BULLETIN INTERNATIONAL

DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.

III. CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

Nº 2. Février 1901.

Sommaire:
4. VL. KULCZYŃSKI. Arachnoidea in colonia Erythraea a Dre K. M. Levander collecta. (Avec 2 planches).
5. L. BIRKENMAJER. Marco Beneventano, Kopernik, Wapowski et leur collaboration à la plus ancienne carte géographique de la Pologne.
6. M. P. RUDZKI. Sur l'âge de la Terre
7. A. WRÓBLEWSKI. Quelques nouvelles remarques sur le suc préssé de la levure III.
8. L. NATANSON. Sur les lois de la viscosité.
9. S ZAREMBA. Sur les fonctions dites fondamentales dans la théorie des équations de la physique.
10. S. KĘPIŃSKI. Sur les intégrales des solutions des équations du second ordre, équivalentes à leur adjointe, avec trois points singuliers.
11. PUBLICATIONS DE LA CLASSE.

Séance du lundi 4. Février 1901

Présidence de M. E. GODLEWSKI.

4. M. VL. KULCZYŃSKI présente son travail: **Arachnoidea in colonia Erythraea a Dre K. M. Levander collecta.** (Avec 2 planches).

In einer kleinen Arachnidensammlung aus Erythraea, welche der Verf. von Dr. K. M. Levander in Helsingfors zur Bearbeitung erhielt, fand derselbe — abgesehen von einigen nur dem Genus nach bestimmbaren Exemplaren — 34 Arten. Siebzehn derselben werden als neue Arten beschrieben, u. zw. *Filistata infuscata, Scytodes affinis, Prosthesima mediocris, Pythonissa punctata, P. simplex, Argyroëpeira Levanderii, Cyclosa albopunctata, Parabomis* (n. g.) *Levanderii, Thomisus bidentatus, Misumena decolor, Diaea mutabilis, Chiracanthium proximum, Ch. affine, Thalassius fulvus, Heliophanus erythropleurus, Ergane (?) dubia, Dasylobus denticulatus.* Mit Ausnahme von *Argyroëpeira, Thomisus* und *Diaea*, sind diese sämmtlichen Arten in der Sammlung nur durch je ein Geschlecht vertreten. — Von den übrigen, bekannten, Arten hält Verf. die von Dr. L. Koch als *Pholcus borbonicus* Vins. aufgeführte *Artema* für eine von dem echten *Pholcus borbonicus* Vins. (=*Artema mauritia* Walck.

und *Artema sisyphoides* Dol.) verschiedene Art und nennt sie *Artema Kochii*. *Meta Antinorii* Pav. ist, der Meinung des Verf. nach, identisch mit *Tetragnatha festiva* Blackw., *Meta splendida* Butler und *Argyroëpeira blanda* Cambr., ist aber von der *Epeira undulata* Vinson, für deren Synonym sie gehalten wurde, verschieden. *Epeira limans* Thor. und *Epeira radulans* Pav. zieht Verf. als Männchen zu *Epeira dalmatica* Dol.

Erklärung der Tafeln.

Taf. I.

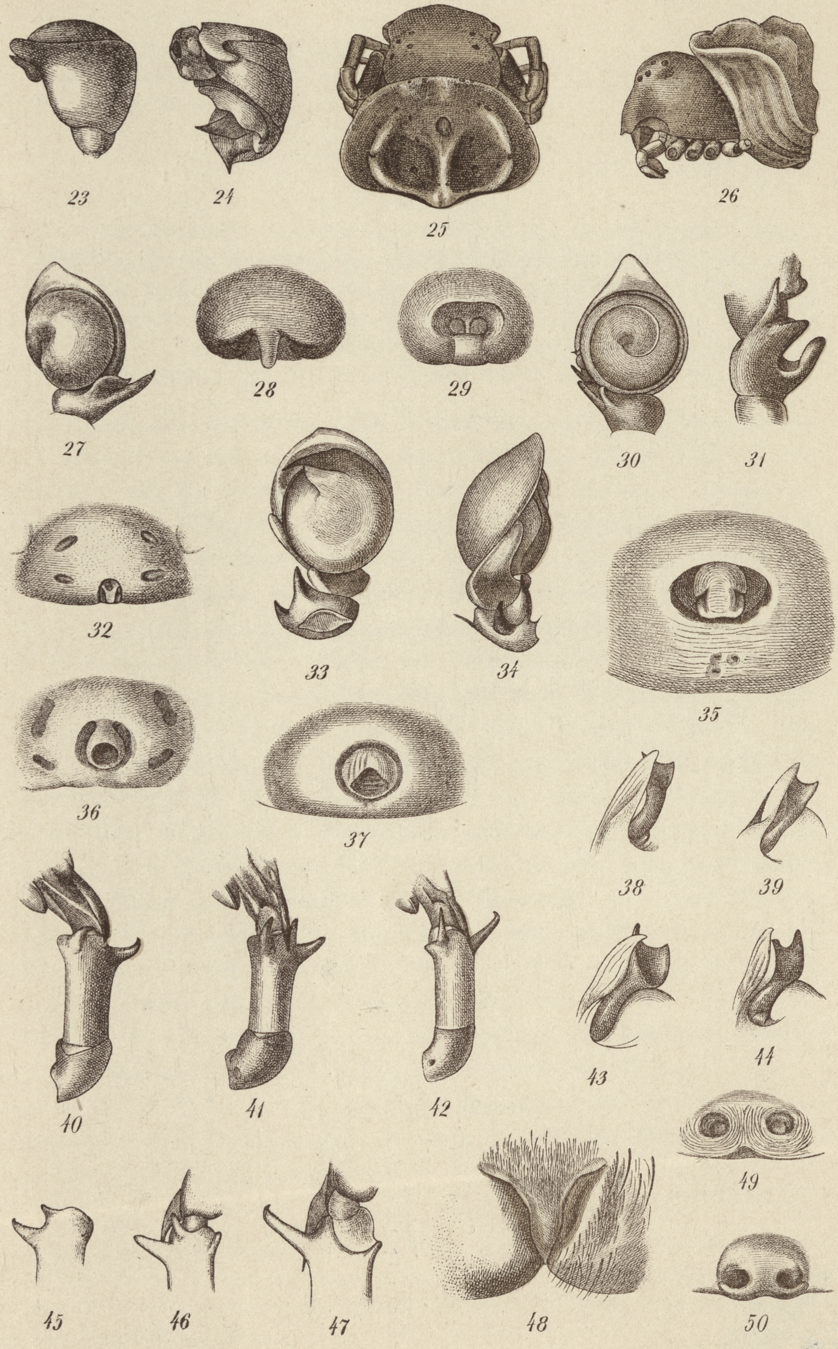
1, 2. *Scytodes humilis* L. Koch, Vorderleib und Epigyne.
3, 4. *Scytodes affinis* n. sp., Epigyne und Vorderleib.
5. *Scotophaeus corruscus* L. Koch, Epigyne.
6. *Prosthesima mediocris* n. sp., Epigyne.
7, 10. *Pythonissa punctata* n. sp., Epigyne und Hinterleib (benetzt).
8, 9, 11. *P. plumalis* Cambr.?, Epigyne (trocken: 8, benetzt: 9) und Hinterleib (benetzt).
12, 13. *P. simplex* n. sp., Hinterleib (benetzt) und Epigyne.
14. *Artema Kochii* Kulcz. (*Pholcus borbonicus* L. Koch, Thor.), Epigyne.
15. *A. mauritia* Walck. (*Pholcus borbonicus* Vins.). Epigyne.
16, 17. *Hersilia caudata* Sav., männlicher Taster und Epigyne.
18, 21, 22. *Argyroëpeira Levanderii* n. sp., Mandibelklaue, Mandibeln und linker Taster des Männchens.
19, 20. *A. festiva* (Blackw.) (*Meta splendida* Butl., *M. Antinorii* Pav., *Arg. blanda* Cambr.), Mandibelklaue und Mandibeln des Männchens.

Taf. II.

23, 24. *Cyclosa albopunctata* n. sp., Tibial- und Tarsaltheil des männl. Tasters.
25—27. *Parabomis Levanderii* n. g., n. sp., Männchen und Tibial- und Tarsaltheil des männl. Tasters.
28. *Argyroëpeira festiva* (Blackw.), Epigyne.
29. *A. Levanderii* n. sp., Epigyne.
30, 31, 35. *Diaea mutabilis* n. sp., männlicher Taster (Tibial- und Tarsaltheil: 30, Tibialtheil: 31), Epigyne.
32—34. *Thomisus bidentatus* n. sp., Epigyne, männlicher Taster.
36. *Misumena tricuspidata* (F.), Epigyne.
37. *M. decolor* n. sp., Epigyne.
38. *Chiracanthium Mildei* L. Koch, apicaler Theil des linken Tasterbulbus.
39, 40, 45. *Ch. molle* L. Koch, apicaler Theil des Tasterbulbus (39), Patellar- und Tibialtheil und Basis des Tarsaltheiles (40), distales Ende des Tibialtheiles (45) vom linken Taster des Männchens.
41, 43, 46. Dieselben Theile von *Chir. affine* n. sp.

W. Kulczyński, ad. nat. del.

Lith. M. Salb à Cracovie



W. Kulczyński ad nat. del.

Lith. M. Salb à Cracovie

42, 44, 47. Dieselben Theile von *Chir. proximum* n. sp.
48. *Thalassius fulvus* n. sp., Epigyne.
49. *Heliophanus erythropleurus* n. sp., Epigyne.
50. *Ergane (?) dubia* n. sp., Epigyne.

---

5. M. L. BIRKENMAJER présente son travail: **Marco Beneventano, Kopernik, Wapowski a najstarsza karta geograficzna Polski.** (Avec 1 pl.). (***Marco Beneventano, Copernicus, Wapowski und die älteste geographische Karte von Polen***). *(Marco Beneventano, Kopernik, Wapowski et leur collaboration à la plus ancienne carte géographique de la Pologne)*.

Ueber den Aufenthalt des Copernicus in Italien, wo derselbe volle acht Jahre seines Lebens zugebracht hat, haben sich im allgemeinen nur äusserst spärliche Nachrichten erhalten. Dieser beklagenswerthe Mangel an historischer Ueberlieferung betrifft insbesondere den wissenschaftlichen Verkehr, welchen Copernicus, indem er in Bologna, Rom, Padua und Ferrara nach einander verweilte, zweifellos mit den dortigen Gelehrten gepflogen hatte. Ausser der einzigen Nachricht, welche uns Georg Joach. Rhaeticus über den nahen Umgang des Copernicus mit dem bologneser Professor Dominicus Maria Novara und über ihre gemeinschaftlich ausgeführten astronomischen Beobachtungen überliefert hat, wusste der bisherige Biograph nichts Bestimmteres in dieser Hinsicht zu berichten. Die von neueren Biographen aufgestellten Conjecturen über die möglichen Beziehungen des Copernicus zu dem bologneser Hellenisten Antonio Urceo, genannt Codro, desgleichen zu dem dortigen Mathematiker Scipio Ferro, so wie zu dem paduaner Arzte und Astronomen Girolamo Fracastoro, beruhen auf keinerlei Documenten, ja nicht einmal auf stichhaltigen Beweisgründen. Der einzige zur Motivierung solcher Hypothesen herangezogene Umstand, nämlich der gleichzeitige Aufenthalt jener Gelehrten in Bologna resp. in Padua, ist freilich eine unerlässliche Bedingung des Bestehens jener muthmasslichen Beziehungen — kann jedoch in dieser Frage als Argument nicht von Belang sein [1]).

[1]) Dass die Behauptung des Dr. Carlo Malagola, Copernicus habe in Bologna bei Antonio Urceo griechisch gelernt, meist auf illusorischen Argumenten beruht, habe ich in dem Werke Mikołaj Kopernik, I Theil, Krakau 1900, Seite 99 seq. auseinandergesetzt.

Bei diesem Mangel an geschichtlicher Tradition ist es vielleicht angemessen, die Aufmerksamkeit der Historiker der exacten Wissenschaften auf eine interessante, den Biographen des Copernicus gänzlich unbekannte Persönlichkeit zu lenken, von der — schon auf Grund der bis jetzt über sie gesammelten Nachrichten — mit einem an Sicherheit grenzenden Grade der Wahrscheinlichkeit anzunehmen sei, dass sie mit dem in Italien weilenden Copernicus, gleich wie Dominicus Maria, in persönlichem und wissenschaftlichem Verkehr gestanden ist.

In den Schriften des Erasmus Reinhold (* 1511 † 1553) stiess der Verfasser auf einige flüchtige Notizen über den italienischen Astronomen Marcus de Benevento, welcher den Historikern dieser Wissenschaft kaum dem Namen nach bekannt gewesen ist. Reinhold erwähnt Marco anlässlich dessen origineller Ideen (φαντασία) in der mittelalterlichen Theorie der Präcession, berichtet ziemlich umständlich über das Wesentliche jener Ideen, die — merkwürdig genug — einige Verwandschaft mit der copernicanischen Präcessionstheorie deutlich verrathen. Dieser Umstand war es eben, der das Interesse des Verfassers für jenen Gelehrten zuerst erweckte. Die anfänglich unklare Vermuthung einer möglichen Filiation dieser beiden Theorien, wurde bekräftigt durch die Wahrnehmung, dass Rhaeticus in seiner, unter Copernicus' Einfluss in Ermland im J. 1539 verfassten Narratio prima, Marco Beneventano nicht nur mit dem Prädicate „doctissimus“ anführt, sondern auch — was viel wichtiger — denselben in Zusammenhang mit eben derselben astronomischen Frage bringt. Diese Anzeigen bewogen den Verfasser zur Aufnahme von intensiven Untersuchungen über die Einzelheiten des Lebens und der wissenschäftlichen Thätigkeit dieses Gelehrten, indem er sich zugleich der Hoffnung hingab, dass auf diese Weise der wahre Sachverhalt jener vermutheten Filiation sich leichter aufklären lassen werde.

Seine Bemühungen sind nicht erfolglos geblieben. Aus zahlreichen, vorwiegend höchst seltenen Palaeotypen gelang es dem Verfasser eine ziemlich ansehnliche Aehrenlese von Nachrichten über Marco zu sammeln, desgleichen gelang es ihm, in Marco's Tractate, welche heutzutage zu den grössten Seltenheiten gehören, Einblick zu thun. Die nach und nach erworbenen Details bestätigten vollauf die Richtigkeit der besagten Muthmassung, lieferten ausserdem unleugbare Zeugnisse für eine persönliche Bekanntschaft zwischen Copernicus, Wapowski und dem gleichzeitig in Bologna weilenden Marco Beneventano und verriethen schliesslich die unerwartete Thatsache, dass letzterer im Jahre 1506 die älteste bis jetzt bekannte geographische Karte von Polen im Verein mit dem auch später um die Mappographie unseres Vaterlandes verdienten Wapowski angefertigt habe. Diese Karte befindet sich bei der von Marcus in Rom im Jahre 1507 herausgegebenen Geographia Cl. Ptolemaei.

Diese und noch andere Nachrichten ermöglichten dem Verfasser das Lebensbild des Beneventano zu entwerfen, worin vor allem jene Umstände und Thatsachen, welche irgendwelchen Bezug auf Copernicus und Wapowski haben, hervorgehoben worden sind. Geboren gegen 1465, studierte er anfangs auf der Universität zu Neapel, wo wir ihn später als Professor wiederfinden. Noch im Jugendalter trat er in den die Regel des heil. Benedictus beobachtenden Coelestinerorden ein, und wurde wahrscheinlich in dem Mutterhause dieses Ordens zu Sulmona eingekleidet. Mindestens seit 1494 befindet er sich auf der Universität zu Bologna; hier wird er binnen kurzem zum „baccalaureus artium“ promoviert, und besucht die Vorlesungen des namhaften Philosophen Alessandro Achillini. Gleichzeitig liegt er ernsteren astronomischen Studien unter der Leitung des Dominicus Maria Novara ob und nimmt an dessen Beobachtungen thätigen Antheil. In einem seiner späteren Schriftchen, worin er eine jener Observationen anführt, wird Dominicus von ihm als „institutor meus Bononiae in rebus caelestibus“ bezeichnet. Nun aber leistet der zu gleicher Zeit mit Beneventano in Bologna weilende und Jurisprudenz studierende Copernicus, wie allgemein bekannt, seiner Vorliebe zur Astronomie folge, indem er einen regen Verkehr mit eben demselben Dominicus Maria unterhält und laut Rhaeticus' Ueberlieferung „non tam discipulus, quam testis et adjutor observationum Dominici“ ist. Es unterliegt also wohl keinem Zweifel, dass unter solchen Umständen die Bekanntschaft des jungen Nicolaus mit dem kaum ein paar Jahre älteren Marco Beneventano stattgefunden haben müsse; ihre beiderseitige Begeisterung für die Sternkunde, jener „incredibilis meus in Uraniam amor“, zu dem sich Marco bekennt, erlaubt es sogar auf intimeren Umgang, wenn nicht auf Freundschaft zu folgern. Dass Copernicus die Gelehrsamkeit Marco's und dessen astronomische Ideen hoch geschätzt habe, beweist auch das oben erwähnte

Prädicat „doctissimus“ mit dem ihn Rhaeticus in seiner, so zu sagen von Copernicus selbst inspirierten Narratio auszeichnet. Beiläufig sei erwähnt, dass das Kloster der Caelestiner, in welchem Beneventano während seines Aufenthaltes in Bologna wohnte, in nächster Nachbarschaft des Universitätsgebäudes „di San Proculo“ lag, worin die damaligen Lectorien der Juristen Unterkunft hatten.

Marco war nicht nur ein Liebhaber der Astronomie, aber — was mehr bedeuten will — er leistete darin auch Selbständiges, und zwar noch während seines Aufenthaltes zu Bologna. Darauf weist sein Schriftchen Tractatus de motu octavae sphaerae hin, welches, obwohl ohne Angabe von Jahr und Ort, doch zweifellos in Bologna vor Ablauf des XV-ten Jahrhunderts herausgegeben wurde. Dieses Schriftchen existierte noch vor kurzem in einem einzigen Exemplar [1]), worauf es verscholl; es ist jedoch aus Citaten bei einem späteren Autor und aus dem Inhalt eines anderen noch erhaltenen Tractates Marco's, worüber unten Weiteres folgt, bekannt. Ausser den mathematischen Wissenschaften widmete sich Beneventano mit grosser Vorliebe auch der eigentlichen Philosophie. Ein enthusiastischer Anhänger der nominalistischen Richtung, nahm er sich vor, dieselbe aus dem Zustande der Vernachlässigung, in welchen sie in Italien verfallen war, emporzuheben. Zu diesem Zwecke giebt er in den Jahren 1494—98 die von ihm selbst corrigierten Texte von Tractaten der hervorragenden Nominalisten Robert Holkot und Wilhelm Ockam, auch jenes des heiligen Thomas von Aquino, heraus und, nachdem er sich mit vielen, meist italienischen Gelehrten in Verbindung gesetzt, stiftet er in Bologna (1497 oder 1498) eine „primam in Italia Achademiam“ der Nominalisten. Die nur theilweise ermittelten Namen ihrer Mitglieder dürfen wir hier übergehen; es sind dies mehr oder weniger namhafte Gelehrte und Humanisten gewesen. Hinreichend deutliche Spuren verrathen, dass auch die griechische Sprache Marco nicht fremd gewesen sei.

In Bologna verweilt er ganz sicher noch gegen Ende des Jahres 1498, wahrscheinlich jedoch noch bis zum Anbruch des Jubiläumsjahres 1500. Aus jener Epoche datiert seine Bekanntschaft mit Bernhardus Wapowski, welcher etwas später als Copernicus,

[1]) In der im J. 1861 in London versteigerten Bibliothek des Grafen Guglielmo Libri.

aber gleichfalls um Jurisprudenz zu studieren, nach Bologna gekommen war. Zwischen 1500 und 1505 hält sich Beneventano, gleichzeitig mit dem berühmten Mathematiker Fra Luca Paccioli, längere Zeit in Venedig auf und lebt hier in vertraulichem Verkehr mit dem gebildeten Giovanne Badoario, Nachkömmling einer der ansehnlichsten Familien der Dogenstadt. Es ist dies derselbe Patrizier, welcher als Botschafter der Signoria Veneta im Jahre 1501 in Polen gewesen ist, wovon sowohl Mathias von Miechow, als Wapowski in ihren Chroniken berichten. Im Jahre 1505 oder im folgenden ist unser Marco bereits in Rom. Er wurde dorthin berufen von dem Cardinal Petrus Isualles, Erzbischof von Reggio (allgemein „Cardinalis Rheginus“ genannt), einem grossen Protector der Gelehrten und offenbar auch unseres Beneventano, welcher sich über ihn mit grösster Verehrung ausdrückt. Wie Baduarius, ist auch dieser andere hohe Mäcen Marco's der polnischen Geschichte nicht fremd. Er besuchte Polen, indem er hier eine Legation seitens des Papstes Alexander VI an den König Johann Albert im November 1500 ausrichtete; seit jenem Zeitpunkt, bis wenigstens 1511 ist er „Cardinal Protector“ von Polen. Ein Breve Julius II vom 27. März 1509 ernennt ihn und den Cardinalis Portuanus zu Superarbitern in dem Streite zwischen Polen und dem Deutschen Orden (Theiner Monum. II, 358); von seiner Polen begünstigenden Gesinnung zeugen die in den Acta Tomiciana I erhaltenen Briefe des Königs Sigismund I, sowohl an den Cardinal selbst, als an den Bischof von Ermland, Lucas Watzelrode, Oheim des Copernicus.

Dem Drängen des römischen Buchhändlers und Mitglieds der Academia Aldina — Evangelista Tosino — folge leistend arbeitet Marco im J. 1506 zusammen mit dem veroneser Dichter, Mathematiker und Hellenisten Joannes Cotta und unter Mitwirkung des seit dem Frühling 1505 in Rom weilenden Bernhard Wapowski an einer neuen Ausgabe der Geographia Cl. Ptolemaei in lateinischer direct nach griechischen Codices ausgeführten Uebersetzung. An diesem Unternehmen haben auch Fabrizio de Varano, der gelehrte Bischof von Camerino, Cornelio Benigno und Scipione Fortiguerra, genannt Carteromachus — alle drei vorzügliche Hellenisten theilgenommen. Die Frucht dieser gemeinschaftlichen Arbeit ist jene hier schon einmal erwähnte römische Edition der Geographia und des Planisphaeriums des alexandrischen Astronomen (vom Jahre 1507) gewesen, welche gegenwärtig zu den höchsten bibliographischen Seltenheiten gerechnet wird. Durch einige Zusätze, u. A. die ungemein interessante „Nova orbis descriptio ac nova oceani navigatio, qua Lisbona ad Indicum pervenitur pelagus, a Marco Beneventano Caelestino edita“, vermehrt, wurde sie im nächstfolgenden Jahre in Rom wiederholt herausgegeben. Beide Ausgaben sind von Marco seinem Gönner, dem oben genannten Cardinal Petrus, gewidmet worden.

