

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.

III. CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 9.

Décembre

1901.

-
- Sommaire.** 47. M. K. OLSZEWSKI. Détermination de la température d'inversion du phénomène de Lord Kelvin de l'hydrogène.
48. M. W. FRIEDBERG. Les foraminifères des couches à inocéramus des environs de Rzeszów et de Dębica.
49. M. L. BRUNER. Sur la dissociation de l'hydrate et de l'alcoolate du chloral en dissolution.
50. M. M. KIRKOR. Sur le changement de la vitesse du sang dans les vaisseaux des muscles striés pendant leur fonction volontaire et réflexe.
51. M. S. ZAREMBA. Contribution à la théorie d'une équation de la Physique.
52. M. K. ŻORAWSKI. Remarque sur les dérivées d'ordre infini.
53. M. K. ŻORAWSKI. Sur certaines variations des éléments linéaires pendant le mouvement d'un système continu de points.
54. PUBLICATIONS DE LA CLASSE.
-

Séance du lundi 2. Décembre 1901.

PRÉSIDENCE DE M. F. KREUTZ.

47. M. K. OLSZEWSKI présente son travail: **Oznaczenie temperatury inwersyi zjawiska Kelwina w wodorze.** (*Bestimmung der Inversionstemperatur der Kelvin'schen Erscheinung für Wasserstoff.*) (*Détermination de la température d'inversion du phénomène de Lord Kelvin de l'hydrogène.*)

Im Jahre 1854 zeigte Kelvin gemeinsam mit Joule, dass der Wasserstoff während einer nicht umkehrbaren Expansion sich anders verhält als alle übrigen Gase: die Luft, vom höheren Drucke zu einem niedrigeren ohne Leistung einer äusseren Arbeit expandiert, kühlt sich nämlich ab proportional der Differenz der Drucke, während sich der Wasserstoff in solchem Falle erwärmt. Wie bekannt, wurde die Kelvin-Joule'sche Erscheinung von Hampson und von Linde zur Darstellung von flüssiger Luft in grösserem Maassstabe ausgenützt; was die Verflüssigung von Wasserstoff anbelangt, so konnte man auf grund jener Erscheinung im voraus vermuthen,

dass die Apparate von Hampson und von Linde zu diesem Zwecke nicht direct anwendbar sind; die in dieser Richtung angestellten Versuche bestätigten wirklich jene Vermuthung. Es schien jedoch keinem Zweifel zu unterliegen, dass der Linde'sche und speciell der Hampson'sche Apparat nach entsprechender Modifizierung auch zur Verflüssigung des Wasserstoffs dienen könnte: es würde sich nur um eine entsprechende Abkühlung des dem Apparate zugeführten Gases handeln, um seine Temperatur noch vor der Expansion unter diejenige der Inversion der Kelvin'schen Erscheinung zu bringen, wonach sich der Wasserstoff selbst im weiteren Verlaufe bis zur Verflüssigungstemperatur abkühlen würde.

Thatsächlich gelang es, mit Hilfe der auf der obigen Basis zuerst von Dewar und dann von Travers¹⁾ gebauten Apparate, die Verflüssigung dieses Gases zustande zu bringen. Jene Forscher wandten zur Abkühlung des Wasserstoffs flüssige Luft an, welche unter vermindertem Druck siedete, und kühlten dadurch den Apparat bis etwa -200° ab. Es fragt sich nun, ob eine so starke Abkühlung des Wasserstoffes eine unumgängliche Bedingung seiner Verflüssigung mittels nicht umkehrbarer Entspannung ist, oder ob eine weniger energische Abkühlung zu diesem Zwecke ausreichen würde.

Diese Frage würde man leicht beantworten können, ohne eine Serie von Versuchen in verschiedenen Temperaturen durchführen zu müssen, wenn die Inversionstemperatur der Kelvin'schen Erscheinung für Wasserstoff bekannt wäre.

Es wurde aber diese Temperatur experimentell bis jetzt noch nicht bestimmt: theoretisch hat sie Witkowski²⁾ in zweierlei Weise berechnet: erstens, indem er sich dabei auf die Annahme der thermodynamischen Übereinstimmung der Inversionstemperatur für Wasserstoff und für Luft stützte, wobei er die Temperatur von etwa -46° erhielt; zweitens, indem er eine empirische Formel von Rose-Innes³⁾ in Anwendung brachte. Dieser Forscher stellte folgende Formel auf zur Bestimmung des Kühlungseffectes bei der Joule-Kelvin'schen Erscheinung:

$$e = \frac{z}{T} - \beta,$$

¹⁾ Phil. Mag., (6), I, April 1901.

²⁾ Rozpr. Akad. krak., W. M. P., XXXV, 247 und ff., 1898.

³⁾ Phil. Mag., (5), XLV, 228, 1898.

wo α und β , berechnet nach den Versuchsdaten von Joule und Kelvin, für Wasserstoff 64.1 bzw. 0.331 betragen. Bei der Annahme, der Kühlungseffect sei Null, erhalten wir mit Hilfe der Formel selbstverständlich die Inversionstemperatur, die in diesem Falle 193.7° abs., d. i. -79.3°C beträgt.

Angesichts des bedeutenden Unterschiedes der Zahlen, die auf jenen beiden Wegen erhalten wurden, erschien es wünschenswert, diese Temperatur experimentell zu bestimmen.

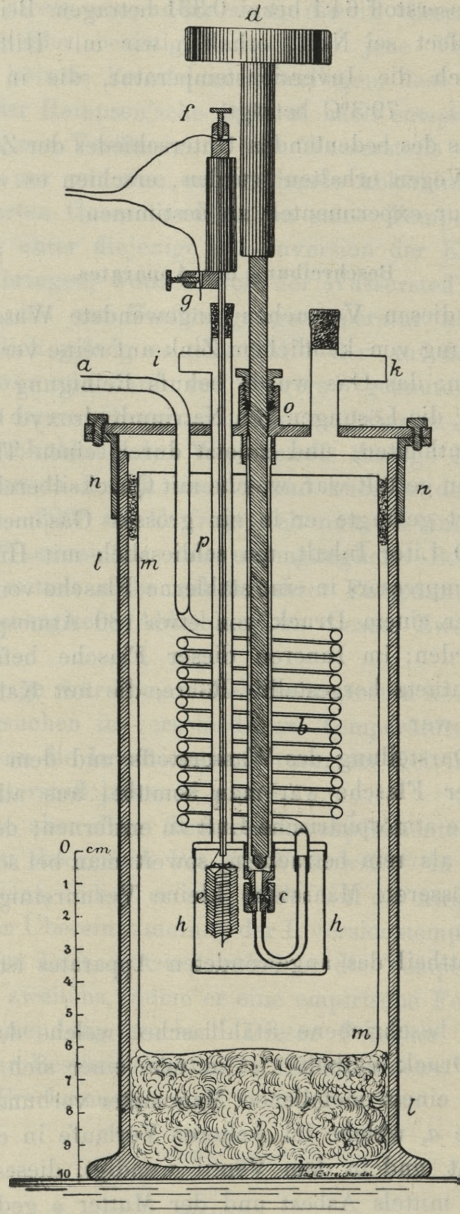
Beschreibung des Apparates.

Der bei diesen Versuchen angewendete Wasserstoff wurde durch Einwirkung von käuflichem Zink auf reine verdünnte Schwefelsäure erhalten; das Gas wurde behufs Reinigung durch Waschflaschen geleitet, die Lösungen von Natriumhydroxyd bzw. Kaliumpermanganat enthielten, und zuletzt durch einen Thurm, der mit Bimssteinstücken gefüllt war, welche mit Quecksilberchlorid getränkt waren; von dort gelangte er in ein grosses Gasometer aus Zinkblech von 1200 Liter Inhalt, um schliesslich mit Hilfe eines Whitehead'schen Compressors in eine stählerne Flasche von 13 Liter Fassungsraum unter einem Druck von etwa 180 Atmosphären hineingepresst zu werden; im Inneren dieser Flasche befand sich eine lange aus Drahtnetz hergestellte Röhre, die mit Kaliumhydroxydstangen gefüllt war.

Bei der Darstellung des Wasserstoffs und dem Comprimieren desselben in der Flasche war man bemüht, aus allen Apparaten und Gefässen die atmosphärische Luft zu entfernen; den Wasserstoff kann man also als rein betrachten, soweit man bei solcher Gasdarstellung im grösseren Maasstabe kleine Verunreinigung mit Luft vermeiden kann.

Der Haupttheil des angewendeten Apparates ist in der Figur abgebildet.

Die oben beschriebene Stahlflasche, welche den Wasserstoff unter hohem Druck enthält, ist mittels einer sich abzweigenden Kupferröhre mit einem metallenen Manometer verbunden sowie mit der Kupferröhre *a*, welche im weiteren Verlaufe in die Schlangenhöhre *b* übergeht und in dem Ventil *c* endigt; dieses Ventil ist in dem Deckel *m* mittels Asbest und der Mutter *o* gedichtet. Mittels des Griffrades *d* kann das Ventil geöffnet werden, wobei der Wasserstoff in die im Innern mit Sämischleder ausgefütterte Blechbüchse



hh bis zum gewöhnlichen atmosphärischen Druck entspannt wird, und dann durch das Rohr *pi* nach aussen entweicht. In derselben Blechbüchse befindet sich ein Widerstandthermometer *e*, dessen nähere Beschreibung sich in meiner Abhandlung über die Bestimmung der kritischen und der Siedetemperatur des Wasserstoffs befindet¹⁾. Die Klemmschrauben *f* und *g* dienen zur Verbindung des Thermometers mit der Wheatstone'schen Brücke des Widerstandskastens. Dieser Apparat ist mit Hilfe der metallenen Einfassung *nn* in den dickwandigen Glaszylinder *ll* eingekittet, in dessen Innerem sich ein dünnwandiges Becherglas *mm* befindet, welches zur Aufnahme des Kühlmittels dient.

Als solches kamen in Anwendung: flüssige Luft, flüssiges Aethylen, sowie ein Gemisch von festem Kohlendioxyd und Aether. Die Luft bezw. das Aethylen, wurde durch die obere Öffnung des T-förmigen Rohres *k* eingegossen; diese verflüssigten Gase sammelten sich im Gefäss *mm* bis oberhalb des Schlangenrohres *b* an. Die Öffnung *k* dient zur Ableitung des Dampfes des Kühlmittels, oder aber — nach gasdichter Verschlussung der oberen Öffnung — zum Verbinden des Inneren des Apparates mit einer Saugpumpe behufs Erniedrigung des Druckes sowie der Temperatur. Bei den Experimenten mit festem Kohlendioxyd wurde dasselbe vor der Befestigung des Deckels *nn* in den Apparat eingeschüttet. Zum Messen der Dampfdrucke des Kühlmittels diente ein Quecksilbermanometer, welches ebenfalls mit der Röhre *k* verbunden war, auf der Figur aber nicht eingezeichnet ist.

Beschreibung der Experimente.

Bei den Versuchen mit flüssiger Luft als Kühlmittel betrug die Anfangstemperatur ca. -190° , der Druck des Wasserstoffs vor der Expansion etwa 170 Atmosphären. Die Entspannung geschah langsam und dauerte 4 bis 5 Sekunden. Die Kühlung war eine bedeutende; der Ausschlag des Galvanometers betrug etwa 200 mm an der Scala. Angesichts dessen erschien es nothwendig, ein weniger starkes Kühlmittel anzuwenden: dazu eignete sich zunächst flüssiges Aethylen. Bei Experimenten mit diesem Mittel betrug die Anfangstemperatur etwa -103° , der Anfangsdruck etwa 150 Atmosphären. Bei der Expansion erniedrigte sich auch hier die

¹⁾ Rozpr. Ak., W. M. P., XXIX, 404, 1895.

Temperatur, doch in weit schwächerem Grade als bei Anwendung von flüssiger Luft: der Ausschlag des Galvanometers betrug etwa 30 mm an der Scala. Die Temperatur des flüssigen Aethylens erwies sich also als zu niedrig: zwecks Erreichung höherer Temperaturgrade eignet sich aber dieses Gas nicht, in Folge dessen wurde in der dritten Versuchsreihe ein Gemisch von festem Kohlendioxyd und Aether angewendet. Die Anfangstemperatur betrug -78° , der Anfangsdruck ca. 117 Atmosphären. In dieser Versuchsreihe wurden 25 Expansionen ausgeführt, während welcher der Druck in der Stahlflasche von 117 auf 110 Atmosphären sank, d. i. im Verlaufe einer einzigen Expansion änderte sich der Druck des Wasserstoffs um circa eine Viertelatmosphäre, wobei die Menge des expandierten Gases (unter Atmosphärendruck gemessen) ungefähr $3\frac{1}{4}$ Liter betrug. Auf diesen Punkt wurde speciell deshalb geachtet, weil in einigen früheren hier nicht berücksichtigten Versuchen, bei welchen der Druck um mehrere Atmosphären während einer Expansion sank, die Abkühlung eine viel stärkere war; bei diesen Versuchen war ausser der grossen Stahlflasche auch eine kleine von 0.6 Liter Capacität eingeschaltet, die als Reservoir für jede einzelne Expansion diente; bei solcher Anordnung tritt neben der Abkühlung in Folge von nicht umkehrbarer Entspannung auch die Abkühlung wegen Leistung einer äusseren Arbeit hervor.

In der Temperatur -78° erwärmte sich der Wasserstoff bei der Entspannung ein wenig und verursachte einen Ausschlag des Galvanometers in der entgegengesetzten Richtung wie früher um etwa 3 mm. Beim langsamen Pumpen und der damit verbundenen Temperaturerniedrigung wurden die Ausschläge des Galvanometers in Folge von Expansionen immer weniger sichtbar, bis man schliesslich bei -80.5° keinen Ausschlag beobachtete. Bei weiterer Temperaturerniedrigung kühlte sich der Wasserstoff wieder ab, und in der Temperatur -83° verursachte er den Ausschlag in der anderen Richtung um 5 mm.

