je ein Mittelnerv vorhanden, welcher seitlich 3—5 einfache, ungegabelte Seitennervillen fiederig herausendet, diese enden kurz vor dem Rande der Lacinien.

Die Sporophylle ähnlich gebaut, doch mit reduzierter Blattlamina schmalen Fiedern und kleineren, kürzeren Lacinien, unterseits dicht mit Sporangien bedeckt.

Borneo: Mahakam. Gesammelt während der Reise des Dr. A. W. Nieuwenhuis und in dem botanischen Garten in Buitenzorg unter der Nr. 1183 kultiviert.

Platycerium Wandae Rac.

Von Doreh an der nordwestlichen Küste des holländischen Neu Guinea wurden im Jahre 1899 durch Herrn Meywes einige Exemplare einer dort einheimischen *Platycerium*art nach Buitenzorg gesandt, welche zu den grössten Arten der Gattung gehören, doch bis jetzt unbekannt geblieben waren. Die Pflanzen kamen halb tot nach der langen Reise in Java an, und es gelang nicht, dieselben am Leben zu erhalten, die gleich damals gemachte Abbildung und die Notizen dienen zu der folgenden Beschreibung.

Die Nischenblätter der fructificierenden Exemplare 1·5—2 m lang, über ein Meter breit, an der Basis 1·5 cm dick, oben tief gelappt und dünn, an der Basis bräunlich, oben grün, also die grössten bis jetzt bekannten. Die Vegetationsspitze durch sehr zahlreiche lanzettförmige, braune, 2—3 cm lange, 0·5 cm breite Schuppen geschützt, und in diesen ganz verborgen, ausserdem durch grüne, sehr dünne, bis 6 cm lange, mehrmals dichotom gebuchtete, aphlebienähnliche Blattgebilde verdeckt. Diese aphlebienähnlichen Gebilde gehören dem hinteren Blattrande der tief herzförmig ausgebuchteten Nischenblätter an, deren beide basale Lappen um die Vegetationsspitze hin am Rande in zahlreiche solche Aphlebien

auslaufen. Die sterilen Blätter herunterhängend, zweimal gegabelt, kleiner als die Nischenblätter, bis 1·2 m lang, die einzelnen (also 4) Lacinien nach oben zu keilförmig verbreitet, am Scheitel 20—40 cm breit und daselbst nicht gerade abgestutzt, sondern wellig berandet oder eingeschnitten. Die Unterseite der Lacinien von dem Scheitel aus bis in die Nähe der Basis derselben mit einer dicken, filzigen Lage von Sporangien bedeckt.

Durch die Grösse, grosse Schuppen, lange Aphlebien der Blattbasis von allen anderen Arten verschieden. Die Lage der sporangientragenden Blattheile erinnert an *P. alcicorne* und *P. Wilkii*. *Pl. grande*, welches auch ähnliche, wenn auch kleine Aphlebien bildet, bildet differenzierte sporangientragende Blattheile, ebenso wie sie *Pl. Wallichii* und *Pl. biforme* besitzt. *P. aetiopicum* Hook (= *Pl. Stemnaria* Sw.) aus Westafrika hat manche Ähnlichkeit mit unserer Art, bildet jedoch die Sporangien längs der Einbuchtung der Blätter.

Acrostichum (Stenochlaena) Smithii Rac.

Rhizom mehrere Decimeter lang, kriechend und aufsteigend unterseits Wurzeln treibend, sehr dicht mit Schuppen bedeckt, welche lanzettförmig, 6—8 mm lang, an der Basis 1·5—2 mm breit sind und am Rande in zahlreiche Haare auslaufen, die aus 2—4 schmalen cylindrischen, (mit Ausnahme der farblosen Basis) von gelbbraunen, nicht dicken Wandungen begrenzten Zellen bestehen. Das Rhizom ist auf dem Querschnitt rundlich, 5—7 mm dick, oberseits zweizeilig, einzelne Blätter tragend, die von einander 1—2·5 cm entfernt sind. Die Blätter sind dimorph, indem bei den Sporophyllen die assimilierende Blattfläche ganz reduciert wird, doch sind an den jüngeren Exemplaren Uebergangsformen vorhanden, bei welchen die Sporangien nur die apicalen Theile der Blättchen occupieren, die basalen Theile bleiben dabei normal assimilierend und sind nicht reduciert. Bei der Bildung der Sporophylle ist eine Periodicität vorhanden, indem bei den jüngeren Exemplaren nach 2—3 assimilierenden Blättern je ein Sporophyll gebildet wird, bei den älteren dagegen erscheinen gewöhnlich nach 1—2 assimilierenden Blättern 1—2 Sporophylle.

Die Blätter sind einfach gefiedert, mit dem Blattstiel 40—50 cm lang, 30—36 cm breit, unpaarig gefiedert, nämlich mit einem Blättchen an der Spitze und 1—3 Paaren seitlicher (an älteren Pflanzen immer 3 Paaren) Blättchen. Die einzelnen Blättchen

stehen nicht gegenüber, sondern abwechselnd, von einander 1—2 cm entfernt, die seitlichen sind articuliert, das apicale dagegen nicht. Der Blattstiel ist 8—10 cm lang, 2—2.5 mm dick, mit Schuppen besonders in dem unteren Theil bedeckt, grünlich, oberseits mit einer flachen Rinne versehen. Die seitliche Blattfieder mit der lanzettförmig verschmälerten Basis aufsitzend, articuliert, linearoval, gegen die Spitze lang und schmal ausgezogen, gegen die Basis lanzettförmig verschmälert, 13—20 cm lang, 2.2—3 cm breit, dunkelgrün, glänzend, hart, brüchig. Die Endfieder an der Basis ungegliedert und häufig ungleichseitig, 25—30 cm lang, sonst den Seitenfiedern gleich gebaut. Die Blättchen sind ganzrandig oder ganz undeutlich gekerbt, glatt, mit einer beiderseits vorspringenden Mittelrippe und parallelen Seitennerven. Die Seitennerven bis zum Rande verlaufend, fast senkrecht oder wenig schief nach oben gerichtet, 1 mm von einander entfernt, einfach und gerade oder manchmal einfach gegabelt.

Die Sporangien occupieren bald die ganzen Blättchen, bald nur die oberen Hälften derselben. In dem ersteren, häufigeren Falle vertrocknen die Sporophylle bald nach der Sporenreife. Die Sporophyllblättchen sind linear, 2.5—5 mm breit, mit sehr dünner Lamina und an der Unterseite ganz mit den Sporangien bedeckt. An den breiten Sporophyllen bleibt gewöhnlich ein schmaler Theil der Lamina neben der Mittelrippe nackt, ohne Sporangien.

In den Blattheil treten 5 Gefässbündel ein, von welchen eines (ein unteres) bald mit einem der seitlichen sich verbindet, so dass höher nur 4 Gefässbündel vorhanden sind. In die Blättchen treten 2 Gefässbündel hinein.

Diese Art ist von den bekanten *Stenochlaena*-arten leicht wegen der kleinen Zahl der Blättchen eines Blattes zu unterscheiden. Ausserdem fehlen dem *Acr. (Stenochlaena) Smithii* die fein zerschlitzten sterilen Blätter, wie solche bei *A. (Stenochlaena) aculeatum*, *gracile* und wahrscheinlich mehreren anderen Formen der variablen Gruppe des *A. sorbifolium* L. vorhanden sind.

Molukken. Buitenzorger Garten Nr. 277 b.

Nephrodium (Sagenia) Vitis Rac.

Rhizom kurz, kriechend, aufsteigend, dicht beblättert, dicht mit Schuppen bedeckt (ebenso wie die Blattstiele in dem untersten basalen Theile). Diese sind linear lanzettförmig aus dünnwandigen Zellen gebaut, 2—4 mm lang, bis 0.5 mm an der Basis breit.

Die Blattstiele cylindrisch, bis 1 mm dick, 5—9 cm lang, mit abstehenden einreihigen Drüsenhaaren, welche bis 0·5 mm lang sind, dicht bedeckt. Blattlamina dünn und weichlederig, hellgrün, im Umriss herzförmig, 3·5—9 cm lang, 3—6 cm breit, mit lanzettförmiger oder dreieckig abgerundeter Spitze, tief herzförmig ausgeschnittener Basis, abgerundeten basalen Lappen, am Rande bald ganzrandig (so besonders — doch nicht immer an fructificierenden Blättern) oder gekerbt oder gelappt, auf den beiden Blattseiten und am Rande mit den oben erwähnten, abstehenden Haaren bedeckt. Von der Basis des Blattes treten in die Blattlamina drei Nerven fingerförmig hinein: die Mittelrippe und zwei seitliche Seitennerven, höher entspringen von der Mittelrippe pinnate Seitennerven, zwischen welchen die tertiären Nerven Areolen bilden. Die quartären Nervillen verzweigen sich dichotom und enden blind in den Areolen. Die Sori entstehen sparsam an den kleinen Nervillen, sind rundlich, bis 0·5 mm breit. Von einem Indusium konnte ich nur die Spuren sehen.

Mahakam, Borneo. leg. Dr. Nieuwenhuis. Im botanischen Garten in Buitenzorg cultiviert unter der Nr. 1871 und 1312.

Die Art ist mit *Nephrodium* (*Sagenia*) *Labrusca* Hooker (als *Polypodium* efr. *Species filicum* V. Tab. 285 B) am nächsten verwandt. Doch hat *Nephrodium Labrusca* Hook., eine aus Borneo und Java (cfr. Raciborski, die Pteridophyten der Flora von Buitenzorg p. 109), grosse Schuppen auf dem Rhizom und der Basis der Stiele. Diese Schuppen sind 1—1·5 cm lang, 1 mm breit, aus dickwandigen Zellen aufgebaut. Die Blattstiele sind glatt, glänzend, schwarzbraun, bis 2 mm dick, 20—30 cm lang, die Blattfläche ist glatt.