Der schwierigste Theil des Unternehmens fiel Marco zu, nämlich die Zeichnungen der zahlreichen geographischen Karten, sowohl jener, welche Ptolemaeus' Text erforderte, als auch der sechs modernen Karten, die augenscheinlich auf recent erworbene topographische Kenntnisse sich stützten. Und es sind meist weit von Italien entfernt liegende Länder, welche gerade einige von diesen „Tabulae modernae“ vorstellen: Livland, Polen, Ungarn, Klein-Russland, Lithauen..... Trotzdem ist die Ausführung jener Karten nicht nur sehr schön, sondern auch merkwürdig genau; die Namen von Ortschaften, besonders in Polen, auffallend correct, so dass man unwillkürlich die Ueberzeugung gewinnen muss, Beneventano sei in der Anfertigung dieser Karten von einem guten Kenner jener Ländereien, ja vielleicht von mehreren, unterstützt worden. Die zweite von den am Ende des Werkes beigefügten Karten ist schon in der ersten Ausgabe eine Karte von Polen, welche auf eine wahrhaft seltsame Weise, mit aller Evidenz bezeugt, dass Marco die äusserst reichlichen topographischen Details, welche zu ihrem Entwerfen erforderlich waren, aus den Händen Wapowski's und Copernicus' erhalten habe. Würden auch keine anderen Zeugnisse vorhanden sein, — diese Karte reichte schon hin, um das Bestehen persönlicher und inniger Beziehungen zwischen dem gelehrten Benedictinermönch und unseren beiden Landsmännern zu verbürgen. Ueber die Einzelheiten dieses in seiner Art ungewöhnlichen Zeugnisses sich weiter auszulassen, wäre an dieser Stelle nicht angemessen.

Die ferneren Schicksale Beneventano's interessieren uns schon weit weniger, weswegen dieselben hier nur kurz zusammengefasst werden mögen. Im Herbste 1511 verlässt er Rom und übersiedelt nach Neapel, wo er die Lehrkanzeln der Logik und der Geometrie gegen hohes Salarium übernimmt. Sein Weggang aus der ewigen Stadt hieng mit dem am 22. September 1511 in Cesena erfolgten Tode des Cardinals Petrus zusammen. Als Profesor an der Universität


TABVLA·MODERNA·POLONIE·VNGARIE·BOEMIE· GERMANIE·RVSSIE·LITHVANIE·
OCCEANVS GERMANICVS
MARE GERMANICVM
PRVSSIA
SAMOGITIA
LITHVANIA
DVCAT. MOSCOVIE
RVSSIA ALBA SIVE MOSKOVIA
TARTARIA
POLONIE PARS
MARCHA ANTIQVA
POLONIA MA IOR
DVCAT. MASOVIE
RVSSIA
PODOLYA
GERMANIA
SAXONES
TORINGIA
SLESIA
POLONIA MINOR
RVSSIA
VALLACHIA
PONTIEVXINI PARS
BOEMIA
MORAVIA
TRANSILVANA
VALACHIA MAGNA
BVLGARIA
AVSTRIA
VNGARIA
SEPEM CASTRA
STIRIA
SVIZERI
BOSSINA
SERVIA
TVRCHIA
TRACIE
GRECIA
MARE ADRIATICV
ITALIE PARS
PARS ANGLIE
CLIMA SEPTIMVM

gebenheiten aus seinen Jugendjahren berichtet, sondern auch seine ehemaligen originellen und jedenfalls ziemlich kühnen theoretischen Ansichten in Betreff der Phoronomie der Präcessionserscheinungen entwickelt. Zu den bemerkenswerthen Momenten seiner Theorie gehört unzweifelhaft die Annahme einer langsamen Veränderlichkeit des tropischen Jahres, so wie die Annahme einer wenngleich nur theilweisen Beweglichkeit der Aquinoctialpunkte. Beides, besonders aber seine letztgenannte Ansicht, verräth deutlich einen Anklang an die Theorie der Präcession des Copernicus, eine offenbare Filiation, von der schon oben gesprochen wurde. In den mittelalterlichen Theoricae wurden die Präcessionsphaenomene durch eine träge Bewegung des ganzen Firmamentes, der sogenannten achten Sphäre erklärt, worauf schon die Benennung „Theorica motus octavae sphaerae“ hinweist; die Aequinoctialpunkte wurden als invariabel angenommen: bei Copernicus verhält sich die Sache bekanntlich gerade umgekehrt. Beneventano setzte sich über die antiken Vorstellungen hinweg und wagte einen selbstständigen Schritt, indem er einen — und zwar den als variabel gedachten — Theil der (scheinbaren) Bewegung der Fixsterne, der Bewegbarkeit jener Punkte zuschrieb. Copernicus machte sie endlich vollkommen beweglich; erst bei ihm wird das ganze Phänomen einzig und allein auf den saeculären Rückgang jener Punkte zurückgeführt. Nimmt man diesen Umstand nebst dem oben erwähnten, gleichzeitigen Aufenthalt von Marco und Copernicus zu Bologna in Betracht, so wird dadurch unsere Behauptung gerechtfertigt: die Ideen Beneventano's hätten einigermassen die Brücke gebildet, worüber die Gedanken des grossen frauenburger Astronomen, von der alten und falschen Doctrin zu seiner eigenen bewunderungswürdigen Theorie der Präcession geschritten sind.

Wie andauernd und wie lebhaft diese astronomische Frage unsere drei Bekannten interessiert habe, mag u. A. aus der Thatsache geschlossen werden, dass noch im Jahre 1524 der in Krakau ansässige Wapowski den frisch in Nürnberg erschienenen „Joannis Werneri De motu octavae sphaerae tractatus“ seinem Freunde Copernicus nach Ermland sendet, um dessen Gutachten darüber zu vernehmen. Der ungewöhnlich lange Brief des letzteren d. d. Varmiae 3. Junii 1524 enthält bekanntlich eine Kritik der Werner'schen Faseleien, die nicht minder energisch und zugleich vernichtend ist, als das zwei Jahre ältere Schriftchen Beneventano's „Adversus Alberti Pighii ineptias" über denselben Gegenstand. Trotzdem ist jedoch Copernicus' Capitalgedanke — die Erdbewegung — Marco fern geblieben: selbst in den, an der Neige seines Lebens (1521—1522) verfassten Werkchen stellt er sich uns als treuer Anhänger des geocentrischen Systems vor.

Die chronologisch späteste, bis jetzt bekannte Nachricht über ihn enthält die Bulle Clemens' VII vom 23. December 1524; er kommt darin als Abt vor und wird unter die zehn grösseren Poenitentiarier für das heranrückende Jubiläumsjahr 1525 gezählt. Das Datum seines Hinscheidens konnte noch nicht ermittelt werden, doch scheint er kurz nach dem hier erwähnten Jahre verstorben zu sein, da er selbst im Jahre 1521 sich „senex aegrotus" nennt, was bald darauf von seinem Gegner Pighius in ein verächtliches „decrepitus iam senex" verwandelt wurde.

Im Anhang I stellt der Verfasser rechtfertigende Documente und Quellen zusammen; wegen der grossen, manchmal auch ausserordentlichen Seltenheit der Palaeotypen, woraus sie geschöpft worden sind, musste ein Theil derselben in extenso angeführt werden. Anhang II enthält meist mühsam erworbene Notizen über einige Persönlichkeiten, mit denen Marco in wissenschaftlichem Verkehr gestanden hat; der Verfasser hat sie in der berechtigten Hoffnung beigefügt, dass sie anderen Forschern ihre Aufgabe erleichtern und Anknüpfungspunkte bieten werden, die nicht nur in Bezug auf Beneventano, sondern auch auf Copernicus und Wapowski, ergiebigere Resultate versprechen. Schliesslich erörtert der Verfasser im Anhang III in einem kurzen mathematischen Excurs den Unterschied zwischen der alten, d. h. Alphonsinischen Doctrin der Präcession und der Theorie jener Erscheinungen in Beneventano's Schriften und weist darauf hin, dass der letztere auf seine Ideen durch die Entdeckung eines von Peuerbach († 1462) in der Interpretation der Alphonsinischen s. g. Trepidationstafeln geleitet worden sei.

Der Text wird von zwei Figuren und einer photographischen Reproduction der ältesten bis jetzt bekannten — von Beneventano und Wapowski im Jahre 1506 angefertigten — geographischen Karte Polens illustriert.

6. M. P. RUDZKI présente son travail: **O wieku ziemi.** *(Sur l'âge de la Terre). (Ueber das Alter der Erde).*

§. 1. Introduction.

Le mémoire du prof. Joly sur l'âge de la Terre [1]) a rappelé à mon souvenir une méthode d'estimer cette quantité, que j'ai exposée en 1895 dans les „Petermann's Mittheilungen“ [2]). Je dois avouer que cette méthode ne peut pas prétendre à une grande précision. Il me semble pourtant qu'elle peut conduire à quelques résultats intéressants.

La méthode susdite n'est qu'une application de la théorie de la chaleur de Fourrier. Supposons qu'une sphère solide et isotrope se refroidisse de manière que les surfaces isothermes soient constamment sphèriques et concentriques, alors la diminution annuelle du rayon sera toujours proportionelle au réciproque du gradient géothermique dans la couche superficielle. En effet, quelle que soit la distribution de la chaleur à l'intérieur de la sphère, pourvu qu'elle soit exprimable par une fonction de la distance au centre de la sphère, on aura toujours

$$\text{I} \qquad \frac{dR}{dt} = -\frac{3\mu . k}{\gamma},$$

où μ désigne le coefficient de la dilatation thermique linéaire,
k le coefficient thermométrique de la conductibilité,
γ le gradient géothermique dans la couche superficielle
R le rayon de la sphère,
t le temps.

Quant à la démonstration de la formule I, je renvoie le lecteur à mon article dans les „Petermann's Mittheilungen“. Je remarquerai d'ailleurs, qu'on peut facilement arriver à la formule I en partant de certaines formules, que M. Hergesell a developpées

[1]) Rev. O Fisher. Prof. Joly's Estimate of the Geological Age of the Earth. The Geological Magazine. Dec. IV, vol. VII, No III (Mars 1900) pp. 124—132.

[2]) Ueber eine Methode die Dauer der Geologischen Zeit zu schätzen. Petermann's Mittheilungen 1895 (Heft 6) pp. 147—149.

dans son mémoire „Die Abkühlung der Erde und die gebirgsbildenden Kräfte“ [1]).

La relation I peut être appliquée à la Terre pourvu qu'on admette, que k et μ représentent la conductibilité moyenne et le coefficient de dilatation moyen. Mais on pourrait objecter, que l'intérieur de la Terre n'est peut être pas solide et que la théorie de la conductibilité de Fourrier, partant la formule I qui n'est qu'une conséquence de cette théorie n'est peut être pas applicable à la Terre. A la fin de ce mémoire nous allons considérer une Terre liquide ou gazeuse à son intérieur, en attendant nous allons la traiter comme un solide.

La diminution annuelle du rayon terrestre étant connue, on peut calculer la contraction de la surface de la Terre pendant un laps de temps determiné, d'autre part si l'on connaît la contraction de la surface de la Terre, disons depuis le commencement de l'époque silurienne jusqu'à nos jours, on pourra réciproquement calculer le temps, qui s'est écoulé depuis le commencement de cette époque.

Mais il y a une difficulté. Le gradient géothermique figurant dans la formule I n'est pas une quantité invariable, au contraire c'est une quantité qui augmente probablement avec le temps. La loi de la variation ne nous est pas connue, il nous faut admettre une loi hypothètique. Pour fixer les idées, prenons la loi qui découle des hypothèses de lord Kelvin, hypothèses qu'il a exposées dans son mémoire sur le refroidissement [2]) de la Terre. Elle est commode à cause de sa simplicité, elle conduit à l'expression très simple:

$$\gamma = c\sqrt{t} \qquad \text{II}$$

où c est une constante et t le temps, qui s'est ecoulé depuis un moment hypothètique, où la température a été partout la même dans tout le corps. Nous allons admettre que ce moment a précédé le commencement de l'époque silurienne.

La constante c peut être facilement déterminée, désignons en effet par t_1 et t_2 les espaces de temps qui se sont écoulés depuis le moment où la température a été partout la même jusqu'au com-

[1]) Beiträge zur Geophysik. Vol. II. Il s'agit spécialement des formules à la page 171.

[2]) On the Cooling of the Earth. Treatise on Natural Philosophy. Appendix D.

mencement de l'époque paléozoïque et jusqu'à nos jours, soient γ_1, γ_2 les valeurs correspondantes du gradient et nous aurons

$$\gamma_2 = c\sqrt{t_2}\,,$$

d'où

$$\text{III} \qquad c = \frac{\gamma_2}{\sqrt{t_2}}\,.$$

Remarquons que γ_2 se détermine par l'observation.

Maintenant substituons la valeur de γ d'après les formules II et III dans la formule I, nous obtiendrons

$$\text{IV} \qquad \frac{dR}{dt} = -\,3\mu\,\frac{k}{\gamma_2}\sqrt{\frac{t_2}{t}}$$

Désignons par A la surface de la sphère, on sait par les éléments, que

$$A = 4\pi\, R^2.$$

Donc la contraction de la surface de la sphère sera

$$dA = 8\pi\, R\, \frac{dR}{dt}\, dt.$$

En ayant égard à la formule IV nous pourrons écrire

$$\text{V} \qquad dA = -\,24\pi R\cdot\frac{\mu k}{\gamma_2}\cdot\sqrt{\frac{t_2}{t}}\,.\,dt.$$

En intégrant depuis $t = t_1$ jusqu'à $t = t_2$, nous trouverons de suite que la contraction de la surface de la Terre depuis le commencement de l'époque silurienne jusqu'à nos jours, contraction que nous allons désigner par ΔA s'exprime par la formule très simple

$$\Delta A = -\,\frac{48\,\mu k.\pi.R}{\gamma_2}\,.\sqrt{t_2}\,(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})$$

$$= -\,\frac{48\mu k\pi R}{\gamma_2}\cdot\frac{\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_2}+\sqrt{t_1}}\,.\,(t_2 - t_1)$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\text{VI} \qquad t_2 - t_1 = -\,\frac{\gamma_2}{48\,\mu k\,.\,\pi R}\,\frac{\sqrt{t_2}+\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2}}\,.\,\Delta A.$$

$t_2 - t_1$ c'est le temps qui s'est écoulé depuis le commencement de l'époque silurienne jusqu'à nos jours, c'est le temps que nous nous sommes proposés de calculer. Le facteur

$$\frac{\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2}}$$

est contenu dans les limites 1 et 2. Il atteint la limite supérieure 2 pour $t_1 = t_2$, ce qui correspond à l'hypothèse que $t_2 - t_1$ est infiniment petit en comparaison de t_2 et de t_1. Cela signifierait que le temps qui s'est écoulé depuis le commencement de l'époque silurienne est infiniment petit en comparaison de celui qui s'est écoulé depuis le moment, où la température était partout la même. Cette hypothèse est d'ailleurs équivalente à celle ci que le gradient géothermique dans la couche superficielle est constant. La limite inférieure 1 est atteinte pour $t_1 = 0$, ce qui signifie, que le commencement de l'époque silurienne coïncide avec le moment où la sphère possédait partout la même température.

§ 2. Les bases du calcul.

Nous avons montré dans le paragraphe précédent qu'on peut calculer le temps, qui s'est écoulé depuis le commencement de l'époque silurienne jusqu'à nos jours, si l'on sait calculer l'aire dont la superficie de la Terre a diminué dans le même temps. — Nous allons essayer de faire ce calcul sur les bases suivantes.

Supposons qu'une sphère se refroidisse, supposons ensuite que la surface sans déformation („Level of no strain" de M. Mellard Reade et de M. Davison) se trouve dejà à une certaine profondeur et ne fait que descendre plus bas dans la suite des temps. D'après cela l'écorce subit continuellement une compression latérale, qui se traduit par la formation des plis, par des brisures et des tassements dans certaines parties de l'écorce. Maintenant calculons la superficie que les parties plissées occuperaient si on les étalait horizontalement, retranchons — en la superficie qu'elles occupent actuellement, nous obtiendrons précisement l'aire dont la superficie de la sphère a diminué. En ajoutant cette aire à la superficie actuelle nous obtiendrons la superficie primitive de la [1]) Terre. 'A vrai dire, la superficie

[1]) Par le mot „primitive" j'entends la superficie de la Terre au commencement de l'époque silurienne.

primitive de la Terre évaluée de cette manière sera un peu inférieure à la superficie primitive véritable, parce que le refroidissement et la contraction des couches superficielles se poursuit sans cesse quoique de plus en plus lentement. L'effet de cette erreur sera de diminuer quelque peu la valeur que nous allons trouver pour le temps écoulé depuis le commencement de l'époque silurienne jusqu'à nos jours.

Notre raisonnement repose sur l'hypothèse que la cause des dislocations compressives réside dans la contraction accompagnant le refroidissement séculaire de la Terre. Il faut nous assurer si cette base est assez solide, il faut se demander s'il n'y a pas une autre théorie expliquant les faits d'une manière tout aussi satisfaisante.

Je ne vais pas discuter l'hypothèse de M. Reyer qui attribue la cause de de la formation des plis à un glissement de couches sur un plan incliné. Cette hypothèse n'a presque pas trouvé d'adhérents tant elle paraissait peu vraisemblable à la majorité des savants.

Je pense de même qu'il est inutile d'entrer dans une discussion approfondie de la théorie de M. Mellard Reade [1]). Cette théorie n'est au fond qu'une modification de la théorie contractionelle ordinaire qui sert de base à nos raisonnements. En effet tout en admettant la même cause primitive elle appuye surtout sur cette circonstance que le refroidissement peut être inégal dans les différentes parties de la Terre. Elle concerne plustôt le mode d'action de la cause primitive que la cause elle même. Dans une recherche comme la nôtre, où le mode d'action est sans importance, la différence entre l'hypothèse de M. Mellard Reade et toute autre hypothèse prenant le refroidissement séculaire pour cause primitive est sans importance. Nous pourrions même prendre la théorie de M. Mellard Reade pour base, certaines déductions auraient dû être modifiées, mais le résultat final serait le même. Par suite nous pouvons nous dispenser de discuter plus amplement la théorie de M. Mellard Reade malgré qu'elle offre quelques points importants à la discussion. Mais il faut se demander s'il n'y a pas d'autres causes de déformation indépendantes du refroidissement et de la contraction séculaires qui pourraient entrer ici en ligne de compte.

[1]) Origine of Mountain Ranges. London 1886.

On pourrait songer aux déformations engendrées par la tendance à maintenir au moins approximativement une figure d'équilibre stable. Des déformations de cette espèce peuvent être engendrées par un déplacement de l'axe de rotation à l'intérieur de la Terre. Un tel déplacement n'est pas impossible dans un corps non absolument rigide, sujet à des changements continuels dans la distribution des masses, changements causés par le transport du détritus par les fleuves, les courants, par les dislocations etc. On sait que les déplacements de l'axe à l'intérieur de la Terre doivent être extrêmement lents, mais si petit que soit le déplacement annuel il peut aboutir après des millions d'années à un déplacement appréciable.

Viennent ensuite les déformations isostatiques c'est à dire celles qui sont causées par l'augmentation de la pression partout, où le detritus se dépose, et la diminution de la pression partout, d'où le detritus est emporté [1]). Il faut pourtant remarquer, que les déformations de cette sorte et à plus forte raison les déformations causées par les déplacements de l'axe de rotation doivent aboutir à la formation d'inégalités larges mais plates plutôt qu'à la formation de plis. Cela devrait être quelque chose comme les grandes géosynclinales et géoanticlinales de Dana.

Mais quelles que soient les causes des déformations indépendantes de la contraction: isostatisme, déplacement de l'axe etc., elles ne doivent changer le volume de la Terre que d'une quantité tout à fait négligeable. D'autre part comme il y a tendance à conserver la figure d'équilibre, — la superficie de la Terre ne peut varier que dans des limites très restreintes. Il s'en suit, que toute déformation produisant une compression dans une certaine partie de l'écorce doit déterminer une dilatation sensiblement équivalente dans une autre partie de l'écorce. Si des plis se forment dans une région, il faut que des fissures, des effondrements se forment dans une autre.

Il est cependant difficile de distinguer ces plissements de ceux qui sont determinés par la contraction séculaire, on pourrait donc être embarassé pour les éliminer. Heureusement un plissement indépendant de la contraction séculaire a pour équivalent une dé-

[1]) J'ai traité des déformations de cette espèce dans mes recherches sur les déformations de la Terre pendant l'époque glaciaire. Voir le „Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie“ pour 1899 pp. 169—215 et 445—468.

formation dilatationelle. Il faut donc seulement estimer l'aire gagnée par les déformations dilatationelles pour avoir l'aire perdue par les déformations contractionelles, puisque les deux aires doivent être égales. Il est possible d'estimer l'aire gagnée par les fissures et les effondrements, mais il y a certaines déformations dilatationelles qu'il est difficile de distinguer et d'estimer. D'autre part il y a une quantité d'effondrements, qui n'ont probablement rien à faire avec les déformations dilatationelles isostatiques, qui, par exemple, sont tout bonnement des conséquences de ce, que dans un corps aussi peu homogène que la Terre, sujet à tant d'influences, la contraction séculaire ne saurait être uniforme dans toutes les directions. Aussi en pratique il n'y a qu'un moyen de se tirer d'embarras. D'un côté il faut être très circonspect dans l'estimation des aires plissées et les taxer aussi bas que possible, d'un autre côté il faut se résigner à envisager toutes les fissures, tous les effondrements comme des déformations dilatationelles compensées par des déformations contractionelles équivalentes. Par suite, on estimera l'aire gagnée par la formation des fissures et des effondrements et on retranchera une aire, qui lui sera égale, de l'aire entière perdue par les plissements.

Les fissures ne sont pas béantes, elles sont remplies par diverses substances, surtout par les laves solidifiées. Nous allons regarder tous les espaces remplis par les roches volcaniques intru sives comme des vides produits par des déformations dilatationelles qui doivent être compensées par des déformations contractionelles équivalentes. Nous allons estimer l'aire gagnée par les intrusions d'une manière approximative dans l'un des paragraphes suivants.

Quant aux effondrements nous allons admettre qu'ils ont produit tous les bassins océaniens. C'est certainement une exagération parcequ' il est bien probable qu'une bonne partie des bassins océaniens et des mers entières n'ont rien à faire avec les effondrements. Mais d'un autre côté, considérons qu'une partie des bassins formés par effondrement est comblée par les sédiments, considérons ensuite, qu'il y a des effondrements qui resteront hors de compte. Ce sont premièrement les effondrements continentaux, ensuite les anciens effondrements n'apparaissant pas dans le relief actuel tantôt parcequ'ils ont été comblés, tantôt parceque les massifs, qui les dominaient, ont été dégradés.

Pour estimer l'aire gagnée par les effondrements nous allons procéder de la manière suivante. Désignons le rayon de la surface de la sphère par R. Supposons qu'un morceau rigide de l'écorce de superficie α descend parallèlement à lui même jusqu'à la profondeur p, où le rayon de la surface sphèrique concentrique n'est que R—p. Par conséquent à la profondeur p ce morceau ne devrait trouver libre qu'une superficie

$$\alpha \left(\frac{R-p}{R}\right)^2,$$

il faut donc que les couches se trouvant à la profondeur p s'écartent de tous les côtés et se serrent sur une superficie moindre.