Schlussfolgerungen.

Aus den obigen Experimenten geht hervor, dass die Inversionstemperatur der Kelvin'schen Erscheinung für Wasserstoff -80.5° beträgt. Diese Zahl stimmt genügend mit der von Witkowski aus der Rose-Innes'schen Gleichung abgeleiteten überein (-79.3°). Diese Übereinstimmung der beiden Zahlen macht es interessant, die kriti-

sche Temperatur des Wasserstoffs auf grund der vorauszusetzenden thermodynamischen Übereinstimmung der kritischen Temperaturen der Luft und des Wasserstoffs, sowie der Inversionstemperatur der Luft (abgeleitet von Witkowski aus der Rose-Innes'schen Gleichung) zu berechnen. Nehmen wir die kritische Temperatur der Luft zu 133° abs. ($= -140^{\circ}$ C) an; die Inversionstemperatur des Wasserstoffs zu 192.5° abs. ($= -80.5^{\circ}$ C), die der Luft zu 633° abs. ($= +360^{\circ}$ C), so erhalten wir als kritische Temperatur des Wasserstoffs 40.4° abs., d. i. -232.6° C. Diese Temperatur weicht von der von mir experimentell gefundenen ¹⁾ (-234.5° C) nur um 1.9° ab.

Auf grund der obigen Versuche kann man also schliessen, dass zum Verflüssigen des Wasserstoffs mit Hilfe der Kelvin'schen Erscheinung die Abkühlung desselben vor der Expansion bis unterhalb -200° nicht unumgänglich nothwendig ist, dass vielmehr bei sehr guter thermischer Isolation des Apparates schon die Temperatur von circa -100° , die mittels festen Kohlendioxydes und Aethers sehr leicht herzustellen ist, ausreichen könnte; es unterliegt jedoch keinem Zweifel, dass eine stärkere Abkühlung mittels flüssiger Luft die Verflüssigung des Wasserstoffes fördert und beschleunigt.

Krakau, I Chemisches Institut der Jagellonischen Universität.

-
48. M. L. Szajnocha présente le travail de M. W. FRIDBERG: **Otwornice warstw inoceramowych okolicy Rzeszowa i Dębicy. (Die Foraminiferen der Inoceramenschichten aus der Umgebung von Rzeszów und Dębica).** (*Les foraminifères des couches à inocéramus des environs de Rzeszów et de Dębica*).

Die beschriebenen Foraminiferen stammen aus den Ropianka-(Inoceramen-) Schichten der Umgebung von Rzeszów und Dębica im Bereiche der Kartenblätter Rzeszów-Lańcut und Dębica-Ropczyce. Diese Schichten sind sichtbar einerseits im Osten von Rzeszów, wo sie in der Richtung NE—SO sich erstrecken (die Proben wurden genommen aus den Ortschaften Słocina, Matysówka, Malawa, Cierpiz) und andererseits im Westen von dieser Stadt und im Süden von Ropczyce und Dębica, woselbst ihre Richtung E—O und

¹⁾ Rozpr. Akad. krak., W. M. P., XXIX, 404, 1895.

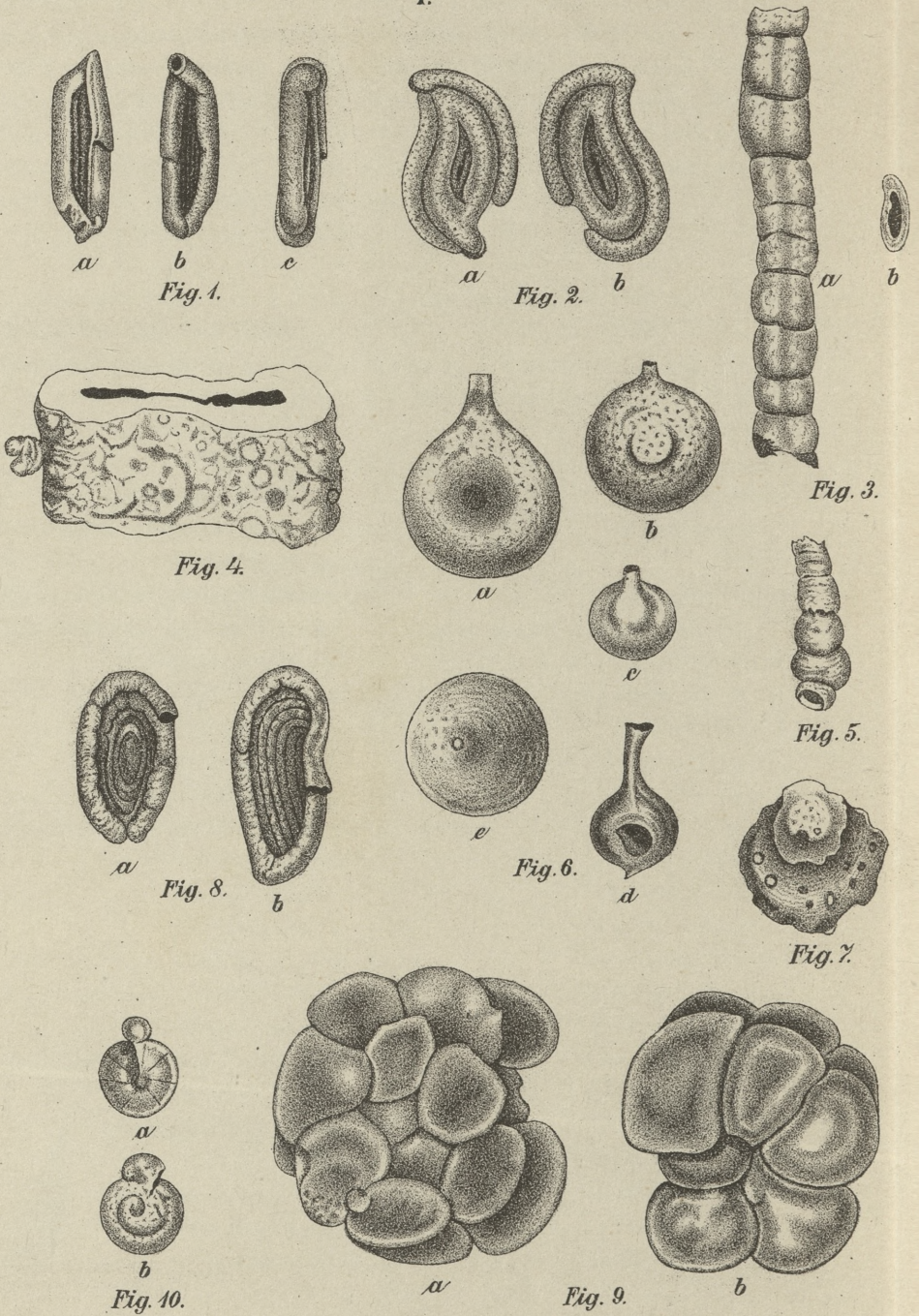
Einfallen gegen Süden ist (zahlreiche Proben lieferten die Ortschaften Łopuchowa, Zawada, Stobierna, Stasiówka, Gumniska — Fox). Die Ropianka-Schichten unserer Gegend bilden verschiedene Thone und Thonschiefer, starke und mürbe Sandsteine, thonige Mergel u. s. w. Nicht alle diese Gesteinsarten lieferten Foraminiferen-Schalen; viele Proben gaben keine einzige, am reichsten waren noch Thone, Thonschiefer und Mergel.

Die gefundenen Gattungen waren:

Nubecularia tibia Jon. i Park.	Reophax duplex Grzyb.
Biloculina depressa d'Orb.	Tafel I. Fig. 7.
Miliolina gramen n. sp.	" nodulosa Brady
Tafel I. Fig. 1.	Haplophragmium irregulare Röm.
" tenuis n. sp.	" latidorsatum
Tafel I. Fig. 2.	Bornem.
" peregrina d'Orb.	" turpe Grzyb.
Peneroplis pertusus Fors.	" bulloidiforme
Tafel II. Fig. 14.	Grzyb.
Keramosphaera irregularis Grzyb.	" turbinatum Brady
Dendrophrya excelsa Grzyb.	Ammodiscus incertus d'Orb.
" robusta Grzyb.	" gordialis Jon. i Park.
" " var. maxima	" augustus an. n. sp.
Tafel I. Fig. 4.	Tafel I. Fig. 7.
" discreta n. sp.	Trochammina contorta Grzyb.
Tafel I. Fig. 3.	" acervulata Grzyb.
Rhabdammina abyssorum M.Sars.	Tafel I. Fig. 9.
" subdiscreta Rzeh.	" coronata Brady
" linearis Brady	" subcoronata Rzeh.
" annulata Rzeh.	" deformis Grzyb.
Tafel I. Fig. 5.	" variolaria Grzyb.
Hyperammina nodata Grzyb.	" trullissata Brady
" vagans Brady.	" nucleolus Grzyb.
Reophax placenta Grzyb.	" Carpenteri Grzyb.
" grandis Grzyb.	" folium Grzyb.
" difflugiformis Brady	" bifaciata n. sp.
Tafel I. Fig. 6.	Tafel II. Fig. 1.
" ovulum Grzyb.	" mirabilis n. sp.
" guttifera Brady var.	Tafel II. Fig. 2.
scalaria Grzyb.	" variegata n. sp.



I.



W. Friedberg.

II.

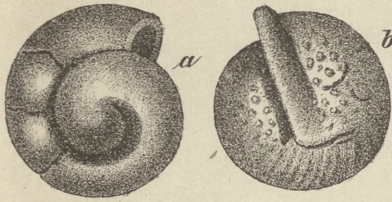


Fig. 1.



Fig. 2.

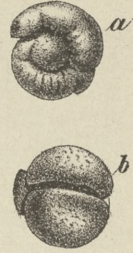


Fig. 3.

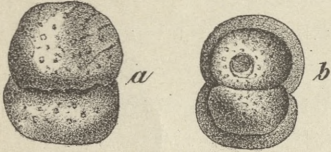


Fig. 4.



Fig. 5.



Fig. 6.

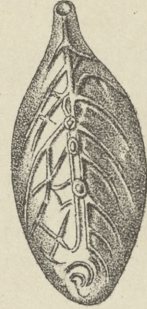


Fig. 7.

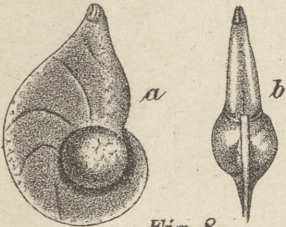


Fig. 8.



Fig. 9.

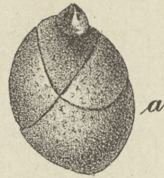


Fig. 10.



Fig. 12.



Fig. 13

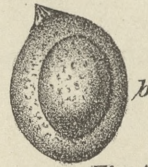


Fig. 11.

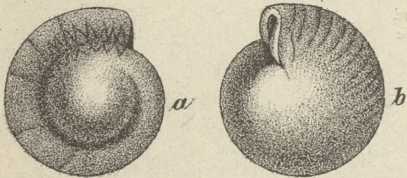


Fig. 14.





	Tafel I. Fig. 10.	<i>Polymorphina sororia</i> Reuss
<i>Trochammina simplex</i> n. sp.		Tafel II. Fig. 9.
	Tafel II. Fig. 4.	" <i>irregularis</i> n. sp.
<i>Cyclammina retrosepta</i> Grzyb.		Tafel II. Fig. 10.
<i>Textularia globifera</i> Reuss.		" <i>lanceolata</i> Reuss
" <i>carinata</i> d'Orb.		<i>Pullenia sphaeroides</i> d'Orb.
<i>Verneulina abbreviata</i> Rzch.		" <i>quinqueloba</i> Reuss
" <i>an. polystropha</i> Reussi		<i>Globigerina cretacea</i> d'Orb.
<i>Tritaxia tricarinata</i> Reuss.		" " var. <i>triloba</i>
<i>Bigenerina nodosaria</i> d'Orb.		Reuss.
<i>Spiroplecta biformis</i> Park. i Jon.		" <i>aequilateralis</i> Brady
<i>Gaudryina pupoides</i> d'Orb.		<i>Rotalia umbilicata</i> d'Orb.
<i>Bulimina Murchisoniana</i> d'Orb.		" <i>lithothamnica</i> Uhlig
" <i>intermedia</i> Reuss.		" <i>an articulata</i> Dun.
" <i>pupoides</i> d'Orb.		Tafel II. Fig. 11.
" <i>Preslii</i> Reuss		" <i>an orbicularis</i> d'Orb.
" <i>conulus</i> Rzch.		" <i>papillosa</i> var. <i>compressiuscula</i> Brady
<i>Chilostomella ovoidea</i> Reuss.		<i>Truncatulina lobatula</i> Walk i Jon.
<i>Lagena globosa</i> Mont.		" <i>livida</i> Grzyb.
" <i>apiculata</i> Reuss n. var.		" <i>akneriana</i> d'Orb.
<i>tetracarinata</i>		" <i>insecta</i> Schwager
<i>Nodosaria soluta</i> Reuss.		<i>Puloinulina subcandidula</i> Grzyb.
" <i>an subornata</i> Reuss		" <i>Karsteni</i> Reuss
" <i>calomorpha</i> Reuss		" <i>Partschiana</i> d'Orb.
Tafel II. Fig. 5—6.		" <i>an bimammata</i> Günb.
" <i>consobrina</i> d'Orb.		Tafel II. Fig. 13.
" <i>Römeri</i> Neug.		" <i>Boueana</i> d'Orb.
" <i>communis</i> d'Orb.		<i>Discerbina pusilla</i> Uhlig
" <i>cylindrica</i> Alth.		" <i>eximia</i> Hantken
<i>Lingulina dentata</i> Grzyb.		" <i>an parisiensis</i> d'Orb.
<i>Vaginulina legumen</i> L.		Tafel II. Fig. 12.
<i>Cristellaria rotulata</i> Lam.		" <i>Uhligi</i> Grzyb.
" <i>Isidis</i> Schwag.		" <i>turbo</i> d'Orb.
" <i>lepida</i> Reuss		<i>Orbitoides an dispansa</i> Sov.
Tafel II. Fig. 8.		" <i>an tenuicostata</i> GUMB.
" <i>nuda</i> Reuss.		<i>Reste von Inoceramenschalen.</i>
" <i>cultrata</i> Montf.		
<i>Flabellina reticulata</i> Reuss.		
Tafel II. Fig. 7.		

