DE LA COMPARAISON

DES LIGNES COURBES AVEC LES LIGNES DROITES.

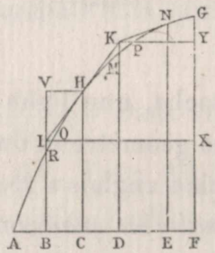
DISSERTATION GÉOMÉTRIQUE.

Jamais encore, que je sache, une ligne courbe purement géométrique n'a été égalée par les géomètres à une droite donnée. Ce qu'en effet un subtil mathématicien anglais a récemment découvert et démontré, *que la cycloïde primaire est quadruple du diamètre du cercle qui l'engendre,* paraît devoir se limiter, d'après l'avis des plus savants géomètres. Ils pensent en effet que c'est une loi et un ordre de la nature qu'on ne puisse trouver une droite égale à une courbe, à moins de supposer d'abord une autre droite égale à une autre courbe, et prenant cet exemple de la cycloïde, ils montrent qu'il en est ainsi dans ce cas. Je ne le nie pas; il est clair en effet que le tracé de la cycloïde suppose l'égalité d'une autre courbe avec une droite, à savoir celle de la circonférence du cercle générateur de la cycloïde avec la droite qui est la base de la cycloïde. Mais on va voir ci-dessous ce qu'il en est de cette loi de la nature qu'ils établissent, et combien il est dangereux sur un ou deux faits d'expérience de conclure aussitôt un axiome. Je vais en effet démontrer l'*égalité à une droite d'une courbe véritablement géométrique et pour la construction de laquelle on n'a à supposer aucune égalité semblable d'une autre courbe avec une droite,* et je traiterai toute la question aussi brièvement que possible.

Proposition I.

Soit (fig. 120) *une courbe quelconque* AHMG *concave vers un même côté, par exemple une des paraboles en nombre infini, dont les tangentes* *rencontrent en dehors de la courbe la base* AF *et l'axe* FG. *Je prends sur une courbe de cette nature un point quelconque* H *par lequel je mène la tangente* IHK; *sur celle-ci je prends, de côté et d'autre, les points* K, I, *d'où j'abaisse* IB, KD *perpendiculaires sur la base* AF *et coupant la courbe aux points* R, M. *Je dis que le segment* HI *de la tangente est plus petit que l'arc de courbe* RH, *qu'au contraire le segment* HK *de la même tangente est plus grand que l'arc de courbe* HM.

Fig. 120 (1).



En effet, puisque, par hypothèse, la tangente KI rencontre la base AF en dehors de la courbe, l'angle CHI que fait la perpendiculaire HC à la base avec la tangente HI est plus petit qu'un droit, et par conséquent la perpendiculaire abaissée de H sur la droite BI tombera en V au-dessus des points B, R, I. On en conclut que HV $<$ HI et que HI est plus petit que la droite qui joint les points H, R. Donc, *a fortiori*, HI est plus petit que l'arc de courbe HR sous-tendu par cette droite qui joint les points H, R. Premier point qu'il fallait démontrer.

Je dis maintenant que le segment KH est plus grand que l'arc de courbe HM. Du point K je mène à la courbe la tangente KN, et j'abaisse la perpendiculaire NE. Il est prouvé, par ce qui précède, que KN $<$ arc NM. Mais, d'après Archimède, la somme des tangentes HK + KN $>$ arc HN. Donc segment HK $>$ arc HM. Second point qu'il fallait démontrer.

Il n'y a pas à objecter que la tangente menée du point K peut tomber au delà du point G. Car, dans ce cas, on peut prendre un autre point entre K et M, et employer le raisonnement précédent.

Il suit de là que, si des points K, I on abaisse sur l'axe des perpendiculaires qui coupent la courbe en O, P, on aura, dans le cas de la figure, HI $>$ arc HO et HK $<$ arc HP.

Si l'on imagine en effet la figure retournée, en sorte que l'on prenne l'axe comme base, et la base comme axe, la démonstration sera non seulement semblable, mais absolument identique.

Il résulte enfin de la construction même que, si BC $=$ CD, on a les segments des tangentes HI $=$ HK. Ce qu'il est important de remarquer.

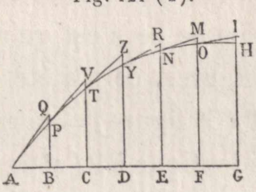
Proposition II.

Pour mesurer les lignes courbes, je ne me servirai pas de lignes inscrites et circonscrites à l'exemple d'Archimède, mais seulement de circonscrites formées par des segments de tangentes; je démontrerai, en effet, qu'il y a deux séries de tangentes, l'une plus grande que la courbe, l'autre plus petite, et les analystes verront que la démonstration par les circonscrites seules est beaucoup plus facile et plus élégante.

Je dis donc qu'il est possible, suivant l'esprit de la méthode d'Archimède, *de circonscrire à une quelconque des courbes précitées deux figures composées de droites, et dont l'une surpasse la courbe d'une différence inférieure à un intervalle donné quelconque; dont l'autre soit au contraire plus petite que la courbe d'une différence également inférieure à un intervalle donné quelconque.*

Soit (*fig.* 121) une quelconque des courbes précitées : je partage la base AG en un nombre quelconque de parties égales, AB, BC, CD,

Fig. 121 (2).

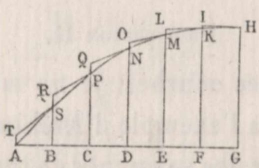


DE, EF, FG; par les points B, C, D, E, F, j'élève les perpendiculaires BQ, CV, DZ, ER, FM, qui rencontrent la courbe aux points P, T, Y, N, O. Je mène les tangentes AQ, PV, TZ, YR, NM, OI.

D'après la première proposition : tangente AQ $>$ arc AP ; tangente PV $>$ arc PT; etc.; enfin tangente OI $>$ arc OH. Donc la figure formée par tous les segments des tangentes AQ, PV, TZ, YR, NM, OI est plus grande que la courbe.

Mais soient la même courbe (*fig.* 122) et la base AG divisée en autant de parties égales aux points B, C, D, E, F. En ces points B, C,

Fig. 122 (3).



D, E, F, j'élève encore des perpendiculaires BR, CQ, DO, EL, FI, qui rencontrent la courbe aux points S, P, N, M, K. Au point S, je mène la tangente ST jusqu'à la rencontre avec la perpendiculaire AT; puis aux points P, N, M, K, H, les tangentes PR, NQ, MO, KL, HI, rencontrant les perpendiculaires BS, CP, DN, EM, FK aux points R, Q, O, L, I. D'après la première proposition : tangente ST $<$ arc AS; tangente PR $<$ arc PS; etc.; enfin la parallèle à la base, IH $<$ arc KH. Donc la figure, formée par tous ces segments de tangentes ST, PR, NQ, MO, KL, HI, sera plus petite que la courbe.

Mais, d'après le corollaire de la proposition I, les segments pris sur les deux côtés des tangentes en un point de la courbe, et correspondant de part et d'autre à des segments égaux de la base, sont égaux entre eux. Par conséquent, puisque les courbes des figures 2 et 3 sont supposées égales ou plutôt comme ce n'est qu'une même courbe et que, si nous avons tracé deux figures, ce n'a été que pour éviter la confusion, on a : tangente ST (3^e figure) $=$ tangente PV (2^e figure) : le point S (3^e figure) étant identique à P (2^e figure), et les segments AB, BC de la base étant égaux de part et d'autre dans les deux figures, les segments pris des deux côtés sur la tangente et correspondant à ces segments égaux de la base doivent en effet être égaux, c'est-à-dire que ST (3^e figure) $=$ PV (2^e figure).

On prouvera de même que PR (3^e figure) = TZ (2^e figure); etc. pour les autres segments. Il n'y aura que le premier de la 2^e figure et le dernier de la 3^e qui ne seront pas égaux à quelque segment sur l'autre figure. Donc l'excès de la figure 2 sur la figure 3 est égal à celui de la tangente AQ (2^e figure) sur la tangente IH (3^e figure). Mais, à cause du parallélisme, IH est égal à un segment de base, FG ou AB, puisqu'on suppose tous ces segments égaux dans les deux figures; donc la 2^e figure, composée de tangentes et plus grande que la courbe, surpasse la 3^e figure, composée de tangentes et plus petite que la courbe, de l'excès de la tangente AQ sur le segment AB de la base qui lui correspond (2^e figure).