Le déficit d'aire libre est

$$\alpha - \alpha \left(\frac{R-p}{R}\right)^2 = \alpha \left(\frac{2p}{R} - \frac{p^2}{R^2}\right).$$

Comme $\frac{p^2}{R^2}$ est en realité très petit en comparaison de $\frac{2p}{R}$, on peut dire que le déficit est

$$\alpha \cdot \frac{2p}{R}$$

Il faut donc que les couches à la profondeur p cèdent une aire $\frac{2p}{R} \cdot \alpha$. Cela peut se faire par des déformations contractionelles ayant lieu en d'autres endroits [1]). Le retrait des couches entourant le lieu de l'effondrement agrandit la superficie du creux au niveau de la surface extérieure de rayon R. L'aire ainsi gagnée sera presque exactement $\frac{2p}{R} \cdot \alpha$. — Dans les applications, nous allons mesurer la profondeur p à partir de la surface moyenne des continents parce qu'il s'agit ici de la profondeur de l'effondrement relativement aux autres parties de l'écorce.

[1]) Je ne peux pas entrer ici dans les détails de cette question, cela nous entrainerait trop loin de notre sujet.

§ 3. Calcul de l'aire plissée.

Je vais commencer par calculer l'aire actuellement recouverte par les couches plissées, tant celles qui se dressent en hautes montagnes que celles qui sont plus ou moins rabotées tout en ne tenant compte que des plis postcambriens.

Tout d'abord je vais supposer qu'à part quelques exceptions qui seront mentionnées plus loin, le fond des océans ne contient pas de couches ayant subi un plissement postcambrien. Restent donc les continents et les îles. Nous allons les considérer les uns après les autres en commençant par l'Europe [1]. La Russie, la Finlande et une bonne partie de la Scandinavie sont exemptes de plissement postcambrien. J'évalue la surface exempte de plissement à 4 700 000 km^2 environ. Comme la superficie du continent européen est d'environ 9 340 000 km^2 [2]) il reste 4 640 000 km^2 pour les territoires plissés de l'Europe.

En Asie sont exemptes de plissement postcambrien:

l'Arabie, la Syrie et la Mésopotamie	3 540 000	km^2
le Dekhan jusqu'aux monts Aravâlli et le Gange	1 960 000	„
la Chine septentrionale, la Corée et la Mantchourie	2 800 000	„

Quant à la Sibérie, il est bien probable qu'elle contient des régions étendues qui n'ont subi aucun plissement postérieur à l'époque cambrienne, mais nos renseignements sur ces contrées ne sont pas encore suffisants pour pouvoir dire quelque chose de bien défini. Je me suis enfin decidé à admettre que tout le reste de l'Asie contient environ 8 300 000 km^2 de territoires exempts de plissement. Dans ce chiffre figurent 500 000 km^2 pour la partie orientale de l'Indochine qui parait aussi appartenir aux régions exemptes de plissement postcambrien. En fin de compte nous obtiendrons 16 600 000 km^2 de terrains non plissés et comme on peut estimer la superficie du continent asiatique [3]) à 41 480 000 km^2, il restera pour la superficie des terrains plissés [4]) 24 880 000 km^2.

[1]) Dans ce paragraphe j'ai consulté surtout: E. Suess (Antlitz der Erde) et Lapparent (Traité de Géographie physique). Les aires plissées furent estimées d'après l'Atlas de Stieler, de Berghaus, L'Atlas de l'Océan Pacifique publié par la „Deutsche Seewarte" etc.

[2]) Cf. Penck. Morphologie der Erdoberfläche. Vol. I, p. 131.

[3]) Penck, loc. cit.

[4]) Ibidem.

La superficie de l'Amérique du Nord peut être évaluée à 19 960 000 km². Il faut en retrancher les régions voisines de la Hudsonsbay, où les lambeaux des couches paléozoiques reposent horizontalement sur les roches archéennes. J'estime la superficie de cette région à 5 300 000 km². Les hauts plateaux du Colorado et de Utah, les monts Uinta et les Rockies livreront encore environ 500 000 km². On devra donc retrancher 5 800 000 de 19 960 000 km² et il restera 14 160 000 km² pour le compte des régions de plissement postcambrien.

Tandis que les terres d'Asie, d'Europe et de l'Amérique du Nord sont pour la plupart affectées des plissements paléozoïques, mesozoïques et tertiaires, les trois autres continents c'est à dire l'Afrique, l'Australie et l'Amérique du Sud présentent de vastes étendues recouvertes des couches sedimentaires de tout âge n'ayant jamais subi un plissement véritable. Ce n'est qu'au bord des continents que nous rencontrons des chaînes de montagnes plissées: en Afrique l'Atlas avec 720 000 km² environ, en Australie le grand système de montagnes au bord oriental du continent avec 1 050 000 km², dans l'Amérique du Sud le grand système andin avec 3 150 000 km² environ de superficie.

Ainsi les grands continents nous donneront:

l'Europe	4 640 000	km²
l'Asie	24 880 000	„
l'Amérique du Nord . . .	14 160 000	„
l'Amérique du Sud . . .	3 150 000	„
l'Afrique	720 000	„
l'Australie	1 050 000	„
Total . .	48 600 000	km²

de terrains affectés de plissements postcambriens.

Ici il faut ajouter les pentes sousmarines des montagnes côtières des continents. Le long des rivages de l'Amérique on voit des isobathes serrant de près les côtes, au Nord de S. Francisco [1]) c'est l'isobathe de 2 000 mètres qui semble coïncider à peu près avec la limite de la pente abrupte des chaînes côtières, au delà de laquelle commence le fond plat de l'Océan, plus au Sud de S. Fran-

[1]) D'après la carte No 1 dans l'Atlas: „Deutsche Seewarte. Stiller Ozean. Hamburg 1895".

cisco[1]) c'est l'isobathe de 3 000 mètres qui parait constituer la limite de l'escarpement continental, mais au large de Cabo Corrientes cette limite paraît passer à l'isobathe de 4 000 mètres pour la quitter de nouveau et revenir à l'isobathe de 3 000 mètres au large de la frontière de Nicaragua. Elle poursuit cette isobathe jusqu'au large de Guayaquil. D'ici jusqu'à un point situé un peu au Sud de Valparaiso c'est l'isobathe de 4 000 mètres qui doit être prise comme limite de l'escarpement continental. Plus au Sud enfin jusqu'au Cap Horn il faut prendre l'isobathe de 1 000 mètres comme limite. — Tout cet escarpement doit être adjugé à l'aire plissée puisqu'il ne parait être que le prolongement des pentes des chaînes côtieres. J'estime sa superficie à 2 840 000 km².

Il est bien plus dificile d'effectuer une pareille estimation pour les rivages occidentaux du Pacifique, des doutes surgissent à tout instant, aussi me suis-je résigné à ne faire d'estimation directe que pour les côtes orientales de l'Australie. Ici l'escarpement continental paraît aussi former lé prolongement de la zone plissée côtière du continent, j'estime sa superficie (avec la Tasmanie) à 1 000 000 km² au moins, c'est à dire à autant que la superficie de la zone plissée subaérienne dans le continent voisin.

Ensuite j'ai pris les îles du Pacifique occidental. Voici leur superficie en chiffres ronds:

Nouvelle Guinée	785 000
Bornéo	734 000
Sumatra	421 000
Java	126 000
Celebes	179 000
Autres îles Sondes	180 000
Nouvelle Zélande (deux îles)	228 000
Iles Japonaises	382 000
Sakhalien	76000
Les Philippines	296 000
La Formose	35 000
Iles Salomon	44 000
Archipel de Bismarck	47 000
Nouvelle Calédonie et îles Loyalty	20 000
Total	3 533 000

[1]) Tout le golfe de Californie est inclus dans l'isobathe de 3 000 mètres.

Quelques petites îles ont été omises comme peu importantes. Pour tenir compte des socles sousmarins des îles énumérées tout à l'heure, doublons le résultat, nous obtiendrons 7 060 000 km^2.

Dans l'Océan atlantique c'est la cordillère des Antilles qu'il faut faire entrer en ligne de compte. Nous allons prendre comme limite de la cordillère le rivage du continent (la zone plissée du continent américain a été dejà évaluée) et ailleurs l'isobathe de 4 000 mètres. De cette manière les creux de Yucatan et de Curaçao restent exclus, mais le plateau sous-marin de Bahama est inclus dans l'estimation. Du côté du Golfe de Mexique j'ai pris pour limite l'isobathe de 3 000 mètres, le canal de Floride a été excepté. J'estime la superficie de l'aire antillaise tant sous-marine que sous aérienne à 2 700 000 km^2.

Enfin en Europe il faut prendre l'aire de la terrasse continentale au moins jusqu'à l'isobathe de 200 mètres. Il semble que la constitution orographique et géologique de cette terrasse doit être partout analogue à la constitution des terres voisines. Autour de la Grande Bretagne, de la France et de la péninsule Ibérienne cette terrasse doit être le prolongement des vieux systèmes montagneux rabotés. De même dans la Mediterranée, la mer de l'Archipel, l'Adriatique avec toutes leurs îles, puis les Baléares, la Corse et la Sardaigne, la Sicile enfin avec leurs socles sousmarins doivent être considerées comme faisant partie de l'aire plissée.

J'estime à 2 590 000 km^2 la superficie de la terrasse continentale bordant l'Europe du côté de l'Atlantique y compris la Grande Bretagne, les petites îles comme les Hébrides, les Shetland etc. et la mer du Nord. Ensuite j'estime la superficie de l'Archipel avec les îles, y compris Rhodes et la Crête . . à 190 000 km^2,
celle de l'Adriatique . . . . „ 145 000 „
la superficie de la Corse, Sardaigne, Sicile, des Baléares avec leurs socles sous-marins et la terrasse continentale dans la Mediterranée occidentale jusqu'à la Petite Syrte . . . . „ 257 000 „
Ensemble cela donnera encore 3 182 500 km^2, c'est à dire environ 3 180 000 km^2.

Maintenant si nous faisons la somme de tous les totaux partiels, nous trouverons 65 380 000 km^2. Ce nombre n'est pas certainement exageré, il pourrait au contraire passer pour un minimum. En effet nous avons assigné des limites plus que modestes à la région affectée de plissement postcambrien dans le Pacifique occidental malgré qu'il ne soit pas impossible, que toute la Polynésie doive lui être ajoutée. Les terres arctiques et antarctiques ont été entièrement exclues de nos calculs. Nous avons admis que les régions abyssales des océans ne recèlent aucun reste d'une vieille terre montagneuse engloutie par les eaux, c'est évidemment une hypothèse arbitraire.

§. 4. Calcul de ΔA.

Nous avons trouvé que la superficie des régions plissées peut être estimée à 65 380 000 km^2 au moins. Comme la superficie de la Terre est égale à environ 509 500 000 km^2, cela fait environ 12·8% de la surface de la Terre.

Parmi les couches qui constituent l'écorce terrestre dans les régions plissées il y en a qui ont été plissées plusieurs fois et d'autres qui n'ont subi de plissement qu'une seule fois pendant toute la suite innombrable des siècles, qui se sont écoulés depuis le commencement de l'époque silurienne jusqu'à nos jours. Il y a des régions où les couches ont subi un plissement très intense, il y en a d'autres qui ont subi un plissement assez exigu. Il est évident qu'une estimation exacte de la contraction nécessaire pour produire l'état actuel des choses est absolument impossible. Mais comme il s'agit non d'obtenir des résultats exacts, mais de se faire une idée de l'importance de certains facteurs géologiques, une évaluation approximative nous suffira pour arriver à quelque résultat.

Plusieurs auteurs ont essayé de calculer la surface que les couches plissées occuperaient si on les étalait horizontalement. Comme la contraction a ordinairement lieu dans la direction normale à l'axe de la chaîne, ils calculaient seulement la largeur de la bande qu'occuperaient les couches étalées.

Voici quelques chiffres empruntés à Penck[1]).

Les chiffres de la première colonne indiquent la largeur actuelle de la bande en km., les chiffres de la seconde indiquent la largeur primitive de la

[1]) Morphologie der Erdoberfläche, tome I. pp. 429 et 430.

bande, enfin ceux de la troisième donnent le rapport de la seconde largeur à la première.

D'après Heim	Jura suisse près de Genève . .	17	22	1·294
„ „	„ „ „ de Bienne . . .	24	29	1·208
„ „	Le Kettenjura (moyenne) . . .	7	12	1·714
„ „	Alpes septentrionales et centrales en Suisse (moyenne)	82	158	1·927
D'après Rothpletz	Alpes orientales	222	253	1·139
„ Claypole	Appallaches I section transversale	105	161	1·533
„ „	„ II „ „	79	97	1·215
„ Leconte	la chaîne côtière en Californie .	10	24 29	2·4 - 2·9

Même en rejetant la dernière appréciation de Leconte (10—29, quotient 2·9), qui parait un peu trop exagerée, nous obtenons comme moyenne de huit quotients le quotient 1·554. Cela signifie que pour obtenir l'aire que les couches plissées occuperaient si on les étalait horizontalement, il faut multiplier l'aire actuellement occupée par le quotient 1·554. En multipliant 65 380 000 km^2 par 1·554 nous obtenons 101 600 000 km^2 environ. La différence 101 600 000 — 65 380 000 = 36 220 000 km^2 représente l'aire dont la surface de la Terre a dû s'amoindrir pour produire les plissements postcambriens. Mais au début nous allons prendre le plus petit des huit coefficients de contraction, celui de Rothpletz dont la valeur est 1·139. En multipliant 65 380 000 par 1·139 nous obtenons 74 467 000, disons 74 470 000 km^2. Nous admettrons donc que l'aire en question est égale non à la différence 101 600 000 — 65 380 000 = 36 220 000 km^2, mais seulement à 74 470 000 — 65 380 000 = 9 090 000 km^2.

Cependant pour effectuer le calcul de Δ A il nous faut encore tenir compte des corrections indiquées au § 2. Nous y avons admis qu'un effondrement de profondeur p d'une aire α entraîne une dilatation superficielle de la sphère de la valeur de $\frac{2\alpha . p}{R}$. — Cette dilatation sera compensée par une contraction égale qui devra être retranchée de l'aire perdue par la surface de la sphère pour former les plis.

S'il y a une aire α_1 descendue de p_1, une aire α_2 descendue de p_2, en général une aire α_n descendue de p_n, la somme des dilatations correspondantes sera:

$$\sum \frac{2\,\alpha_n p_n}{R} \qquad \mathrm{I}$$

R n'est rien d'autre que le moyen rayon de la Terre, c'est une quantité qu'on peut considérer comme constante. Par conséquent la somme en question peut s'écrire:

$$\frac{2}{R}\sum \alpha_n p_n.$$

Au lieu de cette somme on peut écrire l'intégrale

$$\text{II} \qquad \frac{2}{R}\int p\, d\alpha.$$

Comme nous nous sommes decidés à regarder tous les océans comme des bassins d'effondrement, l'intégration devra être étendue à toute la surface des océans. L'évaluation de l'intégrale est extremêment facile parcequ'on peut la réduire à certaines quantités dejà calculées.

En effet d'après la définition même la profondeur moyenne P des océans se détermine par la formule

$$\text{III} \qquad P = \frac{1}{A_1}\int p\, d\alpha$$

où A_1 désigne la superficie des océans. On voit immédiatement, que

$$\int p\, d\alpha = A_1 P.$$

On peut donc écrire

$$\text{IV} \qquad \frac{2}{R}\int p\, d\alpha = \frac{2}{R} A_1 P.$$

Maintenant il ne reste plus qu'à substituer les valeurs numériques. On a

$$A_1 = 0{\cdot}723\ A$$

où A désigne comme auparavant la superficie de toute la Terre, mais

$$A = 4\pi R^2.$$

D'autre part la profondeur moyenne de tous les océans et de toutes les mers est égale à 3 650 mètres [1]), mais nous allons compter la profondeur à partir de la surface moyenne des continents. Comme l'altitude moyenne des continents est égale à 735 mètres [1]), nous poserons

$$P = 4{\cdot}385\ km.$$

Après la substitution de ces valeurs, en se souvenant encore que $R = 6\,370$ km. on obtiendra pour IV

[1]) Penck. loc. cit. page 151.

$$\frac{2}{R}A_1 P = 2 . 0{\cdot}723 . 4\pi R P = 8\pi \times 0{\cdot}723 \times 6370 \times 4{\cdot}385\ km^2$$

$$= 507\,570\ km^2.$$

Donc, comme première correction, nous prendrons 510 000 km². Passons maintenant à la seconde correction. Selon Tillo [1]) les roches volcaniques recouvrent presque exactement $4^0/_0$ des terrains géologiquement explorés. Nous allons admettre que le rapport de la superficie recouverte de roches volcaniques à la superficie totale est à peu près le même pour les régions inexplorées que pour les régions explorées. Comme la superficie totale de la Terre est égale à 509 500 000 km² et que les $4^0/_0$ de cette superficie font 20 380 000 km², selon notre supposition, l'espace recouvert par les roches volcaniques serait assez grand. Mais il faut se rappeler que ce sont des coulées superficielles de lave, des couches du tuff, des volcans anciens et nouveaux, mais surtout des grandes nappes de lave soli difiée comme par exemple le Dekhan-trapp qui se sont épanchées sur d'autres roches. Les necks, dykes et autres intrusions ne constituent qu'une partie minime peut-être pas même $1^0/_0$ de la superficie recouverte par les roches volcaniques. Cependant nous allons prendre comme seconde correction un chiffre plus important presque $2{\cdot}5^0/_0$ de 20 380 000 km², en chiffre rond 500 000 km².

Maintenant comme nous nous sommes arrêtés au nombre 9 090 000 km² pour ΔA et comme les deux corrections font ensemble 1 010 000 km² nous prendrons définitivement

$$\Delta A = -\ 8\,080\,000\ km^2.$$

§ 5. Calcul de $t_2 - t_1$.

Nous voici maintenant en mesure d'aborder le calcul de $t_2 - t_1$, c'est à dire du temps qui s'est écoulé depuis le commencement de l'époque silurienne jusqu'à nos jours. Nous reprendrons la formule VI du § 1. Cette formule s'écrit

$$t_2 - t_1 = - \frac{\gamma_2}{48\mu . k\pi R} . \frac{\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2}}\ \Delta A. \qquad \mathrm{I}$$

Jusqu'à présent nous avons dirigé tous les calculs de manière

[1]) Voyez la carte 7/8 dans l'Atlas de Berghaus.

à déterminer $t_2 - t_1$ par défaut. En suivant la même règle nous allons poser

$$\frac{\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2}} = 1$$

ce qui est la limite inférieure de ce facteur. Quant à R, on posera comme auparavant $R = 6370$. Pour ce qui est de γ_2 et de k, nous prendrons tout bonnement les valeurs de lord Kelvin, valeurs qu'il a employées dans le mémoire connu „On the Cooling of the Earth" [1]). Quant à μ, le coefficient de la dilatation linéaire de roches nous allons l'emprunter à M. O. Fisher [2]).

Selon Kelvin $\gamma_2 = 50$, $k = 400$, d'un autre côté selon O. Fisher $\mu = 0{,}0000071$. Les unités sont un pied anglais, un degré Fahrenheit et un an. Avec ces unités

$$\frac{\gamma_2}{\mu . k} = \frac{1}{0{,}0000568}$$

Les dimensions de ce coefficient sont celles de l'inverse d'une vitesse $\left(\frac{T}{L}\right)$. En laissant comme unité du temps un an, nous prendrons au lieu du pied anglais un kilomètre. Le kilomètre étant égal à 3280,83 pieds anglais le coefficient $\frac{\gamma_2}{\mu . k}$ prendra la valeur:

$$\frac{3280{,}83}{0{,}0000568}.$$

On trouve aisément en substituant ces valeurs dans la formule I de ce §

$$t_2 - t_1 = 478\,000\,000 \text{ années environ.}$$

Ce chiffre est très grand. M. Joly estime que le temps, qui s'est écoulé depuis que l'Océan existe [3]) et que les fleuves lui apportent des sels, ne doit pas dépasser 95 000 000 années. En se basant sur l'épaisseur des strates appartenant à diverses formations et sur la vitesse actuelle de la dénudation M. A. Geikie estime le temps qui s'est écoulé depuis le commencement de l'ère paléozoïque

[1]) W. Thomson et P. G. Tait. Treatise on Natural Philosophy. Appendix D.

[2]) Physics of the Earth's Crust. London 1889, page 102.

[3]) Ce moment doit être antérieur au commencement de l'époque silurienne.

à 100 000 000 années environ. Ces nombres sont du même ordre de grandeur que le nôtre, mais ils sont environ cinq fois plus petits [1]).

Et remarquons que nous avons fait tout notre possible pour trouver pour le nombre $t_2 - t_1$ une valeur aussi petite que possible. Si par exemple, on prenait comme coefficient de contraction 1,545 au lieu de 1,139, on obtiendrait pour $t_2 - t_1$ 2 000 millions d'années environ. On pourrait tout au plus attribuer plus d'importance aux effondrements. Mais alors il faudrait supposer que depuis l'époque silurienne les grands océans ont plusieurs fois changé de place tout en se reformant ailleurs par effondrement. Même en profitant largement de cette hypothèse, on ne pourrait pas rendre la correction correspondante que trois, quatre ou cinq fois plus grande et le nombre $t_2 - t_1$ resterait toujours bien grand.

Mais on pourrait rendre notre résultat plus concordant avec les résultats des autres méthodes en supposant que les coefficients μ et k, qui représentent certaines moyennes pour toute la Terre, doivent être pris plus grands que ceux de M. O. Fisher et de lord Kelvin, qui ne sont à vrai dire que des coefficients moyens pour les roches de l'écorce.

Prenons par exemple les coefficients k et μ pour le fer.

Selon Mitchell [2]) pour le fer	$k = 0,01190$	à	0° C
	„ $= 0,01274$	„ 100°	„
	„ $= 0,01358$	„ 200°	„
	„ $= 0,01442$	„ 300°	„

Les unités sont: un pied anglais et une minute. Pour que ces nombres soient comparables avec le k de lord Kelvin il faut les multiplier par le nombre des minutes dans un an, c'est à dire par 525 960. Nous allons effectuer cette multiplication seulement pour la valeur de k correspondant à 0°C, parceque nous préferons obtenir un nombre aussi petit que possible. Nous trouverons $k = 6254$, ce qui est 15,63 fois plus grand que la valeur adoptée par lord Kelvin.

Quant à μ, remarquons que le μ de M. O. Fisher avec sa valeur 0,0000071 pour un degré Fahrenheit correspond à 0,0000 1278

[1]) Le résultat ci-dessus s'accorderait d'ailleurs assez bien avec les estimations de J. G. Goodchild et E. Dubois. Le prof. E. Dubois estime le temps depuis l'apparition de la vie sur la Terre à plus d'un milliard d'années et Mr. Goodchild à 700 millions d'années.

[2]) Winkelmann. Handbuch der Physik. Vol. II sect. II page 280.

pour un degré centigrade, ce dernier nombre est égal au coefficient μ pour le fer à $31,5\,^0$C (selon Voigt[1]) et au coefficient μ pour le fer météorique à $104\,^0$C (selon Fizeau[2]). Il s'ensuit qu'on peut laisser la valeur de μ sans changement.

Comme k se trouve dans le dénominateur de l'expression pour $t_2—t_1$ et comme nous prenons maintenant une valeur 15,63 fois plus grande qu'auparavant, il suffit de diviser 486 000 000 par 15,63. Il vient:

$$t_2—t_1 = 31\,100\,000 \text{ années environ.}$$

D'autre part, si l'on rejetait les deux corrections considerées à la fin du § 4 et si l'on prenait pour ΔA non le nombre 8 080 000 km² mais le nombre 36 220 000 km² obtenu à l'aide du coefficient moyen de contraction 1,554, on obtiendrait 139 100 000 années. Ce dernier nombre n'est pas très eloigné de ceux, que le prof. Joly et M. A. Geikie ont obtenus par d'autres méthodes. Même si l'on admettait que le facteur

$$\frac{\sqrt{t_2} + \sqrt{t_2}}{\sqrt{t_1}}$$

que nous avons pris égal à l'unité atteigne sa valeur maxima (c'est à dire 2) on obtiendrait seulement 278 000 000 années pour $t_2—t_1$.