Aus diesen sind 92 Gattungen sicher bestimmt, von diesen sind 44 als in der Kreideformation lebend bekannt. Eigentlich gibt es solcher 66, da diejenigen Formen, welche früher nur aus dem Tertiär bekannt waren, vor kurzem aber von Dr. Grzybowski in den Inoceramen-Schichten gefunden worden sind (J. Grzybowski: Die Foraminiferen der Inoceramen-Schichten von Gorlice. Bulletin international de l'Academie des Sciences de Cracovie, Avril 1901), auch als in der Kreide lebend bezeichnet werden müssen, da die Inoceramen- (Ropianka-) Schichten bisher allgemein als cretacisch gelten, und 22 solcher Gattungen vom Verfasser in der hiesigen Fauna gefunden wurden. Deshalb ist auch der von Dr. Grzybowski geäusserte Schluss, dass die Inoceramen-Schichten tertiär sind, wohl allgemein, wenigstens aber für die hiesige Gegend nicht zulässig.

Aus dieser Zusammenstellung können wir aber einen ganz anderen Schluss ziehen. Wir sehen in ihr sehr viele constante Formen, welche ohne Änderung viele Formationen durchlebten. Von diesen 92 Gattungen leben 3 vom Karbon bis jetzt, 4 vom Trias bis jetzt, 5 vom Jura, 26 von der Kreide, 5 vom Tertiär bis auf den heutigen Tag. Nur einer Formation angehörige Formen gibt es sehr wenige. Nur aus der Kreide sind 10 Gattungen bekannt, nur aus dem Tertiär 16, worunter es mehrere neu beschriebene Formen gibt, deren stratigraphische Stellung als noch nicht gehörig festgestellt bezeichnet werden muss. Aus der Arbeit des Verfassers ergibt sich der Schluss, dass die Foraminiferen Organismen sind, welche sich zum Feststellen des Alters der Schichten nicht eignen, welche Meinung schon von anderen Forschern ausgesprochen wurde.

Was die chemische Zusammensetzung der Schalen anbelangt, so haben auf 105 Gattungen 53 eine Kalkschale, 52 eine kieselige. In dieser Hinsicht ist die Inoceramenfauna von Rzeszów grundverschieden von derjenigen von Gorlice. Es kann also die kieselige Fauna nicht als charakteristisch für Inoceramen-Schichten und auch für das Tertiär bezeichnet und der Schluss gezogen werden, dass die Inoceramen-Schichten tertiär sind, wie es Dr. J. Grzybowski thut, sondern man muss ein anderes Mittel suchen, um das Vorhandensein ausschliesslich kieseliger oder kalkiger Faunen zu erklären.

Beim Betrachten der chemischen Zusammensetzung des Gesteines, aus welchem die Foraminiferen genommen wurden, und

des Materials der gefundenen Foraminiferen-Schalen sehen wir einen Zusammenhang. Wenn das Gestein kein Calciumcarbonat enthält, herrschen die kieseligen Formen vor, wenn aber diese Verbindung im Gesteine vertreten ist, sind die kalkschaligen Gattungen vorherrschend. An dem von Dr. J. Grzybowski aus verschiedenen Stellen der Karpathen beschriebenen Materiale lässt sich der erwähnte Zusammenhang beobachten. Das Material aus Dukla war ein kalkiges Conglomerat mit 70% CaCO_3 und ergab nur einige kieselige Formen; das Material aus Wadowice ergab mehr denn 48% solcher Formen, letzteres Material bildeten rothe Thone (welche wenig oder gar kein Calciumcarbonat enthalten) und Mergel. Die kieseligen Formen waren in den Thonen häufiger, in den Mergeln aber selten; die kalkschaligen hingegen umgekehrt in den Thonen selten, in den Mergeln aber häufiger. Das Material aus Krosno und Gorlice enthielt mehr, das letzte fast nur kieselige Formen, seine chemische Zusammensetzung ist indessen nicht angegeben, wahrscheinlich war es arm an Calciumcarbonat, da Thonschiefer und verschiedene Thone dasselbe bildeten. Was schliesslich das Material der Ropianka-Schichten aus Rzeszów und Dębica anbelangt, so kann man denselben Zusammenhang sehen; die Proben, welche kein CaCO_3 enthielten, ergaben auch keine kalkschaligen Foraminiferen, die Proben aber, welche Calciumcarbonat enthielten, lieferten vorwiegend kalkschalige Foraminiferen (eine Probe ausgenommen, welche nicht viele, aber ausschliesslich kieselige Formen enthielt).

Diese dem Verfasser zur Verfügung stehenden Daten sind jedoch zu gering, um daraus einen bestimmten Schluss zu ziehen und den angegebenen Zusammenhang als nothwendig zu erklären. Wenn man die chemische Zusammensetzung möglichst vieler Sedimente kennen wird, von denen auch die Foraminiferenfauna bekannt sein wird, so wird man zu einer sicheren Schlussfolgerung gelangen können. Wenn wir aber berücksichtigen, dass zwischen der chemischen Zusammensetzung und dem mechanischen Einschlusse des Wassers einerseits und der Qualität der Sedimente **andererseits** ein nothwendiger Zusammenhang besteht, und dass die Foraminiferen das **Material zu ihren Schalen theils aus dem Wasser theils aus dem in ihm suspendierten Materiale entnehmen**, so wird uns der am Anfange erwähnte Zusammenhang zwischen den Sedimenten und der in ihnen enthaltenen Foraminiferenfauna ganz natürlich erscheinen.

Die Foraminiferen der Ropianka-Schichten aus der Umgebung von Rzeszów und Dębica sind in der Fauna von Dukla mit 12 Gattungen, in derjenigen von Wadowice mit 34, von Krosno mit 33, von Gorlice mit 25, in der Fauna der oberbayrischen Kreidemergel (beschrieben von Egger) mit 36 Gattungen vertreten. Die grösste Ähnlichkeit existiert also zwischen der Fauna von Bayern und der hiesigen, diese Ähnlichkeit ist aber umso grösser, wenn wir berücksichtigen, dass die Fauna von Bayern wenige kieselige Gattungen enthält. Auf 47 kalkschalige Formen, welche die Fauna von Rzeszów enthält, sind 26 auch in der Fauna von Bayern vorhanden. Die Fauna der Inoceramen-Schichten von Gorlice ist aber auch der hiesigen ähnlich, wenn wir von der letzten nur die kieseligen Formen in Betracht ziehen. Auf 45 kieselige Formen sind 24 in der Fauna von Gorlice vertreten. Wir können also die Foraminiferenfauna von Rzeszów, welche aus petrographisch verschiedenen Sedimenten stammt, als die Mitte haltend zwischen derjenigen der kieseligen Facies von Gorlice und der kalkigen Facies der Kreidemergel Bayerns betrachten.

-
49. M. E. Bandrowski présente le travail de M. L. BRUNER: **O dyssocjacyi wodzianu i alkoholanu chloralu w roztworach.** (*Ueber die Dissociation des Chloralhydrates und Chloralalkoholates in Lösung(n).*)
(*Sur la dissociation de Phhydrate et de Palcoolate du chloral en dissolution.*)

Die Praxis der Moleculargewichtsbestimmung hat zahlreiche Fälle von Polymerisation in Lösungen bekannt gemacht. Es sind dagegen sehr wenige Beobachtungen über die nicht elektrolytische Dissociation in Lösungen beschrieben worden, obgleich diese Fälle das vollkommene Analogon der sogenannten anormalen Dampfdichten bilden müssten. Man darf wohl vermuthen, dass die Stoffe, die im Dampfzustande dissociert sind, es auch in Lösungen sein können¹⁾. Von allen hier zugehörigen Stoffen ist das Chloralhydrat

¹⁾ Ein diesbezüglicher Fall einer Dissociation von para-Oxybenzoësäure (p. C₆H₄ OH. COOH. H₂O) in para-Toluidin hat Eykman (Zeit. phys. Ch. 4, 497) beobachtet, indem er fand, dass die Moleculardepression H₂O = 34 ist, die Depression der anhydrischen para-Oxybenzoësäure = 40, die des Hydrates der Säure aber = 75, woraus auf vollkommene Dissociation zu schliessen ist. Es ist jedoch

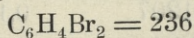
und Chloralalkoholat am ehesten einer Untersuchung zugänglich. In seiner ausgedehnten Untersuchung hat Beckmann¹⁾ dies Thema berührt und einige kryoskopischen Bestimmungen in Wasser, Essigsäure- und Benzollösung ausgeführt. Es ergab sich, dass in Benzollösung keine Dissociation nachzuweisen war, dagegen in Essigsäure eine beträchtliche Dissociation vorhanden war, wie dies aus der Vergrößerung der Moleculardepression zu schliessen ist.

Ich habe in verschiedenen Lösungsmitteln eine Reihe kryoskopischer und ebullioskopischer Versuche nach dem allgemein üblichen Beckmann'schen Verfahren über das Chloralhydrat und Chloralalkoholat ausgeführt, deren Ergebnisse in den unten stehenden Tabellen verzeichnet sind. In den Tabellen ist unter *gr* die Menge des gelösten Stoffes angegeben, unter *n* die Molekelzahl des gelösten Stoffes auf 100 gr. Lösungsmittel nach der üblichen Formel $n = \frac{100 \text{ g}}{m \cdot G}$ berechnet (*m* — das Moleculargewicht, *G* — die angewandte Gewichtsmenge des Lösungsmittels); unter Δt — die am Beckmann'schen Thermometer beobachtete Erhöhung beziehungsweise Depression, unter *E* — die Moleculardepression nach der hier obwaltenden Gleichung $E = \frac{\Delta t}{n}$. Die Praeparate sind sämmtlich von Kahlbaum bezogen und durch Fractionierung gereinigt worden.

Ebullioskopische Versuche.

TABELLE I.

Lösungsmittel: Aethylaether²⁾



G = 16,11 gr.

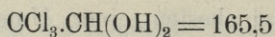
*t*₀ = 3,595°

<i>gr.</i>	<i>n</i>	Δt	<i>E</i>
0,3155	0,00830	0,185	22,3
0,6415	0,01687	0,405	22,0
1,5263	0,04014	0,835	20,8
1,9864	0,05227	1,107	21,2
2,4604	0,06475	1,335	20,6

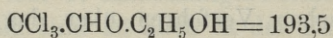
hier eine chemische Wechselwirkung zwischen der geschmolzenen Base und der darin gelösten Säure nicht ausgeschlossen.

¹⁾ Beckmann, Zeit. phys. Chem. 6,437.

²⁾ Sorgfältig entwässertes und über Na fractioniertes Präparat.



G = 17,62 gr.		$t_0 = 3,640^0$	
<i>gr.</i>	<i>n</i>	Δt	<i>E</i>
0,1890	0,00647	0,140	21,5
0,4413	0,0151	0,350	23,2
0,8388	0,0287	0,620	21,6
1,3808	0,0473	0,990	20,9
1,6709	0,0572	1,195	20,9

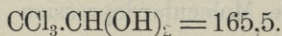


G = 18,26 gr.		$t_0 = 3,420^0$	
0,4368	0,01237	0,270	21,8
0,8866	0,0251	0,522	20,1
1,5128	0,0428	0,885	20,6

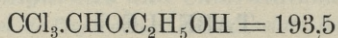
TABELLE II.

Lösungsmittel: Aceton E(norm) = 16,7¹⁾.

(aus der Bisulfitverbindung)



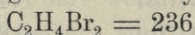
G = 15,50 gr.		$t_0 = 0,028^0$	
0,4515	0,0176	0,310	17,6
1,0140	0,0394	0,697	17,6
1,5890	0,0619	1,002	17,2



G = 17,42 gr.		$t_0 = 0,110^0$	
0,4060	0,01207	0,198	16,4
0,9550	0,0284	0,465	16,4

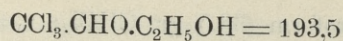
TABELLE III.

Lösungsmittel: Methyljodid



G = 45,71 gr.		$t_0 = 0,840^0$	
0,4844	0,00449	0,184	41,0
1,0611	0,00984	0,412	41,0
1,5598	0,01446	0,612	42,3
			41,7

¹⁾ Beckmann, l. c.

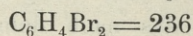


$$G = 48,50 \text{ gr.} \quad t_0 = 1,280^\circ$$

<i>gr.</i>	<i>n</i>	Δt	<i>E</i>
0,6688	0,00713	0,230	32,3
1,3388	0,0143	0,465	32,5
1,6593	0,0176	0,615	34,8
2,4523	0,02605	0,890	34,4
3,1887	0,0339	1,175	34,7

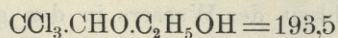
TABELLE IV.

Lösungsmittel: Aethylbromid



$$G = 29,18 \text{ gr.} \quad t_0 = 1,370^\circ$$

0,5506	0,00800	0,280	35,0
0,9352	0,0136	0,470	34,6
1,2100	0,0176	1,992	35,3
			35,0

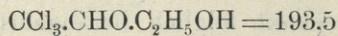


$$G = 29,52 \text{ gr.} \quad t_0 = 0,00^\circ$$

0,5387	0,00943	0,282	30,0
1,1110	0,01945	0,600	30,8
1,6795	0,0294	0,890	30,3

TABELLE V.