Nephrodium Labrusca (Hook.) scheint in Borneo in mehreren Varietäten vorzukommen. Exemplare bei Sambas (Westborneo) durch Dr. Boscha gesammelt bezeichne ich als

var. Boschae Rac. Die Blattstiele sehr lang (20—40 cm), Blattlamina der sterilen Blätter und der Sporophylle 5 lappig, an der Basis nur seicht herzförmig gebuchtet, 10—35 cm lang und breit.

Aspidium (*Lastrea*) *Wigmanii* Rac.

Rhizom aufrecht wachsend 2—8 cm dick, 3—10 cm lang, radiär dicht beblättert. Die Blätter 1—1·5 m lang, 30 bis 40 cm breit, lang gestielt, einfach gefiedert, die Segmente tief einfach fiederlappig. Rhizom und Blattstiele, besonders deren Basis mit ka-

staniensbraunen, lanzettförmigen, 1—1·2 mm breiten, 1—1·5 cm langen, wenig abstehenden Schuppen bedeckt. Nach oben zu sind die Schuppen der Blattstiele kleiner und seltener, auf der Blattbasis fehlen dieselben ganz oder finden sich nur vereinzelt. Sonst sind die Blattstiele, die Blattbasis und die Blättchen beiderseits an Nerven, Nervillen, am Blattrande, ausnahmsweise auch zwischen den Nervillen mit bis 0·3 mm langen, abstehenden, wenig klebrigen, mehrzelligen, farblosen Drüsenhaaren dicht bedeckt. Blattstiel 3—4 mm dick, dunkel kastanienbraun, bis 50 cm lang, auf der Oberseite mit einer medianen und tiefen Furche und zwei seitlichen, weniger tiefen, doch sehr auffallenden Furchen, unterseits convex. Die Blattsegmente gegenüberstehend, linear, an der Spitze lanzettförmig, ohne Stiel oder mit einem bis 2 mm langem Stiel, 25—35 mm breit, 14—20 cm lang, krautig weich, bis in die Nähe des Mittelnerven fiederig lappig. Die Lacinien sind bis 15 mm lang, 4—5 mm breit, am Rande gekerbt bis gezähnt, gewöhnlich mit verschmälerter Basis, abgerundeter Spitze und 4—5 Paaren der einmal gegabelten Seitennervillen. Das erste, basale Paar der Lacinien eines Segmentes ungleich, indem die untere, höher der Rachis entspringende Lacinie kleiner, (häufig um die Hälfte kürzer) als die obere ist. Sporophylle haben bedeutend reducierte (schmälere) Lacinien, 5—8 Paare der Sori. Indusien tief herzförmig ausgeschnitten, sonst im Umriss rundlich bis 0·3 mm breit.

Localität: Aroeinsel westlich von Neu Guinea. Diese insulare Form der polymorphen Art *Asp. Filix mas* ist schon längere Zeit in Buitenzorg in der Cultur und bleibt stabil.

Asplenium (Phyllitis) glochidiatum Rac. nov. sp.

Unter den Pflanzen, welche Dr. Nieuwenhuis auf seiner letzten Borneoreise sammelte und die lebend nach Buitenzorg kamen, befand sich (Nr. 1752) ein junges Exemplar einer Farnart, welche von Mahakam stammt. Nach einem Jahre brachte endlich die Pflanze gut entwickelte Sporophylle. Ich gebe hier ihre Beschreibung als einer neuen *Asplenium*art (*Phyllitis*) *A. glochidiatum* Rac.

Die Pflanze ist interessant durch die starke Differenz, welche zwischen den Jugendblättern und den Blättern der erwachsenen Pflanze besteht.

Die Jugendblätter, welche die junge Pflanze längere Zeit allein produciert, sind 2—5 cm lang, 1—1·3 cm breit, fest sitzend, im Umriss länglich oval, gegen die Basis stark, doch langsam ver-

schmälert, an der Basis spitz abgerundet, mit Ausnahme des keilförmig verschmälerten basalen Theiles tief fiederig gelappt, wobei die Einschnitte, welche an der Basis schmal sind, bis $\frac{2}{3}$ der Blatthälfte tief sind. Die Blattlappen sind ganzrandig, fast linear, an der Spitze abgerundet, Mittelnerv beiderseits vorstehend, die Seitennerven parallel, unverzweigt oder seltner an der Basis gegabelt, je einer in je eine Blattfieder einlaufend und daselbst 1 mm vor der Spitze endigend.

Nachdem eine Anzahl solcher kleinen und fiederlappigen Blätter gebildet ist, erscheinen dann die grösseren Uebergangsblätter und endlich die normalen Blätter der erwachsenen Pflanze, deren Beschreibung hier folgt.

Rhizom kriechend und emporsteigend, am Querschnitt oval, zweizeilig beblättert, mit anliegenden Schuppen bedeckt, 4–5 mm breit, bis 3 mm hoch, in Abständen von 1 cm je ein Blatt tragend. Die Rhizomschuppen hellbraun, an die Oberfläche angepresst, lanzettförmig, bis 1.5 mm lang, bis 1 mm an der Basis breit, mit ausgezogener schmaler Spitze, aus Zellen aufgebaut, deren Wände (mit Ausnahme der seitlichen, welche ganz dünn bleiben) sehr dickwandig und braun sind. Nahe der Basis der Schuppen sind einige kurze dünnwandige, mehrzellige Drüsenhaare vorhanden. Die Blätter kurz gestielt, Stiel 1.5 mm dick, 6–10 mm lang, schwarz, mit Schuppen bedeckt. Blattlamina spindelförmig, 25–35 cm lang, 5 cm breit, beiderseits stark und langsam verschmälert, am Rande gekerbt, an dem schmalen basalen Theil ganzrandig, von einer cartonähnlichen Consistenz, dunkelgrün, beiderseits glänzend, mit Ausnahme der basalen Theile der Rhachis glatt. Rhachis beiderseits vorspringend, oberseits flach, unterseits convex, an der Basis schwarz, höher heller, endlich grün, an der Basis beiderseits mit Schuppen bedeckt. Die Blätter an der Basis nicht articuliert. Die Seitennerven parallel, 1.5 mm von einander entfernt, etwas schief nach oben gerichtet, unterseits ein wenig vorspringend, entweder ungetheilt oder in der Nähe der Basis oder etwas höher einmal gegabelt, unmittelbar vor dem Blattrande frei endend. Die Sporophylle gleich gebaut. Die Sori linear, 1–1.8 cm lang, in der Nähe des Mittelnerven anfangend und bis zur Mitte der Laminahälfte oder sogar noch weiter verlaufend, nur selten auf allen nebeneinander liegenden Seitennerven vorhanden, häufiger verlaufen zwischen je zwei benachbarten Sori 1–2 sterile Seitennerven. Indu-

sium sehr dünn, farblos, ganzrandig, unterhalb des Seitennerven entspringend. Die Sporangien mit einem gewöhnlichen Polypodiaceen-Annulus.

Besonders interessant, und so weit mir bekannt, bei den Farne noch nicht beobachtet, ist die Gestalt der Sporen. Diese sind gelb, dünnwandig, ganz kuglig oder häufiger kuglig oval, bis 40 μ breit und mit zahlreichen Stacheln bedeckt. Diese Stacheln sind lanzettförmig, 20–30 μ lang, im Inneren hohl, dünnwandig, gewöhnlich gebogen und ungetheilt oder an der Spitze in 2–3 kurze Stachelchen auslaufend. Sowohl die in einige Stachelchen auslaufenden, wie die ungetheilten, doch hakenförmig gebogenen Stacheln erlauben sicher den durch das strömende Regenwasser fortgerissenen Sporen sich an den kleinsten Unebenheiten von Steinen festzuhalten, und wir haben im diesem Falle ähnliche Glochidien vor uns, wie bei manchen Utriculariaarten, Desmidiaceenzygoten, Azolla, Torenia u. s. w.

In die Rhachis treten zwei Gefäßbündel hinein, welche höher zu einem centralen, am Querschnitt flach ovalen, Bündel mit 4 Gefäßreihen zusammenlaufen.

Die beschriebene Aspleniumart gehört zu einer Gruppe, welche in dem Gebiet der malayischen Flora reich differenziert ist. Nächst verwandt ist das *Asplenium sundense* Blume (an = *A. vittaeforme* Cav.), eine javanische Pflanze, welche ich jedoch nicht wieder auffinden konnte (cfr. Raciborski, die Pteridophyten der Flora von Buitenzorg. Leiden 1898 p. 209), von welcher doch eine nach den lebenden Exemplaren entworfene Beschreibung von Zippelius existiert (cfr. Miquel, Annales Lugduno-Batavi. Bd. II, p. 232). Diese lautet: „frondibus fertilibus elongato-lanceolatis acuminatis basi attenuatis integris aut serratis, soris parallelis; sterilibus angustioribus inciso-serratis basi plerumque profunde pinnatifidis appendicularisve, laciniis linearibus, bi-trifidisque, caudice scadente radicante. Planta junior diversissima bipinnatifida Achilleae Millefolii similis“. Ausserdem soll *A. sundense* Bl. eine artikulirte Blattbasis besitzen, und wurde deswegen von Mettenius in eine neue Gattung *Mikropodium* versetzt. Es ist also bei *A. sundense* jene sonderbare sterile, fein zerschlitzte Blattform vorhanden wie bei *Acrostichum gracile* Bl., und welche bei *A. aculeatum* Bl. Karsten näher beschrieben hat, welche bei *A. echinosporum* fehlt. Das *A. Griffithianum* Hook., eine Art aus dem Himalaya und Malakka, hat

gedrängt stehende Blätter, unterseits beschuppte, lederige Blattlamina (cfr. Hooker, *Jcones plantarum* X. Tab. 928). *Asplenium scolopendrioides* I. Sm. (Hovk. 1. c. Tabl. 930), eine Art aus den Philippinen und Borneo hat ganzrandige Blätter, die nur an der schwanzförmig ausgezogener Spitze wenig und undeutlich gekerbt sind. Die sumatrische Art von *Asplenium spathulatum* Bak. (cfr. *Annals of Botany* VIII p. 124) ist mir nicht näher bekannt, soll jedoch merkwürdig scheidenförmige Blätter besitzen; alle anderen beschriebenen Arten sind systematisch von unserer Pflanze weiter entfernt.