Si l'on admettait que le coefficient k augmente avec la température comme le semblent indiquer certaines expériences[3]), on serait tenté d'admettre pour k une valeur encore plus grande que 6 254, ce qui aurait pour conséquence de diminuer encore le temps: $t_2—t_1$, mais il y a ici une observation importante à faire.

Le coefficient k a la signification d'une moyenne, mais d'une moyenne de nature particulière. Elle dépend non seulement de la constitution du corps mais aussi de l'époque pendant laquelle on considère le processus de refroidissement. Sans nous engager dans la discussion des formules concernant le flux de la chaleur dans un corps hétérogène, nous nous bornerons à quelques simples remarques. Le refroidissement procède de la surface à l'intérieur et le lieu de la perte la plus intense de chaleur descend avec le temps

[1]) Ibidem. page 59 et 60.

[2]) Ibidem. page 59.

[3]) Par exemple les expériences de Mitchell mentionnées tout à l'heure ou les récentes expériences de L. Holborn et A. Day. Cf. Sitzungsberichte Akad. Wiss. Berlin 1900 pp. 1009—1013.

dans les couches de plus en plus profondes. Donc si l'on considère le refroidissement, disons dans le stade primitif quand ce sont surtout les couches superficielles qui perdent de la chaleur, on doit prendre une valeur de k plutôt rapprochée de k pour les roches superficielles. Mais quand on considère le refroidissement dans une période plus avancée, quand la perte la plus intense de la chaleur a lieu dans les couches profondes et quand le rôle des couches superficielles, qui ne se refroidissent plus que très lentement, consiste surtout à transmettre le flux de la chaleur sortant de l'intérieur; alors il faut prendre pour k moyen une valeur plus rapprochée du coefficient de conductibilité des couches profondes mais inférieure à ce dernier.

On arrive ainsi aux conclusions suivantes. 1) La valeur moyenne de k ne doit pas dépasser celle de cette quantité pour le fer. 2) En attribuant au coefficient moyen k une valeur considérable, on arrive à cette conséquence, que depuis une époque très reculée, soit dès le commencement de l'époque silurienne le lieu de la perte la plus intense de chaleur se trouvait non dans les couches superficielles mais dejà dans les couches caracterisées par de grandes valeurs des coefficients μ et k.

Ici il faut remarquer que, comme l'a montré Mr. Perry [1]), l'hypothèse d'une grande conductibilité a pour effet de prolonger énormement le temps t_2 calculé selon la méthode de lord Kelvin. En effet lord Kelvin suppose qu'au moment $t = o$ la température était partout constante et égale à 7000^0 Fahrenheit, il pose $k = 400$ et calcule que le temps t_2 nécessaire pour que le gradient dans la couche superficielle devienne égal à 50 pieds pour 1^{0}F. est égal à 100 000 000 années environ. Mais quand la conductibilité de l'intérieur est grande, la chaleur est vite amenée à la croûte extérieure peu conductrice et le gradient géothermique croît extrêmement lentement. Avec des données quelque peu semblables aux nôtres, Perry obtient pour t_2 un nombre supérieur à 9 600 000 000 années.

Sans entrer dans une discussion plus approfondie des hypothèses et des résultats de M. Perry j'observe seulement que ce résultat s'accorde très bien avec nos conclusions. En effet, quant t_2 est grand en comparaison de $t_2 - t_1$, alors t_1 est aussi grand et la surface sans déformation de M. Mellard Reade et de M. Davison

[1]) On the Age of the Earth. Nature. Vol 51 (1895) Nr. 1314 pp. 224—227.

ainsi que le lieu de la perte la plus intense de chaleur ont dû se trouver même au commencement de l'époque silurienne à une grande profondeur c'est à dire dans les couches très conductrices. Il n'y a alors rien à changer dans nos raisonnements, il faut admettre seulement que la valeur du facteur

$$\frac{\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2}}$$

est assez voisine de sa limite supérieure 2. Je rappelle que cela équivaut à l'hypothèse que le gradient géothermique dans les couches superficielles est resté depuis le commencement de l'époque silurienne sensiblement égal à sa valeur actuelle.

Il est d'ailleurs évident qu'il faut admettre cette hypothèse aussitôt qu'on admet que dès le commencement de l'époque silurienne le lieu de la perte la plus intense de chaleur se trouvait dans les couches profondes et que l'écorce ne servait qu'à transmettre la chaleur sortant de l'intérieur.

Je tiens à faire remarquer, qu'en posant

$$\frac{\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2}} = 2,$$

nous nous affranchissons entièrement de l'influence des hypothèses de lord Kelvin. En revanche il nous faut tout bonnement doubler tous les nombres obtenus pour $t_2 - t_1$, donc avec les coefficients des roches superficielles on prendra 972 000 000 années au lieu de 486 000 000 et avec les coefficients du fer on prendra pour minimum 62 200 000 années au lieu de 31 100 000 et 278 200 000 au lieu de 139 100 000 pour maximum.

Nous allons encore examiner les conséquences de l'hypothèse que l'intérieur de la Terre est liquide ou plustôt gazeux, comme le veut M. S. Arrhenius [1]. M. Arrhenius admet que l'intérieur de la Terre est dans un état gazeux, mais que grâce à l'effet simultané des pressions immenses et d'une haute température, le gaz est tellement comprimé et tellement visqueux qu'envers des forces extérieures il se comporte comme un corps aussi rigide que l'on veut.

Quant aux courants convectifs, qui d'ailleurs seraient à peine

[1]) S. Arrhenius. Zur Physik des Vulcanismus. Geologiska Főreningens i Stockholm Főrhandlingar. Vol. 22 (1900) pp. 395—419. Mr. S. Arrhenius n'est pas d'ailleurs auteur de l'hypothèse. Mr. S. Günther plaide depuis longtemps en sa faveur.

possibles dans un gaz si dense, ils auraient pour conséquence d'accélerer le transport de la chaleur de l'intérieur à la croûte extérieure.

Les coefficients de dilatation des gaz à des pressions aussi énormes que celles qui règnent à l'intérieur de la Terre ne sont naturellement pas connus et ne peuvent pas être déterminés par l'expérience, mais autant qu'on peut juger par extrapolation ils devraient être au moins 100 fois plus grands que ceux des roches superficielles. Il faudrait donc prendre μ aussi environ 100 fois plus grand que le coefficient μ de M. O. Fisher.

Quant à k il est aussi bien difficile d'en dire quelque chose de determiné. A des pressions et des densités ordinaires la conductibilité des gaz est bien inférieure à la conductibilité des corps solides, mais que deviendra-t-elle quand la densité du gaz sera égale à celle du fer? Ne deviendra-t-elle pas égale à celle des corps solides?

D'après la théorie cinétique, à des densités ordinaires la conductibilité des gaz consiste dans le passage d'un élément du gaz à un autre des molécules douées de vitesses moléculaires différentes. Il est évident que cette conception de la conductibilité ne peut pas être appliquée à un gaz aussi dense que le fer.

En prenant pour k la valeur adoptée par lord Kelvin et pour μ une valeur cent fois plus grande que celle de M. O. Fisher, on obtiendrait pour t_2-t_1 des valeurs bien faibles, mais si l'on prenait pour k des valeurs semblables à la valeur de ce coefficient pour les liquides, alors k serait environ dix fois moindre que le k de lord Kelvin et les valeurs pour t_2-t_1 seraient même supérieures à celles que nous avons obtenues dans l'hypothèse que k et μ ont les mêmes valeurs que pour le fer.

Vu notre ignorance de la nature des gaz et des liquides à des si hautes pressions et températures, nous n'allons pas poursuivre cet examen plus loin.

Il y a une circonstance qui s'offre d'elle-même à notre attention et qu'il convient d'élucider. Nous avons vu au § 2 que les effondrements peuvent donner lieu à des dislocations compressives. Nous y avons indiqué une méthode pour estimer la contraction du reste de l'écorce, qui doit se produire pour compenser la dilatation locale qui a produit l'effondrement. Cette méthode ne peut d'ailleurs conduire à des valeurs inférieures aux valeurs véritables. Malgré cela cependant nous avons trouvé que l'effondrement d'une aire égale à celle de toutes les mers d'une profondeur de 4385 mètres ne pourrait produire dans le reste de l'écorce qu'une contraction peu importante. En effet le reste de l'écorce perdrait tout au plus un demi million de kilomètres carrés de superficie c'est à-dire une aire comme celle de l'Espagne.

Supposons que depuis le commencement de l'époque silurienne jusqu'à nos jours il y ait eu dix effondrements de la même importance [1]), nous n'arriverons toujours qu'à une contraction de 5 millions de km^2, ce qui est bien peu de chose. Et qui voudra affirmer que depuis le commencement de l'époque silurienne jusqu'à nos jours les bassins océaniques se soient formés et reformés dix fois.

---

7. M. E. Godlewski présente l'étude de M. A. WRÓBLEWSKI: **Notatka dopełniająca o soku wyciśniętym z drożdży. III.** ***(Eine ergänzende Notiz über den Hefepressaft).*** *(Quelques nouvelles remarques sur le suc pressé de la levure. III).*

Der Verfasser hat bereits in den früheren Nummern dieses Anzeigers eine Reihe von Mittheilungen über den Hefepresssaft und über gewisse Bestandtheile desselben veröffentlicht [2]) und liefert nunmehr eine systematische Zusammenstellung dieser Mittheilungen für die Abhandlungen der Akademie. Die vorliegende Notiz bildet nur eine kurze Zusammenfassung derjenigen Thatsachen, welche noch nicht veröffentlicht worden sind, indessen in die Abhandlung mit hineinbezogen wurden.

Zur Demonstration der Fermentation mittelst des Hefepresssaftes ist die Anwendung einer Presse entbehrlich, da man aus der zerriebenen Masse auf der Porzellannutsche ein wenig Saft mit Hilfe einer Geissler'schen Pumpe abziehen kann.

Die Untersuchung der einzelnen nacheinander ausfliessenden Portionen des gepressten Saftes hat ergeben, dass die grösste Quantität, und zwar des am stärksten fermentierenden Saftes, bei niedrigstem Drucke ausgepresst wird und namentlich bei einem Drucke von ca. 46kg pro 1 cm^2, bei einem höheren Drucke fliesst dann ein stets schwächer fermentierender und immer mehr durchsichtiger Saft aus.

Der Presssaft enthält, wahrscheinlich infolge des beim Pressen

[1]) Bien entendu ce n'est qu'une manière de parler, il s'agit non de cataclysmes mais des processus continus.

[2]) April und November 1898, März 1899, October und December 1900.

angewendeten grossen Druckes, wie auch infolge des Zerreibens mit Kieselguhr, ziemlich grosse Mengen von Kieselsäure.

Der oben erwähnte durchsichtigte Presssaft wurde vom Verfasser im Polarisationsapparate geprüft, hierbei wurde beinahe keine Drehung gefunden.

Der durchsichtige, wie auch der opalisierende Saft, lässt sich durch ein Sandsteinfilter filtrieren und behält seine Fähigkeit mit Zucker zu fermentieren. er kann auf diese Weise von den Hefezellen befreit werden. Der Verfasser hat durch ein Sandsteinfilter eine mit Hefezellen gemischte Rohrzuckerlösung während starker Fermentation filtriert und hat im Filtrate keine Zymase, wohl aber geringe Mengen von Invertin gefunden. Er folgert daraus, dass Zymase nur in den Zellen wirkt, und dass Kohlensäure und Alkohol wahre „Excrete“ der Zellen sind. Diese Thatsache war vorauszusehen, weil es im Haushalte der Zelle sehr unökonomisch wäre, wenn ein so viel Energie producierender Process sich irgendwo ausserhalb der Zellen abspielte. Wo wäre dann die Hauptquelle der für die Lebensprocesse der Zelle nöthigen Energie?

Die angegebenen Versuche sprechen überzeugend dafür, dass die Zymase in den Zellen, und zwar wahrscheinlich in den Maschen des Protoplasmas wirksam ist, und daher dem Protoplasma näher steht, als die löslichen Enzyme. Das Invertin verhält sich etwas anders als Zymase. es wirkt theilweise ausserhalb der Zelle, aber die Hauptmenge des Invertins muss doch in der Zelle zur Wirkung kommen.

Der Verfasser hat ausserdem bei seinen Studien über das Invertin nachgewiesen, dass dieses Enzym ausser der spaltenden Wirkung auf Rohrzucker, noch eine syntetisierende Wirkung auf Invertzucker ausüben kann. Es wirkt zwar stark invertierend, aber ausserdem, wenn auch schwach, revergierend.

---

8. M. LADISLAS NATANSON, m. t., présente son mémoire: **O prawach tarcia wewnętrznego.** ***(Sur les lois de la viscosité).*** *(Ueber die Gesetze der inneren Reibung).*

La conception fondamentale qui est à la base de notre présente étude est due à Poisson [1]). Soit un fluide, primitivement en

[1]) Mémoire sur les Equations Générales de l'Equilibre et du Mouvement des Corps solides élastiques et des Fluides, lu à l'Académie des Sciences le 12. Octobre

équilibre, auquel on impose une déformation. D'après Poisson, le fluide, pour s'adapter à la déformation imposée et parvenir, même approximativement, à un nouvel état d'équilibre, doit employer un certain temps qui, pour les différents corps, sera de très-inégale durée. La période de transition est caractérisée par des inégalités de pression qui, évoquées par le fait de la déformation, tendent aussitôt à s'effacer d'elles-mêmes mais ne disparaissent tout-à-fait que lorsque le nouvel état d'équilibre se trouve pleinement établi. Ainsi Poisson a su démêler, au sein des corps fluides, un phénomène intime, la „relaxation", qui n'est qu'un exemple, saillant à la vérité, de cette propriété fondamentale, appartenant à la matière et qui manque à l'éther lumineux, de la „coercition" des perturbations qui se sont produites en son sein [1]).

La réalité du phénomène de la relaxation a été admise, après Poisson, par Sir G. G. Stokes [2]) ainsi que par Clerk-Maxwell qui, dans son mémoire sur la théorie cinétique des gaz [3]), en a fait une étude détaillée. Maxwell cependant, au cours de considérations générales servant d'introduction au mémoire auquel nous venons de faire allusion, a montré comment la conception de Poisson peut se ramener à ce qu'elle implique de plus essentiel [4]). Dans nos études nous avons tenté de développer cette méthode de Maxwell, d'ailleurs purement descriptive et indépendante de toute hypothèse. Grâce à elle, les idées de Poisson sur la nature de l'état fluide nous paraissent appelées à jouer un rôle important dans la mécanique des corps doués de viscosité. On verra, en effet, par la suite qu'elles conduisent à une théorie généralisée de la viscosité, dans laquelle la théorie actuellement admise rentre comme cas particulier.

§ 1. Considérons un corps fluide isotrope et parfaitement continu. Nous y choisissons un point matériel déterminé par la position

1829. Journal de l'Ecole Polytechnique, XX Cahier, Tome XIII, Février 1831. Voir § VII, p. 139 et suiv.

[1]) Voir: Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie, Année 1893, p. 348; Année 1894, p. 295; Année 1896, p. 117; Année 1897, p. 155.

[2]) Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. VIII, p. 287 (1845); Mathematical and Physical Papers, Vol. I, p 75 (1880).

[3]) Philosophical Transactions, Vol. CLVII, p. 49 (1867). Scientific Papers, Vol. II, p. 26 (1890).

[4]) Ibidem, p. 52. (Scientific Papers; Vol. II. p. 30).

(x, y, z) qu'il occupe à un moment donné t. Soient ξ, η, ζ les composantes du déplacement apparent, imposé au fluide dans une déformation. Dans ce qui va suivre, ces composantes ξ, η, ζ seront supposées être infiniment petites. Nous aurons à considérer diverses variables dont voici l'énumération: les composantes de la déformation:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \varepsilon\,; \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z} = \alpha\,; \tag{1 a}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \varphi\,; \qquad \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \beta\,; \tag{1 b}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \psi\,; \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} = \gamma\,; \tag{1 c}$$

les composantes de la vitesse de déplacement:

$$\frac{d\xi}{dt} = u\,; \qquad \frac{d\eta}{dt} = v\,; \qquad \frac{d\zeta}{dt} = w\,; \tag{2}$$

les composantes de la vitesse de déformation:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e\,; \qquad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = a\,; \tag{3 a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = f\,; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = b\,; \tag{3 b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = g\,; \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = c\,; \tag{3 c}$$

la dilatation cubique et la vitesse de la dilatation:

$$\varepsilon + \varphi + \psi = \Delta; \tag{4}$$

$$e + f + g = \varpi. \tag{5}$$

Remarquons, d'ailleurs, que l'on a: $d\varepsilon/dt = e$, $d\varphi/dt = f$ etc.; et enfin: $d\Delta/dt = \varpi$. Les quantités ε, φ, ψ, α, β, γ, u, v, w, e, f, g, a, b, c, Δ, ϖ sont toutes des infiniment petits.

§ 2. A un moment déterminé $t = 0$ imposons au fluide une déformation dont les composantes sont, en (x, y, z), les suivantes: ε^0, φ^0, ψ^0, α^0, β^0, γ^0. Admettons qu'en ce moment les propriétés du milieu sont celles d'un solide isotrope parfaitement élastique. Désignons par n le module de rigidité, par k le module de compressibilité; ce seront des valeurs idéales qui déterminent les propriétés élastiques possédées par le milieu pendant un moment. le moment initial. Soit p^0 la pression (normale et égale en tous sens) qui, au moment considéré, s'établirait en (x, y, z), si aucune déformation ne s'y était produite. La théorie classique nous enseigne que les inégalités de pression qui, au moment $t = 0$, sont provoquées par la déformation ont pour expression:

(1 a) $$p^o_{xx} - p^0 = - 2n\varepsilon^0 - (k - \tfrac{2}{3}n)\,\Delta^0;$$

(1 b) $$p^o_{yy} - p^0 = - 2n\varphi^0 - (k - \tfrac{2}{3}n)\,\Delta^0;$$

(1 c) $$p^o_{zz} - p^0 = - 2n\psi^0 - (k - \tfrac{2}{3}n)\,\Delta^0;$$

(2 a) $$p^o_{yz} = - n\alpha^0;$$

(2 b) $$p^o_{zx} = - n\beta^0;$$

(2 c) $$p^o_{xy} = - n\gamma^0.$$

Cependant, cet état de choses ne saurait guère durer. A partir du moment $t = 0$, nous voyons deux phénomènes se produire. En premier lieu, nous voyons les modifications s'accomplir qui dépendent de l'action des influences étrangères. En second lieu, la déformation faiblissant, les inégalités de pression tendant à s'annuler, le système éprouve ce qui a reçu le nom de „relaxation", ainsi qu'il a été dit plus haut.

§ 3. L'hypothèse la plus simple qu'on puisse faire au sujet de l'action des influences étrangères consiste à supposer qu'elle est soumise (ainsi que l'état initial) aux lois de l'élasticité idéale. Cette hypothèse admise, on voit sans peine que les effets des forces extérieures peuvent s'exprimer de la manière suivante:

(1 a) $$\left(\frac{dp_{xx}}{dt}\right)_1 = - 2ne - (k - \tfrac{2}{3}n)\,\tilde{\omega}$$

(1 b) $$\left(\frac{dp_{yy}}{dt}\right)_1 = - 2nf - (k - \tfrac{2}{3}n)\,\tilde{\omega}$$

(1 c) $$\left(\frac{dp_{zz}}{dt}\right)_1 = - 2ng - (k - \tfrac{2}{3}n)\,\tilde{\omega}$$

(2 a) $$\left(\frac{dp_{yz}}{dt}\right)_1 = - na$$

(2 b) $$\left(\frac{dp_{zx}}{dt}\right)_1 = - nb$$

$$\left(\frac{dp_{xy}}{dt}\right)_1 = - nc \tag{2 c}$$

Les effets des influences extérieures, représentés par ces équations, sont généralement réversibles.

§ 4. Essayons maintenant d'étudier de plus près la marche, essentiellement irréversible, du phénomène de la relaxation. Soit p la valeur vers laquelle les pressions p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} convergent par l'effet de ce phénomène; la valeur vers laquelle tendent simultanément les pressions p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} est zéro. Si, en un point (x, y, z) du fluide et à un moment donné t, la déformation imposée est nulle, il s'y exerce une pression égale en tous sens que nous désignerons par p_0. Prenons le fluide à l'état qui, en (x, y, z) et au moment t, est déterminé par les valeurs $\varepsilon, \varphi, \psi, \alpha, \beta, \gamma, p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{zx}, p_{xy}$ et p_0 des composantes de la déformation et des pressions. Supposons qu'à partir de ce moment, pendant une période suffisamment longue, le fluide soit soustrait à l'action de toute force extérieure. La pression p (égale en tous sens) à laquelle le fluide parviendra, étant nécessairement déterminée dans les conditions supposées, pourra par conséquent se mettre sous la forme:

$$p = p\ (\varepsilon, \varphi, \psi, \alpha, \beta, \gamma, p_0). \tag{1}$$

Il nous reste à formuler une hypothèse sur la forme précise de la loi de relaxation. Désignons par T la durée du „temps de relaxation"; c'est une constante caractéristique du milieu. Nous admettrons que les équations suivantes expriment la loi de la relaxation considérée en elle-même:

$$\text{(2 a)} \quad \left(\frac{dp_{xx}}{dt}\right)_2 = -\frac{p_{xx} - p}{T}; \qquad \left(\frac{dp_{yz}}{dt}\right)_2 = -\frac{p_{yz}}{T} \quad \text{(3 a)}$$

$$\text{(2 b)} \quad \left(\frac{dp_{yy}}{dt}\right)_2 = -\frac{p_{yy} - p}{T}; \qquad \left(\frac{dp_{zx}}{dt}\right)_2 = -\frac{p_{zx}}{T} \quad \text{(3 b)}$$

$$\text{(2 c)} \quad \left(\frac{dp_{zz}}{dt}\right)_2 = -\frac{p_{zz} - p}{T}; \qquad \left(\frac{dp_{xy}}{dt}\right)_2 = -\frac{p_{xy}}{T} \quad \text{(3 c)}$$

Elles sont imitées des égalités trouvées par Maxwell dans la théorie cinétique des gaz. Des relations toutes pareilles sont applicables à divers autres cas de coercition, par exemple à la coercition, au sein des corps conducteurs, des perturbations électromagnétiques.