Lösungsmittel: Schwefelkohlenstoff. E = 23,7



$$G = 31,55 \text{ gr.} \quad t_0 = 0,020^\circ$$

1,6025	0,0263	0,275	10,5
2,3225	0,0381	0,382	10,1

In CH_3I , $\text{C}_2\text{H}_5\text{Br}$, CS_2 , ebenso in CHCl_3 lassen sich ebullioskopische Versuche mit Chloralhydrat nicht ausführen, deshalb sind nur solche mit Chloralalkoholat angegeben. Werden Lösungen von Chloralhydrat in den genannten Lösungsmitteln auf ihren Siedepunkt untersucht, so ist ein anormales Verhalten bemerkbar, das, so weit mir bekannt, noch nicht beschrieben worden ist. Wird z. B.

zum siedenden Chloroform (33,5 gr. CHCl_3 ; $t_0 = 3,340^\circ$) eine Portion Chloralhydrat wie üblich zugegeben (0,453 gr. $\text{CCl}_3 \cdot \text{CH}(\text{OH})_2$), so sinkt bei unverzögertem Sieden die Temperatur nach 10 Minuten auf $3,00^\circ$, nach 15 Minuten auf $-2,88^\circ$, um dann sehr langsam wieder zu steigen, indem dieselbe nach Verlauf von 30 Minuten $3,25^\circ$ beträgt, nach 40 Minuten $-3,53^\circ$; nach 50 Minuten wird ein Maximum von $3,61^\circ$ erreicht, wenngleich die Einstellung weder auf das Minimum ($2,88^\circ$) noch auf das Maximum ($3,61^\circ$) so scharf wie üblich ist. Wird nach dem so schwer zu erreichenden Maximum die Moleculardepression berechnet, so ergibt sich $E = 33,1$, während das normale E für $\text{CHCl}_3 = 36,6$ ist. In einem zweiten Versuch mit demselben Lösungsmittel war der Gang der Erscheinung derselbe geblieben, nur ergab sich das nach dem Maximum der Temperatur berechnete E zu 28,6. Der Verlauf der Erscheinung in CH_3I , $\text{C}_2\text{H}_5\text{Br}$, CS_2 gleicht vollkommen dem oben beschriebenen.

Was die Ursache der Erscheinung anbetrifft, so ist sie in folgendem zu suchen. Auch in den genannten Lösungsmitteln darf man wohl eine minimale Dissociation des Chloralhydrats nach der Gleichung $\text{CCl}_3\text{CHO} \cdot \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{CCl}_3\text{CHO} + \text{H}_2\text{O}$ annehmen; die äusserst geringe Löslichkeit des Wassers in den genannten Lösungsmitteln hat jedoch zur Folge, dass sich das Wasser als eine neue, wegen ihrer Geringfügigkeit fast unsichtbare wässrige Phase abscheiden muss. Diese wässrige Phase besteht aus einer gesättigten Lösung von dem angewandten Lösungsmittel in Wasser, in der Lösung wird auch das Chloralhydrat gelöst, entsprechend seinem Theilungscoefficienten zwischen H_2O und z. B. CHCl_3 . Die neue wässrige Phase wird sich mit ihrer Partialtension an der gesammten Siedetension bethätigen, wodurch die Siedetension vergrössert, der Siedepunkt folglich herabgedrückt wird. Solange also die wässrige Phase vorhanden ist, muss die Temperatur sinken und sich auf ein Minimum einstellen, das jedoch nicht absolut scharf sein kann, weil die Zusammensetzung dieser Phase keine unveränderliche ist. Bei fortschreitendem Sieden wird die in so geringer Menge vorhandene wässrige Phase abdestilliert, wodurch der Siedepunkt zu steigen anfängt, ohne jedoch das theoretische Maximum zu erreichen, weil ja ein Theil des gelösten Chloralhydrats mit Wasserdämpfen mitgerissen wird, wodurch seine Concentration vermindert erscheint. Die Richtigkeit dieser Auffassung habe ich auch experimentell nachgewiesen: in siedendem $\text{C}_2\text{H}_5\text{Br}$

($t_0 = 1,250^\circ$) wurde etwas Chloral gelöst, wodurch sich die Temperatur bis $2,420^\circ$ erhöht hatte. Dem Gemische habe ich einen Tropfen Wasser zugeführt; bei vollkommener Klarheit der siedenden Lösung sank die Temperatur nach 6 Minuten auf $1,90^\circ$, nach 15 Minuten auf $1,72^\circ$, um sich dann nach Verlauf einer Stunde wieder auf $2,36^\circ$ zu erhöhen. Der Gang der Erscheinung ist also in dem Falle der gleiche, als wenn das Chloralhydrat in dem Lösungsmittel gelöst worden wäre.

Kryoskopische Versuche.

TABELLE VI.

Lösungsmittel: Nitrobenzol. $E = 67^1$) $\text{CCl}_3 \cdot \text{CHO} = 147,5$ $G = 22,09$ gr. $t_0 = 1,950^\circ$ T^0 (äusseres Kühlbad) = 0°
im Schneegemisch

gr.	n	Δt	E
0,5040	0,0155	0,950	61,3
1,1968	0,0367	2,210	60,2

 $\text{CCl}_3 \cdot \text{CH}(\text{OH})_2 = 165,5$ $G = 18,83$ gr. $t_0 = 1,950^\circ$

0,3065	0,00984	0,610	62,0
0,6800	0,0218	1,170	53,7
0,8320	0,0267	1,460	54,8

 $\text{CCl}_3 \cdot \text{CHO} \cdot \text{C}_2\text{H}_5\text{OH} = 193,5$ $G = 21,07$ gr. $t_0 = 1,950^\circ$

0,1595	0,00391	0,263	67,1
0,3240	0,00795	0,530	66,7
0,5695	0,01397	0,915	65,4
1,1555	0,0283	1,680	59,3

¹⁾ Ampola e Rimatori. Sul comportamento della nitrobenzene etc. (Rendiconti dei Accademie dei Lincei. Vol. IV, Serie 5, fascicolo 11.

TABELLE VII.

Lösungsmittel: p. Toluidin. $E = 51$ ¹⁾ $\text{CCl}_3 \cdot \text{CHO} = 147,5$ $G = 19,18 \text{ gr.}$ $t_0 = 3,082^\circ$ $T_0 = 42^\circ$

<i>gr.</i>	<i>n</i>	Δt	<i>E</i>
0,4584	0,0162	0,827	51,0
0,6834	0,0242	1,242	51,3
1,2820	0,0453	1,387	52,7

 $\text{CCl}_3 \cdot \text{CH}(\text{OH})_2 = 165,5$ $G = 18,59 \text{ gr.}$ $t_0 = 3,082^\circ$ $T_0 = 42^\circ$

0,3350	0,0109	0,560	51,4
0,6005	0,0195	0,980	50,2

 $\text{CCl}_3 \cdot \text{CHO} \cdot \text{C}_2\text{H}_5\text{OH} = 193,5$ $G = 17,19 \text{ gr.}$ $t_0 = 3,082^\circ$ $T_0 = 42^\circ$

0,2395	0,00721	0,415	57,5
0,4785	0,0144	0,845	58,7
0,8650	0,0260	1,530	58,9

Aus den angeführten Tabellen geht hervor, dass in keinem von den untersuchten organischen Lösungsmitteln, auch nicht in p. Toluidin, von einer bestimmt nachweisbaren Dissociation des $\text{CCl}_3 \cdot \text{CHO} \cdot \text{H}_2\text{O}$ und $\text{CCl}_3 \cdot \text{CHO} \cdot \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ die Rede sein kann. Das Chloralalkoholat in p. Toluidin weist zwar etwas grössere Depressionen als die theoretischen auf, doch sind in den öfters citierten Untersuchung Eykman's für p. Toluidin Schwankungen in der Constante von derselben Grössenordnung gefunden worden. Es ist also nur in der von Beckmann untersuchten Essigsäure ein Lösungsmittel vorhanden, das die Dissociation des Chloralhydrats hervorrufen kann. Der Befund steht im Einklang mit allen übrigen bekannten Eigenschaften von Hydroxyl-enthaltenden Lösungsmitteln. Eine Association zu polymeren Moleculen ist für das Chloral und Chloralhydrat in Nitrobenzol, für Chloralalkoholat in Methyljodid, Aethylbromid und Schwefelohlenstoff aufgefunden worden.

Chloralhydrat als Lösungsmittel. Wie bekannt, ist das

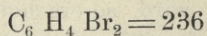
¹⁾ Eykman. Zeitsch. phys. Chem. 4, 497.

Chloralhydrat im Dampfzustande theilweise in Chloral- und Wasserdampf dissociert. Es schien mir deshalb interessant zu erfahren, ob auch in diesen Falle die bekannte van't Hoff'sche Gleichung $E = \frac{0.02 T^2}{W}$ ihre Geltung behalten wird. Dass dies nach der Theorie der Fall sein muss, ist schon daraus ersichtlich, dass bei der Herleitung der Gleichung keine Voraussetzungen über die chemische Beschaffenheit der Dampfphase gemacht worden sind ¹⁾. Eine Complication ist nur deshalb vor auszusehen, weil in der Reihe der ebullioskopischen Versuche die Siedetemperatur gesteigert wird, wodurch der Dissociationszustand des Chloralhydratdampfes und folglich auch das $W =$ Verdampfungswärme + Dissociationswärme geändert sein kann.

In Chloralhydrat werden leicht verschiedene Kohlenwasserstoffe und ihre Halogenderivate aufgelöst, es wurden deshalb Versuche mit Stoffen von dieser Körperklasse ausgeführt. Um brauchbare Zahlen zu erhalten, muss das Sieden bei einer jeden Probe genügend lange (circa 30 Min.) fortgesetzt werden; die Zahlen pflegen sonst viel zu hoch auszufallen. Dies beweist, dass der endgültige Dissociationszustand des Chloralhydratdampfes nicht momentan von dem Dampf erreicht wird.

TABELLE VIII.

Lösungsmittel: Chloralhydrat

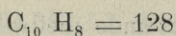


$G = 29,20 \text{ gr.}$

$t_0 = 0,040^{\circ}$

<i>gr.</i>	<i>n</i>	Δt	<i>E</i>
0,7160	0,0104	0,245	23,6
1,1410	0,0165	0,340	20,6
1,4991	0,0217	0,430	20,0
			21,4

¹⁾ Siehe auch die Untersuchung über das kryoskopische Verhalten des $Na_2SO_4 \cdot 10H_2O$ von Löwenherz. (Zeit. phys. Ch. 10, 70).



$$G = 28,50 \text{ gr.}$$

$$t_0 = 0,020^{\circ}$$

gr.	n	Δt	E
0,5660	0,0155	0,365	23,6
0,8100	0,0222	0,455	20,5
1,0390	0,0285	0,605	21,2
1,4840	0,0407	0,825	20,3
			21,4

Wird der Wert von E in die van't Hoff'sche Gleichung $W = \frac{0,02 T^2}{E}$ eingesetzt, so ergibt sich $W = \frac{0,02 \cdot 371^2}{21,4} = 128,8 \text{ cal.}$

während von Berthelot¹⁾ calorimetrisch die „Verdampfungswärme“ des Chloralhydrats zu 132,4 cal. bestimmt worden ist. Die Uebereinstimmung ist mehr als befriedigend, besonders wenn man beachtet, dass der Dissociationszustand des Chloralhydratdampfes von der Temperatur stark beeinflusst wird, was sich in den ziemlich grossen Schwankungen der E—Werte offenbart.

Chloralhydrat als kryoskopisches Lösungsmittel. Von Berthelot ist die interessante Thatsache constatirt worden, dass Chloralhydrat beim Erstarren nur ganz allmählich seine Erstarungswärme abgibt, indem von der erstarrten Masse nur nach Verlauf mehrerer Tage der frühere Zustand wieder erreicht wird. Da die kryoskopische Moleculardepression durch die im Erstarrungsmomente abgegebene Erstarrungswärme nach der van't Hoff'schen Gleichung geregelt wird, so erscheint es interessant, auf das kryoskopische Verhalten des Chloralhydrats näher einzugehen. Die bisher angestellten Versuche, die jedoch weiter fortgesetzt werden sollen, haben kein endgiltiges Ergebnis geliefert. Die Kryoskopie auch des reinen Chloralhydrats gehört zu sehr schwierigen Operationen, indem bei geringster Ueberkühlung die Masse plötzlich ganz fest wird. Es ist offenbar die geringe im Erstarrungsmomente abgegebene Wärme ungenügend, um die Temperatur auf den wirklichen Erstarrungspunkt zu erhöhen: eine grosse Krystallisationsgeschwindigkeit kommt ja dem Stoffe auch zu.

¹⁾ Berthelot, Thermochemie II, 513.

Zusammenfassung.

1. Aus den Versuchen in verschiedenen Lösungsmitteln ergibt sich, dass eine beträchtliche Dissociation des Chloralhydrates nur in Essigsäure-Lösung stattfindet.
2. Es wird auf eine interessante Anomalie bei der Ebulioskopie des Chloralhydrats im CHCl_3 , CH_3 , $\text{JC}_2\text{H}_5\text{Br}$, CS_2 hingewiesen.
3. Die Giltigkeit der van't Hoff'schen Gleichung auch für den Fall, wo sich der Dampf des Lösungsmittels im Dissociationszustande befindet, ist bestätigt worden.

Krakau. II chem. Laborat. d. Jagell. Univ.

50. M. N. Cybulski présente le travail de M. M. KIRKOR: **O zmianach szybkości ruchu krwi w mięśniach prążkowanych podczas ich czynności dowolnej i odruchowej.** (*Ueber die Veränderungen der Geschwindigkeit des Blutstromes in den quergestreiften Muskeln während ihrer willkürlichen und reflectorischen Thätigkeit*). (*Sur le changement de la vitesse du sang dans les vaisseaux des muscles striés pendant leur fonction volontaire et réflexe*).