12. M. S. KĘPIŃSKI: O całkach rozwiązań równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego z sobą sprzężonych. (*Über Integrale der Lösungen der gewöhnlichen linearen, sich selbst adjungierten Differentialgleichungen zweiter Ordnung*). (*Sur l'intégration des solutions d'équations différentielles linéaires auto-conjuguées du deuxième Ordre*). Mémoire présenté par M. J. Puzyna m. c.

Als Grundlage der folgenden Untersuchungen nehmen wir die Differentialgleichung:

$$Ay'' + A'y' + A_0y = 0, \quad (1)$$

wo

$$A = f_n(z)^2 = (z - e_1)^2 (z - e_2)^2 \dots (z - e_n)^2 = a_0 + a_1 z + \dots + a_{2n} z^{2n},$$

$$A_0 = c_0 + c_1 z + \dots + c_{2n-2} z^{2n-2}, \quad c_{2n-2} = n(n-1), \quad c_{2n-3} = (n-1)^2 a_{2n-1}$$

ist. Den Coefficienten A_0 kann man auch in der Form schreiben:

$$A_0 = \frac{n-1}{2} \frac{d^2 A}{dz^2} + h_{2n-4},$$

$$h_{2n-4} = b_0 + b_1 z + \dots + b_{2n-4} z^{2n-4}.$$

Wenn man mit l_i, l'_i die zu den singulären Punkten e_i gehörenden Exponenten bezeichnet, so ist bekanntlich¹⁾:

$$l_i + l'_i = -1$$

¹⁾ Vergl. Rozpr. Ak. Um. w Krakowie. Bd. 25, p. 316.

und für $z = \infty$:

$$l' = n - 1, \quad l'' = n.$$

Im folgenden setzen wir voraus, dass l_i, l'_i reelle rationale Zahlen darstellen und:

$$-1 < l_i < 0, \quad -1 < l'_i < 0, \quad l_i \geq l'_i.$$

ist.

§ 1.

Überall endliche Integrale (I Gattung).

Vermittels der Lösungen y_1, y_2 der Differentialgleichung 1 bilden wir folgende Integrale

$$(2) \quad I_1^{(\alpha)} = \int y_1 z^\alpha dz, \quad I_2^{(\alpha)} = \int y_2 z^\alpha dz \\ \alpha = 0, 1, \dots, n-3.$$

Es ist leicht zu sehen, dass diese $2(n-2)$ Integrale überall endlich und von einander linear unabhängig sind¹⁾.

§ 2.

Integrale (II. Gattung).

Wenn man die n -te Polare von $f_{2n} = A$ mit $F_A^n(z, t)$ und die $(n-2)$ Polare von h_{2n-4} mit $F_h^{n-2}(z, t)$ bezeichnet, so stellt

$$(3) \quad Z^{2\nu}(t) = \int_{\nu}^x \frac{y}{(z-t)^3} [F_A^n(z, t) + \frac{1}{2}(z-t)^2 F_h^{n-2}(z, t)] dz,$$

ein Integral dar, welches wir eben als Integral II. Gattung einführen.

Dieses Integral ist überall endlich mit Ausnahme des Punktes $z = t$.

In der That,

1) wenn die Integrationsgrenzen in der Umgebung von $a \geq t$ sind, so ist leicht zu sehen, dass das Integral endlichen Wert besitzt.

¹⁾ Zwischen den Periodicitätsmoduln dieser Integrale existieren bilineare Relationen. Vg. Rozp. Ak. Um. Kraków. Bd. 25 s. 320; Hirsch: Math. Ann. Bd. 54.

2) Wenn $a = t \geq e_i$, entwickelt man die Function unter dem \int in die Potenzreihe nach $(z - t)$ und erhält für den betrachteten Zweig y_i mit Rücksicht auf die Differentialgleichung (1):

$$Z^{xy}(t) = -\frac{1}{2} (Ay)_{z=t} \left[\frac{1}{(x-t)^2} - \frac{1}{(y-t)^2} \right] - \quad (4)$$

$$- \frac{1}{2} (A'y + Ay')_{z=t} \left[\frac{1}{x-t} - \frac{1}{y-t} \right] + \Psi(x-t, y-t).$$

Der Punkt $z = t$ ist also ein Pol zweiten Grades. Man kann aber dieses Integral so normieren, dass es nur im ersten Grade unendlich wird. Wenn man nämlich zur Abkürzung

$$f(z) = f, \quad y(z) = y; \quad f(t) = \varphi, \quad y(t) = v$$

setzt, so ist:

$$\frac{\partial f y_i \varphi v_k}{\partial t \, z-t} = f y_i \left[\frac{\varphi v_k}{(z-t)^2} + \frac{\varphi v'_k + \varphi' v_k}{z-t} \right]$$

$$= \frac{\varphi^2 v_i v_k}{(z-t)^2} + \frac{\varphi \varphi' v_i + \varphi^2 v'_i}{z-t} v_k + \frac{\varphi \varphi' v_k + \varphi^2 v'_k}{z-t} v_i + (\dots).$$

Daraus folgt:

$$Z_i + \frac{1}{2 v_k} \frac{\partial f y_i \varphi v_k}{\partial t \, z-t} = \frac{1}{2 v_k} \left[\frac{\varphi^2 (v_i v'_k - v_k v'_i)}{z-t} + (\dots) + \dots \right];$$

also, wenn

$$v_i v'_k - v_k v'_i = \frac{(-1)^k}{\varphi^2} \quad i \geq k$$

$$Z_{i,k} = Z_i + \frac{1}{2 v_k} \frac{\partial f y_i \varphi v_k}{\partial t \, z-t} = \frac{1}{2 v_k} \frac{(-1)^k}{z-t} + \Psi(z-t) \quad (4)$$

und für $i = k$

$$Z_{i,i} = \Psi(z-t).$$

In $Z_{i,k}$ haben wir also ein normiertes Integral II. Gattung, welches für den Zweig y_i bei $i \geq k$ in $z = t$ unendlich wird, wie

$$\frac{1}{2 v_k} \frac{(-1)^k}{z-t},$$

und bei $i = k$ endlich bleibt.

3) Wenn $t=e$ ist, nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass y_1, y_2 die zum singulären Punkte e gehörenden Fundamentallösungen sind:

$$y_\alpha = (z-e)^{(\alpha)} [m_0^{(\alpha)} + m_1^{(\alpha)}(z-e) + \dots]$$

Weil nun:

$$F_A^n(z, e) + \frac{1}{2}(z-e)^2 F_h^{n-2}(z, e) = \frac{(z-e)^2}{2} [A_0(e) + B(z-e) + \dots]$$

ist, erhält man

$$(5) \quad \int [F_A^n + \frac{1}{2}(z-e)^2 F_h^{n-2}] \frac{y}{(z-e)^3} dz = \\ \frac{m_0 A_0(e)^2 (z-e)^l}{2} + (\frac{1}{2} m_0 B + m_1 A) \frac{(z-e)^{l+1}}{l+1} + \dots$$

d. h. die Function Z wird im Punkte e so unendlich, wie die zu ihr gehörende Lösung y .

Nun ist:

$$\left. \frac{f y_i}{2 \nu_k} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\varphi \nu_k}{z-t} \right|_{t=e} = \frac{f y_i}{2} \left[\frac{\varphi}{(z-t)^2} + \frac{\varphi \nu_k' + \varphi' \nu_k}{\nu_k} \frac{1}{z-t} \right]_{t=e}$$

und

$$\varphi(e) = 0; \quad \left. \frac{\varphi \nu_k' + \varphi' \nu_k}{\nu_k} \right|_{t=e} = \varphi'(e) (l^{(k)} + 1)$$

Indem wir $f y_i$ nach Potenzen von $(z-e)$ entwickeln, erhalten wir

$$\left. \frac{f y_i}{2 \nu_k} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\varphi \nu_k}{z-t} \right|_{t=e} = \frac{(z-e)^{i'}}{2} \varphi'^2(e) (l^{(k)} + 1) m_0^{(i')} + \dots$$

Es ist aber

$$l^{(k)} (l^{(k)} + 1) \varphi'^2(e) + A_0(e) = 0;$$

wir haben also in der Umgebung des Punktes $t=e$

$$(6) \quad Z_{ik} = \frac{A_0 m_0^{(i')}}{2} \left[\frac{1}{l^{(i')}} - \frac{1}{l^{(k)}} \right] (z-e)^{l^{(i')}} + B(z-e)^{i^{(i')}+1} + \dots$$

Daraus folgt der Satz:

Das normierte Integral Z_{ik} besitzt für den betrachteten Zweig y_i im Falle $i \geq k$ einen solchen Unstetig-

keitspunkt, wie das zugehörige Integral y_i ; wenn $i=k$ ist, besitzt $Z_{i,k}$ keinen Unstetigkeitspunkt.

Es bleibt noch den Fall $t=\infty$ zu untersuchen. Aus der Identität:

$$[F_A^n + \frac{1}{2}(z-t)^2 F_A^{n-2}] \frac{1}{z-t^3} = \frac{A(z) + \frac{1}{2}(t-z)A'(z) + \frac{1}{2}(t-z)^2 A_0(z)}{(z-t)^3} \quad (7)$$

$$+ X(z, t),$$

in der $X(z, t)$ eine ganze rationale homogene Function $(2n-3)$ Grades in $z-$ und t und namentlich $(n-3)$ Grades in $t-$ ist, folgt:

$$\lim \left\{ \frac{1}{t^{n-3}} [F_A^n + \frac{1}{2}(z-t)^2 F_A^{n-2}] \frac{y_i}{(z-t)^3} \right\}_{t=\infty} = \Psi_n(z),$$

so dass

$$\lim \left[\frac{1}{t^{n-3}} Z(t) \right]_{t=\infty} = \int \Psi_n(z) y dz.$$

das gesuchte Integral ist.