§ 5. Si, à la variation $(d/dt)_1$, due à l'influence des forces étrangères, d'une quantité variable quelconque, nous ajoutons la variation $(d/dt)_2$ provenant de la relaxation, nous trouvons la variation totale de la quantité en question. Soit d/dt la variation totale ainsi définie Par sa nature même, la pression p ne peut changer que par l'effet des actions extérieures; ainsi

$$(1) \qquad \left(\frac{dp}{dt}\right)_2 = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dp}{dt}\right)_1 = \frac{dp}{dt}.$$

Si l'on se reporte à l'égalité (1), au § 4, on voit que

$$(2) \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \psi}\frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{dt}.$$

Par des considérations connues qui sont toujours applicables dans le cas d'un corps isotrope, on parvient sans peine à simplifier la forme de cette équation. On trouve:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial p}{\partial \varepsilon} = \dfrac{\partial p}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial p}{\partial \psi} \\ \dfrac{\partial p}{\partial \alpha} = 0, \quad \dfrac{\partial p}{\partial \beta} = 0, \quad \dfrac{\partial p}{\partial \gamma} = 0. \end{array} \right.$$

Soit $-h$ la valeur des trois premières dérivées; moyennant les égalités (3) l'équation (2) devient

$$(4) \qquad \frac{dp}{dt} = -h\dot{\omega}.$$

L'hypothèse simplificatrice dont nous avons ainsi fait usage peut d'ailleurs se déduire d'une autre hypothèse, ressemblant celle qu'adopta Sir G. G. Stokes dans sa théorie de la viscosité. Supposons, en effet, que la pression p ne varie point tant que la somme $e + f + g$ reste égale à zéro:

$$(5) \qquad \dot{\omega} = e + f + g = 0.$$

Ainsi

$$(6) \qquad \frac{dp}{dt} = 0,$$

pour toutes les valeurs des variables e, f, g, a, b, c qui vérifient l'égalité (5). Pour

$$e = -(f+g), \tag{7}$$

par exemple, nous aurons

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\right) f + \left(\frac{\partial p}{\partial \psi} - \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\right) g + \frac{\partial p}{\partial \alpha} a + \frac{\partial p}{\partial \beta} b + \frac{\partial p}{\partial \gamma} c = 0 \tag{8}$$

et dans cette équation f, g, a, b, c sont entièrement arbitraires; ainsi la proposition dont il s'agit (qu'expriment les égalités (3) et (4)) est démontrée.

L'hypothèse que nous venons d'invoquer revient à dire que la pression p ne peut changer que lorsque la densité du fluide varie. Pour pousser plus loin notre analyse, admettons l'exactitude de cette proposition comme une conséquence qui découlerait des deux hypothèses suivantes: 1) la pression finale p est une fonction de la densité finale ρ ainsi que de la température ϑ; 2) la densité et la température d'une portion déterminée du fluide ne varient pas par l'effet, pur et simple, du phénomène de la relaxation. Nous avons par conséquent:

$$p = p(\rho, \vartheta)\,; \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \frac{d\rho}{dt}\frac{\partial p}{\partial \rho}. \tag{9}$$

Si l'on fait abstraction des variations de température, l'équation (9) prend la forme

$$\frac{dp}{dt} = -\rho\varpi\frac{\partial p}{\partial \rho} \tag{10}$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{dp}{dt} = -k\varpi\,, \tag{11}$$

si l'on pose

$$k = \rho\frac{\partial p}{\partial \rho}\,. \tag{12}$$

Or, l'équation (12) est conforme à la définition, donnée précédemment aux §§ 2. et 3., de la constante k caractéristique du milieu; mais elle implique une hypothèse complémentaire (ainsi qu'il fallait s'y attendre), savoir: la déformation qui subsiste (si, en général, elle subsiste) lorsque l'état final est atteint, est incapable de provoquer des nouvelles inégalités de pression. Cette déformation est définie par les valeurs suivantes des variables:

$$\varepsilon = \varphi = \psi = \tfrac{1}{3}\Delta\,; \ \alpha = 0\,; \ \beta = 0\,; \ \gamma = 0. \tag{13}$$

L'équation (11) que nous venons de trouver rentre dans le cas général de l'équation (4) donnée précédemment et se confond avec elle si l'on admet l'égalité $h=k$; aussi nous parait-il vraisemblable que cette égalité est exacte pour les fluides de la nature, soit comme loi absolue, soit comme approximation, voisine de la vérité.

§ 6. Ce que nous venons de dire nous enseigne que l'équation

$$\frac{dp}{dt}=-k\varpi \tag{1}$$

peut être regardée comme expression de l'hypothèse de l'existence, pour les fluides en équilibre, d'une équation caractéristique puisque cette hypothèse consiste à admettre, pour l'état final d'un fluide, l'existence d'une égalité de la forme

$$p=p\,(\rho,\,\vartheta). \tag{2}$$

En généralisant l'équation (1) on pourrait, par conséquent, élargir par là-même la conception habituellement adoptée de l'équation caractéristique. Or, l'équation (1) parait susceptible d'une généralisation immédiate. D'après la définition de la pression p il est évident que la dérivée dp/dt doit nécessairement s'exprimer par une quantité jouissant des propriétés d'un invariant pour toute transformation orthogonale. La quantité ϖ, en effet, appartient à la série de ces invariants. Posons:

$$\frac{dp}{dt}=-k\varpi+i\{e^2+f^2+g^2+\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+j\varpi^2\}, \tag{3}$$

en désignant par i et par j deux nouvelles constantes. La dérivée dp/dt jouit encore des propriétés d'un invariant, mais la loi de la variation de la pression cesse d'être la-même lorsque la pression augmente et lorsqu'elle diminue; nous aurions, en quelque sorte, un phénomène d'hystérésis.

Pousser plus loin l'essai de généralisation que nous n'avons fait qu'ébaucher ne serait point difficile. Cependant, le choix d'une forme particulière pour l'expression de dp/dt n'exerce aucune influence sérieuse, ainsi qu'on le verra par la suite, sur la marche de nos calculs. C'est pourquoi nous nous bornerons à admettre, dans la présente étude, les simples hypothèses énoncées plus haut, au § 5.

§ 7. Les quantités

$$\xi,\ \eta,\ \zeta;\ \varepsilon,\ \varphi,\ \psi;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \Delta;\ u,\ v,\ w;\ e,\ f,\ g;\ a,\ b,\ c;\ \varpi \tag{1}$$

sur lesquelles jusqu'à présent notre raisonnement a roulé se rapportent à la déformation apparente d'un fluide, c'est-à-dire celle que l'activité de nos sens nous permet d'observer. Dorénavant, à ces composantes nous attacherons la désignation d'apparentes. Si l'on se reporte au § 3., on voit facilement quelle est la fonction à laquelle ces quantités étaient destinées: elles ont servi à définir l'influence qu'exercent, sur les valeurs des inégalités de pression, les forces extérieures.

Nous introduirons maintenant des variables analogues (mais essentiellement différentes) dont la considération se présente naturellement dans l'étude du phénomène de la relaxation. Par l'effet de ce phénomène l'état véritable d'un élément matériel est, en général, extrêmement différent de l'état apparent que nous lui attribuons en nous inspirant du témoignage de nos sens. Soient

$$\xi^*, \eta^*, \zeta^*; \varepsilon^*, \varphi^*, \psi^*; \alpha^*, \beta^*, \gamma^*; \Delta^*; u^*, v^*, w^*; e^*, f^*, g^*; a^*, b^*, c^*; \varpi^* \quad (2)$$

des quantités qui définissent l'état véritable d'un élément de la même manière de laquelle les quantités (1) déterminent son état apparent; nous dirons que ce sont les composantes véritables (ou absolues) de la déformation. Leurs relations mutuelles sont les mêmes que celles auxquelles les variables apparentes sont assujetties. Mais ce qui les distingue nettement de ces composantes apparentes c'est qu'elles sont affectées par le phénomène de la relaxation tandis que les composantes apparentes n'ont avec ce phénomène aucune relation; cette différence est la conséquence immédiate de nos définitions.

Pour trouver, à l'aide de ces nouvelles variables, l'expression analytique de ce qui se passe au sein d'un élément fluide formulons trois nouvelles hypothèses; elles constituent, dans notre nouveau cours d'idées, l'exact analogue des suppositions admises auparavant et énoncées plus haut, §§ 2., 3., 4. et 5. Nous supposerons, en premier lieu, que les quantités ε^*, φ^*, ψ^*, α^*, β^*, γ^* varient par l'effet de deux causes. Elles tombent sous l'influence des forces extérieures et leur variation de ce chef s'exprimera par la manière dont change la déformation apparente. Elles varient, de plus, grâce à la relaxation; par l'effet de celle-ci ε^*, φ^* et ψ^* tendent vers une limite commune qui est $\frac{1}{3}\Delta^*$, tandis que α^*, β^* et γ^* convergent vers zéro. Ainsi, désignant par T la même période caractéristique que celle dont au § 4. il a été question, nous aurons

$$(3\,a) \qquad \frac{d\varepsilon^*}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\varepsilon^* - \frac{1}{3}\Delta^*}{T}$$

$$(3\,b) \qquad \frac{d\varphi^*}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} - \frac{\varphi^* - \frac{1}{3}\Delta^*}{T}$$

$$(\;\,c) \qquad \frac{d\psi^*}{dt} = \frac{d\psi}{dt} - \frac{\psi^* - \frac{1}{3}\Delta^*}{T}$$

$$(4\,a) \qquad \frac{d\alpha^*}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} - \frac{\alpha^*}{T}$$

$$(4\,b) \qquad \frac{d\beta^*}{dt} = \frac{d\beta}{dt} - \frac{\beta^*}{T}$$

$$(4\,c) \qquad \frac{d\gamma^*}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} - \frac{\gamma^*}{T}.$$

En vertu des équations (3) nous avons

$$(5) \qquad \frac{d\Delta^*}{dt} = \frac{d\Delta}{dt}.$$

Nous admettrons, en second lieu, que les inégalités de pression sont toujours liées, aux composantes de la déformation véritable, par la loi de la proportionalité simple. Pour les solides élastiques de la théorie idéale la notion de la déformation véritable se confond avec celle de la déformation apparente; mais nous savons qu'il n'en est point ainsi pour les fluides. Ainsi notre hypothèse actuelle consiste à supposer que la loi de Hooke s'étend aux fluides, mais à la condition de l'appliquer, non point aux composantes de la déformation apparente, mais bien à celles de la déformation véritable Cette hypothèse admise, nous aurons:

$$(6\,a) \qquad p_{xx} - p_0 = -2n\varepsilon^* - (k - \tfrac{2}{3}n)\,\Delta^*;$$

$$(6\,b) \qquad p_{yy} - p_0 = -2n\varphi^* - (k - \tfrac{2}{3}n)\,\Delta^*;$$

$$(6\,c) \qquad p_{zz} - p_0 = -2n\psi^* - (k - \tfrac{2}{3}n)\,\Delta^*;$$

$$(7\,a) \qquad p_{yz} = -n\alpha^*;$$

$$(7\,b) \qquad p_{zx} = -n\beta^*;$$

$$(7\,c) \qquad p_{xy} = -n\gamma^*;$$

dans les équations (6) p_0 est la pression qui correspond à une déformation nulle.

Nous admettrons, en troisième lieu, que le but vers lequel tend la relaxation est atteint lorsque les quantités ε^*, φ^*, ψ^* se réduisent à $\frac{1}{3}\Delta^*$ et les quantités α^*, β^*, γ^* à zéro; en même temps les pressions p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} prennent une valeur déterminée que nous appelerons p et les pressions p_{yz}, p_{zx}, et p_{xy} s'annulent. Supposons que cet état d'équilibre final soit atteint; nous aurons, en vertu des équations (6),

$$p - p_0 = - k\Delta^*. \tag{8}$$

Par conséquent

$$\frac{dp}{dt} = - k \frac{d\Delta^*}{dt} \tag{9}$$

et l'équation (5) permet d'écrire

$$\frac{dp}{dt} = - k \frac{d\Delta}{dt} = - k\bar{\omega}. \tag{10}$$

L'équation ainsi obtenue se présente sous sa forme particulière, celle notamment qui suppose l'exactitude de la relation $h = k$. Cette circonstance s'explique facilement. Pour définir la pression désignée par p, il nous a fallu admettre, au cours du présent raisonnement, non seulement l'égalité des pressions à l'état final d'équilibre (ainsi que nous l'avons fait plus haut, § 4); excédant les limites de cette hypothèse, nous avons admis de plus, en cet état d'équilibre, l'uniformité parfaite de la déformation. Or cette dernière hypothèse entraîne l'égalité $h = k$, ainsi qu'il a été dit au § 5.

§ 8. Ajoutons membre à membre les équations (1), § 3., et (2), § 4; ajoutons de même les équations (2), § 3., et (3), § 4. Nous aurons, pour la variation totale des pressions (voir § 5.), les valeurs

$$\frac{dp_{xx}}{dt} = - 2ne - (k - \tfrac{2}{3} n)\, \bar{\omega} - \frac{p_{xx} - p}{T} \tag{1 a}$$

$$\frac{dp_{yy}}{dt} = - 2nf - (k - \tfrac{2}{3} n)\, \bar{\omega} - \frac{p_{yy} - p}{T} \tag{1 b}$$

$$\frac{dp_{zz}}{dt} = - 2ng - (k - \tfrac{2}{3} n)\, \bar{\omega} - \frac{p_{zz} - p}{T} \tag{1 c}$$

$$\frac{dp_{yz}}{dt} = - na - \frac{p_{yz}}{T} \tag{2 a}$$

$$(2\,\mathrm{b}) \qquad \frac{dp_{zx}}{dt} = -\,nb - \frac{p_{zx}}{T}$$

$$(2\,\mathrm{c}) \qquad \frac{dp_{xy}}{dt} = -\,nc - \frac{p_{xy}}{T}.$$

A ces égalités il faut adjoindre l'équation (4) du § 5, ainsi que l'égalité vraisemblablement vérifiée $h = k$. Ce sont les équations définitives que la première de nos méthodes de raisonnement nous conduit à admettre (§§ 2., 3., 4. et 5.).

On arrive aux mêmes équations en suivant la seconde voie indiquée au § 7. L'égalité (6 a), par exemple, du § 7. donne

$$(3) \qquad \frac{dp_{xx}}{dt} = -\,2n\frac{d\varepsilon^*}{dt} - (k - \tfrac{2}{3}n)\frac{d\Delta^*}{dt},$$

ce qui peut s'écrire, en vertu des égalités (3 a) et (5) du même paragraphe,

$$(4) \qquad \frac{dp_{xx}}{dt} = -\,2ne - (k - \tfrac{2}{3}n)\,\tilde{\omega} + \frac{2n}{T}(\varepsilon^* - \tfrac{1}{3}\Delta^*).$$

Si l'on observe que l'on a, d'après (6 a) et (8), § 7,

$$(5) \qquad 2n\,(\varepsilon^* - \tfrac{1}{3}\Delta^*) = -\,p_{xx} + p_0 - k\Delta^*$$

$$(6) \qquad = p - p_{xx}$$

on voit que l'équation (4) se confond avec (1 a) du présent paragraphe. De la même manière s'établissent les équations (1 b), (1 c) ainsi que les équations (2).

Les quantités $e, f, g, a, b, c, \tilde{\omega}$ ainsi que, évidemment, les quantités $(p_{xx}-p)$, $(p_{yy}-p)$, $(p_{zz}-p)$, p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} ont des valeurs infiniment petites. Par conséquent, en tenant compte de l'équation (4) du § 5. dans les égalités (1) et (2) du présent paragraphe et en négligeant tous les termes d'ordre supérieur nous aurons:

$$(7\,\mathrm{a}) \qquad \frac{\partial\,(p_{xx} - p)}{\partial t} = -\,2ne - (k - h - \tfrac{2}{3}n)\,\tilde{\omega} - \frac{p_{xx} - p}{T}$$

$$(7\,\mathrm{b}) \qquad \frac{\partial\,(p_{yy} - p)}{\partial t} = -\,2nf - (k - h - \tfrac{2}{3}n)\,\tilde{\omega} - \frac{p_{yy} - p}{T}$$

$$(7\,\mathrm{c}) \qquad \frac{\partial\,(p_{zz} - p)}{\partial t} = -\,2ng - (k - h - \tfrac{2}{3}n)\,\tilde{\omega} - \frac{p_{zz} - p}{T}$$

$$(8\,\mathrm{a}) \qquad \frac{\partial p_{yz}}{\partial t} = -\,na - \frac{p_{yz}}{T}$$

$$\frac{\partial p_{zx}}{\partial t} = -nb - \frac{p_{zx}}{T} \qquad (8\,\mathrm{b})$$

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial t} = -nc - \frac{p_{xy}}{T}. \qquad (8\,\mathrm{c})$$

Ainsi, à strictement parler, l'ensemble de nos formules ne s'applique que dans le cas où les mouvements du fluide sont extrêmement lents. Il est aisé de voir que tout raisonnement qui partirait, comme le nôtre, des idées fondamentales de la théorie de l'élasticité doit nécessairement être soumis à la même restriction. On sait d'ailleurs que, parmi les théories de la viscosité proposées jusqu'à présent, aucune n'est entièrement générale ni rigoureuse.

Les équations (7) et (8) donnent par intégration

$$p_{xx} - p = C_{xx}\,\varepsilon^{-t/T} - \varepsilon^{-t/T}\int dt\,\varepsilon^{t/T}\left\{2ne + (k-h-\tfrac{2}{3}n)\bar{\omega}\right\} \qquad (9\,\mathrm{a})$$

$$p_{yy} - p = C_{yy}\,\varepsilon^{-t/T} - \varepsilon^{-t/T}\int dt\,\varepsilon^{t/T}\left\{2nf + (k-h-\tfrac{2}{3}n)\bar{\omega}\right\} \qquad (9\,\mathrm{b})$$

$$p_{zz} - p = C_{zz}\,\varepsilon^{-t/T} - \varepsilon^{-t/T}\int dt\,\varepsilon^{t/T}\left\{2ng + (k-h-\tfrac{2}{3}n)\bar{\omega}\right\} \qquad (9\,\mathrm{c})$$

$$p_{yz} = C_{yz}\,\varepsilon^{-t/T} - \varepsilon^{-t/T}\int dt\,\varepsilon^{t/T}\,na \qquad (10\,\mathrm{a})$$

$$p_{zx} = C_{zx}\,\varepsilon^{-t/T} - \varepsilon^{-t/T}\int dt\,\varepsilon^{t/T}\,nb \qquad (10\,\mathrm{b})$$

$$p_{xy} = C_{xy}\,\varepsilon^{-t/T} - \varepsilon^{-t/T}\int dt\,\varepsilon^{t/T}\,nc \qquad (10\,\mathrm{c})$$

Dans ces égalités, la base des logarithmes népériens est désignée par ε; les quantités C_{xx}, C_{yy}, C_{zz}, C_{yz}, C_{zx}, C_{xy} sont des fonctions de $x, y, z,$ indépendantes du temps t. Posons, pour abréger,

$$\varepsilon^{-t/T}\int\frac{dt}{T}\,\varepsilon^{t/T}\,e = E \qquad (11\,\mathrm{a})$$

$$\varepsilon^{-t/T}\int\frac{dt}{T}\,\varepsilon^{t/T}\,f = F \qquad (11\,\mathrm{b})$$

$$\varepsilon^{-t/T}\int\frac{dt}{T}\,\varepsilon^{/T}\,g = G \qquad (11\,\mathrm{c})$$

$$\varepsilon^{-t/T}\int\frac{dt}{T}\,\varepsilon^{t/T}\,a = A \qquad (12\,\mathrm{a})$$

$$\varepsilon^{-t/T}\int\frac{dt}{T}\,\varepsilon^{t/T}\,b = B \qquad (12\,\mathrm{b})$$

$$(12\,c) \qquad \varepsilon^{-t/T} \int \frac{dt}{T} \varepsilon^{t/T} c = C$$

$$(13) \qquad \varepsilon^{-t/T} \int \frac{dt}{T} \varepsilon^{t/T} \varpi = \Theta.$$

De plus, écrivons

$$(14) \qquad n\,T = \mu$$

$$(15) \qquad (k - h - \tfrac{2}{3}n)\,T = \lambda\,;$$

l'égalité (14) est celle que Maxwell a fait connaître en 1867. Moyennant ces abbréviations, les équations (9) et (10) deviendront:

$$(16\,a) \qquad p_{xx} - p = C_{xx}\,\varepsilon^{-t/T} - 2\mu E - \lambda\Theta$$

$$(16\,b) \qquad p_{yy} - p = C_{yy}\,\varepsilon^{-t/T} - 2\mu F - \lambda\Theta$$

$$(16\,c) \qquad p_{zz} - p = C_{zz}\,\varepsilon^{-t/T} - 2\mu G - \lambda\Theta$$

$$(17\,a) \qquad p_{yz} = C_{yz}\,\varepsilon^{-t/T} - \mu A$$

$$(17\,b) \qquad p_{zx} = C_{zx}\,\varepsilon^{-t/T} - \mu B$$

$$(17\,c) \qquad p_{xy} = C_{xy}\,\varepsilon^{-t/T} - \mu C.$$

Ces égalités ont, dans notre théorie, la signification que possèdent, dans la théorie classique[1]) de la viscosité, les équations connues qui donnent les quantités $(p_{xx} - p)$ etc. en fonction des composantes e, f, g, a, b, c de la vitesse de déformation. Elles contiennent les termes $C_{xx}\,\varepsilon^{-t/T}$ etc. qui ne figurent pas dans les équations ordinaires. De plus, dans ces équations, les fonctions E, F, G, A, B, C, Θ, définies par les égalités (11), (12) et (13), prennent la place occupée, dans les équations habituelles, par les composantes e, f, g, a, b, c, ϖ et y jouent exactement le même rôle.

§ 9. Les constantes λ et μ, définies à l'aide des équations (15) et (14) du paragraphe précédent, sont les deux coefficients de viscosité de notre théorie. Les auteurs qui ont traité du problème de la viscosité font généralement usage de deux constantes qu'ils

[1]) Stokes, Mathematical and Physical Papers, Vol. I, p. 90. eq. (8). Cambridge, 1880. — Basset, A Treatise on Hydrodynamics, Vol. II, p. 241, eq. (16). Cambridge, 1888. — Lamb, Hydrodynamics, p. 512, eq. (4) and (5). Cambridge, 1895.

désignent souvent à l'aide des mêmes symboles: λ, μ. Poisson, dans son mémoire déjà cité [1]), introduit deux constantes qui, au moins dans le cas général, sont indépendantes l'une de l'autre. En 1843, Barré de Saint-Venant [2]) et en 1845, avec clarté et précision, Sir G. G. Stokes [3]), indiquent les considérations qui conduisent à poser

$$\lambda = -\tfrac{2}{3}\mu. \tag{1}$$

C'est la relation à laquelle parvient, en 1867, Clerk-Maxwell [4]), en se laissant guider par la théorie cinétique. La même relation se trouve adoptée chez Kirchhoff [5]), chez M. Basset [6]), M. Lamb [7]) et chez beaucoup d'autres auteurs; toutefois, en 1874, M. O. E. Meyer propose [8]) une relation entièrement différente. Enfin M. Voigt, à une date récente, révoque en doute [9]) l'existence d'une relation quelconque entre les deux constantes de la viscosité.

On peut espérer de trouver quelques indications sur la valeur du rapport λ/μ en calculant, pour un fluide, la quantité (déjà considérée par Stokes et par Helmholtz) que l'on nomme, avec Lord Rayleigh, la fonction dissipative. C'est la voie indiquée, dans la théorie de l'élasticité, apparément pour la première fois, par Jacobi; elle a été suivie par M. Duhem [10]) dans la théorie de la viscosité des fluides. Dans ce dernier cas, il existe assurément une fonction dissipative et elle est toujours positive. On trouve aisément que cette condition équivaut à la suivante:

$$\lambda \geqq -\tfrac{2}{3}\mu, \tag{2}$$

si, bien entendu, l'on suppose $\mu \geqq 0$, comme il est légitime de le faire.

[1]) Journal de l'Ecole Polytechnique, 20 cahier, tome XIII (1831).

[2]) Comptes Rendus, tome XVII, p. 1240. (1843).