Da die Frage der Veränderung der Geschwindigkeit der Blutbewegung in den thätigen Muskeln bis jetzt fast gar nicht erforscht ist, hat der Verfasser Versuche angestellt, um dieselbe klar zu legen. Zur Erforschung der Stromgeschwindigkeit in den Gefässen benutzte der Verfasser Cybulski's Photohaemotachometer. Er ist der Meinung, dass dieser Apparat allen anderen zu demselben Zwecke construierten an Genauigkeit überlegen ist. Um den zukünftigen Forschern das Benützen desselben bei ihren Versuchen zu erleichtern, gibt er eine sehr genaue Beschreibung des Photohaemotachometers mit allen Ergänzungen und Verbesserungen, die von dem Erfinder selbst in den letzten Jahren an demselben angebracht worden sind, sowie eine Gebrauchsanweisung desselben. Hierauf erläutert er ausführlich das Princip des Apparates (siehe Figurenerklärung am Ende dieser Mittheilung).

Von der ganzen Reihe der Versuche, die der Verfasser angestellt hat, beschreibt er neun verschiedene Versuche sehr genau, die als Typen aller übrigen in der Abhandlung nicht angeführten Versuche anzusehen sind. Einige Experimente wurden an curari-

sierten, andere an normalen (i. e. nicht curarisierten) Hunden ausgeführt; bei einigen Versuchsthieren waren die N.N. vagi durchschnitten, bei anderen blieben sie intact; in der bei weitem überwiegenden Mehrzahl der Versuche wurde das Witte'sche Pepton intravenös injiziert, um die Blutcoagulation auf längere Zeit zu verhindern. Was den Reizungsmodus anbelangt, so wurde entweder die Gehirnrinde direct gereizt und dadurch eine Contraction der Pfote hervorgerufen, oder aber es erfolgte die Contraction reflectorisch durch einen elektrischen Hautreiz. In einer Reihe von Versuchen war die Muskelcontraction ein Effect des Willensimpulses, in einer anderen Versuchsreihe handelte es sich um epileptiforme Anfälle.

Die der Arbeit beigelegten Photogramme illustrieren die Experimente.

Die Ergebnisse aller seiner Versuche stellt der Verfasser folgendermassen zusammen:

In allen seinen Experimenten konnte der Verfasser constatieren, dass während der Contraction des Muskels die Stromgeschwindigkeit sich steigert; die Steigerung derselben dauert so lange, als die Muskeln in der Contraction verharren, einerlei ob die Reizung fort dauert oder nicht. Der Reizungsmodus, welcher die Contraction hervorruft, ist dabei belanglos.

Die Reizung selbst verursacht keine Veränderungen in dem Blutkreislaufe, die von dem Einflusse der vasomotorischen oder gefässerweiternden Centra abhängig sein könnten mit Ausnahme einer momentanen der Reizung unmittelbar folgenden Gefässverengung. Der Blutdruck unterliegt während der die Contraction der Pfote auslösenden Reizung einer nur sehr kleinen Veränderung. Die Beschleunigung des Blutstromes ist eine Folge der örtlichen Erweiterung der Gefässe, und die Ursache derselben ist rein örtlich, und zwar von der Muskelcontraction abhängig.

Um die Ursache dieser Gefässerweiterung zu erklären, nimmt der Verfasser zwei Möglichkeiten an: entweder sind die motorischen Nervencentra mit den Gefässnerven verbunden, oder was dem Verfasser wahrscheinlicher erscheint, es ist die Muskelcontraction selbst, welche ihrerseits die centripetalen (sensitiven) Muskelnerven reizt, und dadurch einen Gefässreflex auslöst.

Verfasser berechnet die Stromgeschwindigkeit in dem thätigen Muskel und gibt an, dass dieselbe circa zweimal so gross ist wie im Ruhezustande des Muskels. Verf. betrachtet seine Versu-

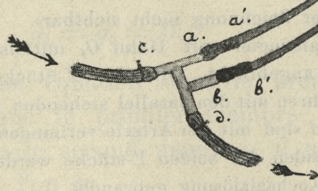
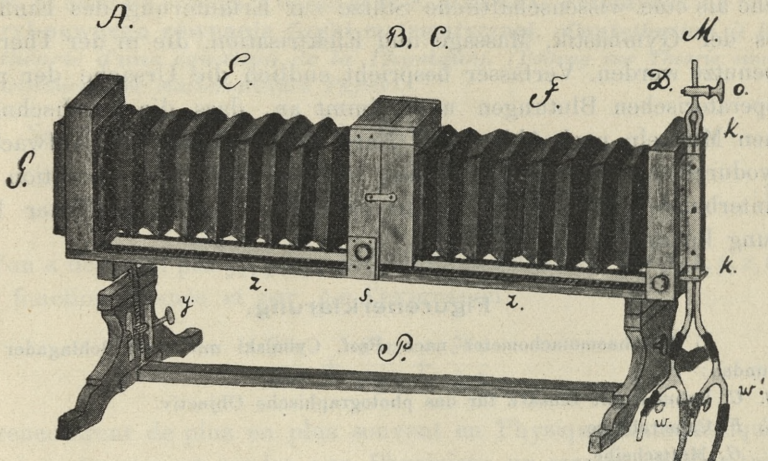


Fig. 1.



Fig. 2.

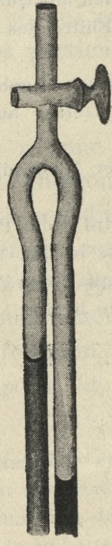


Fig. 3.

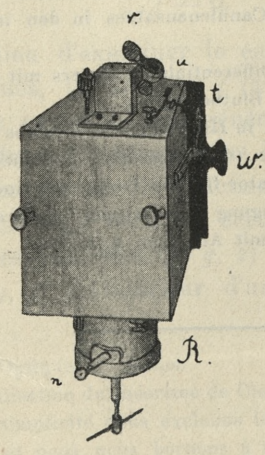


Fig. 4.

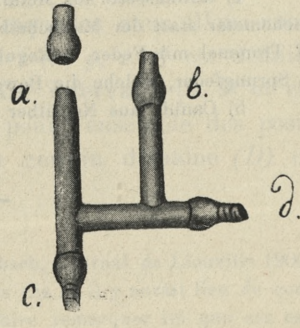


Fig. 5.

che als eine wissenschaftliche Stütze zur Erläuterung des Einflusses der Gymnastik, Massage und Elektrisation, die in der Therapie benutzt werden. Verfasser bespricht endlich die Ursache der postoperatorischen Blutungen und nimmt an, dass die durchschnittlichen Muskeln nach Ablauf der Narkose zur Thätigkeit aufwachen, wodurch die kleinen Blutgefäße, die während der Operation ununterbunden blieben, sich derart erweitern, dass es zu einer Blutung kommt.

Figurenerklärung.

1) Photohaemotachometer nach Prof. Cybulski mit einer Schlagader verbunden:

B. C. Rahmen mit Einsatz für das photographische Objectiv.

E. F. Camerabälge.

G. Mattscheibe.

P. Stativ.

Z. Schiene mit Zähnen zum Verschieben der *B C* u. *D* mittelst des Triebes *s*.

Y. Zahn- und Triebvorrichtung zum Heben und Senken des hinteren Theiles des ganzen Apparates. Eine ebensolche Vorrichtung findet sich auch unter *D* (auf der Zeichnung nicht sichtbar).

M. Differentialmanometer mit Hahn *O*, mittelst der Klemmen *K* vor dem Schlitz in *D* angebracht. Gläserne *Y*-Stücke *w-w'* verbinden ihn mittelst zweier Bleiröhren mit den parallel stehenden Armen der Canüle *a* u. *b*. Die Arme *e* und *d* sind mit der Arterie verbunden Die freien mit Quetschhähnen versehenen Enden der beiden *Y*-stücke werden zum Füllen des ganzen Apparates mit Kochsalzlösung gebraucht.

2) Zugespitzte Schleife aus Platindraht an einem Halter angebracht, dient zur leichteren Einführung des Canülenansatzes in den im Gefäß angebrachten Schlitz.

3) Der obere Theil des Differentialmanometers mit der Niveaudifferenz der Flüssigkeit während der Blutbewegung.

4) Rollkassette aus Metall in Hinteransicht, dieselbe wird in das Photohaemotachometer statt der Mattscheibe (*G*) eingesetzt. *w* Schieber in der Vorderwand. *R* Trommel mit Feder, *r* Regulator für die Drehgeschwindigkeit der Papierrollen. *u* Sprungfeder, welche die Bewegung der rechten Papierrolle hemmt.

5) Canüle aus Neusilber mit Ansätzen *a, b, c, d*.

51. M. L. Natanson présente le travail de M. S. ZAREMBA: *Przyczynek do teorii pewnego równania fizyki matematycznej. (Contribution à la théorie d'une équation de la Physique). (Beitrag zur Theorie einer Gleichung der mathematischen Physik).*

Nr. 1. Les équations de la forme:

$$g_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + g_1 \frac{\partial v}{\partial t} + g_0 v + \Delta v = -4\pi f(x, y, z, t) \quad (1)$$

où l'on a désigné: par g_2, g_1, g_0 des constantes données, par $f(x, y, z, t)$ une fonction donnée et par Δv l'expression

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

se rencontrent de plus en plus souvent en Physique mathématique. Aussi espérons-nous rendre aux Physiciens un service, service très modeste sans doute, en faisant connaître une intégrale particulière de cette équation permettant de la débarrasser du second membre. M. Poincaré¹⁾ a envisagé le cas où l'on a

$$g_1 = g_0 = 0.$$

M. Duhem²⁾ a étudié une équation dont le premier membre est beaucoup plus général que le premier membre de l'équation (1) mais, en ce qui concerne le second membre, il n'a considéré que le cas très particulier où l'on a:

$$\Delta f = 0.$$

Il y a donc lieu d'examiner le cas où les constantes g_0, g_1 et g_2 sont quelconques, la fonction $f(x, y, z, t)$ ne vérifiant que des hypothèses d'un caractère très général³⁾.

Voici les conditions précises dans lesquelles nous allons nous placer. Nous supposons que la fonction $f(x, y, z, t)$ est définie, en tant que fonction de t dans un certain intervalle (a, b) et en tant que fonction des variables (x, y, z) pour l'ensemble des positions du point (x, y, z) à l'intérieur d'un certain domaine (D) et

¹⁾ Electricité et Optique, 2^e édition.

²⁾ Sur une généralisation du théorème de Clebsch, Journal de Liouville 1900.

³⁾ Pour plus de simplicité nous excluons les cas où il y aurait lieu de considérer des imaginaires et nous nous bornons à faire remarquer ici que ces cas là n'offrent aucune difficulté.

sur la frontière (S) de ce domaine. La surface (S) pourra avoir un nombre quelconque de points singuliers et même de lignes singulières, mais elle devra être telle qu'il puisse être question d'intégrales de volume étendues au domaine (D) et d'intégrales de surface étendues à la surface (S) elle-même. Nous admettrons encore que les dérivées:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y} \text{ et } \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial z}$$

existent, qu'elles sont continues pour toutes les valeurs des variables pour lesquelles la fonction f est définie et qu'enfin chacune des quantités (2), considérée comme fonction de t , satisfait, dans l'intervalle (a, b) aux „conditions de Dirichlet¹⁾“.

Cela posé, nous allons faire voir qu'il existe une fonction v des variables x, y, z et t jouissant, pour toutes les valeurs de t appartenant à l'intervalle (a, b) des propriétés suivantes:

1° La fonction v et les dérivées $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}$ seront continues dans tout l'espace.

2° La fonction v vérifiera l'équation (1) en chaque point situé à l'intérieur du domaine (D) .

3° On aura, en chaque point extérieur au domaine (D)

$$(3) \quad g_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + g_1 \frac{\partial v}{\partial t} + g_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \Delta v = 0$$

Nr. 2. Énonçons certaines propositions bien connues ou aisées à démontrer qui seront indispensables dans la suite. Soit $F(x, y, z)$ une fonction réelle des variables x, y, z , admettant des dérivées partielles du premier ordre finies et continues dans toute l'étendue du domaine (D) et sur la frontière (S) de ce domaine. Cela posé, désignons par μ une constante positive, par r la distance des points (x, y, z) et (x', y', z') et par ψ la fonction définie par la formule:

$$(1) \quad \Phi(x, y, z) = \iiint_{(D)} \frac{\cos \mu r}{r} F(x', y', z') dx' dy' dz'$$

on aura à l'intérieur du domaine (D) :

¹⁾ Poincaré. Théorie de la propagation de la chaleur p. 54.

$$\Delta \Phi + \mu^2 \Phi + 4\pi F(x, y, z) = 0 \quad (2)$$

et dans l'espace extérieur:

$$\Delta \Phi + \mu^2 \Phi = 0. \quad (3)$$

En outre, la fonction Φ et les dérivées $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ seront finies et continues dans tout l'espace.

Soit M une limite supérieure commune des fonctions:

$$|F(x, y, z)| \text{ et } + \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

On aura:

$$|\Phi(x, y, z)| < \frac{AM}{\mu} \quad (4)$$

où A est un nombre positif indépendant de la fonction $F(x, y, z)$, et tel que ni ce nombre lui-même ni le produit

$$Ad,$$

où d est la plus courte distance du point (x, y, z) à la surface (S) , ne dépassent en aucun point de l'espace une certaine limite finie, dépendant uniquement de la surface (S) .

Conservons les notations précédentes et désignons par D_k l'opération qui consiste à prendre une dérivée partielle d'ordre k d'une fonction des variables (x, y, z) . Nous aurons:

$$|D_1 \Phi| < BM \quad (5)$$

$$|D_2 \Phi| < B_1(1 + \mu)M, \quad (6)$$

où la lettre B représente un nombre tout à fait analogue au nombre A de l'inégalité (4), le nombre B_1 étant un nombre positif dont le produit par la plus courte distance du point (x, y, z) à la surface (S) reste constamment au dessous d'une limite finie dépendant uniquement de la surface (S) . On voit que le nombre B_1 ne peut cesser d'être fini que dans le voisinage de la surface (S) .