Diese Functionen Z_i oder $Z_{i,k}$ können uns als Stammfunctionen dienen, aus denen wir andere Integrale II. Gattung mit Unstetigkeitsstellen höherer Ordnung erhalten.

Am einfachsten gelingt dies, indem wir das Integral

$$\mathfrak{z}_{i,k} = 2v_k Z_{i,k},$$

welches in $z=t$ für $i \geq k$ wie $\frac{(-1)^k}{z-t}$ und für $i=k$ gar nicht unendlich wird, nach t differenzieren. Dadurch erhalten wir den Satz: Die Integrale¹⁾

$$\mathfrak{z}_{i,k}, \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{z}_{i,k}, \dots, \frac{\partial^{n-3}}{\partial t^{n-3}} \mathfrak{z}_{i,k}, \dots$$

besitzen Unstetigkeitsstellen bzw: von der 1-en, 2-en... Ordnung, und sind also linear unabhängig.

Aus diesen Integralen lassen sich $(n-2)$ Integrale II. Gattung linear zusammensetzen, deren Perioden von t unabhängig sind. In der That ist nach (7)

¹⁾ Diese Integrale sind Coefficienten von h^α in der Entwicklung von $\mathfrak{z}(t+h)$ nach Potenzen von h . Entwickelt man $\mathfrak{z}(t)$ nach Potenzen von $\frac{1}{t}$, so erhält man als Coefficienten von t^{-n} die Integrale, welche nur für $z=\infty$ je von erster, zweiter u. s. w. Ordnung unendlich sind.

Eigenschaft bleibt natürlich auch für die aus den Integralen Z gebildeten analogen Integrale $Z^{(m)}$ erhalten, indem die Z sich von den Z nur durch rationale Functionen in z, t, y, y' unterscheiden.

Aus den Gleichungen (9) folgt:

$$Z(t) = Z^{(0)}(t) + t Z^{(1)}(t) + t^2 Z^{(2)}(t) + \dots + t^{(n-2)} Z^{(n-2)}(t). \quad (10)$$

§ 3.

Integrale (III. Gattung).

Als Integrale III. Gattung führen wir folgende Functionen ein:

$$Q_{ik}^{xy}; \xi \eta = \int_{\eta}^{\infty} \int_{\eta}^{\xi} [F_A^n(z, \zeta) + \frac{1}{2}(z-\zeta)^2 F_h^{n-2}(z, \zeta)] y_i v_k \frac{dz d\zeta}{(z-\zeta)^3}$$

wo $y_i = y_i(z)$, $v_k = v_k(\zeta)$ ($i, k = 1, 2$) Lösungen der Differentialgleichung (1) bedeuten. So wie bei den Integralen II. Gattung, werden wir zunächst nach den Entwicklungen der Integrale Q_{ik} in der Umgebung verschiedener Punkte fragen. Wir unterscheiden folgende Fälle:

Wenn (x, y) in der Umgebung von a , (ξ, η) in der Umgebung von b sich befinden und

1) $a \geq b$ ist.

Dann lässt sich Q_{ik} in eine Potenzreihe der Argumente: $x-a$, $y-a$, $\xi-b$, $\eta-b$ entwickeln.

2) $a = b \geq e$

In diesem Falle betrachten wir die Function:

$$\Phi(z, \zeta) = [F_A^n(z, \zeta) + \frac{1}{2}(z-\zeta)^2 F_h^{n-2}(z, \zeta)] y_i v_k - A v_i v_k - [A(v_i' v_k + \frac{1}{2} A' v_i v_k)] (z-\zeta),$$

wo $A = A(\zeta)$, $v_k = v_k(\zeta)$ ist.

Diese Function besitzt folgende Eigenschaften:

$$\Phi_{z=\zeta} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_{z=\zeta}} = 0 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_{z=\zeta}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2_{z=\zeta}} = 0 \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \zeta_{z=\zeta}} = 0 \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2_{z=\zeta}} = 0$$

woraus folgt, dass $\Phi(z, \zeta)$ durch $(z-\zeta)^3$ theilbar ist, d. h.:

$$[F_1^n + \frac{1}{2}(z-\zeta)^2 F_1^{n-2}] y_i v_k = A v_i v_k + [A v_i' v_k + \frac{1}{2} A' v_i v_k] (z-\zeta) + P_1(z, \zeta) (z-\zeta)^3,$$

oder

$$= A y_i y_k + [A y_i' y_k + \frac{1}{2} A' y_i y_k] (\zeta-z) + P_2(z, \zeta) (\zeta-z)^3.$$

Indem man diese Gleichungen mit

$$\frac{dz d\zeta}{(z-\zeta)^3}$$

multipliziert und integriert, bekommt man:

$$Q_{ik} = - \int \frac{\frac{1}{2} A v_i v_k + (z-\zeta) [A v_i' v_k + \frac{1}{2} A' v_i v_k]}{(z-\zeta)^2} d\zeta + \iint P_1(z, \zeta) dz d\zeta,$$

woraus folgt:

a) für $i = k$

$$(11) \quad Q_{ii} = - \frac{1}{2} \frac{A v_i^2}{z-\zeta} + \iint P_1(z, \zeta) dz d\zeta,$$

oder

$$Q_{ii} = - \frac{1}{2} \frac{A y_i^2}{z-\zeta} + \iint P_2(z, \zeta) dz d\zeta,$$

oder endlich in mehr symmetrischer Form:

$$(11') \quad Q_{ii} = - \frac{1}{4} \frac{A y_i^2 + A v_i^2}{z-\zeta} + \iint P(z, \zeta) dz d\zeta.$$

b) für $i \geq k$ und

$$y_i y_k' - y_k y_i' = \frac{(-1)^k}{A} :$$

$$(12) \quad Q_{ik} = - \frac{1}{2} \frac{A v_i v_k}{z-\zeta} + \frac{(-1)^i}{2} \log(z-\zeta) + \iint P_1(z, \zeta) dz d\zeta,$$

oder

$$Q_{ik} = - \frac{1}{2} \frac{A y_i y_k}{z-\zeta} + \frac{(-1)^i}{2} \log(z-\zeta) + \iint P_2(z, \zeta) dz d\zeta,$$

oder endlich

$$Q_{ik} = - \frac{1}{4} \frac{A y_i y_k + A v_i v_k}{z-\zeta} + \frac{(-1)^i}{2} \log(z-\zeta) + \iint P(z, \zeta) dz d\zeta.$$

Wenn man nun Integrationsgrenzen einführt, erhält man

$$(12') \quad Q_{ik}^{xy, \xi \eta} = - \frac{1}{4} \left| \frac{A y_i y_k + A v_i v_k}{z-\zeta} + \frac{(-1)^i}{2} \log \frac{(x-\zeta)(y-\eta)}{(x-\eta)(y-\zeta)} \right|_{v, \gamma}^{x, \xi}$$

wo P eine Potenzreihe nach ganzen positiven Potenzen ihrer Argumente bezeichnet.

$$3) \quad a = b = e \quad a) \quad i \geq k$$

In diesem Falle nimmt man die Function in Betracht:

$$\begin{aligned} \Phi(z, \zeta) = & (z-e)^{-i^{(i)}} (\zeta-e)^{-i^{(k)}} [F_1^n + \frac{1}{2} (z-\zeta)^2 F_n^{n-2}] y_i v_k - (\zeta-e) A u_i^2 v_k \\ & - (z-\zeta) [-l^{(i)} A u_i v_k + (\zeta-e) (A u_i' v_k + \frac{1}{2} A' u_i v_k) + \\ & + \frac{1}{2} (z-\zeta)^2 [l^{(i)} l^{(k)} \frac{1}{\zeta-e} A u_i v_k + 2l_i^{(i)} (A u_i v_k + \frac{1}{2} A' u_i v_k)] \end{aligned}$$

von welcher man wiederum zeigt, dass sie durch $(z-\zeta)^3$ theilbar ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} Q_{ik} = & -\frac{1}{2} \frac{A u_i v_k (z-e)^{i+1} (z-e)^{i^{(k)}}}{z-\zeta} + \\ & + \frac{(-1)^{i+1}}{2} \iint [l^{(i)}(z-e) + l^{(k)}(\zeta-e)] \frac{(z-e)^i (\zeta-e)^{i^{(k)}}}{(z-\zeta)^2} dz d\zeta + \\ & + (z-e)^{i+1} (\zeta-e)^{i^{(k)}} P(z-e, \zeta-e). \end{aligned}$$

Es bleibt also noch das Integral

$$\iint [l^{(i)}(z-e) + l^{(k)}(\zeta-e)] \frac{(z-e)^i (\zeta-e)^{i^{(k)}}}{(z-\zeta)^2} dz d\zeta$$

auszuwerten. Zu diesem Zwecke setzt man

$$\begin{aligned} l^{(i)} = -\frac{p^{(i)}}{q}, \quad l^{(k)} = -\frac{p^{(k)}}{q}, \quad (p^{(i)} + p^{(k)} = q) \\ z-e = z'^q, \quad \zeta-e = \zeta'^q \end{aligned}$$

und bekommt

$$\begin{aligned} & \iint [l^{(i)}(z-e) + l^{(k)}(\zeta-e)] \frac{(z-e)^i (\zeta-e)^{i^{(k)}}}{(z-\zeta)^2} dz d\zeta = \\ & = -q \iint [p^{(i)} z'^{2q-p^{(i)}-1} \zeta'^{i^{(i)}-1} + p^{(k)} z'^{p^{(k)}-1} \zeta'^{i^{(k)}-1}] \frac{dz' d\zeta'}{(z'^q - \zeta'^q)^2}. \end{aligned}$$