[3]) Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. VIII, p. 287 (1845); Mathematical and Physical Papers, Vol. I, p. 75 (1880); voir §§ 3, 4 et 18.

[4]) Philosophical Transactions, Vol. CLVII, pp. 81—82 (1867). Scientific Papers, Vol. II, p. 69 (1890).

[5]) Vorlesungen über die Theorie der Wärme, p. 193. (1894).

[6]) A Treatise on Hydrodynamics, Vol. II, p. 242. (1888).

[7]) Hydrodynamics, p. 512. (1895).

[8]) Crelle's Journal f. reine u. angew. Mathematik, Bd. 78, p. 130 (1874). Kinetische Theorie der Gase, II. Auflage, Mathem. Zusätze, p. 112—114. (1899).

[9]) Kompendium d. theoretischen Physik, Bd. I, p. 462. (1895).

[10]) Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques, Paris 1896, p. 52.

Reprenons maintenant l'étude des deux constantes de viscosité introduites dans notre théorie à l'aide des équations (14) et (15) du paragraphe précédent. Ces équations nous enseignent que la relation $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$, proposée par Stokes et acceptée par la majorité des savants, est la conséquence immédiate de l'égalité $h = k$, dont nous avons donné, plus haut, la discussion détaillée. Si, au contraire, l'on suppose que les valeurs de h et de k peuvent ne point se confondre, on aura

$$\lambda = \left(-\tfrac{2}{3} + \frac{k-h}{n}\right)\mu\,; \tag{3}$$

et la relation qui existe entre λ et μ dépendra non seulement du rapport k/n mais aussi de celui de la nouvelle constante h et de la rigidité n.

Quant à l'inégalité (2), l'unique conséquence qu'on peut en déduire est

$$k \geqslant h\,; \tag{4}$$

cette nouvelle inégalité est assurément vérifiée pour les fluides naturels.

En conclusion, nous dirons que l'égalité $h = k$ et la relation de Stokes, $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$, s'accordent parfaitement avec l'ensemble de nos hypothèses; mais rien ne nous oblige à les considérer comme un corrolaire qui découlerait avec nécessité de notre théorie.

§ 10. Soient X, Y, Z les composantes, rapportées à l'unité de masse, de la force extérieure qui, en un point (x, y, z), agit sur un élément de volume. On a trois équations dont la première est la suivante:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho X - \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right). \tag{1a}$$

On en déduit, en tenant compte des équations (16) et (17) du § 8,

$$\left\{\begin{aligned} &\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \\ &= \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} - \varepsilon^{-t/T}\left(\frac{\partial C_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial C_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial C_{zx}}{\partial z}\right) + \\ &+ \varepsilon^{-t/T}\int dt\, \varepsilon^{t/T}\left\{n\nabla^2 u + (k - h + \tfrac{1}{3}n)\frac{\partial \varpi}{\partial x}\right\}. \end{aligned}\right. \tag{2 a}$$

Dans cette équation le symbole ∇^2 représente l'opérateur connu de Laplace et $\bar{\omega}$ a la signification que nous lui avons attribuée au § 1; on trouve de même deux égalités analogues. Ce sont évidemment les équations du mouvement du fluide que nous nous sommes proposé d'étudier.

Dans une prochaine communication, nous espérons pouvoir donner diverses applications de la théorie que nous venons d'exposer.

---

9. M. C. Żorawski présente l'étude de M. S. ZAREMBA: **O tak zwanych funkcyach zasadniczych w teoryi równań fizyki matematycznej.** ***(Sur les fonctions dites fondamentales dans la théorie des équations de la physique).*** *(Ueber die sog. Fundamentalfunctionen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik).*

I. Introduction.

Nr. 1. Etant donné une surface fermée *(S)* limitant un domaine connexe *(D)*, il est possible de constituer un ensemble dénombrable de fonctions, dites fondamentales, jouant par rapport à cette surface un rôle analogue à celui que jouent, par rapport à la sphère, les polynômes sphériques.

Ce fait important, découvert par M. Poincaré [1]), a été rigoureusement démontré par M. Le Roy [2]) pour des surfaces satisfaisant à certaines conditions. M. Le Roy prend pour point de départ une définition différente de celle de M. Poincaré, mais il prouve qu'en particularisant convenablement la définition qu'il donne, on arrive aux fonctions de M. Poincaré.

Après M. Le Roy, M. Stekloff [3]) a étudié le même sujet et a donné une belle application des fonctions fondamentales à la théorie de la méthode de Neumann.

[1]) Poincaré. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet; Acta Mathematica, 1896.

[2]) Le Roy Sur l'intégration des équations de la chaleur; Annales scientifiques de l'École normale supérieure, 1898.

[3]) Notes du 7 avril 1899, du 26 novembre 1900 et du 10 décembre de la même année, insérées dans les C. R. des Séances de l'Académie des Sciences de Paris.

La définition adoptée par M. Stekloff ne coïncide ni avec celle de M. Poincaré ni avec celle de M. Le Roy, mais, comme M. Le Roy, M. Stekloff prouve qu'en particularisant convenablement sa définition on retrouve les fonctions de M. Poincaré.

Les méthodes de M. Le Roy et de M. Stekloff reposent sur certaines transformations de la surface pour laquelle on veut établir l'existence des fonctions fondamentales. Or. les transformations de ce genre, dont M. Poincaré, le premier, a donné un exemple, ne sont applicables que dans des conditions assez particulières.

Le but du présent travail est de démontrer l'existence des fonctions fondamentales, sans employer aucune transformation, pour toute surface (S) satisfaisant aux conditions suivantes:

1. Cette surface admet en chaque point un plan tangent parfaitement déterminé.

2. Désignons par (S') la portion de la surface (S) située à l'intérieur d'une sphère (Σ) dont le centre O est un point quelconque de la surface (S) et dont le rayon ne surpasse pas une longueur fixe indépendante de la position de ce point. Toute parallèle à la normale en O à la surface (S) rencontre la portion (S') de cette surface en un point au plus; en outre l'angle formé par les normales élevées en deux points quelconques A et B situés sur la portion (S') de la surface (S) est inférieur au produit de la longeur AB par une constante indépendante de la position du point O sur la surface (S).

J'adopte la définition de M. Stekloff des fonctions fondamentales en la modifiant toutefois de façon que la notion de ces fonctions, au lieu d'être restreinte à l'équation de Laplace, soit étendue à l'équation plus générale

$$\Delta v + \xi v = o,$$

où

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

la lettre ξ désignant un paramètre réel quelconque.

Je me réserve d'étudier dans un autre travail les relations des définitions de M. Poincaré et de M. Le Roy avec celle de M. Stekloff et de donner ensuite quelques applications des fonctions fondamentales.

II. Démonstration d'un lemme fondamental.

Nr. 2. Désignons par $f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), \ldots f_p(x, y, z)$, p fonctions réelles, linéairement indépendantes, admettant des dérivées premières continues en chaque point intérieur à un domaine (D) limité par une surface fermée (S) satisfaisant aux conditions énoncées dans l'introduction, par $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$, p facteurs réels indépendants des variables x, y, z, par $d\tau$ un élément de volume, par ds un élément de la surface (S), par ξ une constante donnée, réelle mais d'ailleurs quelconque, et soit enfin

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i(x, y, z). \tag{1}$$

Je me propose de démontrer la proposition suivante: si le nombre p est supérieur à un certain entier positif, dépendant uniquement de la nature de la surface (S) et du nombre ξ, il sera toujours possible de disposer des facteurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ de façon à vérifier l'inégalité:

$$\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 - \xi f^2 \right\} d\tau > L_p . \int_{(S)} f^2 ds \tag{2}$$

où L_p représente un nombre positif croissant indéfiniment lorsque le nombre p croît indéfiniment et où les indices (D) et (S) indiquent que les intégrations correspondantes doivent être étendues respectivement à tout le domaine (D) et à toute la surface (S).

Dans le cas particulier où l'on a $\xi = o$, c'est M. Le Roy [1]) le premier qui a démontré le théorème précédent. Après lui, et toujours dans le même cas particulier, M. Stekloff [2]) a étudié le même théorème.

Mais ni M. Le Roy ni M. Stekloff n'ont réussi à se débarrasser de l'hypothèse qu'une transformation, du genre de celles dont il a été question dans l'introduction soit applicable à la surface (S).

Je rappelle tout d'abord un résultat que j'ai établi dans un autre travail [3]). Désignons par m un paramètre réel vérifiant l'inégalité:

$$m \geqq m_0 \tag{3}$$

[1]) Mémoire cité.

[2]) Notes citées.

[3]) Zaremba. Sur l'équation $\Delta u + \xi u + f = o$ et sur les fonctions harmoniques. Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure, 1899.

où m_0 est un nombre positif, dépendant uniquement de la surface *(S)*, par v une fonction vérifiant dans toute l'étendue du domaine *(D)* l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta v - m^2 v = o, \tag{4}$$

et par $\frac{dv}{dN}$ la dérivée de la fonction v prise suivant la normale intérieure à la surface *(S)*.

Il sera possible de déterminer la fonction v de façon que l'on ait:

$$\frac{dv}{dN} = \tilde{\omega},$$

où $\tilde{\omega}$ est une fonction continue donnée et l'on aura alors dans toute l'étendue du domaine *(D)* et sur la surface *(S)* elle-même

$$|v| < \frac{C}{m}\Omega \tag{5}$$

où C est une constante ne dépendant que de la surface *(S)* et où Ω est une limite supérieure du module de la fonction $\tilde{\omega}$. J'ai, il est vrai, considéré dans le travail cité une surface jouissant, en dehors des propriétés énoncées dans l'introduction, de certaines autres propriétés, mais je n'ai eu à en faire usage que pour la démonstration de théorèmes autres que celui que je viens de rappeler.

Nr. 4. Le théorème précédent nous apprend qu'il existera une suite infinie de fonctions

$$u_0, u_1, u_2, \ldots \tag{6}$$

vérifiant les équations:

$$\left\{ \begin{aligned} &\Delta u_0 - m^2 u^0 = o; \frac{du_0}{dN} = f \\ &\Delta u_k - m^2 u_k = o; \frac{du_k}{dN} = u_{k-1} \; (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \right. \tag{7}$$

où m représente un nombre vérifiant l'inégalité (3).

Posons:

$$I_{j\,.\,t} = (-1)^{j+t} \int_{(S)} u_j u_t \, ds \tag{8}$$

on trouvera:

$$\int_{(D)} \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial x}\frac{\partial u_t}{\partial x} + \frac{\partial u_j}{\partial y}\frac{\partial u_t}{\partial y} + \frac{\partial u_j}{\partial z}\frac{\partial u_t}{\partial z} + m^2 u_j u_t \right\} d\tau \tag{9}$$

$$=(-1)^{j+t} I_{j\,.\,t-1}=(-1)^{j+t} I_{j-1\,.\,t}.$$

Il suit de là que l'égalité

$$j+t=j'+t',$$

entraîne l'égalité:

$$I_{j\,.\,t}=I_{j'\,.\,t'},$$

ce qui permet d'introduire le changement de notations défini par l'équation:

$$I_{j\,.\,t}=I_{j+t}\,.$$

Posons

$$\left.\begin{aligned}
I_{-1}&=-\int_{(S)} u_0 f\,ds=\int_{(D)}\left\{\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}\right)^2+m^2 u_0^2\right\}d\tau,\\
I_{-2}&=\int_{(S)} f^2\,ds=-\int_{(D)}\left\{\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial u_0}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}+m^2 u_0 f\right\}d\tau,\\
I_{-3}&=\int_{(D)}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2+m^2 f^2\right\}d\tau,
\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

on s'assurera aisément que toutes les intégrales I_k sont positives et l'on démontrera, au moyen de l'inégalité de M. Schwarz, les inégalités:

$$I_k^2 < I_{k-1}\, I_{k+1}\ (k=-2,-1,-0,1,2\ldots),$$

cela prouve que la suite à termes positifs

$$\frac{I_{-3}}{I_{-2}};\ \frac{I_{-2}}{I_{-1}},\ \frac{I_{-1}}{f_0},\ \frac{I_0}{I_1},\ldots \qquad (11)$$

sera décroissante et par suite convergente.

Soit R la limite de cette suite. Il est évident que le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} I_k\,\eta^k \qquad (12)$$

sera précisément égal à R.

Posons

$$w=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(-\eta)^k \qquad (13)$$

Le théorème exprimé par l'inégalité (5) nous apprend que le rayon de convergence R' de cette série vérifie l'inégalité

$$R' \geqq \frac{m}{C}. \tag{14}$$

Je dis que l'on a

$$R \geqq R'. \tag{15}$$

En effet, l'équation (13) nous donne:

$$\int_{(S)} w u_0 \, ds = \sum_{k=0}^{\infty} I_k \eta^k ;$$

équation qui justifie notre assertion.

Il serait aisé de prouver que l'on a en réalité

$$R = R',$$

mais nous ne nous y arrêterons pas, parce que l'inégalité (15) suffira pour arriver au but que nous avons en vue.

La suite (11) étant décroissante, on concluera des inégalités (14) et (15) que

$$\frac{I_{-3}}{I_{-2}} > \frac{m}{C},$$

d'où, en se reportant aux équations (10):

$$\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + m^2 f^2 \right\} d\tau > \frac{m}{C} \int_{(S)} f^2 \, ds. \tag{16}$$

Nr. 5. Soit n un nombre entier et positif convenablement choisi et ne dépendant que de la surface (S). Désignons par q un nombre entier et positif vérifiant les inégalités

$$\left\{ \begin{array}{l} n q^3 + 1 \leqq p \\ n (q+1)^3 + 1 > p \end{array} \right. \tag{17}$$

M. Poincaré[1]) a prouvé qu'il sera toujours possible de disposer des facteurs $\alpha_1, \alpha_2, .. \alpha_p$, en les astreignant à vérifier un certain système d'équations linéaires et homogènes, dont le nombre est au plus égal à $p-1$, de manière à avoir:

$$\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau > E q^2 \int_{(D)} f^2 \, d\tau$$

[1]) Poincaré. Sur les équations de la physique. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 1894.

où E est un nombre positif ne dépendant que de la nature de la surface (S). L'inégalité précédente nous donne:

$$\int\limits_{(D)}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2-\xi f^2\right\}d\tau>(Eq^2-\xi)\int\limits_{(D)}f^2\,d\tau \qquad (18)$$

D'autre part l'inégalité (16) peut s'écrire ainsi:

$$\int\limits_{(D)}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2-\xi f^2\right\}d\tau+(m^2+\xi)\int\limits_{(D)}f^2d\tau>\frac{m}{C}\int\limits_{(S)}f^2ds \quad (19)$$

Il résulte des inégalités (17) que lorsque le nombre p sera assez grand, l'on aura:

$$Eq^2-\xi>0\,. \qquad (20)$$

Cette condition étant vérifiée, les inégalités (18) et (19) nous donneront:

$$\int\limits_{(D)}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2-\xi f^2\right\}d\tau>\frac{1}{1+\dfrac{m^2+\xi}{Eq^2-\xi}}\cdot\frac{m}{C}\cdot\int\limits_{(S)}f^2\,ds \quad (21)$$

Soit p_0 un nombre positif assez grand, ne dépendant d'ailleurs que des nombres E et ξ. Il est évident que sous la condition

$$p\geqslant p_0 \qquad (22)$$

l'égalité

$$m=q$$

ne sera pas incompatible avec l'inégalité (3) et qu'en outre l'expression

$$\frac{1}{1+\dfrac{m^2+\xi}{Eq^2-\xi}},$$

si l'on fait $m=q$, restera supérieure à une constante positive différente de zéro. Cela posé nous pouvons déduire de l'inégalité (21) en nous reportant aux inégalités (17), la proposition suivante:

Lorsque le nombre p vérifie l'inégalité (22); il est possible de disposer des facteurs $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$ de façon à avoir

$$\int\limits_{(D)}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2-\xi f^2\right\}d\tau>M\sqrt[3]{p}\int\limits_{(S)}f^2\,ds \qquad (23)$$

où M est un nombre positif ne dépendant que de la surface (S) et du paramètre ξ: il suffira pour cela que les facteurs $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$ vérifiant un certain système d'équations linéaires et homogènes comprenant $p-1$ équations au plus.

Cette proposition contient évidemment le théorème énoncé au No 2.

III. Généralisation et existence des fonctions fondamentales de M. Stekloff.

Nr. 6. M. Stekloff appelle fonction fondamentale toute fonction v vérifiant dans toute l'étendue d'un domaine (D) limité par une surface fermée (S) l'équation de Laplace

$$\Delta v = o \tag{1}$$

et satisfaisant en outre à la condition aux limites

$$\frac{dv}{dN} = \lambda \varphi v \tag{2}$$

où les lettres λ et φ désignent une constante et une fonction réelle continue, toujours positive et différente de zéro, donnée à priori sur la surface (S).

Nous conserverons cette définition à cette modification près que nous remplacerons l'équation (1) par l'équation plus générale

$$\Delta v + \xi v = o \tag{3}$$

où ξ représente un nombre réel quelconque donné à priori.

Nous dirons que le nombre λ est le nombre caractéristique de la fonction fondamentale v.

Dans tout ce qui va suivre nous conserverons à la lettre φ la signification que nous venons de lui donner et nous désignerons par φ_1 et φ_2 les limites inférieure et supérieure de cette fonction; nous aurons donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 < \varphi < \varphi_2 \\ \qquad \varphi_1 > 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

Nr. 7. Supposons provisoirement que les fonctions fondamentales existent pour toute surface (S) jouissant des propriétés énoncées dans l'introduction et tirons quelques conséquences qui résultent de cette hypothèse; cela nous permettra de simplifier l'exposition.

Il est très aisé de prouver que les nombres caractéristiques des fonctions fondamentales sont toujours réels. Cela posé considérons p fonctions fondamentales linéairement indépendantes, soient

$$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \lambda_3, \ldots \geqq \lambda_p \tag{5}$$

les nombres caractéristiques de ces fonctions rangés par ordre de grandeur décroissante et soient

$$v_1, v_2 \ldots v_p \tag{6}$$

les fonctions fondamentales correspondantes elles-mêmes. On aura

$$\begin{aligned} &\Delta v_i + \xi v_i = o \\ &\frac{dv_i}{dN} = \lambda_i \varphi v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots p). \end{aligned} \tag{7}$$

Une application facile du théorème de Green nous montrera que l'inégalité

$$\lambda_i \neq \lambda_k \tag{8}$$

entraîne l'équation

$$\int_{(s)} \varphi\, v_i\, v_k\, ds = o. \tag{9}$$

Les nombres formant la suite (5) n'étant pas forcément tous inégaux, il pourra arriver que l'inégalité:

$$i \neq k \tag{10}$$

n'entraîne pas l'inégalité (8). On ne peut donc pas affirmer que l'inégalité (10) entraîne nécessairement l'équation (9). On peut cependant, sans nuire à la généralité, supposer que l'inégalité (10) entraîne toujours l'équation (9). En effet, pour réaliser cette circonstance, si elle ne se présentait pas tout d'abord, il suffirait de remplacer dans la suite (6) les fonctions ayant des nombres caractéristiques égaux par certaines combinaisons linéaires et homogènes à coefficients constants de ces fonctions. Nous admettrons donc que l'inégalité (10) entraîne toujours l'équation (9). Nous supposerons en outre que l'on a

$$\int_{(S)} \varphi\, v_i^2\, ds = 1. \tag{11}$$

Cette hypothèse est légitime, puisqu'il est toujours possible d'y satisfaire en multipliant au besoin les fonctions (6) par des constantes convenablement choisies.

Je dis que le nombre de fonctions fondamentales linéairement indépendantes ayant des nombres caractéristiques positifs est fini En effet posons:

$$f = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i \tag{12}$$

où les α_i sont des facteurs réels indépendants de x, y, z. Nous trouverons, en nous appuyant sur les équations (7), (9) et (11) ainsi que sur le theorème de Green:

$$\int_{(D)}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2-\xi f^2\right\}d\tau = -\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \alpha_i^2 \tag{13}$$

Par conséquent si λ_i sont tous positifs, on aura

$$\int_{(D)}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2-\xi f^2\right\}d\tau < 0$$

quelles que soient les valeurs réelles attribuées aux facteurs α_i. Or, le théorème de M. Poincaré, théorème sur lequel nous avons eu à nous appuyer au chapitre II, nous apprend que cela ne sera possible qu'à la condition que nombre p ne dépasse pas une certaine limite, facile à exprimer en fonction de ξ. J'ajoute que dans le cas où $\xi \leqslant 0$, il ne peut pas y avoir de fonctions fondamentales ayant des nombres caractéristiques positifs. C'est là une conséquence immédiate de l'équation (13).

Conservons les notations précédentes et assurons-nous, qu'à partir d'une certaine valeur assez grande du nombre p, l'on aura:

$$-\lambda_p > M'\sqrt[3]{p} \tag{14}$$

où M' est un nombre positif indépendant de p. On déduit de l'équation (12), en tenant compte des équations (9) et (11):

$$\int_{(S)} \varphi f^2 ds = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2$$

d'où, à cause des inégalités (4):

$$\varphi_2 \int_{(S)} f^2 ds \geqslant \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2.$$

Cette inégalité et l'équation (13) nous donnent:

$$\frac{\int_{(D)}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2-\xi f^2\right\}d\tau}{\varphi_2 \int_{(S)} f^2 ds} \leqslant \frac{-\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2},$$

d'où, quels que soient les α_i:

$$\int\limits_{(D)}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2-\xi f^2\right\}d\tau \leqslant -\lambda_p\,\varphi_2\int\limits_{(S)} f^2\,ds$$

Or on a vu que, lorsque l'inégalité (22) du chapitre II est vérifiée, il est toujours possible de satisfaire à l'inégalité (23) du même chapitre par un choix convenable des α_i. Il faut donc que, sous la condition

$$p \geqslant p_0\,,$$

l'on ait:

$$-\lambda_p\,\varphi_2 > M\sqrt[3]{p}$$

d'où, en posant

$$M' = \frac{M}{\varphi_2}\,,$$

$$-\lambda_p > M'\sqrt[3]{p}\,,$$

C. Q. F. D.

Nr. 8. Nous considérerons, pour démontrer l'existence des fonctions fondamentales, la fonction u vérifiant dans toute l'étendue du domaine *(D)* l'équation aux dérivées partielles:

$$\Delta u + \xi u = 0 \tag{15}$$

et satisfaisant à la condition aux limites

$$\frac{du}{dN} = h\varphi u + \varphi\psi \tag{16}$$

où h et ψ désignent une constante donnée et une fonction continue définie sur la surface *(S)*.

J'ai donné une méthode [1]) permettant de calculer la fonction u dans le cas particulier où

$$\varphi = 1$$

et où h est un nombre réel et non négatif.

La même méthode est encore applicable, on le verra sans difficulté, dans le cas où φ est une fonction satisfaisant aux conditions énoncées au début de ce chapitre, pourvu que le nombre h soit réel et non négatif. Cette méthode conduit aisément à la conclusion suivante: si le nombre ξ ne se trouve pas parmi les termes d'une certaine suite infinie

[1]) Mémoires cités plus haut.

(17) $$k_1,\ k_2, \dots$$

de fonctions du paramètre h, la fonction u existera, elle sera déterminée sans ambiguité par les équations (15) et (16) et l'on aura:

(18) $$|u| < A\Omega$$

où A est un nombre positif indépendant de la fonction ψ et où Ω est une limite supérieure du module de cette fonction. Si au contraire le nombre ξ faisait partie de la suite (17), il existerait au moins une fonction v non identiquement nulle vérifiant les équations

$$\Delta v + \xi v = 0$$

$$\frac{dv}{dN} = h\varphi v,$$

on aurait donc, dans ce cas, au moins une fonction fondamentale.