Si donc nous voulons circonscrire à la courbe deux figures, l'une plus grande, l'autre plus petite, et dont la différence soit plus petite qu'une quantité donnée quelconque, la construction sera très facile. La tangente au point A (*fig.* 121) est donnée d'après la méthode des tangentes déjà connue, donc l'angle QAB est donné; mais l'angle QBA est droit; donc le triangle QAB est donné d'espèce, donc le rapport $\frac{AQ}{AB}$. Il faut donc régler la division de la base en sorte que la différence AQ − AB soit plus petite qu'une droite donnée quelconque; pour cela, il suffit de chercher deux droites dans le rapport donné et dont la différence soit plus petite que la droite donnée : problème facile. On prendra ensuite un segment quelconque AB de la base, avec la seule condition qu'il soit au plus égal à la plus petite des deux droites satisfaisant audit problème.

Nous aurons ainsi trouvé deux figures circonscrites à la courbe, l'une plus grande, l'autre plus petite que cette courbe, et telles que la différence de ces figures soit inférieure à un intervalle donné quelconque; *a fortiori*, l'excès de la plus grande des circonscrites sur la courbe et celui de la courbe sur la plus petite des circonscrites seront chacun plus petits encore.

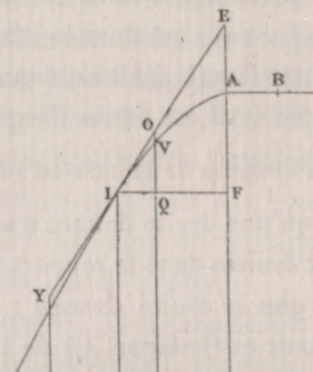
On voit donc que notre méthode par double circonscription ouvre un accès facile à la méthode d'Archimède, quand il s'agit de la mesure des lignes courbes. Il suffit de l'avoir dit une fois et de l'avoir démontré.

Cela posé, j'affirme hardiment qu'on peut trouver une courbe vraiment géométrique égale à une droite donnée. Cette courbe est une des paraboles en nombre infini, sur lesquelles nous avons spéculé il y a déjà longtemps; c'est celle où les cubes des ordonnées sur l'axe sont proportionnels aux carrés des abscisses de l'axe. Pour que les géomètres n'aient pas à douter de mon affirmation, voici la démonstration en peu de mots.

Proposition III.

Soient (fig. 123) MIVA *la parabole dont je viens de parler,* A *son sommet,* AN *son axe,* I *un point quelconque pris sur la courbe. Si je mène*

Fig. 123 (4).



les perpendiculaires ou ordonnées sur l'axe MN, IF, *j'aurai constamment* $\frac{MN^3}{IF^3} = \frac{NA^2}{FA^2}$. *Il faut prouver que la courbe* MIA *est égale à une droite donnée.*

Je pose $\frac{AN^2}{NM^2} = \frac{NM}{AD}$, AD étant pris perpendiculaire à AN; il est clair que AD sera le paramètre de la dite parabole, c'est-à-dire que $AD \times AN^2 = NM^3$ et que, si l'on prend un autre point I, on aura encore pour le cube de l'ordonnée : $AD \times AF^2 = IF^3$. Cela n'a pas besoin de démonstration, et nous n'avons pas à nous arrêter à ce qui est trop facile.

Je mène la tangente au point I, soit IOE, E étant son point de rencontre avec l'axe AN. D'après la méthode des tangentes, on aura $FA = 2AE$, par conséquent $\frac{FE}{AF} = \frac{3}{2}$, donc $\frac{EF^2}{AF^2} = \frac{9}{4}$.

Je prends $CD = \frac{1}{9} AD$, et le milieu B du reste CA; on aura $\frac{DA}{AB} = \frac{9}{4} = \frac{EF^2}{AF^2}$.

Donc $AD \times AF^2 = FE^2 \times AB$. Mais $AD \times AF^2 = IF^3$; donc $AB \times EF^2 = IF^3$. Donc $\frac{EF^2}{IF^2} = \frac{IF}{AB}$, *et componendo* (comme $EF^2 + IF^2 = IE^2$): $\frac{IE^2}{IF^2} = \frac{IF + AB}{AB}$.

Si je mène du point I, perpendiculairement sur la base, la droite IH, si je trace une autre perpendiculaire quelconque GQVO, rencontrant l'ordonnée IF en Q, la courbe en V, et la tangente en O, les triangles semblables donneront $\frac{IO}{IQ(=HG)} = \frac{IE}{IF}$, d'où $\frac{IO^2}{HG^2} = \frac{IE^2}{IF^2}$.

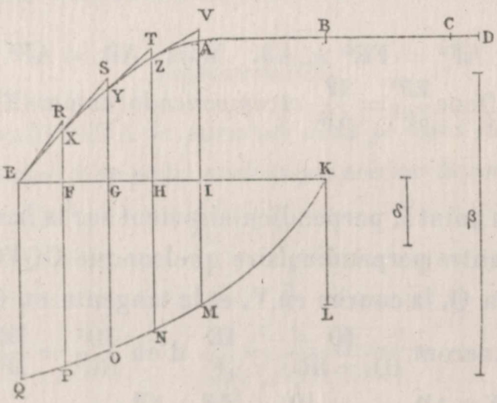
Mais $\frac{IE^2}{IF^2} = \frac{IF + AB}{AB}$. Donc $\frac{IO^2}{HG^2} = \frac{IF + AB}{AB}$, *relation constante que je me proposais de démontrer*.

Il suit de là que, si sur le prolongement de MN on prend $NX = AB$, on a toujours $\frac{IO^2}{HG^2}$ ou (pour la tangente et le segment de base de l'autre côté, qui, à cause des parallèles, donnent toujours le même rapport) $\frac{IY^2}{RH^2} = \frac{HX}{NX}$. Car $HX = IF + AB$ et $NX = AB$, ce qui est évident d'après la construction, puisqu'à cause des parallèles on a $HN = IF$, et qu'on a pris $NX = AB$.

Proposition IV.

Soit (*fig.* 124) AXE cette parabole dont la propriété, comme nous avons dit, est que les cubes des ordonnées soient proportionnels aux carrés des abscisses sur l'axe. Soient AI l'axe, EI la base ou demi-base; l'axe AI et l'ordonnée IE étant donnés, on trouvera, comme ci-dessus, le paramètre AD, dont on retranchera le neuvième, CD; après quoi on prendra le milieu B du reste AC. Je divise la base EI en autant de parties égales que l'on voudra EF, FG, GH, HI; aux points F, G, H, j'élève les perpendiculaires FX, GY, HZ, qui rencontrent la courbe aux points X, Y, Z. Par les points E, X, Y, Z, je mène les tangentes ER, XS, YT, ZV qui rencontrent le prolongement des perpendiculaires FX, GY, HZ, IA aux points R, S, T, V. Enfin je prends, sur le prolongement de EI, IK = AB.

Fig. 124 (5).



Il résulte de la proposition précédente et de son corollaire que l'on a $\frac{ZV^2}{HI^2} = \frac{HK}{KI}$; de même $\frac{YT^2}{GH^2} = \frac{GK}{KI}$; $\frac{XS^2}{FG^2} = \frac{FK}{KI}$; enfin $\frac{ER^2}{EF^2} = \frac{EK}{KI}$.

Cela posé, en K j'élève KL perpendiculaire sur EK, et je prends KL = KI = AB. J'imagine maintenant qu'avec K comme sommet, KE pour axe, on décrive la parabole simple ou parabole d'Archimède, de paramètre KL. Soit KMQ cette parabole, j'élève jusqu'à sa rencontre les perpendiculaires EQ, FP, GO, HN, IM qui en seront évidemment les ordonnées, et qui seront dans le prolongement des perpendiculaires FX, GY, etc.