Wenn nun ε die primitive Einheitswurzel q -ten Grades bedeutet, so ist:

$$q [p^{(i)} z'^{2q-p^{(i)}-1} \zeta'^{i^{(i)}-1} + p^{(k)} z'^{p^{(k)}-1} \zeta'^{i^{(k)}-1}] \frac{1}{(z'^q - \zeta'^q)^2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{q-1} \varepsilon^n \binom{k}{n+1} \frac{1}{(z' - \varepsilon^n \zeta')^2},$$

und weil

$$\iint \frac{dz' d\zeta'}{(z' - \varepsilon^n \zeta')^2} = \frac{1}{\varepsilon^n} \log(z' - \varepsilon^n \zeta'),$$

so ist:

$$\begin{aligned} & \iint [l^{(i)}(z-e) + l^{(k)}(\zeta-e)] \frac{(z-e)^i (\zeta-e)^k}{(z-\zeta)^2} dz d\zeta = \\ & = - \sum_{n=0}^{q-1} \varepsilon^{np} \binom{k}{n} \log(\sqrt[q]{z-e} - \varepsilon^n \sqrt[q]{\zeta-e}); \end{aligned}$$

also schliesslich für $i \geq k$:

$$\begin{aligned} (13) \quad Q_{ik}^{xy, \xi \eta} &= - \frac{1}{2} \int_{x, \xi}^{y, \eta} \frac{A v_i v_k (z-e)^{i-1} (\zeta-e)^k}{z-\zeta} + \\ &+ \frac{(-1)^i}{2} \sum_{n=0}^{q-1} \varepsilon^{np} \binom{k}{n} \log \frac{(\sqrt[q]{x-e} - \varepsilon^n \sqrt[q]{\xi-e})(\sqrt[q]{y-e} - \varepsilon^n \sqrt[q]{\eta-e})}{(\sqrt[q]{x-e} - \varepsilon^n \sqrt[q]{\eta-e})(\sqrt[q]{y-e} - \varepsilon^n \sqrt[q]{\xi-e})} + \\ &+ P(\sqrt[q]{x-e}, \sqrt[q]{\eta-e}) \end{aligned}$$

d. h. Das Integral Q_{ik} ($i \geq k$) besitzt (für den Zweig y_i) vom ersten Gliede auf der rechten Seite abgesehen, auch im Falle $a=b=e$ logarithmische Unstetigkeiten.

b) Wenn $i=k$ ist, zieht man folgende Function in Betracht:

$$\begin{aligned} \Phi &= \left(F_{i-1}^n + \frac{1}{2} (z-e) H_{i-2}^n \right) y_i v_i (z-e)^{-i} (\zeta-e)^{-i} - A v_i^2 \zeta^{-2i} - \\ &- (z-\zeta) \left[-l^{(i)} A v_i^2 + (\zeta-e) \left(A v_i v_i' + \frac{1}{2} A' v_i^2 \right) \right] (\zeta-e)^{-2i-1} + \\ &+ \frac{1}{2} (z-\zeta)^2 \left[-l^{(i)} (l^{(i)} + 1) A v_i^2 (\zeta-e)^{-i} + \right. \\ &\left. + 2l^{(i)} \left(A v_i v_i' + \frac{1}{2} A' v_i^2 \right) \right] (\zeta-e)^{-2i-1} \end{aligned}$$

von welcher man zeigt, dass sie wiederum durch $(z-\zeta)^3$ theilbar ist. Daraus folgt auf ähnliche Weise, wie früher:

$$Q_{ii} = -\frac{1}{2} \int_{z=e}^{z=\zeta} \frac{A v_i^2 (z-e)^{(i)} (\zeta-e)^{(k)}}{z-\zeta} + \mathfrak{P} \left(\sqrt[q]{z-e}, \dots \right) \quad (14)$$

Die Function Q_{ii} besitzt also keine logarithmische Unstetigkeit.

Die Functionen Q_{ik} besitzen in den Entwicklungen (11–14) ein Glied, welches für $z=\zeta$ algebraisch unendlich wird. Man kann nun diese Integrale durch Addition einer rationalen Function von z, ζ, y_i, v_k so normieren, dass dieses Glied in Wegfall kommt. Als solche Function wählen wir

$$\frac{1}{2} \frac{f(z) \varphi(\zeta) y_i(z) v_k(\zeta)}{z-\zeta}$$

Dann ist in der That

$$\frac{1}{2} \frac{f \varphi y_i v_k - \varphi^2 v_i v_k}{z-\zeta}$$

durch $z-\zeta$ theilbar, besitzt also (für die gewählten Zweige y_i, v_k) die Function:

$$\mathcal{Q}_{ik} = 2Q_{ik} + \frac{f \varphi y_i v_k}{z-\zeta}$$

für $z=\zeta$ nur logarithmische Unstetigkeitsstellen, und nämlich:

$$\text{für } z=\zeta=a \geq e \quad i \geq k$$

$$\mathcal{Q}_{ik}^{xy; \xi \eta} = (-1)^i \log \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\eta)(y-\xi)} + (x-\xi, \dots, y-\eta);$$

für $z=\zeta=e,$

$$\text{und} \quad l^{(i)} = -\frac{p^{(i)}}{q}, \quad l^{(k)} = -\frac{p^{(k)}}{q};$$

$$\mathcal{Q}_{ik}^{xy; \xi \eta} = (-1) \sum_{n=0}^{q-1} \varepsilon^{np} \log \frac{(\sqrt[q]{x-e-\varepsilon^n \sqrt[q]{\xi-e}})(\sqrt[q]{y-e-\varepsilon^n \sqrt[q]{\eta-e}})}{(\sqrt[q]{x-e-\varepsilon^n \sqrt[q]{\eta-e}})(\sqrt[q]{y-e-\varepsilon^n \sqrt[q]{\xi-e}})} +$$

$$+ \mathfrak{P} \left(\sqrt[q]{z-e}, \dots \right).$$

endlich für $i=k$ hat \mathcal{Q}_{ii} keine Unendlichkeitstelle.

§ 4.

Beziehung zwischen den Integralen (II. und III. Gattung);
bilineare Relationen.

Aus dieser Erklärung der Integrale folgt augenscheinlich eine einfache Beziehung zwischen den Integralen II. und III. Gattung:

$$(14) \quad \begin{aligned} Q_{ik} &= \int_{\gamma_1}^{\xi} Z_i^{xy}(\zeta) \nu_k d\zeta \\ &= - \int_y^x Z_k^{\xi \eta}(z) y_i dz \end{aligned}$$

und entsprechend für normierte Integrale:

$$(15) \quad \begin{aligned} \mathcal{Q}_{ik} &= \int_{\gamma_1}^{\xi} Z_i^{xy}(\zeta) \nu_k d\zeta \\ &= - \int_y^x Z_k^{\xi \eta}(z) y_i d\zeta \end{aligned}$$

Nun ist aber der Gleichung (10) zufolge:

$$Z(t) = Z^{(0)}(t) + t Z^{(1)}(t) + t^2 Z^{(2)}(t) + \dots + t^{n-3} Z^{(n-3)}(t)$$

wo $Z^{(v)}(t)$ Integrale darstellen, deren Perioden von t unabhängig sind.

Es ist also:

$$(16) \quad \begin{aligned} Q_{ik} &= \int_{\gamma_1}^{\xi} \{ [Z_i^{(0)xy}(\zeta) - Z_i^{(0)xy}(\zeta')] + \zeta [Z_i^{(1)xy}(\zeta) - Z_i^{(1)xy}(\zeta')] + \\ &+ \dots + \zeta^{n-3} [Z_i^{(n-3)xy}(\zeta) - Z_i^{(n-3)xy}(\zeta')] \} \nu_k d\zeta + \\ &+ Z_i^{(0)xy}(\zeta') J_k^{(0)\xi \eta} + Z_i^{(1)xy}(\zeta') J_k^{(1)\xi \eta} + \dots + Z_i^{(n-3)xy}(\zeta') J_k^{(n-3)\xi \eta} \end{aligned}$$

oder

$$(17) \quad \begin{aligned} Q_{ik} &= - \int_y^x \{ [Z_k^{(0)\xi \eta}(z) - Z_k^{(0)\xi \eta}(z')] + z [Z_k^{(1)\xi \eta}(z) - Z_k^{(1)\xi \eta}(z)] + \\ &+ \dots + z^{n-3} [Z_k^{(n-3)\xi \eta}(z) - Z_k^{(n-3)\xi \eta}(z')] \} y_i^k dz - \\ &- [Z_k^{(0)\xi \eta}(z') J_i^{(0)xy} + Z_k^{(1)\xi \eta}(z') J_i^{(1)xy} + \dots + Z_k^{(n-3)\xi \eta}(z') J_i^{(n-3)xy}]. \end{aligned}$$

Diese zwei wichtigen Zerlegungsformeln dienen zur Aufstellung der Bilinearrelationen, welche zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale erster und zweiter Gattung bestehen. Zu diesem Zwecke kann man solche Integrationswege einführen, welche in sich zurücklaufen, aber sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen lassen z. B. Doppelumlaufwege um je zwei singuläre Punkte. Man kann auch

als Integrationswege die Linien benutzen, welche in demselben singulären Punkte beginnen und endigen und dabei noch einen oder mehrere singuläre Punkte umspannen, oder endlich die Linien, welche zwei singuläre Punkte verbinden.

Auf solchen Wegen ist immer die Differenz der Integrale:

$$Z^{(v)}(t) - Z^{(v)}(t') = 0$$

und die Relationen 16), 17) liefern die gesuchten Bilinearrelationen zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale I. und II. Gattung.

§ 5.

Reduction der Integrale.

Alle Differentialgleichungen, welche mit der gegebenen (1) zur selben Art (im Fuchs'schen Sinne) gehören, bilden ein System der Gleichungen, welches eine ähnliche Rolle spielt wie das System der algebraischen Gleichungen, welche zur selben Classe (im Riemann'schen Sinne) gehören. Es ist also eine der wichtigsten Fragen, die Reductionsformeln für die Integrale der Lösungen der zur selben Art gehörenden Differentialgleichungen zu finden.