Supposons qu'en changeant h en h' sans toucher au paramètre ξ ni aux fonctions φ et ψ, la suite (17) devienne:

(19) $$k_1',\ k_2',\ k_3', \dots$$

et admettons en outre que le nombre ξ fasse partie de la suite (17)

Soit

$$h' \neq h$$

$$|h' - h| < \delta,$$

où δ est un nombre positif assez petit. Je dis que le nombre ξ ne fera certainement pas partie de la suite (19). En effet, s'il en était autrement, il existerait une infinité de fonctions fondamentales, ayant des nombres caractéristiques inégaux, tous compris dans l'intervalle $(h - \delta,\ h + \delta)$ si petit que soit δ. Or cela serait en contradiction avec le théorème exprimé par l'inégalité (14). Nous arrivons donc à la proposition suivante: le nombre réel ξ et la fonction φ étant donnés, on pourra toujours trouver pour h une valeur réelle et positive telle, que le nombre ξ ne fasse pas partie de la suite (17) et que par conséquent la fonction u existe et vérifie l'inégalité (18).

Nr. 9. Regardons la fonction u définie par les équations (15) et (16) comme une fonction du paramètre h et proposons-nous d'étudier cette fonction pour toutes les valeurs réelles et complexes de ce paramètre.

Posons à cet effet:

(20) $$h = h_0 + \eta$$

et voyons si l'on peut développer la fonction u en une série procédant suivant les puissances entières et positives de η.

Posons donc

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \eta^i, \tag{21}$$

les équations (15) et (16) nous donneront:

$$\left\{\begin{aligned} & \Delta u_k + \xi u_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \\ & \frac{du_0}{dN} = h_0 \varphi u_0 + \varphi \psi \\ & \frac{du_k}{dN} = h_0 \varphi u_k + \varphi u_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Supposons provisoirement que les fonctions u_k existent et que la série (21) soit uniformément convergente dans tout le domaine *(D)* pour toutes les valeurs de η vérifiant l'inégalité

$$|\eta| < R.$$

On prouvera aisément que dans ce cas, la somme u de cette série vérifiera les équations (15) et (16). J'ajoute, en vue d'une application ultérieure, que la convergence uniforme de la série (21) sur la surface *(S)* en assure la convergence dans toute l'étendue du domaine *(D)*.

Cela posé, il résulte de la proposition établie à la fin du numéro précédent qu'en donnant à h_0 une valeur réelle et positive convenablement choisie, il sera possible de calculer toutes les fonctions u_k et que l'on aura, à cause de l'inégalité (18)

$$\delta_k < A\, \delta_{k-1},$$

en désignant par δ_i le maximum du module de la fonction u_i. Par conséquent la série (21) aura un rayon de convergence au moins égal à $\frac{1}{A}$. Il est donc établi que la fonction u du paramètre complexe h, définie par les équations (15) et (16) existe et est holomorphe à l'intérieur d'un certain cercle tracé dans le plan de la variable complexe h.

La méthode de prolongement analytique nous permettra de prouver l'existence de la fonction u pour toutes les valeurs complexes du paramètre h. Mais pour cela il est indispensable d'établir certains préliminaires.

Nr. 10. Désignons par r la distance du point (x, y, z) situé à l'intérieur du domaine (D) à l'élément ds de la surface (S) et supposons que la fonction définie par les équations (15) et (16) existe. Nous aurons:

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} u \frac{d}{dN}\frac{e^{\mu r}}{r} ds - \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{du}{dN}\frac{e^{\mu r}}{r} ds$$

où l'on a posé $\mu = \sqrt{-\xi}$. On déduira de cette formule par des calculs analogues à ceux que M. Poincaré a employés dans une autre occasion [1]), la conséquence suivante: Désignons par δ et δ' les maximas des modules de la fonction u et de la quantité $\frac{du}{dN}$, par A', B' et C' trois constantes positives ne dépendant que de la surface (S) et du parrmètre ξ et par ρ un nombre positif tout-à-fait arbitraire d'ailleurs; posons en outre:

$$J = \int_{(S)} |u|^2 ds \qquad J' = \int_{(S)} \left|\frac{du}{dN}\right|^2 ds,$$

nous aurons quel que soit p:

$$\delta < A'\rho(\delta + \delta') + B'(\sqrt{J} + \sqrt{J'}) lg \frac{C'}{\rho}. \tag{23}$$

Reportons-nous aux équations (4) et (16), désignons par Ω une limite supérieure du module de ψ et posons $|h| = H$. Nous trouverons:

$$\delta' < H\varphi_2\delta + \varphi_2\Omega$$

et nous déduirons de l'inégalité (23), au moyen de l'inégalité précédente, que

$$\delta < A'\rho(1 + H\varphi_2)\delta + A'\rho\varphi_2\Omega + B'\{\sqrt{J} + \sqrt{J'}\} lg \frac{C'}{\rho}. \tag{24}$$

Nr. 11. Considérons maintenant de nouveau les équations (22) et donnons à h_0 une valeur complexe pour laquelle les fonctions u_k puissent être toutes calculées. D'après ce qui a été établi au Nr. 9, il est certain que de telles valeurs de h_0 existeront.

[1]) Poincaré. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. Chap. V, p. 105, Acta Mathematica 1806.

Mettons en évidence les partie réelle et imaginaire de chacune des quantités que nous aurons à considérer et posons à cet effet:

$$\left\{\begin{array}{l} h_0 = c_0 + i\, d_0 \\ \psi \;= u_{-1} = P_{-1} + i\, Q_{-1} \\ u_k = P_k + i\, Q_k. \end{array}\right. \tag{25}$$

Il viendra:

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta P_k + \xi P_k = 0 \\ \Delta Q_k + \xi Q_k = 0 \end{array}\right. \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{26}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dP_k}{dN} = c_0\, \varphi\, P_k - d_0\, \varphi\, Q_k + \varphi\, P_{k-1} \\ \dfrac{dQ_k}{dN} = c_0\, \varphi\, Q_k + d_0\, \varphi\, P_k + \varphi\, Q_{k-1}. \end{array}\right. \tag{27}$$

Posons

$$I_{m.n} = \int_{(S)} \varphi\, (P_m P_n + Q_m Q_n)\, ds \tag{28}$$

Les intégrales $I_{m.n}$ présentent de grandes analogies avec certaines intégrales triples que j'ai considérées dans les travaux cités plus haut et qui y sont représentées par une notation analogue. On établira par des considérations tout-à-fait semblables à celles que j'ai développées pour les intégrales triples, l'équation et les inégalités suivantes:

$$d_0\, I_{m-1.m-1} = \int_{(S)} \varphi\, (P_{m-2}\, Q_{m-1} - Q_{m-2}\, P_{m-1})\, ds \tag{29}$$

$$I_{m-1.m-1} = \int_{(S)} \varphi \{ P_m (P_{m-2} - 2 d_0\, Q_{m-1}) + Q_m (Q_{m-2} + 2 d_0\, P_{m-1}) \} ds$$

$$I_{m-1.m-1}^2 < I_{m.m}\, I_{m-2.m-2} \tag{30}$$

$$d_0^2\, I_{m-1.m-1} < I_{m-2.m-2} \tag{31}$$

Il résulte de l'inégalité (30) que la suite

$$\frac{I_{-1.-1}}{I_{0.0}},\ \frac{I_{0.0}}{I_{1.1}},\ \frac{I_{1.1}}{I_{2.2}}, \ldots \tag{32}$$

sera décroissante. Cette suite étant à termes positifs, sera par conséquent convergente; soit l^2 sa limite. L'inégalité (31) nous apprend que

$$l^2 \geqslant d_0^2. \tag{33}$$

Soit l' le rayon de convergence de la série (21), on verra aisément que

(34) $$l^2 \geqslant l'^2.$$

Mais je dis que

(35) $$l^2 = l'^2.$$

Pour le prouver il n'y a qu'à démontrer l'inégalité

(36) $$l^2 \leqslant l'^2.$$

On peut y arriver comme il suit: désignons par δ_i le maximum de la fonction u_i sur la surface (S) et appliquons à la fonction u_k le théorème exprimé par l'inégalité (24). Nous trouverons, en nous appuyant sur une des inégalités (4) et en attribuant à l'indéterminée ϱ une valeur assez petite, que l'on peut déterminer deux constantes positives A et B, indépendantes de l'indice k, telles que l'on ait:

$$\delta_k < \frac{\delta_{k-1}}{2l} + A\sqrt{I_{k.k}} + B\sqrt{I_{k-1.k-1}}$$

où l représente, comme plus haut, le nombre positif dont le carré est égal à la limite de la suite (32). L'inégalité précédente nous apprend que le rayon de convergence de la série

(37) $$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \, \eta^k$$

est au moins égal à celui de la série

(38) $$\Sigma \, \eta^k \sqrt{I_{k.k}}$$

Or, en se reportant à la remarque faite au Nr. 9, on verra que le rayon de convergence de la série (37) est égal au rayon de convergence de la série (21). D'autre part, le rayon de convergence de la série (38) est égal à l. Par conséquent l'inégalité (36) sera satisfaite. Donc, en vertu des remarques faites plus haut, l'égalité (35) aura lieu. C'est ce qu'il s'agissait d'établir.

La méthode de prolongement analytique nous permet de déduire du théorème qui vient d'être démontré et de l'inégalité (33), en tenant compte en outre des remarques faites au Nr. 9, la proposition suivante: la fonction u définie par les équations (15) et (16) existe dans tout le plan de la variable complexe h et elle ne peut avoir des points singuliers que sur l'axe des quantités réelles. J'ajoute qu'il est aisé de prouver que cette fonction est uniforme.

Nr. 12. Passons à l'étude des points singuliers de la fonction u. Cette étude pourrait se faire par la méthode de M. Poincaré mais, ainsi que nous allons le voir, on peut arriver au même but par une méthode analogue à celle que j'ai déjà eu l'occasion d'appliquer dans d'autres circonstances [1]).

Les points singuliers à distance finie de la fonction u étant tous situés sur l'axe des quantités réelles, supposons que c_0 soit l'un d'eux. La suite (32) aura alors évidemment $d_0{}^2$ pour limite. En d'autres termes nous aurons:

$$\lim. \left\{ \frac{I_{k\cdot k}}{I_{k+1.k+1}} - d_0{}^2 \right\}_{k=\infty} = 0. \tag{39}$$

Posons

$$u'_k = u_k + id_0\, u_{k+1}\ (k = -1, 0, 1, 2, \ldots). \tag{40}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P'_k = P_k - d_0\, Q_{k+1} \\ Q'_k = Q_k + d_0\, P_{k+1}, \end{array} \right. \tag{41}$$

nous aurons:

$$u'_k = P'_k + iQ'_k \tag{42}$$

en mettant en évidence les parties réelle et imaginaire.

On aura

$$\Delta u'_k + \xi u'_k\, 0$$

$$\frac{du'_k}{dN} = h_0\, \varphi u'_k + \varphi u'_{k-1}.$$

Par conséquent, si l'on pose

$$I'_{m\cdot n} = \int_{(S)} \varphi\, (P'_m P'_n + Q'_m\, Q'_n)\, ds,$$

on trouvera que la suite

$$\frac{I'_{-1.-1}}{I'_{0.0}},\ \frac{I'_{0.0}}{I'_{1.1}},\ \frac{I'_{1.1}}{I'_{2.2}}, \ldots \tag{43}$$

est convergente et décroissante et qu'elle a pour limite un nombre au moins égal à $d_0{}^2$.

On trouvera d'ailleurs, en tenant compte de l'équation (29)

$$I'_{k\cdot k} = I_{k\cdot k} - d_0{}^2\, I_{k+1.k+1},$$

par conséquent l'équation (39) équivaudra à l'équation:

[1]) Zaremba. O równaniu $\Delta u + \xi u + f = o$ i o funkcyach harmonicznych. Prace matematyczno-fizyczne, 1900.

$$(44)\qquad \lim. \left\{ \frac{I'_{k\cdot k}}{I_{k+1.k+1}} \right\} = 0\,.$$

Considérons p facteurs réels α_1, α_2 $\alpha_p, \ldots$ indépendants des variables (x, y, z), désignons par F_1, F_2, F''_1 et F''_2 des fonctions réelles et posons:

$$(45)\qquad \left| \begin{aligned} F_1 + i F_2 &= \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \frac{u_{k_j}}{\sqrt{I_{k_j.k_j}}} \\ F'_1 + i F''_2 &= \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \frac{u'_{k_{j-1}}}{\sqrt{I_{k_j.k_j}}} \end{aligned} \right.$$

nous aurons:

$$\Delta F_1 + \xi F_1 = 0\,;\ \Delta F_2 + \xi F_2 = 0$$

$$\frac{dF_1}{dN} = c_0\, \varphi F_1 + \varphi F'_1\,;\ \frac{dF_2}{dN} = c_0\, \varphi F_2 + \varphi F''_2$$

d'où

$$(46)\qquad \left| \begin{aligned} &\iint_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)^2 - \xi F_1{}^2 \right\} d\tau + \\ &\qquad\qquad + c_0 \int_{(S)} \varphi F_1{}^2\, ds = -\int_{(S)} \varphi F_1\, F'_1\, ds \\ &\iint_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)^2 - \xi F_2{}^2 \right\} d\tau + \\ &\qquad\qquad + c_0 \int_{(S)} \varphi F_1{}^2\, ds = -\int_{(S)} \varphi F_1\, F'\, ds\,. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, on tirera aisément du théorème démontré au chapitre II la conséquence suivante: si le nombre p est supérieur à une certaine limite ne dépendant que de la surface (S) et des nombres ξ et c_0, il sera possible de disposer des indéterminées $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$ de façon que les deux inégalités suivantes soient vérifiées à la fois:

$$\iint_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)^2 - \xi F_1{}^2 \right\} d\tau > (1-c_0) \int_{(S)} \varphi F_1{}^2\, ds$$

$$\iint_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)^2 - \xi F_2{}^2 \right\} d\tau > (1-c_0) \int_{(S)} \varphi F_2{}^2\, ds\,.$$

Les équations (46) nous donneraient alors:

$$\int_{(S)} \varphi (F_1^2 + F_2^2)\, ds < -\int \varphi (F_1 F_1' + F_2 F'_2)\, ds$$

d'où, en s'appuyant sur l'inégalité de M. Schwarz:

$$\{ \int_{(S)} \varphi (F_1^2 + F_2^2)\, ds \}^2 < \int_{(S)} \varphi (F_1^2 + F_2^2)\, ds \int_{(S)} \varphi (F'_1{}^2 + F'_2{}^2)\, ds$$

ou bien

$$\int_{(S)} \varphi (F_1^2 + F_2^2)\, ds < \int_{(S)} \varphi (F'_1{}^2 + F'_2{}^2)\, ds\,. \tag{47}$$

Chacun des deux membres de cette inégalité est une forme quadratique par rapport aux indéterminées $\alpha, \ldots \alpha_p$, les coefficients des carrés des α_j dans la forme

$$\int_{(S)} \varphi (F_1^2 + F_2^2)\, ds \tag{48}$$

sont tous égaux à l'unité, enfin, en vertu de l'équation (44) tous les coefficients de la forme

$$\int_{(S)} \varphi (F'_1 + F'_2{}^2)\, ds$$

tendent vers zéro lorsque tous les nombres $k_1, k_2 \ldots k_p$ croissent indéfiniment suivant une loi quelconque.

Voici ce que l'on peut conclure de ces remarques et de la possibilité de satisfaire à l'inégalité (47) par un choix convenable des α_j: lorsque les k_j croissent indéfiniment les coefficients des produits $\alpha_j\, \alpha_t\, (j \neq t)$ dans la forme (48) ne tendent jamais tous vers zéro.

Cela posé j'observe que le coefficient de $\alpha_j\, \alpha_t$ dans la forme (48) est égal à

$$2\, \frac{I_{k_j\,.\,k_t}}{\sqrt{I_{k_j\,.\,k_j} \cdot I_{k_t\,.\,k_t}}}$$

Il ne peut donc pas arriver que l'expression

$$\frac{I_{m\,.\,n}}{\sqrt{I_{m\,.\,m}\, I_{n\,.\,n}}} \tag{49}$$

tende forcément vers zéro lorsque l'un des nombres m ou n croît indéfiniment.

Nr. 13. Il résulte des propriétés de la suite (32) que la suite

$$I_{-1\,.\,-1},\; I_{o\,.\,o}\, d^2,\; I_{1\,.\,1}\, d_o^4, \ldots \tag{50}$$

sera décroissante. D'ailleurs elle est à termes positifs, elle sera donc convergente.

Je vais prouver que, lorsque l'équation (39) est vérifiée, la limite de cette suite est un nombre différent de zéro.

Les équations (22) nous donnent:

$$\Delta \sum_{j=0}^{2t-1} \eta^j u_{m+1+j} + \xi \sum_{j=0}^{2t-1} \eta^j u_{m+1+j} = 0$$

$$\frac{d}{dN} \sum_{j=0}^{2t-1} \eta^j u_{m+1+j} = (h_0 + \eta) \varphi \sum_{j=0}^{2t-1} \eta^j u_{m+1+j} + \varphi u_m - \varphi \eta^{2t} u_{m+2t}$$

Posons

$$\eta = -i d_0$$

$$A_{m,t} + i B_{m,t} = \sum_{j=0}^{2t-1} (-i d_0)^j u_{m+1+j},$$

en désignant par $A_{m,t}$ et $B_{m,t}$ des fonctions réelles, il viendra:

$$\Delta A_{m,t} + \xi A_{m,t} = 0; \; \Delta B_{m,t} + \xi B_{m,t} = 0$$

$$\frac{d A_{m,t}}{dN} = c_0 \varphi A_{m,t} + \varphi P_m - \varphi (-d_0^2)^t P_{m+2t}$$

$$\frac{d B_{m,t}}{dN} = c_0 \varphi B_{m,t} + \varphi Q_m - \varphi (-d_0^2)^t Q_{m+2t}$$

On déduit de ces équations et des équations (27), en tenant compte des équations (26) et en s'appuyant sur le théorème de Green:

$$I_{m.k} - (-d_0^2)^t I_{k.m+2t} = \int_{(S)} \varphi \{ A_{m,t} (P_{k-1} - d_0 Q_k) + \tag{51}$$
$$+ (B_{m,t} (Q_{k-1} + d_0 P_k) \} ds.$$

Posons

$$M_{m,t} = \int_{(S)} \varphi (A_{m,t}^2 + B_{m,t}^2) ds$$

et reportons-nous aux notations définies au Nr. 12.

Nous déduirons de l'équation (51) en nous appuyant sur l'inégalité de M. Schwarz:

$$| I_{m.k} | < d_0^{2t} \sqrt{I_{k.k} I_{m+2t.m+2t}} + \sqrt{M_{m,t} I'_{k-1.k-1}}$$

d'où

$$I_{m.k}^2 < 2 d_0^{4t} I_{k.k} I_{m+2t.m+2t} + 2 M_{m,t} I'_{k-1.k-1},$$

ce qui donne:

$$\frac{I_{m.k}^2}{I_{m.m} I_{k.k}} < 2 \frac{d_0^{4t} I_{m+2t.m+2t}}{I_{m.m}} + 2 \frac{M_{m,t}}{I_{m.m}} \frac{I'_{k-1.k-1}}{I_{k.k}} \tag{52}$$

Supposons pour un moment que la suite (50) ait zéro pour limite. On pourrait alors prendre le nombre t assez grand pour que l'on ait:

$$2\,\frac{d_0^{4t}\,I_{m+2t\,.\,m+2t}}{I_{m\,.\,m}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

si petit que soit le nombre positif ε. Ayant chosi t de façon que cette inégalité soit satisfaite, on aura, à cause de l'équation (44), pour des valeurs assez grandes de k

$$2\,\frac{M_{m,t}}{I_{m\,.\,m}}\,\frac{I'_{k-1\,.\,k-1}}{I_{k\,.\,k}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

et l'équation (52) nous donnerait alors

$$\frac{I_{m\,.\,k}^{\,2}}{I_{m\,.\,m}\,I_{k\,.\,k}} < \varepsilon$$

On aurait donc, pour une valeur arbitrairement attribuée à m

$$\lim\left\{\frac{I_{m\,.\,k}^{\,2}}{I_{m\,.\,m}\,I_{k\,.\,k}}\right\}_{k=\infty} = 0\,.$$

Or nous avons vu au Nr. 12 que cette circonstance ne peut se présenter. Donc la limite de la suite (50) est différente de zéro, lorsque l'équation (39) a lieu. *C. Q. F. D.*

Nr. 14. Désignons par R un nombre positif dont le carré soit égal à la limite de la suite (43). Nous avons vu que

$$R^2 \geqq d_0^{\,2}.$$

Je dis que, lorsque l'équation (39) est vérifiée, l'on a:

$$R^2 > d_0^{\,2}. \tag{53}$$

En effet, si l'on avait

$$R^2 = d^2,$$

on trouverait, en raisonnant comme au numéro précédent, que

$$\lim\,(d_0^{\,2k}\,I'_{k\,.\,k})_{k=\infty} > 0\,,$$

mais cela serait incompatible avec l'équation (44) et l'inégalité

$$\lim\,(d_0^{\,2k}\,I_{k\,.\,k})_{k=\infty} > 0\,,$$

démontrée au numéro précédent.

Reportons-nous maintenant au Nr. 12 et posons

$$u' = \sum_{k=0}^{\infty} u'_k\,\eta^k. \tag{54}$$

Les équations (40) et (21) nous donneront:

$$(\eta + i d) u = \eta u' + i d_0 u_0 . \tag{55}$$

Or le rayon de la convergence de la série (54) est égal à R et R vérifie l'inégalité (53). L'équation (55) exprime par conséquent que, pour $\eta = -i d_0$, la fonction u a un pôle simple et que le résidu correspondant v nous est donné par la formule

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} (-i d_0)^{k+1} u'_k + i d_0 u_0 . \tag{56}$$

D'ailleurs

$$\Delta u' + \xi u' = 0,$$

$$\frac{du'}{dN} = (h_0 + \eta) \varphi u' + (\psi + i d_0 u_0) \varphi \eta,$$

$$\Delta u_0 + \xi u_0 = 0,$$

$$\frac{du}{dN} = h_0 \varphi u_0 + \varphi \psi ,$$

ce qui donne

$$\Delta (\eta u' + i d_0 u_0) + \xi (\eta u' + i d_0 u_0) = 0,$$

$$\frac{d (\eta u' + i d_0 u_0)}{dN} = (h_0 + \eta) \varphi (\eta u' + i d_0 u_0) + \varphi \psi (\eta + i d_0),$$

d'où, en posant $\eta = - i d_0$,

$$\Delta v + \xi v = 0,$$

$$\frac{dv}{dN} = c_0 \varphi v .$$

La fonction v est donc une fonction fondamentale à moins qu'elle ne soit identiquement nulle. Il est très aisé de voir qu'elle ne l'est pas. En effet, il résulte des équations (56) et (40) que

$$v = - \lim \{ (- i d_0)^{k+2} u_{k+1} \}_{k=\infty} ;$$

or cette limite ne peut être identiquement nulle parce que, dans ce cas, la suite (50) aurait zéro pour limite et nous avons vu qu'il n'en est pas ainsi.