Comme nous l'avons déjà dit, $\frac{ZV^2}{HI^2} = \frac{HK}{KI}$. Mais, en multipliant les deux termes par KL, on a $\frac{HK}{KI} = \frac{HK.KL}{IK.KL}$; or, d'après la nature de la parabole d'Archimède, $HK.KL = HN^2$; d'ailleurs $IK.KL = KL^2$, puisque l'on a pris KL = KI. Donc $\frac{HN^2}{KL^2} = \frac{ZV^2}{HI^2}$. Donc $\frac{HN}{KL} = \frac{ZV}{HI}$.

Nous prouverons de même que l'on aura, entre les tangentes et les ordonnées, les rapports : $\frac{YT}{GH} = \frac{GO}{KL}$; $\frac{XS}{FG} = \frac{FP}{KL}$; enfin $\frac{ER}{EF} = \frac{EQ}{KL}$.

Mais, puisque $\frac{ZV}{HI} = \frac{HN}{KL}$, en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, on a $NH.HI = KL.ZV$. De même, $OG.GH = KL.YT$, et $PF.FG = KL.XS$, enfin $EQ.EF = KL.ER$.

Mais pourquoi s'arrêter plus longtemps sur une question aussi facile, lorsque nous arrivons ainsi immédiatement à la méthode d'Archimède? En inscrivant et en circonscrivant les figures au segment parabolique, la somme de tous les rectangles QE.EF, PF.FG, OG.GH, NH.HI, représentera le segment parabolique EQMI; la somme des tangentes ER, XS, YT, ZV, en redoublant la circonscription, conformément aux règles de notre méthode, représentera la courbe même EXYZA. Donc le segment parabolique EQMI est égal au produit de KL par la courbe EXA. Or le segment parabolique EQMI est donné en rectilignes, puisque Archimède a carré la parabole et par conséquent ses segments. Donc le produit $KL \times \widehat{EXA}$ est donné; mais KL est donné, donc la courbe EXA, et l'on peut trouver une droite qui lui soit égale. C. Q. F. D.

Si quelqu'un trouvait cependant cette démonstration trop rapide, je ne refuse pas de donner à part le raisonnement complet, en suivant les traces d'Archimède; ceux qui estiment que ce qui précède ne suffit pas pourront lire et examiner le raisonnement qui suit :

Il faut prouver que le segment parabolique $EQMI = KL \times \widehat{EXA}$.

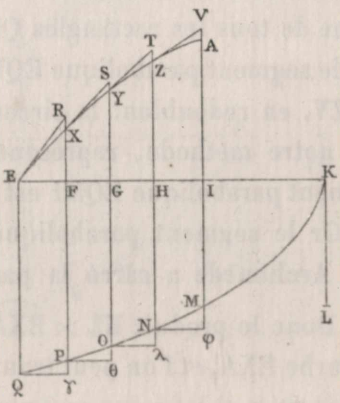
Posons, d'après Archimède, $EQMI = KL \times \beta$. KL et β sont donnés.

Si nous prouvons que $\beta = \widehat{EXA}$, notre proposition sera établie.

Je dis donc que $\beta = \widehat{EXA}$. Si en effet elle n'est point égale à cette courbe, elle sera ou plus grande ou plus petite. Soit d'abord $\beta > \widehat{EXA}$ et soit, dans cette hypothèse, δ leur différence.

D'après la proposition II, nous pouvons circonscrire à la courbe EXA une figure composée de segments de tangentes et qui soit supérieure à la courbe d'un intervalle moindre que δ. Supposons cette circonscription effectuée et représentée dans une figure à part (*fig.* 125), marquée *cinquième* en chiffre romain, où cet ensemble de segments de tangentes, ER + XS + YT + ZV, d'après ce qui a été démontré, est plus grand que la courbe EXA. Mais on suppose également β plus grande que cette courbe, et l'excès de la figure circonscrite sur la courbe est inférieur à celui de β sur la courbe. Donc la figure circonscrite est plus petite que β. Donc le produit de KL par la circonscrite

Fig. 125 (V).



est inférieur à KL × β. Mais KL × β est égal au segment parabolique EQMI. Donc le produit de KL par la circonscrite est inférieur à ce segment parabolique EQMI.

Or nous avons prouvé que

$$KL \times ER = QE \times EF,$$
$$KL \times XS = PF \times FG,$$
$$KL \times YT = OG \times GH,$$
$$KL \times ZV = NH \times HI.$$

Donc, en sommant, le produit de KL par la figure circonscrite est égal à la somme QE × EF + PF.FG + OG.GH + NH.HI. Si maintenant, sur les droites FP, GO, HN, IM qui décroissent continuellement à mesure qu'elles se rapprochent du sommet de la parabole, on abaisse, des points Q, P, O, N, les perpendiculaires (parallèles à la base) $Q\gamma$, $P\theta$, $O\lambda$, $N\varphi$, il est clair que le rectangle $QEF\gamma = QE.EF$; de même $\theta F = PF.FG$; $\lambda G = OG \times GH$; enfin $\varphi H = NH.HI$. Donc le produit de KL par la circonscrite est égal à la somme des rectangles γE, θF, λG, φH.

Mais nous avons prouvé que ce produit de KL par la circonscrite est inférieur au segment parabolique EQMI. Donc

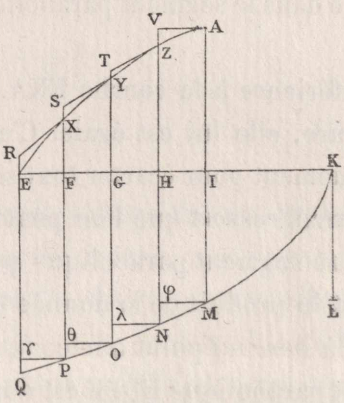
$$\gamma E + \theta F + \lambda G + \varphi H < EQMI;$$

ce qui est absurde, puisque la somme forme une figure composée de rectangles, évidemment circonscrite au segment parabolique, et par conséquent supérieure. Donc β n'est pas plus grande que la courbe EXA.

Nous allons prouver qu'elle n'est pas plus petite. Supposons en effet $\beta < \widehat{EXA}$, et soit δ l'excès de la courbe sur la droite β.

Circonscrivons à la courbe sur une figure (*fig.* 126) séparée (désignée comme *cinquième* en caractère grec) une suite de segments de

Fig. 126 (ε).



tangentes inférieure à la courbe EXA, mais en sorte que l'excès de la courbe sur elle soit inférieur à δ. Soit cette suite de segments de tangentes : $XR + YS + ZT + AV$.

Comme l'excès de la courbe sur β est égal à δ, et que l'excès de la même courbe sur la figure circonscrite est moindre que δ, la circonscrite sera plus grande que β, donc son produit par KL sera plus grand que le segment parabolique EQMI. Mais, d'après ce qui a été démontré, le produit de KL par la circonscrite est égal à

$$\mathrm{PF} \times \mathrm{FE} + \mathrm{OG} \times \mathrm{GF} + \mathrm{NH} \times \mathrm{HG} + \mathrm{MI} \times \mathrm{IH}.$$

En effet, $\frac{\mathrm{XR}}{\mathrm{FE}} = \frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{KL}}$; donc $\mathrm{KL} \times \mathrm{XR} = \mathrm{PF} \times \mathrm{FE}$, et ainsi de suite pour les autres.

Puisque le produit de KL par la circonscrite est plus grand que le segment parabolique EQMI, la somme des rectangles

$$\mathrm{PF.FE} + \mathrm{OG.GF} + \mathrm{NH.GH} + \mathrm{MI.HI}$$

est supérieure à ce segment parabolique. Mais si on mène les perpendiculaires (parallèles à la base) $\mathrm{P}\gamma$, $\mathrm{O}\theta$, $\mathrm{N}\lambda$, $\mathrm{M}\varphi$, qui rencontrent les ordonnées à l'intérieur de la parabole (car les ordonnées croissent à mesure qu'elles s'éloignent du sommet), les rectangles ainsi construits PE, OF, NG, MH seront respectivement égaux aux précédents. Donc la somme $\mathrm{PE} + \mathrm{OF} + \mathrm{NG} + \mathrm{MH}$ sera supérieure au segment parabolique. Ce qui est absurde, car ces rectangles PE, OF, NG, MH composent une figure inscrite dans le segment parabolique et par conséquent plus petite.