Si la fonction Φ au lieu d'être définie par la formule (1), l'était par la formule:

$$\Phi = \iiint_{(D)} \frac{e^{-\mu r}}{r} F(x', y', z') dx' dy' dz' \quad (7)$$

où e est la base des logarithmes népériens, cette fonction satisferait encore aux inégalités (4), (5) et (6), elle serait continue dans tout l'espace et il en serait de même de ses dérivées du premier ordre, seulement, au lieu de vérifier l'équation (2) dans le domaine (D) et l'équation (3) dans l'espace extérieur, elle satisferait dans le domaine (D) à l'équation:

$$(8) \quad \Delta \Phi - \mu^2 \Phi + 4 \pi F(x, y, z) = 0$$

et, dans l'espace extérieur, à l'équation:

$$(9) \quad \Delta \Phi - \mu^2 \Phi = 0.$$

Voici maintenant une remarque relative aux séries de Fourier. Soit $\psi(t)$ une fonction de la variable t définie dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. Supposons que la dérivée $\psi'(t)$ satisfasse aux conditions de Dirichlet. Posons:

$$\psi_1(t) = \psi(t) - a'_0 t - a''_0 t^2,$$

les constantes a'_0 , a''_0 étant déterminées par les conditions:

$$\psi_1(0) = \psi_1(2\pi)$$

$$\psi_1'(0) = \psi_1'(2\pi),$$

et développons la fonction $\psi_1(t)$ suivant la série de Fourier. Il viendra:

$$(10) \quad \psi(t) = a_0 + a'_0 t + a''_0 t^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \{ a_m \cos mt + b_m \sin mt \}$$

et l'on aura¹⁾:

$$(11) \quad \begin{cases} |a| < \frac{K}{m^3} \\ |b| < \frac{K}{m^3} \end{cases} (m = 1, 2, 3 \dots)$$

où K est une constante finie.

Nr. 3. Revenons maintenant aux équations (1) et (3) du N. 1. Une substitution de la forme:

$$v = v' e^{\alpha t}$$

¹⁾ On établira aisément ces inégalités en se reportant au „Cours d'Analyse“ de M. E. Picard, T. I, p. 235.

où α est une constante permettra de ramener le cas général au cas où l'on aurait:

$$g_1 = 0$$

En posant ensuite:

$$t = a + \frac{b-a}{2\pi} t',$$

on ramènera l'intervalle (a, b) à l'intervalle $(0, 2\pi)$. Donc, sans nuire à la généralité, nous pourrions supposer que l'on a:

$$g_1 = 0$$

et que la fonction $f(x, y, z, t)$ est définie, en tant que fonction de t , dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. La fonction v devra vérifier alors l'équation:

$$g_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + g_0 v + \Delta v + 4\pi f(x, y, z, t) = 0, \quad (1)$$

dans le domaine (D) et l'équation:

$$g_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} g_0 v + \Delta v = 0, \quad (2)$$

à l'extérieur de ce domaine.

Les hypothèses faites au sujet de la fonction $f(x, y, z, t)$ nous permettent de représenter cette fonction, considérée comme une fonction de la variable t , par une série de la forme de la série (10) du N° précédent, en ayant soin, bien entendu, de remplacer les coefficients a_0, a'_0, a''_0, a_m et b_m par des fonctions des variables x, y, z . On aura donc:

$$f(x, y, z, t) = f_0(x, y, z) + t f_1(x, y, z) + t^2 f_2(x, y, z) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m(x, y, z) \cos mt + \psi_m(x, y, z) \sin mt \right\} \quad (3)$$

On conclura aisément des hypothèses faites au sujet des dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ de la fonction f que chacune des fonctions f_0, f_1, f_2, φ_m et ψ_m admet des dérivées premières continues dans tout le domaine (D) . On s'assurera d'autre part que chacune des

dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ peut être représentée par une série de la forme (3) et l'on verra finalement que l'on a:

$$(4) \quad D_1 f = D_1 f_0 + t D_1 f_1 + t^2 D_1 f_2 \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ D_1 \varphi_m \cos mt + (D_1 \psi_m) \sin mt \right\}$$

où le symbole D_1 est employé dans le même sens que dans le N° précédent. Cela posé, on s'assurera en appliquant convenablement le théorème exprimé par les inégalités (11) du N° précédent et en tenant compte de la continuité des fonctions:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \text{ et } D_1 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

en tant que fonctions des variables x, y, z , qu'il existe une constante positive H telle que l'on ait dans toute l'étendue du domaine (D):

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\varphi_m| < \frac{H}{m^3} \\ |\psi_m| < \frac{H}{m^3} \end{array} \right.$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} |D_1 \varphi_m| < \frac{H}{m^3} \\ |D_1 \psi_m| < \frac{H}{m^3} \end{array} \right.$$

Supposons provisoirement que la fonction v existe et qu'elle puisse être représentée par une série de la forme:

$$(7) \quad v = v_0 + t v_1 + t^2 v_2 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ u_m \cos mt + w_m \sin mt \right\}$$

où v_0, v_1, v_2, u_m et w_m sont des fonctions des variables x, y, z , ne dépendant pas de la variable t . Supposons encore que l'on ait:

$$(8) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = v_1 + 2t v_2 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -u_m \sin mt + w_m \cos mt \right\} m$$

$$(9) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 2v_2 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -u_m \cos mt - w_m \sin mt \right\} m^2$$

$$D_1 v = D_1 v_0 + t D_1 v_1 + t^2 D_1 v_2 + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (D_1 u_m) \cos mt + (D_1 w_m) \sin mt \right\} \quad (10)$$

$$D_2 v = D_2 v_0 + t D_2 v_1 + t^2 D_2 v_2 + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (D_2 u_m) \cos mt + (D_2 w_m) \sin mt \right\} \quad (11)$$

On aurait alors

$$\left. \begin{aligned} 2 g_2 v_2 + g_0 v_0 + \Delta v_0 + 4 \pi f_0 &= 0, \\ g_0 v_1 + \Delta v_1 + 4 \pi f_1 &= 0, \\ g_0 v_2 + \Delta v_2 + 4 \pi f_2 &= 0, \\ (g_0 - m^2 g_2) u_m + \Delta u_m + 4 \pi \varphi_m &= 0, \\ (g_0 - m^2 g_2) w_m + \Delta w_m + 4 \pi \psi_m &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

à l'intérieur du domaine (D) et:

$$\left. \begin{aligned} 2 g_2 v_2 + g_0 v_0 + \Delta v_0 &= 0 \\ g_0 v_2 + \Delta v_1 &= 0 \\ g_0 v_2 + \Delta v_2 &= 0 \\ (g_0 - m^2 g_2) u_m + \Delta u_m &= 0 \\ (g_0 - m^2 g_2) w_m + \Delta w_m &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13) \quad (m = 1, 2, 3 \dots)$$

dans l'espace extérieur. Les propositions rappelées au numéro précédent nous apprennent qu'il sera aisé de déterminer les fonctions v_0, v_1, v_2, u_m et w_m de façon que ces fonctions, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, soient continues dans tout l'espace et qu'elles vérifient les équations (12) à l'intérieur du domaine (D) et les équations (13) dans l'espace extérieur. Donc, pour justifier les hypothèses admises plus haut à titre provisoire et pour démontrer par là l'exactitude du théorème qui fait l'objet de ce petit travail voici, comme on le reconnaîtra aisément, les seuls points que nous ayons à établir:

1^o Les fonctions v_0, v_1, v_2, u_m et w_m étant représentées par des intégrales de la forme (1) ou (7) du N^o précédent prouver que les séries (7) et (10) seront absolument et uniformément convergentes dans tout l'espace et pour toute valeur de t appartenant à l'intervalle $(0, 2\pi)$.

2^o Montrer que les séries (8), (9) et (11) sont absolument et uniformément convergentes dans le voisinage de tout point non si-

tué sur la surface (S) et pour toute valeur de t appartenant à l'intervalle $(0, 2\pi)$. On démontrera tout cela aisément en s'appuyant d'une part sur les inégalités (5) et (6) de ce N° et d'autre part sur les théorèmes exprimés par les inégalités (4), (5), et (6) du N° précédent; on verra même incidemment que le produit:

$$v \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

reste fini lorsque le point (x, y, z) s'éloigne indéfiniment.

52. Le Secrétaire présente le travail de M. K. ŻORAWSKI: **Uwaga o pochodnych nieskończenie wielkiego rzędu.** (*Eine Bemerkung über die Ableitungen unendlich hoher Ordnung.*) (*Remarque sur les dérivées d'ordre infini.*)

In einer im vorigen Jahre¹⁾ erschienenen Abhandlung hat Herr Vitali ausser anderen Entwicklungen einen Satz aufgestellt, welchen ich früher veröffentlicht habe²⁾. Dieser Satz lautet folgendermassen:

Sind in der Potenzreihe:

$$(1) \quad y = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n!} (x-\alpha)^n$$

die Coefficienten a_n so beschaffen, dass die Zahlenfolge:

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

eine vollständig bestimmte endliche Grenze a besitzt, so hat man:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d^n y}{dx^n} = a e^{x-\alpha}.$$

In der erwähnten Publication habe ich auch einen allgemeineren Satz bewiesen. Derselbe kann in folgender Weise formuliert werden:

¹⁾ Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 1900 p. 209—216.

²⁾ Rozprawy Wydz. mat. przyr. Akad. Umiej. w Krakowie t. XXVI; auch Anzeiger der Akademie in Krakau, Juli 1893.

Wenn in der Potenzreihe (1) die Coefficienten a_n so beschaffen sind, dass die Zahlenfolgen:

$$a_k, a_{k+\mu}, a_{k+2\mu}, \dots, a_{k+p\mu}, \dots \quad (k=0, 1, 2, \dots, \mu-1)$$

vollständig bestimmte endliche Grenzen:

$$a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(\mu-1)}$$

besitzen, so hat man:

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{d^{t+\mu+k} y}{dx^{t+\mu+k}} = \frac{1}{\mu} \sum_0^{\mu-1} \varepsilon^{mk} e^{\varepsilon^m(x-x)} \left[\varepsilon^{m\mu} a^{(0)} + \varepsilon^{m(\mu-1)} a^{(1)} + \dots + \varepsilon^m a^{(\mu-1)} \right], \text{ wo } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\mu}}.$$

In der hier vorkommenden Potenzreihe y sind die absoluten Beträge aller Coefficienten a_n bis ins Unendliche kleiner als eine endliche reelle positive Zahl M , so dass

$$|y| < M e^{(x-\alpha)}$$

ist. Daher gehört y der Kategorie der ganzen Functionen an und zwar solcher ganzen Functionen, dass alle Coefficienten a_n bis ins Unendliche endlich sind. In meiner Abhandlung habe ich neben den angeführten Sätzen und einigen mit denselben verbundenen Einzelheiten die Behauptung ausgesprochen, dass nur dieser speziellen Kategorie der ganzen Functionen die Eigenschaft zukommt, solche Ableitungen unendlich hoher Ordnung besitzen zu können, welche analytische Functionen von x sind. Dies ist aber nicht der Fall. Ich wurde nämlich von meinem Collegen Herrn S. Zaremba darauf aufmerksam gemacht, dass auch andere Functionen solche Ableitungen unendlich hoher Ordnung besitzen können. Die Richtigkeit dieser Bemerkung kann durch das folgende Beispiel, welches ich auch Herrn S. Zaremba zu verdanken habe, bestätigt werden.

Es sei in der Potenzreihe (1) $a_n = \sqrt{n}$, sofern n das Quadrat einer ganzen Zahl ist, und $a_n = 1$, sofern dies nicht der Fall ist. Für diese Potenzreihe hat man:

$$|y| < |x-\alpha| e^{(x-\alpha)},$$

sie stellt also eine ganze Function vor, ohne jedoch zu der erwähnten Kategorie der ganzen Functionen zu gehören. Durch Differentiation der Potenzreihe y folgt:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{d^{k^2+1}y}{dx^{k^2+1}} &= 1 + \frac{x-\alpha}{1!} + \frac{(x+\alpha)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-\alpha)^{2k-1}}{(2k-1)!} + \\
 &+ (k+1) \frac{(x-\alpha)^{2k}}{(2k)!} + \frac{(x-\alpha)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots + \frac{(x-\alpha)^{4k+2}}{(4k+2)!} + \\
 &+ (k+2) \frac{(x-\alpha)^{4k+3}}{(4k+3)!} + \frac{(x+\alpha)^{4k+4}}{(4k+4)!} + \dots + \frac{(x-\alpha)^{6k+7}}{(6k+7)!} + \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

man sieht sogleich, dass der absolute Betrag der Summe aller Glieder, welche in allen Zeilen, die erste ausgeschlossen, enthalten sind kleiner ist als der Wert der Summe:

$$|x-\alpha| \sum_{2k-1}^{\infty} \lambda \frac{|x-\alpha|^{\lambda}}{\lambda!}.$$

Wenn k ins Unendliche wächst, so convergiert diese Summe gegen Null, man hat also aus (2):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d^{k^2+1}y}{dx^{k^2+1}} = e^{x-\alpha}$$

und daher giebt dieser Grenzübergang auch eine analytische Function.

53. Le Secrétaire présente le travail de M. K. ŻORAWSKI: **O pewnych zmianach długości liniowych elementów podczas ruchu ciągłego układu materyalnych punktów.** Część druga. (*Über gewisse Aenderungsgeschwindigkeiten von Linienelementen bei der Bewegung eines kontinuierlichen materiellen Systems.* Zweite Mittheilung). (*Sur certaines variations des éléments linéaires pendant le mouvement d'un système continu de points.*)

Der Zweck dieser Abhandlung besteht darin, die Bedingungen des invarianten Verhaltens einer Monge'schen Differentialgleichung 2-ten Grades bei einer infinitesimalen Transformation kinematisch zu interpretieren. Diese Betrachtungen bilden eine Verallgemeinerung einiger in zwei früheren Abhandlungen¹⁾ des Verfassers behandelten

¹⁾ Über einige Kategorien infinitesimaler Transformationen der Ebene. Leipziger Berichte. 11 Juni 1900 und die erste Mittheilung über gewisse Aenderungsgeschwindigkeiten etc. Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie. 12. Novembre 1900.