L'ensemble des résultats établis dans ce travail nous amène aux conclusions suivantes:

1) Etant donnée une surface (S) vérifiant les hypothèses énoncées dans l'introduction et une fonction continue φ définie sur cette surface, constamment positive et différente de zéro, il correspondra à tout nombre réel ξ une suite infinie

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \ldots \tag{57}$$

de nombres réels, négatifs à partir d'un certain rang et jouissant des propriétés que voici:

A) On aura à partir d'un certain rang

$$-\lambda_p > M' \sqrt[3]{p} \tag{58}$$

où M' est un nombre positif indépendant du nombre p.

B) la suite (57) correspond terme à terme à une suite de fonctions réelles

$$v_1, v_2, v_3, \ldots \tag{59}$$

et chaque fonction v_k prise dans cette suite vérifie à l'intérieur de la surface (S) l'équation:

$$\Delta v_k + \xi v_k = 0$$

et satisfait à la condition aux limites

$$\frac{dv_k}{dN} = \lambda_k \varphi v_k ;$$

on aura, en outre:

$$\int_{(S)} \varphi v_k^2 \, ds = 1$$

et

$$\int_{(S)} \varphi v_k v_t \, ds = 0,$$

pour $k \neq t$.

C) Si une fonction v vérifie l'équation

$$\Delta v + \xi v = 0$$

à l'intérieur de la surface (S) et si elle satisfait à la condition aux limites

$$\frac{dv}{dN} = \lambda \varphi v$$

où λ représente une constante, le nombre λ fera partie de la suite (57) et la fonction v elle-même sera une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants d'un nombre fini de fonctions prises dans la suite (59).

2) La fonction u définie par les équations (15) et (16) considérée comme fonction du paramètre h est une fonction méromorphe dont les pôles font tous partie de la suite (57). Enfin les résidus correspondants à ces pôles sont chacun une combinaison linéaire

et homogène à coefficients constants d'un nombre fini de fonctions prises dans la suite (59).

En résumé, nous avons établi l'existence des fonctions fondamentales et déduit quelques unes des propriétés de ces fonctions.

Pour abréger, je n'ai pas établi que la suite (57) est infinie, mais on comblera aisément cette lacune.

---

10. M. C. Żorawski présente l'étude de M. S. KĘPIŃSKI: **O całkach rozwiązań równań różniczkowych z sobą sprzężonych, rzędu 2-go, posiadających trzy punkty osobliwe; ciąg dalszy.** ***(Ueber Integrale der sich selbst adjungierten Differentialgleichungen 2-er Ordnung, mit drei singulären Punkten; Fortsetzung).*** *(Sur les intégrales des solutions des équations du second ordre, équivalentes à leur adjointe, avec trois points singuliers).*

Diese Note ist eine Fortsetzung der unter demselben Titel erschienenen Arbeit[1]) und bezieht sich auf die Integrale der Lösungen einer sich selbst adjungierten Differentialgleichung:

$$A_2 y'' + A_2' y' + A_0 y = 0 \tag{1}$$

$$A_2 = (z - e_1)^2 (z - e_2)^2 (z - e_3)^2 = a_0 + a_1 z + .. + a_6 z^6,$$

$$A_0 = c_0 + c_1 z + .. + c_4 z^4,$$

$$l_i' + l_i'' = -1, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Diese Integrale besitzen folgende Formen:

a) Integrale erster Gattung:

$$j_i = \int_y^x y_i \, dz, \qquad i = 1, 2,$$

b) Integrale zweiter Gattung:

$$Z_i(t) = \int_y^x \frac{y_i}{(z-t)^2} \left[F_A(z,t) + \tfrac{1}{2} (z-t)^2 F_h^1(z,t) \right] dz,$$

c) Integrale dritter Gattung:

[1]) Bulletin international de l'Acad. des Sciences de Cracovie, Fevrier 1899. Diese Arbeit bezeichne ich im Folgenden mit (I).

$$Q_{ik} = \int_y^x \int_\eta^\zeta \frac{y_i \upsilon_k}{(z-\zeta)^3} \left[F_A^3(z,\zeta) + \tfrac{1}{2}(z-\zeta)^2 F_h^1(z,\zeta) \right] dz\, d\zeta,$$

wo $F_A^3(z,\zeta)$ die dritte Polare von A_2 und $F_h^1(z.\zeta)$ die erste Polare von

$$h = A_0 - \tfrac{1}{6} A_2''$$

bedeutet.

§ 1.

In der erwähnten Arbeit (I) sind diese Functionen in Hinsicht auf ihr Verhalten in der Umgebung verschiedener Punkte untersucht worden. Insbesondere ist die Function Q_{ik} in den Punkten

$$x = a, \xi = b$$

1) $a \gtrless b$

2) $a = b \gtrless e_i \qquad i = 1, 2, 3$

in Potenzreihen entwickelt worden. Der Verfasser vervollständigt seine Untersuchung, indem er noch die Entwickelung dieser Functionen Q_{ik} im Falle

$$a = b = e \; (= 0)$$

durchführt. Es ist nämlich:

$$V(z,\zeta) = F^3 A_2 + \tfrac{1}{2}(z-\zeta)^2 F_h^1 = A_2 + \tfrac{1}{2} A_2'(\zeta - z) + \tfrac{1}{2} A_0 (\zeta - z)^2 - \tag{1}$$

$$- \tfrac{1}{2} M(\zeta - z)^3 = \mathrm{A}_2 + \tfrac{1}{2} \mathrm{A}_2'(z-\zeta) + \tfrac{1}{2} \mathrm{A}_0 (z-\zeta)^2 - \tfrac{1}{2} M(z-\zeta)^3,$$

wo

$A_2 = A_2(z)$, $M = M(z) = -\frac{1}{12} A_2''' - \frac{1}{2} A_0'$, Functionen von z und $\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_2(\zeta)$, $M = M(\zeta)$ Functionen von ζ sind. Es sei ferner:

$$\Phi(z,\zeta) = V(z,\zeta) y_1 \upsilon_2 z^{-l'} \zeta^{-l''} - \zeta \mathrm{A}_2 \upsilon_1 \upsilon_2 - (z-\zeta)[-l' \mathrm{A}_2 \upsilon_1 \upsilon_2 +$$

$$+ \zeta(\mathrm{A}_2 \upsilon_1' \upsilon_2 + \tfrac{1}{2} \mathrm{A}_1' \upsilon_1 \upsilon_2)] + \tfrac{1}{2}(z-\zeta)^2 [l' l'' \zeta^{-1} \mathrm{A}_2 \upsilon\, \upsilon_2 + 2l'(\mathrm{A}_2 \upsilon_1' \upsilon_2 +$$

$$+ \tfrac{1}{2} A_2' \upsilon_. \upsilon_2)]$$

Weil nun

$$\Phi_{z=\zeta} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z_{z=\zeta}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_{z=\zeta}} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2_{z=\zeta}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z\, \partial \zeta_{z=\zeta}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2_{z=\zeta}} = 0,$$

ist die Function $\Phi(z,\zeta)$ durch $(z-\zeta)^3$ theilbar, woraus folgt:

$$\frac{Vy_1 \upsilon_2}{(z-\zeta)^3} = \frac{A_2 \upsilon_1 \upsilon_2}{(z-\zeta)^3} z^{l'} \zeta^{l''+1} + \frac{-l' A_2 \upsilon_1 \upsilon_2 z^{l'} \zeta^{l''} + (A_2 \upsilon_1' \upsilon_2 + \frac{1}{2} A_2' \upsilon_1 \upsilon_2) z^{l'} \zeta^{l''+1}}{(z-\zeta)^2} -$$

$$- \frac{\frac{1}{2} l' l'' A^2 \upsilon_1 \upsilon_2 z^{l'} \zeta^{l''-1} + l' (A_2 \upsilon_1' \upsilon^2 + \frac{1}{2} A_2' \upsilon_1 \upsilon_2) z^{l'} \zeta^{l''}}{(z-\zeta)} + z^{l'} \zeta^{l''} \mathfrak{P}(z, \zeta);$$

$\mathfrak{P}(z,\zeta)$ ist eine Reihe, welche nach Potenzen der in der Klammer stehenden Grössen mit positiven ganzen Exponenten fortschreitet.

Zu bemerken ist, dass:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z \, \partial \zeta} \frac{A_2 \upsilon_1 \upsilon_2 z^{l'+1} \zeta^{l''+1}}{(z-\zeta)} = \frac{A_2 \upsilon_1 \upsilon_2 z^{l'} \zeta^{l''+1}}{(z-\zeta)^3} +$$

$$\frac{-l' A_2 \upsilon_1 \upsilon_2 z^{l'} \zeta^{l''} + (A_2 \upsilon_1' \upsilon_2 + \frac{1}{2} A_2' \upsilon_1 \upsilon_2) z^{l'} \zeta^{l''+1}}{(z-\zeta)^2} -$$

$$- \frac{\frac{1}{2} l' l'' A_2 \upsilon_1 \upsilon_2 z^{l'} \zeta^{l''-1} + l' (A_2 \upsilon_1' \upsilon_2 + \frac{1}{2} A_2' \upsilon_1 \upsilon_2) z^{l'} \zeta^{l''}}{z-\zeta} -$$

$$-\frac{1}{2} (l' z + l'' \zeta) \frac{z^{l'} \zeta^{l''}}{(z-\zeta)^2}$$

Es ist also:

$$\frac{V y_1, v_2}{(z-\zeta)^3} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z \, \partial \zeta} \frac{A_2 \upsilon_1 \upsilon_2 z^{l'+1} \zeta^{l''}}{z-\zeta} + \frac{1}{2} \frac{z^{l'} \zeta^{l''}}{(z-\zeta)^2} (l' z + l'' \zeta) +$$

$$+ z^{l'} \zeta^{l''} \mathfrak{P}(z, \zeta)$$

und

$$Q_{12} = -\frac{1}{2} \frac{A_2 \upsilon_1 \upsilon_2 z^{l'+1} \zeta^{l''}}{z-\zeta} + \frac{1}{2} \iint (l' z + l'' \zeta) \frac{z^{l'} \zeta^{l''}}{(z-\zeta)^2} \partial z \, \partial \zeta +$$

$$+ C + z^{l'+1} \zeta^{l''+1} \mathfrak{P}(z, \zeta).$$

Um den Werth des Integrals

$$\iint (l' z + l'' \zeta) \frac{z^{l'} \zeta^{l''}}{(z-\zeta)^2} \, dz \, d\zeta$$

zu finden, setzen wir

$$l' = -\frac{p'}{q}, \; l'' = -\frac{p''}{q} \qquad (p' + p'' = q),$$

$$z = z'^q \quad \zeta = \zeta'^q$$

und erhalten

$$\iint (l'z + l''\zeta)\frac{z^{l'}\zeta^{l''}}{(z-\zeta)^2}dzd\zeta = -$$

$$- \; q \iint (p'z'^{2q-p'-1}\zeta'^{p'-1} + p''z'^{p''-1}\zeta'^{2q-p''-1})\frac{dz'd\zeta'}{(z'^q-\zeta'^q)^2}.$$

Wenn ε eine primitive Einheitswurzel q-ten Grades bedeutet, ist

$$z'^q - \zeta'^q = (z'-\zeta')(z'-\varepsilon\zeta')\ldots\ (z'-\varepsilon^{q-1}\zeta'),$$

woraus folgt

$$\left[\frac{z'^q-\zeta'^q}{z'-\varepsilon^n\zeta'}\right]^2 = z'^{2q-2} + 2\varepsilon^n z'^{2q-3}\zeta' + \cdots + \varepsilon^{(2q-2)n}\zeta'^{2q-2}$$
$$n=0, 1, \ldots p-1,$$

und

$$\sum_{n=o}^{9-1}\varepsilon^{n(p''+1)}\left[\frac{z'^q-\zeta'^q}{z'-\varepsilon^n\zeta'}\right]^2 = q(p'z'^{2q-p'-1}\zeta'^{p'-1} + p''z'^{p''-1}\zeta'^{2q-p''-1}),$$

oder

$$-q(p'z'^{2q-p'-1}\zeta'^{p'-1} + p''z'^{p''-1}\zeta'^{2b-p''-1}]\frac{1}{(z'^q-\zeta'^q)^2} = -\sum_{n=o}^{q-1}\frac{\varepsilon^{n(p''+1)}}{(z'-\varepsilon^n\zeta')^2}.$$

Es ist also

$$\tfrac{1}{2}\iint (l'z + l''\zeta)\frac{z^{l'}\zeta^{l''}}{(z-\zeta)^2} = -\tfrac{1}{2}\sum_{n=o}^{q-1}\varepsilon^{np''}\log(z'-\varepsilon^n\zeta')$$

Setzt man nun $z' = \sqrt[q]{\zeta}$, $\zeta' = \sqrt[q]{\zeta}$, so bekommt man endlich:

$$Q_{12} = -\tfrac{1}{2}\frac{A_2 \upsilon_1 \upsilon_2 z^{l'+1}\zeta^{l''}}{z-\zeta} - \tfrac{1}{2}\sum_{n=o}^{9-1}\varepsilon^{np''}\log\left(\sqrt[q]{z} - \varepsilon^n\sqrt[q]{\zeta}\right) + \qquad (3)$$
$$+ C + z^{l'+1}\zeta^{l''+1}\mathfrak{P}_1(z,\zeta)$$

und analog

$$Q_{21} = -\tfrac{1}{2}\frac{A_2 \upsilon_1 \upsilon_2 z^{l''\cdot 1}\zeta^{l'}}{z-\zeta} - \tfrac{1}{2}\sum_{n=o}^{q-1}\varepsilon^{np'}\log\left(\sqrt[q]{z} - \varepsilon^n\sqrt[q]{\zeta}\right) + \qquad (4)$$
$$+ C + z^{''+1}\zeta^{l''+1}\mathfrak{P}_2(z,\zeta)$$

Es bleibt also noch das Integral

$$Q_{ii} = \iint \frac{V y_i \upsilon_i}{(z-\zeta)^3} dz\, d\zeta$$

zu untersuchen. Indem man beachtet, dass die Function:

$$\Phi = V y \upsilon z^{-l} \zeta^{-l} - \mathrm{A}_2 \upsilon^2 \zeta^{-2l} - (z-\zeta)[-l \mathrm{A}_2 \upsilon^2 + \zeta (\mathrm{A}_2 \upsilon \upsilon^1 +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \mathrm{A}_2' \upsilon^2) \zeta^{-2l-1} + \tfrac{1}{2} (z-\zeta)^2 [l l' \mathrm{A}_2 \upsilon^2 \zeta^{-1} + 2l (\mathrm{A}_2 \upsilon \upsilon' + \tfrac{1}{2} \mathrm{A}_2' \upsilon^2)] \zeta^{-2l-1},$$

$$(l' = -l - 1)$$

und ihre Ableitungen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \zeta}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2}$$

für $z = \zeta$ zu Null werden, erhält man

$$\frac{V y \upsilon}{z-\zeta} = -\tfrac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} \frac{\mathrm{A}_2 \upsilon^2 z^{l+1} \zeta^{-l-1}}{z-\zeta} + z^l \zeta^l P(z, \zeta),$$

woraus folgt:

(5) $$Q_{ii} = -\tfrac{1}{2} \frac{\mathrm{A}_2 \upsilon_i^2 z^{l_i'+1} \zeta^{l_i''}}{z-\zeta} + C + z^{l_i'+1} \zeta^{l_i'+1} \mathfrak{P}(z, \zeta)$$

Hier giebt's also keine logarithmische Unstetigkeit.

§. 2.

Der Inbegriff aller Differentialgleichungen, welche mit der gegebenen zur selben Art (im Sinne von Fuchs und Poincaré) gehören, spielen in diesen Forschungen eine ähnliche Rolle, wie der Inbegriff aller zur selben Riemann'schen Fläche gehörenden algebraischen Gleichungen. Die erste und wichtige Frage bezieht sich also auf die Reduction der Integrale aller zur selben Art gehörenden Functionen.

Diese Functionen sind charackterisirt durch:

(6) $$Y = r_0(z) y + r_1(z) y',$$

wo $r_0(z)$, $r_1(z)$ beliebige rationale Functionen von z sind und es handelt sich um die Reduction der Integrale

$$\int Y dz.$$

Weil das Integral:

$$\int r_1(z) y' dz = r_1(z) y - \int r_1'(z) y\, dz$$

ist, kann man sich nur auf die Reduction der Integrale

$$\int R(z)\, y\, dz$$

beschränken, wo $R(z)$ rationale Function ist. Indem man die Function in die Summe der rationalen Brüche zerlegt, bekommt man Integrale der Form

$$I_p = \int z^p\, y\, dz, \qquad J_p = \int \frac{y}{(z-a)^p}\, dz, \qquad p = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

$$I_0 = J_0 = j.$$

Die Reductionsformeln folgen aus der Identität:

$$[A_2\, y'\, (z-a)^p]' = (A_2\, y'' + A_2' y')(z-a)^p + p\, A_2\, y'\, (z-a)^{p-1} =$$
$$= - A_0\, y\, (z-a)^p + p\, A_2\, y'\, (z-a)^{p-1}.$$

Nach der Integration ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} &\int [A_0\, (z-a)^2 + p\, A_2'\, (z-a) + p\, (p-1)\, A_2]\, (z-a)^{p-2} = \\ &= A_2\, (z-a)^{p-1}\, [p y + (z-a)\, y'] \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Für $a = o$ und $p = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ folgen die Gleichungen:

$$\int A_0\, y\, dz = - A_2\, y'$$
$$\int (A_0\, z + A_2')\, y dz = A_2\, (y - z y')$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} &c_o j + c_1 I_1 + c_2 I_2 + c\, I_3 + c_4 I_4 = - A_2\, y' \\ &d_o j + d_1 I_1 + d_2 I_2 + d_3 I_3 + d_4 I_4 + d_5 I_5 = A_2\, (y - z y') \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Vermittels dieser Gleichungen kann man die Integrale $I_4, I_5, \ldots$ 1º) durch die rationale (ganze) Function $G(z,\ y,\ y')$ und 2) die Summe der Integrale $j,\ I_1,\ I_2,\ I_3$ mit constanten Coefficienten ausdrücken.

Weil aber

$$Z = \tfrac{1}{4}\, (a_3 - c_1)\, j + \tfrac{1}{2}\, 2 a_4 - c_2)\, I_1 - \tfrac{1}{2}\, a_5\, I_2 - I_3$$

ist, ergiebt sich der Satz:

(1) Die Integrale $I_p = \int z^p y\, dz$ kann man durch rationale (ganze) Function $G(z,\ y,\ y')$ und durch die Summe

der Integrale j, Z, I_1, I_2 mit constanten Coefficienten ausdrücken.

Auf demselben Wege gelangt man zum folgenden Satze:

(2) Die Integrale $J_p = \int \frac{I}{(z-a)^p} dz$ lassen sich durch eine rationale Function $R(z, y, y')$ und durch die Summe der Integrale j, Z, I_1, I_2, J_1, J_2 mit constanten Coefficienten ausdrücken.

Indem man nun beachtet. dass die Integrale I_1, I_2 principiel von den Integralen J_1, J_2 nicht verschieden sind, dass sie sich sogar in einander transformiren lassen. bekommt man den Satz:

Jedes Integral

$$\int Y dz = \int [r_0(z) y + r_1(z) y'] dz$$

lässt sich durch eine rationale Function $R(z, y, y')$ und durch die Summe der Integrale j, Z, J_1, J_2 (I_1, I_2) mit constanten Coefficienten darstellen.

Die Integrale I_1, I_2, J_1, J_2 besitzen algemein zu reden logarithmische Unstetigkeiten. welche in gewissen Fällen auch algebraisch werden können, in keinem Falle sind sie aber überall endlich. Daraus folgt der Satz:

Wenn in der Differentialgleichung (1) $|l_i'| < 1$, $|l_i''| < 1$ und $l_i' \gtrless l_i''$, $l_i' + l_i'' = -1$ ist, existieren unter den Integralen

$$\int Y dz$$

nur zwei

$$j_1 = \int y_1 dz, \ j_2 = \int y_2 dz$$

erster Gattung (überall endliche) linear unabhängige[1]).

Die Sätze (1, 2) vereinfachen sich noch, wenn man einen der singulären Punkte z. B. e_3 im Unendlichen annimmt.

[1]) Als diese Arbeit schon geendet war, bemerkte ich, dass H. Hirsch im 54 B. der Mathem Anm. für die algemeine Differentialgleichung die Anzahl der überall endlichen Integrale gefunden hat. Dieses Resultat für die sich selbst adjungirten Diffgl. war mir schon früher bekannt und ich hoffe bald darauf zurück zukommen. Ich bemerke nur dass H. Hirsch volständige Reduction nicht durchführt.

Dann ist:

$$A_2 = (z - e_1)^2 (z - e_2)^2, \quad A_0 = c_0 + c_1 z + c_2 z^2$$

$$I_1 = Z = \int z y \, dz$$

und die Gleichungen (A) reducieren sich auf:

$$c_o j + c_1 Z + c_2 I_2 = - A_2 y'$$

$$d_o j + d_1 Z + d_2 I_2 + d_3 I_3 = A_2 (y - z y')$$

. . . .

woraus folgt:

Die integrale $I_p = \int z^p y \, dz$ lassen sich durch rationale (ganze) Function $G(z, y, y')$ und durch die Summe der Integrale j, Z mit constanten Coefficienten darstellen.

Die Integrale $J_p = \int \frac{y}{(z-a)_p} dz$ lassen sich durch rationale Functionen $R(z, y, y')$ und durch die Summe der Integrale z, J_1 J_2 mit constanten Coefficienten darstellen.

---

11. PUBLICATIONS DE LA CLASSE.

Le Secrétaire dépose sur le bureau les dernières publications de la Classe:

T. Browicz. „Budowa przewodów żółciowych międzykomórkowych i ich stosunek do naczyń krwionośnych włoskowatych“ *(La structure des conduits biliaires intercellulaires et leur rapport avec les vaisseaux sanguins capillaires).— (Bau der intercellulären Gallengänge und ihr Verhältnis zu den Blutcapillaren).*

L. Bruner. „Studya dynamiczne nad bromowaniem ciał aromatycznych“ *(Etudes dynamiques sur la bromuration des corps de la série aromatique). — (Dynamische Untersuchungen über die Bromierung aromatischer Körper).*

Wł. Kulczyński. „Arachnoidea in colonia Erythraea a Dre K. M. Levander collecta“. (Accedunt tabulae duae).

Wł. Satke. „Kierunek, droga i szybkość wiatru w Krakowie“ *(La direction le chemin et la vitesse du vent à Cracovie). — (Die Richtung, der Weg und die Geschwindigkeit des Windes in Krakau).*

St. Tołłoczko. „Studya doświadczalne nad kryoskopijnemi własnościami nieorganicznych rozczynników“ *(Etudes expérimentales sur les propriétés cryoscopi* *ques des dissolvants anorganiques). — (Kryoskopische Untersuchungen in anorganischen Lösungsmitteln).*

K. Żorawski. „O pewnem zagadnieniu z teoryi podobnego odwzorowania powierzchni“ *(Sur une problème de la représentation conforme). — (Ueber ein Problem der Theorie der conformen Abbildung von Flächen).*

Nakładem Akademii Umiejętności
pod redakcyą Sekretarza Wydziału matem.-przyr. Dra Józefa Rostafińskiego.

Kraków, 1901. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

5 Marca 1901.