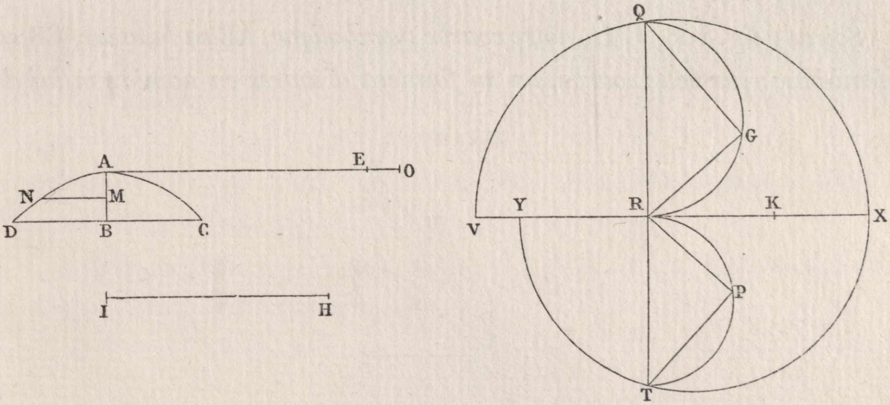
Donc β n'est pas inférieure à la courbe EXA. Ne lui étant ainsi ni supérieure, ni inférieure, elle lui est égale. C'est ce que nous avons voulu démontrer longuement pour écarter tout scrupule.

De ce qui a été démontré, ressort que l'on peut établir avec la même facilité l'égalité entre un segment parabolique quelconque EQPF, retranché du premier, et le produit de la donnée KL par la courbe EX. Si donc on donne sur la base un point quelconque F, comme, d'après Archimède, le segment parabolique EQPF est donné en rectilignes, le produit $\mathrm{KL} \times \widehat{\mathrm{EX}}$ est donné ; mais KL est donné, donc l'arc EX. Par conséquent, si l'on donne sur la base un point quelconque F, il est clair que l'arc de courbe correspondant est donné et qu'on peut assigner une droite qui lui soit égale.

Il n'y a pas à objecter que, pour trouver une droite égale à la courbe EXA, il semble falloir construire une parabole simple, ce qui rendrait le problème solide. Car le tracé de cette parabole n'est supposé que pour rechercher la vérité et faire régulièrement la démonstration; rien n'empêche qu'on ne dissimule ce tracé imaginaire de parabole, et qu'on ne fasse le calcul en ne laissant apparaître que des droites et des cercles. Sauf erreur, voici ce calcul.

Soit (*fig.* 127) la courbe parabolique DAC, telle que les cubes des ordonnées DB et NM soient proportionnels aux carrés des abscisses de l'axe, BA, AM. On donne la hauteur AB, et la demi-base BD, ou la base totale DBC. Je dis que la droite prouvée égale à la courbe DAC est donnée par un calcul véritablement géométrique.

Fig. 127 (6).



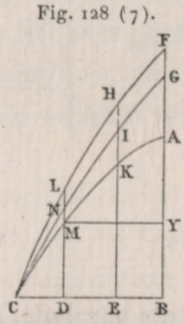
Soit AO le paramètre de cette parabole, qui est donné avec l'axe et l'ordonnée, comme il a été montré plus haut; j'en retranche la neuvième partie EO. Je prends égale au reste AE la droite YK, que je prolonge de KX égale à l'ordonnée ou demi-base DB. Sur YX comme diamètre, je décris le demi-cercle YTX et, prenant en R le milieu de YK, j'y élève la perpendiculaire RT qui rencontre le demi-cercle en T. Je prends RV égale à RT, et sur VX comme diamètre je décris le demi-cercle VQX jusqu'à la rencontre duquel j'élève du point R la perpendiculaire RQ. Sur les droites TR, RQ, je décris les demi-cercles TPR, RGQ, et j'y inscris les cordes TP, RG égales à RY. Je joins RP, QG et je dis que le rapport $\frac{\text{arc DAC}}{\text{DBC}} = \frac{2\,\text{QG}^2}{3\,\text{RP}^2}$ et par conséquent est donné. Soit donc posé $\frac{3RP^2}{2QG^2} = \frac{DC}{IH}$. La droite IH donnée par cette construction sera égale à la courbe parabolique DAC.

Si cette construction d'ailleurs ne concorde pas avec la démonstration précédente, il faut la corriger d'après cette dernière.

Si cette propriété de notre courbe parabolique ne suffit pas pour la faire placer par les géomètres au rang des objets particulièrement remarquables de leur Science, ce qui va suivre lui assurera peut-être ce rang. Car qu'y a-t-il de plus singulier que de voir, de cette seule courbe, en dériver une infinité d'autres différentes de cette première et différentes entre elles, et qu'on démontrera néanmoins être égales à des droites données? Voici la proposition générale :

Soient (*fig.* 128) CMA *notre courbe parabolique,* AB *sa hauteur,* CB *sa demi-base; sur cette courbe, on en formera d'autres en nombre infini de*

Fig. 128 (7).



cette façon. Si l'on mène perpendiculairement à la base des droites quelconques DMNL, EKIH, *coupant la courbe aux points* M, K, *la nouvelle courbe* CNIG *à former de cette première sera de telle nature que* DN *soit égale à l'arc correspondant* CM *de la première courbe,* EI *à l'arc* CMK *de la première courbe, et de même pour toutes les autres perpendiculaires. Cette nouvelle courbe* CNIG *sera différente d'espèce de la première.*

On formera sur cette seconde courbe une troisième CLHF, *en sorte que* DL, EH *soient respectivement égales aux arcs* CN, CNI *de la seconde courbe. Sur la troisième, on formera de la même façon une quatrième, sur la quatrième une cinquième, sur la cinquième une sixième, et ainsi de* *suite à l'infini. Je dis que toutes ces courbes* CNIG, CLHF, *etc. à l'infini seront, de même que la première parabolique* CMKA, *égales à des droites données.*

Il faut remarquer que toutes ces courbes, en nombre indéfini, sont purement géométriques, et, cependant, on ne peut leur appliquer cette prétendue loi de la nature, dont j'ai parlé au commencement de cette Dissertation. Quoique, en effet, on suppose les droites DN, EI égales aux arcs CM, CMK, elles n'en sont pas moins posées comme égales à des lignes droites, d'après la démonstration précédente. Car, soit donné un point quelconque D, d'après ce qui précède, une droite égale à l'arc CM est donnée; donc la droite DN posée par construction égale à l'arc CM doit être considérée comme une droite véritablement donnée et non supposée égale à un arc. De même pour les autres. Donc la courbe CNIG est véritablement géométrique, et une fois que nous aurons démontré qu'elle est égale à une droite donnée, il s'ensuivra que la courbe qui en dérive, CLHF, est aussi purement géométrique, et de même toutes les autres indéfiniment.

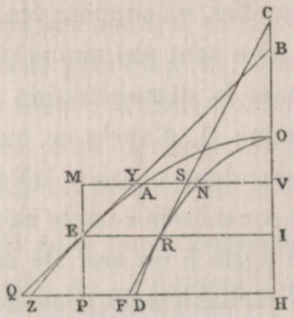
La démonstration est facile en posant d'abord une proposition qui soit générale pour toute cette question.

Proposition VI.