Probleme. Die für die Monge'schen Differentialgleichungen benutzte Methode wird hier auch auf Gleichungen angewandt, welche homogen und vom zweiten Grade in Bezug auf die Cosinus der Normalen eines Flächenelementes sind.

1. Es sei eine Differentialform zweiten Grades:

$$F = \sum_i^n \sum_k^n A_{ik} dx_i dx_k, \quad (1)$$

wo A_{ik} Functionen der Cartesi'schen Coordinaten x_i in einem ebenen n -fachen Raume und der Zeit t bezeichnen. Durch eine passend gewählte Substitution von der Form:

$$dx_i = \sum_r^n a_{ir} d\sigma_r, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

wo a_{ir} im allgemeinen auch Functionen von x_i und t sind und den Bedingungen:

$$\sum_i^n a_{ir}^2 = 1 \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

$$\sum_i^n a_{ir} a_{is} = 0 \quad (r, s = 1, 2, \dots, n; r \geq s)$$

genügen, d. h. durch eine orthogonale Substitution, die im übrigen auch in der Form:

$$d\sigma_r = \sum_i^n a_{ir} dx_i \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

geschrieben werden kann, ist es möglich jede reelle Differentialform F auf die Gestalt:

$$F = \sum_r^n H_r d\sigma_r^2 \quad (5)$$

zu bringen. Die Grössen H_r , welche im allgemeinen auch von x_i und t abhängig sind, genügen der sog. charakteristischen Gleichung n -ten Grades und besitzen sämtlich reelle Werte; die linearen Differentialformen $d\sigma_r$ sind die Längen der n senkrecht auf einander stehenden unendlich kleinen Bogen und a_{ir} sind die Cosinus dieser Bogen mit den Coordinatenachsen. Jeder einfachen Wurzel der charakteristischen Gleichung entspricht ein ganz bestimmter unendlich kleiner Bogen $d\sigma_r$, jeder m -fachen Wurzel eine unendlich kleine m -dimensionale ebene Mannigfaltigkeit, in welcher m auf einander senkrechte Bogen gewählt werden können. Die

Richtungen dieser Bogen werden Hauptrichtungen der Differentialform F genannt.

Wir werden im folgenden die Differentialformen stets in der Form (5) schreiben. Also die im folgenden angeführten Rechnungen beziehen sich in erster Linie auf reelle Differentialformen, sie können aber auch auf solche complexe Differentialformen F bezogen werden, welche durch eine complexe Substitution (2) mit den Bedingungen (3) auf die Gestalt (5) gebracht werden können, wo H , im allgemeinen complex sind. Auf die Bedingungen, welchen complexe Formen genügen müssen, damit die Ausführung einer solchen Transformation möglich wäre, gehen wir hier nicht ein.

2. Man betrachte andererseits die infinitesimale Transformation:

$$Df = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

wo u_i Functionen von x_i und t bezeichnen. Sie stellt eine Bewegung des continuierlichen Mediums im n -fachen Raume vor. Bezeichnet man mit ds die Bogenlänge, so folgt:

$$\frac{1}{ds} \frac{\delta(ds)}{\delta t} = \frac{\sum_i^n \sum_k^n \alpha_{ik} dx_i dx_k}{ds^2},$$

wo

$$\alpha_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

sind. Bezeichnet man also die Dilatation desjenigen Linienelementes, welches in der Hauptrichtung mit dem Index r gelegen ist, mit Δ_{rr} , so hat man:

$$\Delta_{rr} = \sum_i^n \sum_k^n \alpha_{ik} a_{ir} a_{kr}.$$

Man betrachte ferner zwei im Momente t vom Punkte x_i ausgehende Elemente: ds und $d's$. Cosinus des Winkels, welchen diese Elemente mit einander bilden, ist:

$$\varepsilon = \sum_i^n \frac{dx_i d'x_i}{ds d's}$$

und man hat die Formel:

$$\frac{\delta \varepsilon}{\delta t} = 2 \sum_i^n \sum_k^n \alpha_{ik} \frac{dx_i d'x_k}{ds d's} - \left(\frac{1}{ds} \frac{\delta(ds)}{\delta t} + \frac{1}{d's} \frac{\delta(d's)}{\delta t} \right) \varepsilon;$$

wenn man nun die Schiebung in den Hauptrichtungen r und s mit $2\Delta_{rs}$ bezeichnet, so hat man:

$$\Delta_{rs} = \Delta_{sr} = \sum_i^n \sum_k^n \alpha_{ik} a_{ir} a_{ks}.$$

Wir führen noch die Bezeichnungen:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) = \zeta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

ein. Durch Differentiation bekommt man die Formeln:

$$\frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{dx_i}{ds} \right) = \sum_k^n \left(\alpha_{ik} + \zeta_{ik} \right) \frac{dx_k}{ds} - \frac{1}{ds} \frac{\delta(ds)}{\delta t} \frac{dx_i}{ds}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

aus welchen folgt, dass die Cosinus des materiellen Linienelementes, welches im Punkte x_i und Momente t in der Hauptrichtung r gelegen ist, mit den Geschwindigkeiten:

$$\frac{\delta a_{ir}}{\delta t} = \sum_k^n \left(\alpha_{ik} + \zeta_{ik} \right) a_{kr} - \Delta_{rr} a_{ir} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

sich verändern. Will man die Geschwindigkeit, mit welcher während der Bewegung die materiellen Linienelemente der Hauptrichtungen ihre Richtungen ändern, mit den Geschwindigkeiten dieser Cosinus schätzen, so kann man sagen, dass die Differenzen:

$$a_{ir} = D(a_{ir}) - \frac{\delta a_{ir}}{\delta t} = D(a_{ir}) - \sum_k^n \left(\alpha_{ik} + \zeta_{ik} \right) a_{kr} + \Delta_{rr} a_{ir} \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

diejenige relative Geschwindigkeit darstellen, mit welcher während der Bewegung die Hauptrichtung r gegen die materiellen Linienelemente unseres Mediums fortschreitet. Anstatt der Grössen a_{ir} wollen wir die Projektionen derselben auf die Hauptrichtungen, d. h. die Grössen:

$$p_{rs} = \sum_i^n a_{is} a_{ir} \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

einführen und die Ausdrucksweise benutzen, dass p_{rs} die Geschwindigkeitskomponente der Hauptrichtung r in Bezug auf die Hauptrichtung s darstellt. Man kommt leicht auf die Formeln:

$$p_{rr} = 0,$$

$$p_{rs} = \sum_i^n a_{is} D(a_{ir}) + \sum_i^n \sum_k^n \zeta_{ik} a_{ir} a_{ks} - \Delta_{rs}, \quad (r \geq s)$$

und also auch auf die identischen Beziehungen:

$$p_{rs} + p_{sr} + 2\Delta_{rs} = 0 \quad (r \geq s).$$

Aus unseren Formeln folgt ohne Weiteres, dass die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit in jedem Theilchen des Systems die Hauptrichtung r während der Bewegung stets aus denselben materiellen Linienelementen bestehe, entweder durch das identische Bestehen der Relationen:

$$a_{ir} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

oder durch das identische Bestehen der mit denselben äquivalenten:

$$p_{rs} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, n)$$

ausgedrückt werden können.

4. Aus den Formeln (4) mit Berücksichtigung einiger Formeln der Nummern 2 und 3 können leicht die Formeln:

$$(6) \quad \frac{\delta(d\sigma_r)}{\delta t} = \Delta_{rr} d\sigma_r - \sum_s^n p_{sr} d\sigma_s \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

abgeleitet werden.

Aus den letzten folgt zuerst, dass die Bedingungen des invarianten Verhaltens des Pfaff'schen Systems:

$$d\sigma_{\lambda-1} = 0, d\sigma_{\lambda+2} = 0, \dots, d\sigma_n = 0$$

die folgenden sind:

$$p_{sr} = 0, \quad (s = 1, 2, \dots, \lambda; r = \lambda + 1, \lambda + 2, \dots, n)$$

also: die Mannigfaltigkeit aller Linienelemente, welche in derjenigen unendlich kleinen λ -dimensionalen ebenen Mannigfaltigkeit, welche λ Hauptrichtungen enthält, gelegen sind, besteht während der Bewegung in jedem Theilchen des Systems nur dann aus denselben materiellen Linienelementen, wenn die Geschwindigkeitscomponenten dieser λ Hauptrichtungen identisch gleich Null sind.

Ferner folgt aus den Formeln (5) und (6) die Formel:

$$\frac{\delta F}{\delta t} = \sum_r^n \left[D(H_r) + 2 H_r \Delta_{rr} \right] d\sigma_r^2 - 2 \sum_r^n \sum_s^n H_r p_{rs} d\sigma_r d\sigma_s,$$

also sind die Bedingungen, damit die Monge'sche Differentialgleichung:

$$F = 0$$

invariant bleibe, d. h. damit alle materiellen Elementarkegel, welche durch dieselbe definiert sind, während der Bewegung stets die Elementarkegel derselben Gleichung wären, die folgenden:

$$D(H_r) + 2 H_r \Delta_{rr} = \rho H_r, \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

$$H_r p_{rs} + H_s p_{rs} = 0. \quad (r, s = 1, 2, \dots, n; r \geq s). \quad (8)$$

In diesen Bedingungen, welche identisch erfüllt werden müssen, ist ρ irgend eine Function von x_i und t . Wenn ρ identisch gleich Null ist, so ist F eine invariante Differentialform.

Diese Bedingungen können auch anders formuliert werden. Nimmt man an, dass von den Grössen H_r die Grössen:

$$H_1, H_2, \dots, H_\lambda$$

von Null verschieden sind und dass alle anderen gleich Null sind, und schreibt man die Gleichung des Kegels in der Form:

$$\sum_r^\lambda \frac{d\sigma_r^2}{g_r^2} = 0,$$

so dass derselbe als asymptotischer Kegel einer Mannigfaltigkeit zweiten Grades mit den λ Halbachsen: $g_1, g_2, \dots, g_\lambda$ und $\lambda + 1$ Halbachsen, welche im Vergleich mit den früheren unendlich gross sind, betrachtet werden kann, so lassen sich unsere Bedingungen in der Form schreiben:

$$p_{sr} = 0; \quad (s = \lambda + 1, \lambda + 2, \dots, n; r = 1, 2, \dots, \lambda)$$

$$p_{r's'} = \frac{2g_{s'}^2 \Delta_{r's'}}{g_{r'}^2 - g_{s'}^2} \quad (r', s' = 1, 2, \dots, \lambda; r' \geq s')$$

falls $g_{r'}^2$ von $g_{s'}^2$ verschieden ist und

$$\Delta_{r's'} = 0$$

falls diese Grössen einander gleich sind; endlich

$$\Delta_{r'r'} = \frac{D(g_{r'})}{g_{r'}} + \frac{1}{2} \rho \quad (r' = 1, 2, \dots, \lambda).$$

Die kinematische Bedeutung dieser Bedingungen kann aus denselben leicht abgelesen werden.

5. Wir wollen nun einige Spezialfälle betrachten.

Im Falle der Gleichung:

$$ds^2 = \sum_1^n dx_i^2 = 0$$

kann man die Cartesi'schen Coordinatenaxen als Hauptrichtungen wählen und unsere Bedingungen sagen nichts anderes aus, als dass die infinitesimale Transformation in jedem Momente eine conforme sein muss. In derselben Weise führt das invariante Verhalten von ds auf euklidische Bewegung.

Wählt man ferner die Gleichung:

$$F = \sum_1^n \sum_1^n \alpha_{ik} dx_i dx_k - \omega \sum_1^n dx_i^2 = 0,$$

wo ω eine Function von x_i und t ist, so bestimmt dieselbe alle diejenigen Linienelemente, deren Dilatation gleich ω ist. Ist dieselbe eine invariante Differentialgleichung, so wollen wir sagen, dass die Linienelemente dieser Differentialgleichung mit vollkommener Gleichmässigkeit sich verändern. Für diese Form F hat man:

$$\Delta_{rs} = 0 \quad (r \geq s)$$

und bezeichnet man die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Form:

$$\sum_1^n \sum_1^n \alpha_{ik} dx_i dx_k$$

mit ω_r , so folgt:

$$\Delta_{rr} = \omega_r$$

und man hat ausserdem:

$$H_r = \omega_r - \omega.$$

Die Bedingungen (8) liefern also:

$$(9) \quad p_{rs} = 0,$$

wenn ω_r von ω_s verschieden ist. Auf Grund eines Satzes, welcher in der Nummer 4 aufgestellt wurde, kann man sagen, dass sobald

ω_r eine μ -fache Wurzel der charakteristischen Gleichung ist, so besteht in jedem materiellen Theilchen des Systems die unendlich kleine μ -dimensionale ebene Mannigfaltigkeit, welche μ dieser Wurzel entsprechende Hauptrichtungen enthält, stets aus denselben materiellen Linienelementen. Beachtet man ferner, dass in dieser materiellen μ -dimensionalen ebenen Mannigfaltigkeit alle Dilatationen einander gleich sind, so kann man auch sagen, dass in dieser ebenen Mannigfaltigkeit in jedem Momente der Bewegung eine conforme Abbildung zu Stande kommt. Ist ω_r eine einfache Wurzel, so besteht die entsprechende Hauptrichtung in jedem materiellen Theilchen des Systems aus denselben materiellen Linienelementen. Wenn alle Wurzeln einander gleich sind, so hat man die conforme Abbildung des n -fachen Raumes.

Die Bedingungen (7) liefern die Relationen:

$$D(\omega_r - \omega) + 2\omega_r(\omega_r - \omega) = \rho(\omega_r - \omega) \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

welche in Vereinigung mit den Relationen (9) für das vollkommen gleichmässige Verhalten von ds nothwendig und hinreichend sind.