Es ist bekannt, dass die Lösungen Y der mit (1) zur selben Art gehörenden Differentialgleichungen sich durch

$$Y = r_0(z)y + r_1(z)y'$$

ausdrücken, wo y die Lösung der Differentialgleichung (1) $y' = \frac{dy}{dz}$, und $r_0(z)$, $r_1(z)$ beliebige rationale Functionen von z bedeuten. Das Integral

$$\begin{aligned} \int Y dz &= \int r_0(z)y dz + \int r_1(z)y dz \\ &= r_1(z)y + \int \left(r_0(z) - \frac{dr_1(z)}{dz} \right) dz \end{aligned}$$

drückt sich also aus vermittelst einer rationalen Function von z, y und eines Integrales der Gestalt

$$\int R(z)y dz.$$

Wenn man nun die rationale Function $R(z)$ in Partialbrüche zerlegt, erhält man rechts Integrale von der Gestalt:

$$I^{(p)} = \int (z - a)^p y dz,$$

wo p eine (positive oder negative) ganze Zahl ist.

Um nun für solche Integrale Reductionsformeln zu erhalten, bedienen wir uns folgender Identität:

Wenn

$$D(y) = (A y')' + A_0 y$$

die linke Seite der Gleichung (1) bezeichnet, und $\varphi(z)$ eine beliebige Function von z ist, so ist identisch:

$$(A) \quad \int D(\varphi) y dz = A(\varphi' y - \varphi y').$$

In der That:

$$\begin{aligned} \int D(\varphi) y dz &= \int (A \varphi')' y dz + \int A_0 y dz \\ &= A(\varphi' y - \varphi y') + \int [(A_2 y')' + A_0 y] \varphi dz \\ &= A(\varphi' y - \varphi y') \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Setzt man in $A) \varphi = z^p$, ($p = 0, 1, 2, \dots$), so bekommt man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \int A_0 y dz &= -A y' \\ \int (A_0 z + A'_1) y dz &= A(y - z y') \\ \int (A_0 z^2 + 2A'_1 z + 2A) y &= A z(2y - z y'), \\ &\dots \end{aligned}$$

oder, weil

$$\begin{aligned} A_0 &= c_0 + c_1 z + \dots + c_{2n-2} z^{2n-2} \\ A &= a_0 + a_1 z + \dots + a_{2n} z^{2n}, \end{aligned}$$

die Gleichungen:

$$\begin{aligned} c_0 I^{(0)} + c_1 I^{(1)} + c_2 I^{(2)} + \dots + c_{2n-2} I^{(2n-2)} &= -A y' \\ d_0 I^{(0)} + d_1 I^{(1)} + d_2 I^{(2)} + \dots + d_{2n-1} I^{(2n-1)} &= A(y - z y') \\ &\dots \end{aligned}$$

wo $c_0, c_1, \dots; d_0, d_1, \dots$ constante Grössen sind. Daraus folgt der Satz:

Die Integrale $I^{(2n-2)}, I^{(2n-2)}, I^{(2n)}, \dots$ lassen sich vermittels der rationalen Function von y, y', z und der Integrale:

$$I^{(0)}, I^{(1)}, \dots, I^{(n-3)}, I^{(n-2)}, \dots, I^{(2n-3)}$$

darstellen.

Unter den letzt aufgeschriebenen Integralen sind $(n-2)$: $I^{(0)}, I^{(1)}, \dots, I^{(n-3)}$ die überall endlichen.

Mit Hilfe aller dieser Integrale lassen sich gewisse $(n-2)$ lineare Combinationen mit constanten Coefficienten zusammensetzen:

$$\int \Psi_{2n-3-m} y dz \quad m=0, 1, \dots, (n-3),$$

welche nur polare Unstetigkeiten aufweisen d. h. es lassen sich $(n-2)$ Integrale II. Gattung bilden (vergl. § 4, 5).

Es bleiben also unter den Integralen: $I^{(n-2)} \dots I^{2n-3}$ nur zwei zu untersuchen z. B. $I^{(n-2)}, I^{(n-1)}$. Weil nun für $z = \infty$ folgende Entwicklungen gelten:

$$I^{(n-2)} = a_0 \log z + a_0 \frac{1}{z} + \frac{a_2}{2} \frac{1}{z^2} + \dots$$

$$I^{(n-1)} = a_0 z + a_1 \log z + \dots$$

können uns diese Integrale auch als Repräsentanten der Integrale III. Gattung dienen.

Wenn wir in der Identität $(A) \varphi = (z-a)^p$, $p = -1, -2, -3, \dots$ einsetzen, erhalten wir für Integrale $I^{(-p)} = J^{(p)}$ Gleichungen, mit Hilfe deren sich die Integrale:

$$J^{(3)}, J^{(4)}, J^{(5)}, \dots$$

durch rationale Functionen von z, y, y' und die Integrale $J^{(1)}, J^{(2)}, I^{(0)}, I^{(1)}, \dots$ linear mit constanten Coefficienten ausdrücken lassen.

Bei dieser Reduction erscheinen zwei neue Integrale:

$$J^{(1)} = \int \frac{y}{z-a} dz, \quad J^{(2)} = \int \frac{y}{(z-a)^2} dz.$$

Diese Integrale lassen sich aber vermittels der Substitution $z-a = \frac{1}{t}$, $y(z) = t^{n-1} \bar{y}(t)$ in die Integrale: $I^{(n-2)}, I^{(n-1)}$ transformieren; sie sind also von den letzten nicht prinzipiell verschieden, so dass auch $J^{(1)}, J^{(2)}$ als Repräsentanten der Integrale III. Gattung betrachtet werden können. Diese Integrale $J^{(1)}, J^{(2)}$ hängen mit den Integralen Q_{ik} folgendermassen zusammen:

Aus der Formel (7):

$$\left[F_1^n + \frac{1}{2} (z - \zeta)^2 F_n^{n-2} \right] \frac{1}{(z - \zeta)^3} = \\ = \frac{A(\zeta) + \frac{1}{2} (z - \zeta) A'(\zeta) + \frac{1}{2} (z - \zeta)^2 A_0(\zeta)}{(\zeta - z)^3} + X(\zeta, z)$$

folgt

$$Q_{ik} = \frac{A}{2} \int \frac{v_k + v_k' (\zeta - z)}{(z - \zeta)^2} y_i dz + \sum_{m=0}^{n-3} \int z^m y_i dz \int_{2n-m-3} \Psi'(\zeta) v_k dz \\ = \frac{A}{2} [v_k J^{(2)} - v_k' J^{(1)}] + \sum_{m=0}^{n-3} J^{(m)} Z^{(m)}$$

Das Integral Q_{ik} setzt sich also vermöge $J^{(1)}, J^{(2)}$ und einer bilinearen Summe der Integralen I-er und II-er Gattung zusammen.

Anmerkung: Wenn man einen der singulären Punkte z. B. e_n (zu dem die Exponenten l_n', l_n'' gehören) ins Unendliche vermittels der Substitution $z - e = \frac{1}{t}$, $y(z) = t^{n-1} \bar{y}(t)$ hinübersetzt, bekommt man für $\bar{y}(t)$ wiederum eine mit sich selbst adjungierte Differentialgleichung und es gelten für $t = \infty$ die Entwicklungen:

$$\bar{y}_1(t) = \frac{1}{t^{n+1} n-1} \left(a_0 + \frac{a_1}{t} + \dots \right) \\ \bar{y}_2(t) = \frac{1}{t^{n+1} n-1} \left(b_0 + \frac{b_1}{t} + \dots \right)$$

Daraus folgt, dass die überall endlichen Integrale $I^{(p)} = \int z^p y dz$, $p = 0, \dots, n-3$ sich in die linearen Combinationen der überall endlichen Integrale:

$$\bar{I}^{(p)} = \int t^p \bar{y} dt, \quad p = 0 \dots n-3$$

transformieren. Die Integrale zweiter Gattung werden hier durch die Integrale:

$$\bar{I}^{n-2}, \bar{I}^{n-1}, \dots, \bar{I}^{2n-5} \dots$$

repräsentiert und als Integrale III. Gattung können hier die Integrale:

$$\bar{J}^{(1)} = \int \frac{\bar{y}}{z-a} dt, \quad \bar{J}^{(2)} = \int \frac{\bar{y}}{(z-a)^2} dt$$

gelten.

§ 6.

Genauere Feststellung der Anzahl der Integrale I. Gattung.

Wir haben in § 5. gefunden, dass unter den Integralen

$$\int Y dz = \int (r_0 y + r_1 y') dz$$

sicher $(n-2)$ Integrale erster Gattung existieren, die linear unabhängig sind. Es bleibt noch übrig zu beweisen, dass keine anderen linear unabhängige Integrale I Gattung vorhanden sind¹⁾.

Wir stellen zuerst mit H. Hirsch den Satz auf:

Wenn

$$\int Y dz = \int [r_0(z)y + r_1(z)y'] dz$$

überall endlich sein soll, so sind $r_0(z)$, $r_1(z)$ rationale ganze Functionen von z .

Wenn y eine Lösung der Differentialgleichung (1) ist, so genügt:

$$Y(z) = r_0(z)y + r_1(z)y' \quad (19)$$

bekanntlich auch einer linearen homogenen Differentialgleichung

$$B_2 y'' + B_1 y' + B_0 y = 0 \quad (20)$$

(welche der Fuchs'schen Classe angehört) und kann im allgemeinen neben den singulären Punkten $z = e_1, e_2, \dots, e_n, \infty$ nur noch polare Unstetigkeiten besitzen (die von polaren Unstetigkeiten der Functionen r_0, r_1 herrühren). Diese polaren Unstetigkeiten sind nun hier wegen der Endlichkeit des Integrals $\int Y(z) dz$ ausgeschlossen.