Soient (*fig.* 129) *une courbe quelconque* ONR, *de la nature des précédentes, dont* O *est le sommet,* OVI *l'axe* (*ou l'ordonnée, car la démonstration est la même dans les deux cas*). *Je forme sur elle une autre courbe* OAE, *telles que ses ordonnées soient égales aux arcs correspondants de la première courbe; c'est-à-dire* $\mathrm{VA} = \overset{\frown}{\mathrm{ON}}$, $\mathrm{IE} = \overset{\frown}{\mathrm{OR}}$, *et ainsi de suite. Je mènerai comme suit la tangente en un point donné de cette nouvelle courbe. Soit* E *le point donné, je mène l'ordonnée* EI *qui coupe la première courbe en* R. *Je mène en ce point* R *la tangente* RC *à la première courbe. Cette tangente rencontre l'axe au point* C. *Je pose* $\frac{\mathrm{RC}}{\mathrm{CI}} = \frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{IB}}$, *et je joins* EB. *Je dis que* EB *est tangente en* E *à la nouvelle courbe* EAO.

En effet, si je prends sur l'axe un point quelconque V, et si je mène l'ordonnée VNA coupant la première courbe en N, la tangente RC en S, la seconde courbe en A, enfin EB en Y, il me suffit de prouver que l'on a toujours $VY > VA$, pour établir que EB ne coupe pas la nouvelle courbe du côté du sommet. Or cette preuve est facile à donner.

Fig. 129 (8).



En effet, $VA = \widehat{ON} = \widehat{OR} - \widehat{NR}$. Mais $RS < \widehat{RN}$, suivant le corollaire de la première proposition. Donc $\widehat{OR} - RS > \widehat{OR} - \widehat{RN}$. Mais $VY = \widehat{OR} - RS$, comme nous allons le prouver tout à l'heure. Donc VY (ordonnée de EB) $>$ VA (ordonnée de l'arc OAE). Donc tous les points de EB du côté du sommet sont extérieurs à la courbe; donc EB ne coupe pas la courbe du côté du sommet.

Mais je dis qu'elle ne la coupe pas davantage plus bas. Je prends en effet un point quelconque H, par lequel je mène l'ordonnée HZ, qui coupe la première courbe en D, le prolongement de RC en F, la seconde courbe en Z, le prolongement de EB en Q. Si je prouve qu'en tous cas $HQ > HZ$, j'aurai prouvé que tous les points de EB, même au-dessous de E, sont extérieurs à la courbe, et par suite la droite EB sera démontrée toucher la seconde courbe au point E.

$HZ = \widehat{OD} = \widehat{OR} + \widehat{RD}$, par construction. Mais $RF > \widehat{RD}$, suivant le corollaire de la première proposition, RF étant un segment inférieur de la tangente RC. Donc $\widehat{OR} + RF > \widehat{OR} + \widehat{RD}$. Mais $\widehat{OR} + RF = HQ$, comme nous allons le prouver tout à l'heure, et $\widehat{OR} + \widehat{RD} = HZ$, par construction. Donc en tous cas $HQ > HZ$. Donc la droite EB est tangente en E à la seconde courbe.

Reste a prouver en premier lieu que $\widehat{OR} - RS = VY$.

Je mène EM parallèle à l'axe et rencontrant en M le prolongement de VY. Par construction, $\frac{EI}{IB} = \frac{RC}{CI}$. Mais $\frac{EI}{IB} = \frac{YV}{VB} = \frac{YM}{ME}$, et $\frac{RC}{CI} = \frac{RS}{VI}$; donc $\frac{YM}{ME} = \frac{RS}{VI}$. Mais, à cause des parallèles, $ME = VI$; donc $YM = RS$. Mais aussi $EI = VM$; donc $EI - MY = VY$. Or, par construction, $EI = \widehat{OR}$. Donc $\widehat{OR} - MY (= RS) = YV$. Premier point qu'il fallait démontrer.

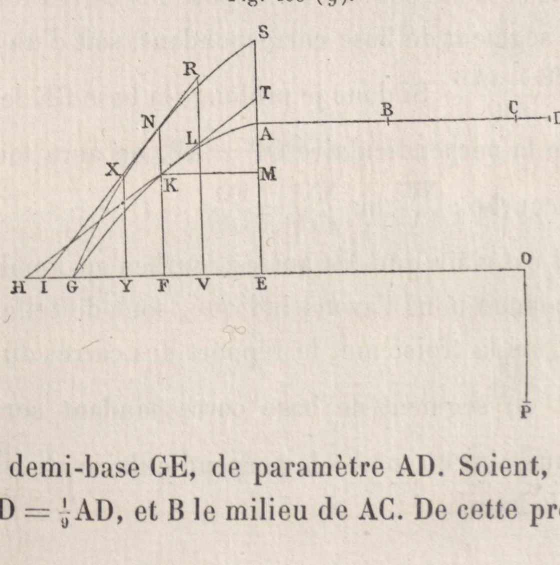
On raisonnera de même au-dessous de l'ordonnée EI. Menant EP parallèle à l'axe, on prouvera que $QP = RF$.

En effet, $\frac{EI}{IB}$ ou $\frac{QH}{HB}$ ou $\frac{QP}{PE} = \frac{RC}{CI}$ ou $\frac{RF}{IH}$. Mais $PE = IH$; donc $QP = RF$. D'ailleurs $HQ = HP + PQ$; $HP = IE = \widehat{OR}$; $PQ = RF$, comme on vient de le démontrer. Donc $\widehat{OR} + RF = HQ$. Second point qu'il fallait démontrer.

Il est donc prouvé que EB est tangente à la seconde courbe au point E, ce qu'il fallait démontrer.

Soit maintenant (*fig.* 130) notre courbe parabolique GKA, de hau-

Fig. 130 (9).



teur AE, de demi-base GE, de paramètre AD. Soient, comme précédemment, $CD = \frac{1}{9} AD$, et B le milieu de AC. De cette première courbe j'en forme une autre à partir du point G, soit GNS, qui rencontre en S l'axe de la première, la propriété de cette nouvelle courbe étant que, si l'on prend un point quelconque F et que l'on élève la perpendiculaire FKN qui rencontre les deux courbes en K et N, on ait toujours FN égal à l'arc GK de la première courbe. Menons KM parallèle à la base et, par ce même point K, TKH tangente à la première courbe et rencontrant l'axe en T, la base en H; par le point N de la seconde courbe, menons la tangente RNXI, qui rencontre la base en I; enfin des deux points R, X, pris arbitrairement de part et d'autre sur cette tangente, abaissons sur la base les perpendiculaires XY, RV.

D'après ce qui précède, on a constamment, quelle que soit la tangente KT, $\frac{KT^2}{FE^2}$ ou $\frac{KL^2}{FV^2} = \frac{FE+AB}{AB}$; mais $\frac{KT^2}{FE^2(=KM^2)} = \frac{KH^2}{HF^2}$, à cause des parallèles; donc $\frac{KH^2}{HF^2} = \frac{FE+AB}{AB}$. D'autre part, d'après la proposition précédente, $\frac{KH^2}{HF^2} = \frac{FN^2}{FI^2}$, car les côtés sont proportionnels, comme le démontre cette proposition; donc les carrés le sont également. Donc $\frac{NF^2}{FI^2} = \frac{FE+AB}{AB}$; *componendo* : $\frac{(NF^2+FI^2)(=NI^2)}{FI^2} = \frac{FE+2AB}{AB}$.

Mais $\frac{NI^2}{FI^2} = \frac{RN^2}{FV^2}$ et aussi $= \frac{NX^2}{FY^2}$; donc, si l'on prend un point quelconque N sur la seconde courbe, le rapport des carrés du segment de tangente et du segment de base correspondant, soit d'un côté, soit de l'autre, sera $\frac{FE+2AB}{AB}$. Si donc je prolonge la base GE de $EO = 2AB$, qu'en O j'élève la perpendiculaire $OP = AB$, on aura toujours, pour notre seconde courbe : $\frac{NR^2}{FV^2}$ ou $\frac{NX^2}{FY^2} = \frac{FO}{OP}$.

Cela posé, il est clair que les autres courbes en nombre indéfini, qu'on tracera comme nous l'avons indiqué, sont de telle nature que, par exemple, dans la troisième, le rapport des carrés du segment de la tangente et du segment de base correspondant sera $\frac{FE+3AB}{AB}$, en prenant F au point où tombe la perpendiculaire abaissée du point de contact sur la base.