6. In unseren bisherigen Betrachtungen haben wir die Änderungen verfolgt, welchen während der Bewegung die Linienelemente unterworfen sind. Analoge Betrachtungen können für die $(n-1)$ -dimensionalen ebenen Elemente, welche wir einfach Flächenelemente nennen wollen, durchgeführt werden.

Ein solches Element kann im Punkte x_i und Momente t durch eine Pfaff'sche Differentialgleichung:

$$\sum_1^n X_i dx_i = 0 \quad (10)$$

definiert werden, wo X_i als Coordinaten betrachtet werden können, welche die Richtung des materiellen Flächenelementes bestimmen. Will man die Incremente berechnen, welche diesen Coordinaten während der Bewegung des materiellen Elementes zukommen, so muss man die Bedingungen aufstellen, damit die Gleichung (10) während der Bewegung invariant bleibe. Dies liefert die Incremente:

$$\frac{\delta X_i}{\delta t} = U X_i - \sum_1^n (\alpha_{ik} - \xi_{ik}) X_k, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

wo U irgend eine Function von x_i , t und X_i bezeichnet. Sind nun X_i der Bedingung:

$$\sum_i^n X_i^2 = 1$$

unterworfen, d. h. stellen dieselben die Cosinus der Normalen unseres Elementes mit den Coordinatenaxen vor, so wird man an Stelle der Gleichungen (11) die Gleichungen:

$$(12) \quad \frac{\delta X_i}{\delta t} = T X_i - \sum_i^n (\alpha_{ik} - \zeta_{ik}) X_k \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

haben, wo T eine ganz bestimmte Function bezeichnet, nämlich:

$$(13) \quad T = \sum_i^n \sum_i^n \alpha_{ik} X_i X_k.$$

Die Grösse T stellt die Dilatation desjenigen materiellen Linien-elementes vor, welches zum Flächenelemente senkrecht steht.

Diese Formeln lassen sich durch eine orthogonale Substitution auf eine andere Form bringen. Es sei eine solche Substitution:

$$(14) \quad X_i = \sum_r^n b_{ir} S_r \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

wo S_r neue Veränderlichen bezeichnen und die Coeffizienten b_i Functionen von x_i und t sind, welche im Punkte x_i und Momente t Cosinus von n senkrecht aufeinander stehenden Richtungen mit den Coordinatenaxen darstellen. Wenn X_i Cosinus einer Richtung mit den Coordinatenaxen sind, so sind S_r Cosinus derselben Richtung mit den n Richtungen, welche durch die Coeffizienten b_{ir} bestimmt sind.

Für diese Substitution kann man analog wie früher für die Substitution (1) die Dilatationen:

$$E_{rr} = \sum_i^n \sum_i^n \alpha_{ik} b_{ir} b_{kr},$$

die halben Schiebungen:

$$E_{rs} = \sum_i^n \sum_i^n \alpha_{ik} b_{ir} b_{ks} \quad (r \geq s)$$

und die Geschwindigkeitscomponenten:

$$q_{rs} = \sum_i^n b_{is} D(b_{ir}) + \sum_i^n \sum_i^n \zeta_{ik} b_{ir} b_{ks} - E_{rs} \quad (r \geq s)$$

berechnen und man hat auch die Identitäten:

$$q_{rr} = 0$$

und

$$q_{rs} + q_{sr} + 2E_{rs} = 0. \quad (r \geq s)$$

Auf Grund dieser Formeln lassen sich die Formeln (11) in der Form:

$$\frac{\delta S_r}{\delta t} = (U - E_{rr}) S_r + \sum_1^n q_{rs} S_s \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (15)$$

schreiben, wo U irgend eine Function von x_i, t und S_r bezeichnet sind. S_r Cosinus der Normalen des Flächenelementes, so hat man:

$$\frac{\delta S_r}{\delta t} = (T - E_{rr}) S_r + \sum_1^n q_{rs} S_s \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

und die Dilatation T des Linienelementes, welches die Richtung dieser Normalen besitzt, kann vermöge der Formel:

$$T = \sum_r^n \sum_s^n E_{rs} S_r S_s$$

berechnet werden.

Man betrachte das System der Gleichungen:

$$S_1 = 0, S_2 = 0, \dots, S_\lambda = 0.$$

Die Bedingungen des invarianten Verhaltens dieses Systems kann man nach (15) in der Form:

$$q_{rs} = 0 \quad (s = \lambda + 1, \lambda + 2, \dots, n; r = 1, 2, \dots, \lambda)$$

schreiben. Beachtet man also die geometrische Bedeutung unseres Systems, so kann man dieses Resultat folgendermassen formulieren.

Die Mannigfaltigkeit aller Flächenelemente, deren jedes λ Richtungen mit den Cosinus b_r ($r = 1, 2, \dots, \lambda$) enthält, besteht während der Bewegung in jedem materiellen Theilchen des Systems dann und nur dann aus denselben materiellen Flächenelementen, wenn alle Geschwindigkeitscomponenten dieser λ Richtungen in Bezug auf die $n - \lambda$ Richtungen mit den Cosinus b_s ($s = \lambda + 1, \lambda + 2, \dots, n$) identisch gleich Null sind.

7. Man betrachte nun die Form:

$$\Phi = \sum_1^u \sum_1^n B_{ik} X_i X_k$$

wo B_{ik} Functionen von x_i und t bezeichnen. Man setze voraus, dass diese Form vermöge der Substitution (14) auf die Gestalt:

$$\Phi = \sum_r^n G_r S_r^2$$

gebracht werden kann, wo G_r im allgemeinen von x_i und t abhängig sind. Die Richtungen, deren Cosinus b_{ir} sind, werden Hauptrichtungen der Form Φ genannt. Durch eine einfache Rechnung bekommt man folgenden Werth des Incrementes von Φ :

$$(16) \quad \frac{\delta\Phi}{\delta t} = 2 U \Phi + \sum_r^n [D(G_r) - 2 E_{rr} G_r] S_r^2 + 2 \sum_r^n \sum_s^n G_r q_{rs} S_r S_s$$

Daraus folgt, dass die Bedingungen des invarianten Verhaltens der Gleichung:

$$\Phi = 0$$

die folgenden sind:

$$\begin{aligned} D(G_r) - 2 E_{rr} G_r &= \mu G_r, \quad (r = 1, 2, \dots, n) \\ G_r q_{rs} + G_s q_{sr} &= 0, \quad (r, s = 1, 2, \dots, n; r \geq s) \end{aligned}$$

wo μ irgend eine Function von x_i und t bezeichnet.

In der Gleichung (17) treten nur die Verhältnisse der Grössen X_i auf. Giebt man aber diesen Grössen eine ganz bestimmte Bedeutung, setzt man z. B. voraus, dass sie Cosinus der Normalen des Flächenelementes mit den Coordinatenachsen sind, so kann auch von dem invarianten Verhalten der Form Φ die Rede sein. Durch Benutzung der Formel (16) ergeben sich hierfür die Bedingungen:

$$\begin{aligned} D(G_r) &= 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n) \\ E_{11} &= E_{22} = \dots = E_{nn} \\ E_{rs} &= 0, \quad G_r q_{rs} + G_s q_{sr} = 0 \quad (r, s = 1, 2, \dots, n; r \geq s) \end{aligned}$$

aus welchen unter Anderem leicht geschlossen werden kann, dass solche Formen Φ nur bei Bewegungen invariant bleiben können, welche in jedem Momente conform sind.

Auf dieselbe Weise kann aus den Formeln der Nummern 2 und 4 geschlossen werden, dass die Bedingungen des invarianten Verhaltens der Form:

$$F' = \sum_i^n \sum_k^n A_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds}$$

die folgenden sind:

$$D(H_r) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

$$\Delta_{11} = \Delta_{22} = \dots = \Delta_{nn}$$

$$\Delta_{rs} = 0, \quad H_r p_{rs} + H_s p_{rs} = 0 \quad (r, s = 1, 2, \dots, n; r \geq s)$$

und man gelangt zu der Bemerkung, dass nur während einer solchen Bewegung die Form F' unter Umständen invariant bleiben kann, welche in jedem Momente conform ist.

Insbesondere eine Bewegung, welche Dilatationen aller Linien-elemente invariant lässt, ist jedenfalls in der Klasse der Bewegungen enthalten, welche in jedem Momente conform sind. In der Nummer 8 werden wir über die Dilatation eines Flächenelementes sprechen; die nämliche Bemerkung bezieht sich auf die Bewegungen, welche diese Dilatationen invariant lassen.

Wir gehen hier darauf nicht ein, ob die Kategorie der conformen Bewegungen in den vorliegenden Fällen nicht etwa auf eine engere Kategorie von Bewegungen zurückgeführt werden muss.

Unsere allgemeinen Formeln geben zu gewissen Bemerkungen Anlass, von denen wir hier eine anführen wollen.

Man betrachte nämlich den Elementenkegel:

$$F = \sum_i^n \sum_k^n A_{ik} dx_i dx_k = 0$$

und die Mannigfaltigkeit von Flächenelementen, welche auf den Erzeugenden dieses Elementarkegels senkrecht stehen:

$$\sum_i^n \sum_k^n A_{ik} X_i X_k = 0,$$

so kann man vermöge unserer Formeln die Bedingungen aufstellen, damit diese beiden Mannigfaltigkeiten gleichzeitig das invariante Verhalten aufweisen. Aus diesen Bedingungen folgt z. B., dass sobald die charakteristische Gleichung der Form F keine verschwindenden Wurzeln besitzt und keine solche Wurzeln, welche sich von einander nur durch die Vorzeichen unterscheiden, so muss die Bewegung jedenfalls in jedem Momente eine conforme sein.

8. Wir wenden uns noch zur Betrachtung gewisser Spezialfälle. Das invariante Verhalten der Gleichung:

$$\sum_i^n X_i^2 = 0$$

charakterisiert solche Bewegungen Df , welche in jedem Momente conform sind.

Bezeichnet man, ferner den Flächeninhalt eines Flächenelementes mit $d\omega$, so hat man:

$$(18) \quad \frac{1}{d\omega} \frac{\delta(d\omega)}{\delta t} = \theta - \sum_i^n \sum_k^n \alpha_{ik} X_i X_k$$

wo

$$\theta = \sum_i^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

die Dilatation des Raumelementes ist, und X_i Richtungscosinus der Normalen des Flächenelementes bezeichnen. Die Grösse (18) ist die Dilatation des Flächenelementes und die Gleichung:

$$(19) \quad \Phi = \sum_i^n \sum_k^n \alpha_{ik} X_i X_k + (\tau - \theta) \sum_i^n X_i^2 = 0,$$

wo τ eine Function von x_i und t bezeichnet, bestimmt diejenigen Flächenelemente, deren Dilatation gleich τ ist. Bleibt diese Gleichung bei Df invariant, so wollen wir sagen, dass die Flächenelemente derselben mit vollkommener Gleichmässigkeit sich verändern.

Die Form:

$$\sum_i^n \sum_k^n \alpha_{ik} X_i X_k$$

besitzt dieselben Wurzeln der charakteristischen Gleichung und dieselben Hauptrichtungen wie die Form F der Nummer 5. Daher kann die Gleichung (19), auf diese Hauptrichtungen bezogen, in der Gestalt:

$$\Phi = \sum_r^n (\omega_r + \tau - \theta) S_r^2 = 0$$

geschrieben werden. Die Gruppe derjenigen Bedingungen des invarianten Verhaltens dieser Gleichung, welche die Geschwindigkeitscomponenten der Hauptrichtungen enthalten, ist mit der entsprechenden Gruppe der Bedingungen der Nummer 5 identisch. Die übrigen Bedingungen lauten:

$$D(\omega_r + \tau - \theta) - 2\omega_r(\omega_r + \tau - \theta) = \mu(\omega_r + \tau - \theta). \\ (r = 1, 2, \dots, n)$$

Wir wollen nun fragen, unter welchen Bedingungen sowohl das vollkommen gleichmässige Verhalten der Linienelemente wie auch das vollkommen gleichmässige Verhalten der Flächenelemente stattfindet. Zuerst kann man leicht einsehen, dass in diesem Falle die betreffende charakteristische Gleichung höchstens zwei von einander verschiedene Wurzeln haben kann. Abgesehen vom Falle einer einzigen Wurzel, welcher auf conforme Bewegungen führt, hat man ferner die Bedingung:

$$(\omega_r - \omega_s) D(\omega) - \omega D(\omega_r - \omega_s) - [\omega_r D(\omega_s) - \omega_s D(\omega_r)] + 2(\omega_r - \omega_s)(\omega - \omega_r)(\omega - \omega_s) = 0 \quad (20)$$

und diejenige, welche aus derselben folgt, wenn statt ω vermöge der Substitution:

$$\tau = \omega + \theta - (\omega_r + \omega_s) \quad (21)$$

die Grösse τ eingeführt wird; hier bezeichnen ω_r und ω_s die zwei von einander verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Wenn also diese Gleichung in der That genau zwei verschiedene Wurzeln besitzt und die Bedingungen, welche die Geschwindigkeitscomponenten der Hauptrichtungen enthalten, erfüllt sind, so können aus der Gleichung (20) unendlich viele Functionen ω und durch die Substitution (21) unendlich viele Functionen τ bestimmt werden, denen beziehungsweise Linien- und Flächenelemente zugehören, welche vollkommen gleichmässig sich verändern.

54. PUBLICATIONS DE LA CLASSE.

Le Secrétaire dépose sur le bureau la dernière publication de la Classe:

S. Niementowski. „O pochodnych bifenylu“. (*Sur les dérivés du biphényle*, 8-o, p. 24). — (*Derivate des Biphenyls*, 8-o, S. 24).

Nakładem Akademii Umiejętności
pod redakcją Sekretarza Wydziału matem.-przyr. Dra Józefa Rostafińskiego.
Kraków, 1901. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

28 Stycznia 1902.