Daraus folgt: Die Differentialgleichung (20) kann nur die Punkte:

$$e_1, e_2, \dots, e_n, \infty$$

als singuläre Punkte besitzen, und wenn k_i', k_i'' ; k', k'' die zu e_i, ∞ gehörenden Exponenten der Functionen Y sind, so ist

$$k_i' > -1, \quad k_i'' > -1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$k' \geq 2, \quad k'' \geq 2;$$

ausserdem ist jedenfalls wegen (19) und wegen:

¹⁾ Mit dieser Frage hat sich neulich auch H. Hirsch in 54 Bd. Math. beschäftigt. Da sich seine Resultate für die sich selbst adj. Differentialgleichungen unmittelbar nicht anwenden lassen, erörtere ich die Frage noch einmal.

$$-1 < l'_i < 0, \quad -1 < l''_i < 0, \quad l'_i + l''_i = -1,$$

$$k'_i = l'_i + \mu_i, \quad k''_i = l''_i + \mu_i,$$

wo μ_i ganze nicht negative Zahlen sind.

Es seien nun y_1, y_2 beliebige zwei linear unabhängige Lösungen von (1), Y_1, Y_2 die ihnen entsprechenden Lösungen von (20):

$$Y_1 = r_0(z) y_1 + r_1(z) y_2'$$

$$Y_2 = r_0(z) y_2 + r_1(z) y_1'$$

Daraus folgt:

$$r_0(z) = \frac{A}{c} (Y_1 y_2' - Y_2 y_1')$$

$$r_1(z) = -\frac{A}{c} (Y_1 y_2 - Y_2 y_1)$$

indem, wie bekannt, $y_1 y_2' - y_2 y_1' = \frac{c}{A}$ ist.

Die Ausdrücke $Y_1 y_2' - Y_2 y_1'$; $Y_1 y_2 - Y_2 y_1$ sind nun Invariante gegenüber den Substitutionen:

$$y_1 = a \bar{y}_1 + b \bar{y}_2 \quad Y_1 = a \bar{Y}_1 + b \bar{Y}_2;$$

$$y_2 = c \bar{y}_1 + d \bar{y}_2 \quad Y_2 = c \bar{Y}_1 + d \bar{Y}_2$$

und nämlich:

$$Y_1 y_2 - Y_2 y_1 = (ad - bc) (\bar{Y}_1 \bar{y}_2 - \bar{Y}_2 \bar{y}_1), \text{ etc.}$$

Wir können also bei der Bestimmung der Exponenten der Functionen r_0, r_1 in den Punkten $z = e_i, \infty$ für Y und y solche Lösungen einsetzen, welche zu den Exponenten der entsprechenden singulären Punkte gehören:

$$y_1 = (z - e_i)^{l'_i} \mathfrak{P}_1(z - e_i), \quad y_2 = (z - e_i)^{l''_i} \mathfrak{P}_2(z - e_i)$$

$$y_1 = \left(\frac{1}{z}\right)^{l'_i} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right), \quad y_2 = \left(\frac{1}{z}\right)^{l''_i} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right),$$

und entsprechend

$$Y_1 = (z - e_i)^{k'_i} P_1(z - e_i) \text{ etc.}$$

Daraus folgt, dass der Exponent von $r_0(z)$

$$\text{im Punkte } z = e_i: m_i^{(0)} = 2 + k'_i + l'_i - 1 = 2 + k''_i + l'_i - 1,$$

$$,, \quad z = \infty \quad m^{(0)} = 2n - k' - l' - 1 = 2n - k'' - l' - 1$$

und der Exponent von $r_1(z)$

$$\begin{aligned} \text{im Punkte } z = e_i : m_i^{(2)} &= 2 + k_i' + l_i' = 2 + k_i'' + l_i', \\ \text{„ } z = \infty \quad m^{(2)} &= 2n - k' - l'' = 2n - k'' - l' \end{aligned}$$

ist. Es war aber:

$$\begin{aligned} k_i' &= l_i + \mu_i, & k_i'' &= l_i'' + \mu_i, \\ l' &= n - 1, & l'' &= n; \end{aligned}$$

woraus:

$$\begin{aligned} m^{(2)} &= \mu_i, & m^0 &= n - k' - 1; \\ m_i^{(2)} &= \mu_i + 1, & m^{(2)} &= n - k'. \end{aligned}$$

folgt. Weil nun die Grössen μ_i nicht negative ganze Zahlen sind, bleiben $r_0(z)$, $r_1(z)$ für alle endliche Werthe von z endlich, sind also wirklich rationale ganze Functionen. Den Grad dieser Functionen bestimmen die Zahlen $m^{(2)}$ und $m^{(2)}$. Wegen der Ungleichung:

$$k'' > k' \geq 2,$$

ist:

$$\begin{aligned} m^{(2)} &\leq n - 3, \\ m^{(2)} &\leq n - 2. \end{aligned}$$

Also: $r_0(z)$ ist ein Polynom höchstens $(n - 3)$ -en Grades,

$r_1(z)$ ist höchstens vom Grade $(n - 2)$.

Es ist aber für jeden singulären Punkt e_i : $m_i^{(2)} = \mu_i + 1 \geq 1$, woraus folgen würde, dass $r_1(z)$ mindestens n -es Grades ist; es muss also identisch $r_1(z) = 0$ sein. Wir kommen schliesslich auf den Satz:

Alle überfall endlichen Integrale: $\int Y dz$ sind von der Gestalt

$$\int r_0(z) y dz,$$

wo $r_0(z)$ eine ganze rationale Function höchstens vom Grade $(n - 3)$ ist. Dies war aber zu beweisen.

Aus den vorhergehenden Erörterungen kann man schon schliessen, dass in der Schaar der Functionen:

$$Y(z) = r_0(z) y + r_1(z) y'$$

keine überall endliche vorkommen können. Wir können aber die Existenz solcher Functionen auch auf folgende einfache Weise widerlegen.

Indem die Function $Y(z)$ überall endlich sein soll, muss man festsetzen, dass

$$k_i' \geq 0, k_i'' \geq 0; k' \geq 0, k'' \geq 0$$

sind. Daraus folgt, dass

$$\mu_i \geq 1$$

also

$$\sum \mu_i \geq n$$

ist. Nun genügt aber die Function $Y(z)$ der Differentialgleichung (20); zwischen den Exponenten findet also die bekannte Relation statt:

$$k' + k'' + \sum (k_i' + k_i'') = n - 1$$

oder

$$k' + k'' + 2 \sum \mu_i = 2n - 1$$

oder weil $k' + k'' \geq 0$

$$2 \sum \mu_i \leq 2n - 1$$

$$\sum \mu_i < n .$$

§ 7.

Darstellung der Functionen Y vermittels der Integrale I. und II. Gattung.

Die Sätze des vorigen § können uns zur Darstellung einer beliebigen Function

$$Y_1 = r_0(z)y_1 + r_1(z)y_1',$$

durch Integrale erster und zweiter Gattung dienen.

In der That, es möge die Function Y_1 nur an den Stellen

$$z = a, b, c, \dots$$

und an jeder von erster Ordnung unendlich sein. Die entsprechenden Residua nennen wir: A_1, B_1, C_1, \dots

Zur Lösung y_1 wählen wir die zweite linear unabhängige: y_2 , welche der Relation:

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = \frac{1}{A}$$

genügt, und bilden die Function

$$Y_2 = r_0(z)y_2 + r_2(z)y_2'.$$

welche natürlich (im allgemeinen) auch an Stellen a, b, c, \dots unendlich ist. Die entsprechenden Residua nennen wir: A_2, B_2, \dots

Vermittels der Functionen y_1, y_2 bilden wir weiter die Integrale (v. S. 3)

$$\mathfrak{Z}_{1,1}(t) = 2v_1 Z_{1,1}(t) = 2v_1 Z_1(t) + fy_1 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\varphi v_1}{z-t}$$

$$\mathfrak{Z}_{1,2}(t) = 2v_2 Z_{1,2}(t) = 2v_2 Z_1(t) + fy_1 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\varphi v_2}{z-t}$$

$$\mathfrak{Z}_{2,1}(t) = 2v_1 Z_{2,1}(t) = 2v_1 Z_2(t) + fy_2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\varphi v_1}{z-t}$$

$$\mathfrak{Z}_{2,2}(t) = 2v_2 Z_{2,2}(t) = 2v_2 Z_2(t) + fy_2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\varphi v_2}{z-t}$$

Von diesen Integralen sind die: $\mathfrak{Z}_{1,1}$, $\mathfrak{Z}_{2,2}$, auch für $z=t$ endlich und

$$\mathfrak{Z}_{1,2} \text{ ist unendlich wie } \frac{1}{z-t}$$

$$\mathfrak{Z}_{2,1} \text{ " " " } \frac{-1}{z-t}$$

Wir bilden nun die Functionen:

$$\Phi_1 = Y_1 - A_1 \mathfrak{Z}_{1,2}(a) + A_2 \mathfrak{Z}_{1,1}(a)$$

$$\Phi_2 = Y_2 - A_1 \mathfrak{Z}_{2,2}(a) + A_2 \mathfrak{Z}_{2,1}(a);$$

Sie sind natürlich für unsere besondere Zweige Y_1 , Y_2 der Function Y auch in $z=t$ endlich. Wir behaupten aber, dass die Function Φ_1 auch nach beliebigem Umlaufe von z an der Stelle $z=a$ endlich bleibt.