Dans la quatrième courbe, le même rapport des carrés des segments correspondants de la tangente et de la base sera $\frac{\mathrm{FE}+4\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}}$, et ainsi de suite indéfiniment.

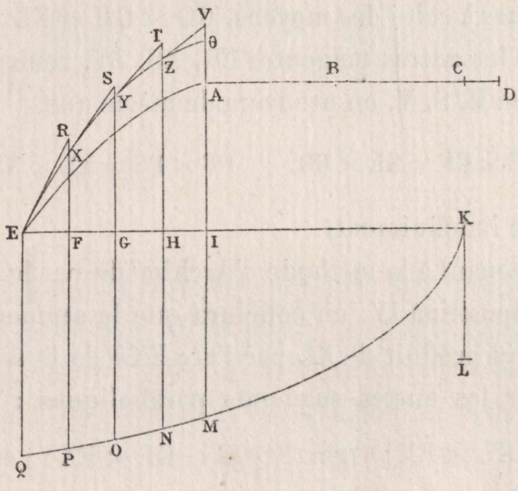
La démonstration est toujours la même et s'applique évidemment en tous cas.

Ceci établi, il est facile d'arriver au théorème général.

Proposition VII.

Soient (*fig.* 131) EA notre courbe parabolique, AI son axe, IE sa demi-base. Je forme sur elle la seconde courbe EXYZθ de telle sorte,

Fig. 131 (10).



comme je l'ai dit plus haut, qu'une ordonnée quelconque FX soit égale à l'arc de la première courbe interceptée par cette ordonnée ou perpendiculaire. Je divise la base en un nombre quelconque de parties égales EF, FG, GH, HI; aux points F, G, H, j'élève des perpendiculaires qui coupent la seconde courbe aux points X, Y, Z. Soient AD le paramètre de la première courbe, CD sa neuvième partie, B le milieu du reste AC. Soit, dans le prolongement de la base, IK = 2AB et, élevée en K, la perpendiculaire KL = AB. Par le point K, sur l'axe KE, j'imagine décrite la parabole simple ou d'Archimède ayant KL pour paramètre; soit KMOQ cette parabole; par les points E, F, G, H, I, j'élève des perpendiculaires à la base qui rencontrent cette parabole aux points Q, P, O, N, M.

D'après le corollaire de la proposition précédente, comme EXθ est la seconde courbe dérivée de la première, c'est-à-dire formée par le procédé que nous avons déjà indiqué plusieurs fois, si l'on y prend un point quelconque Y, et que l'on mène le segment de tangente YT, on a $\frac{YT^2}{GH^2} = \frac{KG}{KL}$. Mais, en multipliant de part et d'autre par KL, $\frac{GK}{KL} = \frac{GK \times KL}{KL^2}$, et, d'après la nature de la parabole simple, $GK \times KL = GO^2$. Donc $\frac{YT^2}{GH^2} = \frac{GO^2}{KL^2}$ et $\frac{YT}{GH} = \frac{GO}{KL}$, ou, en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, $GO \times GH = KL \times YT$.

Si l'on mène les autres tangentes ER, XS, ZV, rencontrant les perpendiculaires en R, S, V, on prouvera de même que

$$QE \times EF = KL \times ER, \qquad PF \times FG = KL \times XS;$$

et ainsi de suite indéfiniment.

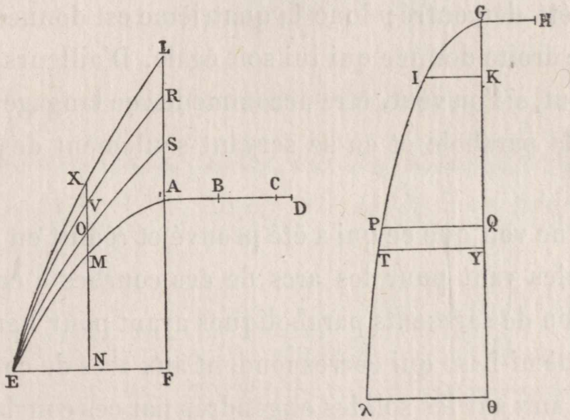
D'où, en ramenant à la méthode d'Archimède par le même procédé que dans la proposition IV, on conclura que le segment parabolique EQMI est égal au produit de KL par l'arc EXθ de la seconde courbe. De même pour les autres segments paraboliques : par exemple, segm. $EQPF = KL \times \widehat{EX}$; segm. $EQOG = KL \times \widehat{EXY}$; et ainsi de suite indéfiniment.

Or tous ces segments paraboliques sont donnés en rectilignes par la quadrature de la parabole qu'Archimède a démontrée; KL est également donné. On a donc également comme données tant la seconde courbe totale EXθ que les arcs EX, EY, etc., interceptés sur elle par les perpendiculaires élevées aux points F, G, etc.

Pour égaler à une droite donnée la troisième courbe, la construction sera la même, sauf que l'on prendra $IK = 3AB$; pour la quatrième courbe, $IK = 4AB$; et enfin on établira, entre toutes les courbes à dériver indéfiniment de la première, cette relation : que deux quelconques seront entre elles comme les segments paraboliques de même hauteur d'une même parabole, dont les distances au sommet de la parabole sont d'autant de fois le paramètre qu'il y a d'unités dans les ordres des courbes comparées entre elles.

Soient par exemple (*fig.* 132) EMA notre courbe parabolique, AF son axe, EF sa demi-base, AD son paramètre, CD le neuvième de ce

Fig. 132 (11).



dernier, B le milieu du reste AC. Je forme de cette première courbe la seconde EOS, telle que, si l'on prend un point quelconque N sur la base, NO, perpendiculaire à la base, et qui rencontre les courbes M, O, soit égale à l'arc EM de la première courbe. Je forme ensuite de la seconde courbe la troisième EVR, où NV est égale à l'arc EO de la seconde courbe. De la troisième EVR je forme la quatrième EXL, où NX est égale à l'arc EV de la troisième courbe. Soit à part la parabole simple ou d'Archimède, d'axe indéfini GKQY, de sommet G, de paramètre GH = AB. On demande par exemple le rapport de la quatrième courbe EXL à la primitive EMA.

La première de ces deux courbes étant du quatrième ordre, je prends sur l'axe l'abscisse GY = 4GH et, sur son prolongement, Yθ = EF (demi-base); je mène les ordonnées YT, θλ.

La seconde des deux courbes à comparer étant du premier ordre, je prends sur l'axe l'abscisse GK égale au paramètre pris une seule fois et, sur son prolongement, KQ = EF (demi-base); je mène les ordonnées KI, QP. D'après ce qui a été démontré et conformément à la règle générale,

$$\frac{\text{segm. parab. } YT\lambda\theta}{\text{segm. parab. } KIPQ} = \frac{(4^e \text{ courbe}) EXL}{(1^{re} \text{ courbe}) EMA}.$$

Mais, d'après Archimède, le rapport des segments paraboliques est donné, donc celui des courbes est donné; mais la première est donnée, comme il a été démontré; donc la quatrième est donnée, et l'on peut assigner une droite donnée qui lui soit égale. D'ailleurs cette relation constante peut, si l'on veut, être accommodée en langage géométrique, en écartant la parabole et en se servant seulement de la règle et du compas.

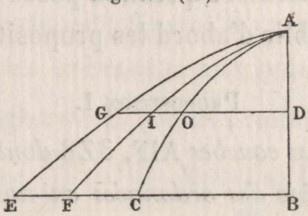
Enfin qui ne voit que ce qui a été prouvé et réduit en règle pour les courbes totales vaut pour les arcs de ces courbes à comparer entre eux, au moyen de segments paraboliques ayant pour hauteur les segments de la demi-base qui correspondent aux arcs de courbes?

Je n'ajoute rien sur les solides engendrés par ces courbes en nombre infini, ni sur leurs surfaces courbes, ni sur les centres de gravité de ces lignes, de ces solides ou de ces surfaces; car les méthodes générales données à cet égard par de célèbres géomètres ne laissent rien ignorer là-dessus une fois connue la propriété spécifique de la courbe donnée, quoiqu'en beaucoup de cas il ne soit pas inutile que chacun fasse usage de sa propre industrie.

Mais, avant de terminer cet écrit, il me vient à la pensée d'examiner la proposition suivante :

Soient (*fig.* 133) COA *notre courbe parabolique*, A *son sommet*, AB *son axe*, CB *sa demi-base. On peut en former une infinité d'autres courbes de la manière déjà indiquée, mais non pas, comme auparavant, du côté de la base, au contraire de celui du sommet. Soient donc formées ainsi les courbes* AIF, AGE, *etc. indéfiniment, sous cette condition que, si l'on prend sur l'axe un point quelconque* D *et que l'on mène à l'axe la perpendiculaire* DOIG, *qui coupe les courbes aux points* O, I, G, *la droite* DI *pour la seconde courbe soit égale à l'arc* AO *de la première, la droite* DG *pour la troisième, égale à l'arc* AI *de la seconde, et ainsi de suite indéfiniment. Toutes les courbes de cette sorte différeront d'espèce non seulement entre elles et par rapport à la première* AOC, *mais elles différeront*

Fig. 133 (12).



aussi de celles que nous avons formées du côté de la base. On demande si les courbes AIF, AGE, *etc. à l'infini sont égales à des droites données ou bien à d'autres courbes* (1).

Que les géomètres le cherchent, ils verront grandir encore la merveille. Il est certain que si les méthodes dont ils se servent pour mesurer les courbes sont générales et suffisantes, comme ils l'affirment, et comme je ne prétends pas dès lors le mettre en doute, ils reconnaîtront la chose au premier coup d'œil et ils épargneront un travail superflu à un géomètre déjà fatigué.

S'ils trouvent quelques points trop concis dans les démonstrations précédentes, je les prie au reste d'y suppléer ou de m'excuser.

(1) Dans la note de la page 237 du Tome I, il a été dit par inadvertance que les diverses courbes en question pouvaient être superposées par simple translation. De fait, ce sont des développées d'hyperboles, rentrant dans l'équation générale

$$(ny+b)^{\frac{2}{3}} - nx^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}},$$

où n représente l'ordre de dérivation à partir de la développée de parabole, $y^3 = ax^2$, que donne cette équation, si l'on fait $n = 0$ et $b = \frac{8}{27}a$.

APPENDICE A LA DISSERTATION

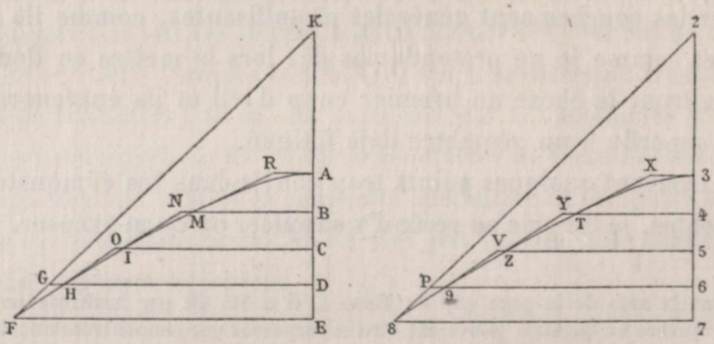
SUR LA COMPARAISON DES LIGNES COURBES AVEC LES LIGNES DROITES.

Pour répondre à la dernière question posée dans la Dissertation, il paraît convenable d'établir d'abord les propositions suivantes.

Proposition I.

Soient (fig. 134) *deux courbes* AIF, 3Z8 *dont les axes* AE, 37 *soient égaux entre eux. Je mène des ordonnées en nombre quelconque également distantes du sommet dans les deux figures.* Soient, par exemple, BM, CI, DH, EF les ordonnées de la première, 4T, 5Z, 69, 78 celles de la seconde; AB, distance au sommet de l'ordonnée BM, est supposée égale à 43, distance au sommet de l'ordonnée 4T. De même, on suppose CA = 53, DA = 63, enfin EA = 73, supposition déjà faite.

Fig. 134 (1).



Si les ordonnées sont toujours aux longueurs interceptées sur l'axe par les tangentes comme les lignes correspondantes de l'autre figure (c'est-à-dire si, menant les tangentes d'un côté aux points F, H, I, M, de l'autre aux points 8, 9, Z, T, on a toujours par exemple :

$$\frac{\text{ordonnée FE}}{\text{sous-tangente KE}} = \frac{\text{ordonnée 87}}{\text{sous-tangente 72}},$$

$$\frac{\text{ordonnée DH}}{\text{sous-tangente pour le point H}} = \frac{\text{ordonnée 69}}{\text{sous-tangente pour le point 9}},$$

et ainsi pour les autres), *je dis que les deux courbes* AIF, 3Z8 *sont égales, ou plutôt semblables et identiques, les ordonnées d'une figure étant égales à celles de l'autre également distantes du sommet.*

Menons en effet sur la première figure, par les points H, I, M, les segments de tangentes HO, IN, MR, rencontrant les ordonnées aux points O, N, R; sur la seconde figure, les segments de tangentes 9V, ZY, TX, rencontrant les ordonnées aux points V, Y, X. On suppose $\frac{FE}{EK} = \frac{87}{72}$. Mais les angles en E, 7 sont droits; donc les triangles FEK, 872, semblables; donc $\frac{FK}{KE} = \frac{82}{72}$. Mais, si l'on prolonge les ordonnées, DH jusqu'en G, 69 jusqu'en P, $\frac{FK}{KE} = \frac{FG}{DE}$, et $\frac{82}{72} = \frac{8P}{67}$; donc $\frac{FG}{DE} = \frac{8P}{67}$. Mais $DE = 67$, puisque $EA = 73$, et $DA = 63$; donc $FG = 8P$.

On prouvera de même pour les autres segments de tangentes que : $HO = 9V$, $IN = ZY$, $MR = TX$.

Donc la série des tangentes de la première figure est égale à la série des tangentes de la seconde, d'où, par la méthode d'Archimède de réduction à l'impossible, on conclura facilement l'égalité des courbes AIF et 3Z8, premier point à établir, ainsi que l'égalité des arcs correspondants : $FH = 89$, $HI = 9Z$, etc.

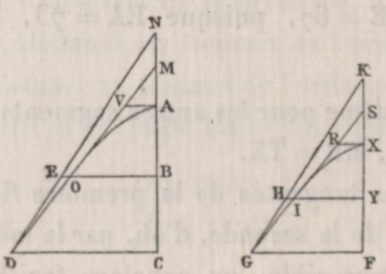
Reste à prouver que les ordonnées de l'une des figures sont égales à celles de l'autre.

D'après la supposition faite, les ordonnées sont, de part et d'autre, dans le même rapport avec les sous-tangentes; donc les angles GFE, P87, formés par les tangentes et les ordonnées, sont égaux. De même $\widehat{OHD} = \widehat{V96}$, $\widehat{NIC} = \widehat{YZ5}$, $\widehat{RMB} = \widehat{XT4}$. D'ailleurs, tous les arcs de la première courbe, FH, HI, IM, MA sont respectivement égaux aux arcs de la seconde, 89, 9Z, ZI, T3, et l'inclinaison de ces arcs est constamment la même de part et d'autre (car l'inclinaison des courbes est mesurée par celle des tangentes qui font toujours, comme nous l'avons prouvé, des angles égaux dans les deux figures). Donc les courbes AMIFH, 3TZ98 sont non seulement égales entre elles, mais encore semblables, et si on imagine qu'on les superpose, elles coïncideront entièrement, et auront donc, aussi bien que leurs axes, leurs ordonnées égales ou plutôt identiques. C'est le second point qu'il fallait démontrer.

Pроposition II.