Wir beweisen dies folgendermassen:

Wenn die Lösung y_1 nach einem Umlaufe von z in

$$\bar{y}_1 = \alpha y_1 + \beta y_2$$

übergeht, so geht die Function Y_1 in

$$Y_1 = \alpha Y_1 + \beta Y_2$$

die Function $\mathfrak{Z}_{1,1}$ (abgesehen vom Periodicitätsmodul) in

$$\bar{\mathfrak{Z}}_{1,1} = \alpha \mathfrak{Z}_{1,1} + \beta \mathfrak{Z}_{2,1}$$

die Function $\mathfrak{Z}_{1,2}$ in

$$\bar{\mathfrak{Z}}_{1,2} = \alpha \mathfrak{Z}_{1,2} + \beta \mathfrak{Z}_{2,2}$$

und also die Function Φ_1 in

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_1 &= \bar{Y}_1 - A_1 \bar{\mathfrak{B}}_{1,2} + A_2 \bar{\mathfrak{B}}_{1,1} = \\ &= \alpha(Y_1 - A_1 \mathfrak{B}_{1,2} + A_2 \mathfrak{B}_{1,1}) + \beta(Y_2 - A_1 \mathfrak{B}_{2,2} + A_2 \mathfrak{B}_{2,1})\end{aligned}$$

über. Nun sind die Ausdrücke in Klammern für $z=a$ endlich, also bleibt auch $\Phi_{z=a}$ endlich w. z. b. w.

Daraus folgt nach dem Satze (§ 6), dass

$$Y_1 - A_1 \mathfrak{B}_{1,2}(a) + A_2 \mathfrak{B}_{1,1}(a) - B_1 \mathfrak{B}_{1,2}(b) + B_2 \mathfrak{B}_{1,1}(b) \dots$$

ein überall endliches Integral ist; wir haben also die Darstellung:

$$Y_1 = \Sigma(A_1 \mathfrak{B}_{1,2} - A_2 \mathfrak{B}_{1,1}) + \sum_{p=0}^{n-2} M_p I^{(p)} + N,$$

wo M_p, N constante Grössen bedeuten.

Als einfaches Beispiel nehmen wir die Function

$$Y_1 = \frac{f y_1}{z-a}.$$

wo $f = (z-e_1)(z-e_2)\dots(z-e_n)$ ist, welche, wie leicht zu sehen ist, nirgends unendlich ist, ausgenommen im Punkte $z=a$.

Wir bilden

$$Y_2 = \frac{f y_2}{z-a},$$

welche auch nur in $z=a$ unendlich ist. Die Residua von Y_1, Y_2 sind:

$$A_1 = f(a) y_1(a) = \varphi v_1$$

$$A_2 = f(a) y_2(a) = \varphi v_2$$

Es ist also

$$Y_1 = \varphi v_1 \mathfrak{B}_{2,2} - \varphi v_2 \mathfrak{B}_{1,1} + \Sigma M_p I^{(p)} + N.$$

Hier sind $M_p = N = 0$. In der That haben wir:

$$\begin{aligned}\varphi v_1 \mathfrak{B}_{1,2} - \varphi v_2 \mathfrak{B}_{1,1} &= \varphi v_1 \left[2v_2 Z_1 + f y_1 \frac{\partial}{\partial a} \frac{\varphi v_2}{z-a} \right] - \\ &- \varphi v_2 \left[2v_1 Z_1 + f y_1 \frac{\partial}{\partial a} \frac{\varphi v_1}{z-a} \right] \\ &= f y_1 \cdot \varphi \left[v_1 \frac{\partial}{\partial a} \frac{\varphi v_2}{z-a} - v_2 \frac{\partial}{\partial a} \frac{\varphi v_1}{z-a} \right] \\ &= \frac{f y_1}{z-a} \varphi^2 (v_1 v_2' - v_2 v_1') = \frac{f y_1}{z-a}.\end{aligned}$$

§ 8.

Darstellung des Integrals $\int Y dz$ mittels der Integrale

I., II. und III. Gattung.

Indem wir neben den Integralen I. und II. Gattung auch die der III. Gattung benutzen, können wir jedes Integral

$$I_1 = \int Y_1 dz = \int [r_0(z) y_1 + r_1(z) y_1] dz$$

in die Summe der elementaren Integrale I, \mathfrak{I} , \mathfrak{Q} zerlegen.

Es sei I_1 nur in den Punkten $a, b, c \dots$ unendlich und nämlich in der Umgebung von a :

$$I_1 = \frac{A_1^m}{(z-a)^m} + \dots + \frac{A_1^1}{z-a} + A_1^0 \log(z-a) + \dots$$

Wenn y_2 die zweite von y_1 linear unabhängige Lösung von (1) ist, die der Relation

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = \frac{1}{A}$$

genügt, bilden wir

$$I_2 = \int Y_2 dz = \int [r_0(z) y_2 + r_1(z) y_2'] dz$$

und erhalten im allgemeinen in der Umgebung von a :

$$I_2 = \frac{A_2^m}{(z-a)^m} + \dots + \frac{A_2^1}{z-a} + A_2^0 \log(z-a) + \dots$$

Indem wir nun mit $\mathfrak{I}_{ik}^{(w)}(a)$ die Integrale zweiter Gattung bezeichnen, welche im Punkte a 1) für $i \geq k$ unendlich sind wie $\frac{(-1)^k}{(z-a)^n}$, 2) für $i = k$ endlich bleiben, und \mathfrak{Q}_{ik} die elementaren Integrale III. Gattung nennen, erhalten wir in der Function:

$$\begin{aligned} \Phi_1 = I_1 - A_1^m \mathfrak{I}_{1,2}^m(a) + A_2^m \mathfrak{I}_{2,1}^m - \dots - A_1^1 \mathfrak{I}_{1,2}^1(a) - A_1^0 \mathfrak{I}_{2,2}^0(a) - \\ - A_1^0 \mathfrak{Q}_{1,2} - A_2^0 \mathfrak{Q}_{1,1} \end{aligned}$$

für den betrachteten Zweig y_2 einen auch im Punkte a endlichen Ausdruck.

Für den Zweig y_1 ist wiederum:

$$\begin{aligned} \Phi_2 = I_2 + A_2^m \mathfrak{I}_{2,1}^m(a) - A_1^m \mathfrak{I}_{2,2}^m(a) + \dots + A_2^1 \mathfrak{I}_{2,1}^1(a) - A_1^1 \mathfrak{I}_{2,2}^1(a) - \\ - A_2^0 \mathfrak{Q}_{2,1} + A_1^0 \mathfrak{Q}_{1,1} \end{aligned}$$

auch im Punkte a endlich. Weil nun nach dem Umlaufe von z um

die singulären Punkte die Function Φ_1 in

$$\overline{\Phi}_1 = \alpha \Phi_1 + \beta \Phi_2$$

übergeht, bleibt Φ_1 (so wie auch Φ_2) überhaupt für die Stelle a endlich. Wenn wir dieselbe Discussion für die Punkte: b, c, \dots durchführen und der Kürze halber:

$$A_1^m \mathfrak{Z}_{1,2}^{(m)}(a) + B_1^n \mathfrak{Z}_{1,2}^{(n)}(b) + \dots = \Sigma A_1^m \mathfrak{Z}_{1,2}^m; \text{ etc.}$$

setzen, erhalten wir in dem Ausdrucke:

$$\Phi_1 = I_1 - \Sigma [(A_1^m \mathfrak{Z}_{1,2}^m - A_2^m \mathfrak{Z}_{1,1}^m) + \dots + (A_1^l \mathfrak{Z}_{1,2}^l - A_2^l \mathfrak{Z}_{1,1}^l)] + \\ + \Sigma [A_1^o \mathfrak{Q}_{1,2} - A_2^o \mathfrak{Q}_{1,1}]$$

eine überall endliche Function, welche dem Satze (§ 6) zufolge eine Summe der Integrale I. Gattung darstellt.

Es ist also:

$$I_1 = \Sigma [(A_1^m \mathfrak{Z}_{1,2}^m - A_2^m \mathfrak{Z}_{1,1}^m) + \dots + (A_1^l \mathfrak{Z}_{1,2}^l - A_2^l \mathfrak{Z}_{1,1}^l)] - \\ - \Sigma (A_1^o \mathfrak{Q}_{1,2} - A_2^o \mathfrak{Q}_{1,1}) + \sum_{p=0}^{n-s} M_p I_1^{(p)} + N.$$

w. z. B. w.

Zum Beispiel:

Wenn
$$I_1 = \int \frac{y_1}{(z-a)} dz$$

und
$$\left. \frac{d^n y_1}{dz^n} \right|_{z=a} = v_1^{(n)}, \quad \left. \frac{d^n y_2}{dz^n} \right|_{z=a} = v_2^{(n)}$$

ist, so hat man:

$$A_1^l = -v_1, \quad A_1^o = v_1^l$$

$$A_2^l = -v_2, \quad A_2^o = v_2^l,$$

wo wie immer
$$v_1 v_2' - v_2 v_1' = \frac{1}{A(a)} \text{ ist.}$$

Es ist also:

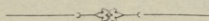
$$I_1 = -v_1 \mathfrak{Z}_{1,2}^{(l)} + v_2 \mathfrak{Z}_{1,1}^{(l)} - v_1' \mathfrak{Q}_{1,2} + v_2' \mathfrak{Q}_{1,1} + \sum_{p=0}^{n-s} M_p I_1^{(p)} + N$$

(vergl. § 13).

18. PUBLICATIONS DE LA CLASSE.

Le Secrétaire dépose sur le bureau les dernières publications de la Classe:

- Rozprawy Akademii Umiejętności. Wydział matematyczno-przyrodniczy. Serya II, tom XX, ogólnego zbioru tom 40. (*Travaux de la Classe, vol. 40, 8-o, p. 411, 3 planches et 17 gravures*).
- Wł. Natanson. O prawach zjawisk dyfuzyjnych. (*Sur les lois de la diffusion, 8-o, p. 17*).
- A. Rosner. O powstawaniu ciąży bliźniaczej monochorialnej. (*Sur la gènese de la grossesse gémellaire monochoriale, 8-o, p. 59*).
- K. Szulc. Grady w Galicyi. (*Sur les grêles en Galicie, 8-o, p. 21*).



Nakładem Akademii Umiejętności
pod redakcją Sekretarza Wydziału matem.-przyr. Dra Józefa Rostafińskiego.

Kraków, 1902. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

20 Lutego 1902.