Soient (*fig.* 135) *deux paraboles de même nature* AOD, XIG, *d'axes* AC, XF, *de demi-bases* DC, GF; soit par exemple : $\frac{DC^3}{BO^3} = \frac{CA^2}{BA^2}$, et de même $\frac{GF^3}{IY^3} = \frac{FX^2}{YX^2}$; nous restons ainsi sur notre parabole, quoique la proposition soit générale. *Si les axes sont proportionnels aux demi-*

Fig. 135 (2).



bases, c'est-à-dire si $\frac{CA}{DC} = \frac{XF}{GF}$, *je dis que ces deux paraboles sont dans le rapport de leurs axes ou bien de leurs demi-bases*, c'est-à-dire que

$$\frac{\text{courbe AOD}}{\text{courbe XIG}} = \frac{AC}{XF} \text{ ou bien } = \frac{CD}{GF},$$

ces deux derniers rapports étant égaux par supposition.

La démonstration est facile. Je partage chaque axe en un même nombre quelconque de segments, soit deux seulement pour éviter la confusion et la prolixité. Soit donc B le milieu de l'axe AC, Y celui de l'axe FX; je mène les ordonnées BO, YI, puis en D, O, les tangentes DN, OM, dont la première rencontre en E l'ordonnée BO, la seconde en V la parallèle AV aux ordonnées; de même sur l'autre figure, je mène aux points G, I les tangentes GK, IS, qui rencontrent en H, R l'ordonnée YI et la parallèle XR.

Par supposition, $\frac{DC}{CA}=\frac{GF}{FX}$; d'autre part, d'après la nature de la parabole, $\frac{CA}{\text{sous-tang. } CN}=\frac{2}{3}$, et $\frac{FX}{\text{sous-tang. } FK}=\frac{2}{3}$; donc $\frac{DC}{CN}=\frac{GF}{FK}$; donc les triangles DNC, GKF sont semblables; donc $\frac{DN}{NC}=\frac{GK}{KF}$. Mais $\frac{DN}{NC}=\frac{DE}{CB}$ et $\frac{GK}{KF}=\frac{GH}{FY}$; donc $\frac{DE}{CB}=\frac{GH}{FY}$.

On prouvera de même que $\frac{OV}{BA}=\frac{IR}{XY}$.

Les segments de l'axe, AB, BC d'une part, XY, YF de l'autre, étant égaux entre eux, en sommant les segments de tangentes, on aura

$$\frac{DE+OV}{AC}=\frac{GH+IR}{XF}.$$

Mais la somme des segments, DE + OV, dont on peut multiplier le nombre autant qu'on le voudra, représente, par la réduction à l'impossible, comme on l'a déjà indiqué et prouvé, la courbe totale DOA; de même la somme GH + IR, dont on peut aussi multiplier le nombre des termes à volonté, représente la courbe totale GIX. Donc

$$\frac{\text{courbe } DOA}{\text{axe } AC}=\frac{\text{courbe } GIX}{\text{axe } XF};$$

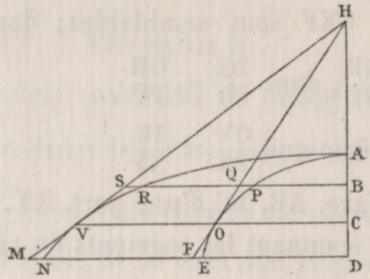
vicissim et convertendo :

$$\frac{\text{axe } AC}{\text{axe } XF} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{base } DC}{\text{base } GF}=\frac{\text{courbe } DOA}{\text{courbe } GIX}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Proposition III.

Soit (*fig.* 136) AO *une courbe d'axe* AC, *de base* CO; *imaginons formée sur elle une courbe de même axe et de même sommet, dont les ordonnées soient proportionnelles à celles de la première courbe,* c'est-à-dire $\frac{\text{base } CO}{\text{base } CV}=\frac{BP \text{ ordonnée de la } 1^{\text{re}}}{BR \text{ ordonnée de la } 2^{\text{e}}}=\frac{DE}{DN}$, etc., indéfiniment. *Si en un point quelconque* O *de la première courbe, on mène la tangente* OH *rencontrant l'axe en* H, *et que l'on prolonge* CO *jusqu'à la rencontre de la seconde courbe en* V, *je dis que la droite qui joint* V, H *est tangente* *à la seconde courbe, et que les tangentes qui se correspondent sur les deux courbes coupent toujours l'axe au même point.*

Fig. 136 (3).



En effet, menons les ordonnées BPR, DEN, rencontrant les courbes en P, R, E, N et les droites OH, VH ou leurs prolongements en Q, S, F, M. Si nous prouvons que BS, menée au-dessus de CV, est toujours plus grande que BR, et que DM, menée au-dessous, est aussi plus grande que l'ordonnée DN, il sera clair que la droite MVSH est tangente à la seconde courbe en V.

Or, par construction, $\frac{CO}{CV} = \frac{BP}{BR}$, et, en raison du parallélisme des droites COV, BQS, que coupent les trois droites CH, OH, VH, issues d'un même point, $\frac{CO}{CV} = \frac{BQ}{BS}$; donc $\frac{BP}{BR} = \frac{BQ}{BS}$; *vicissim* $\frac{BP}{BQ} = \frac{BR}{BS}$.

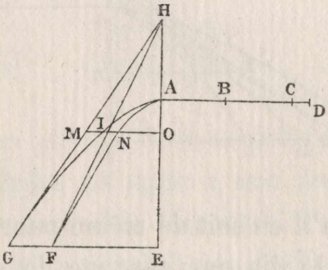
Mais, OQH étant tangente à la première courbe en O, $BQ > BP$; donc $BS > BR$. Ce qu'il fallait prouver en premier lieu.

La démonstration est la même pour l'ordonnée menée plus bas. En effet, on suppose $\frac{CO}{CV} = \frac{DE}{DN}$; d'autre part, à cause des parallèles, $\frac{CO}{CV} = \frac{DF}{DM}$; donc $\frac{DE}{DN} = \frac{DF}{DM}$. Mais $DE < DF$; donc $DN < DM$. Donc MVSH est tangente en V à la seconde courbe.

Lemme pour ce qui suit.

Soit (*fig.* 137) notre parabole GIA, d'axe AE, de demi-base EFG, de tangente GH. Construisons sur le même axe AE une autre parabole FNA, telle que l'on ait pour la demi-base : $EF^2 = \frac{1}{2}EG^2$, et de même pour les ordonnées quelconques : $NO^2 = \frac{1}{2}OI^2$. Soient AD le paramètre de la première parabole GIA, CD sa neuvième partie, B le milieu du reste. Je mène en F la tangente FH à la seconde parabole; elle rencontre l'axe au même point H que la tangente à la première,

Fig. 137 (4).



d'après la proposition précédente, ou bien d'après la nature de ces paraboles, puisque l'on a pour l'une et pour l'autre : $\frac{EA}{EH} = \frac{2}{3}$. Je dis que $\frac{FE^2}{EH^2} = \frac{\frac{1}{2}AB}{EG}$.

En effet, d'après la proposition III de la Dissertation, $\frac{GE^2}{EH^2} = \frac{AB}{EG}$. Prenant la moitié des antécédents, comme $\frac{1}{2}GE^2 = EF^2$ par supposition, $\frac{EF^2}{EH^2} = \frac{\frac{1}{2}AB}{GE}$.

Nous prouverons de même que, si $FE^2 = \frac{1}{3}GE^2$, $\frac{FE^2}{EH^2} = \frac{\frac{1}{3}AB}{EG}$. De même pour les rapports des carrés : $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc. à l'infini.

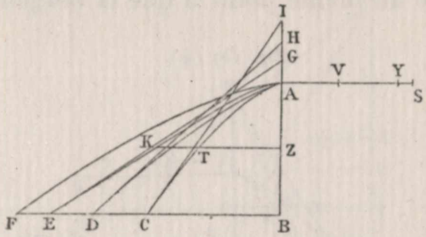
Puisque, pour le rapport $\frac{1}{2}$, nous avons prouvé que $\frac{EF^2}{EH^2} = \frac{\frac{1}{2}AB}{GE}$, *componendo*, $\frac{(FE^2 + EH^2)(= FH^2)}{EH^2} = \frac{\frac{1}{2}AB + GE}{GE}$. Si $EF^2 = \frac{1}{3}GE^2$, on aura $\frac{FH^2}{EH^2} = \frac{\frac{1}{3}AB + GE}{GE}$; si $EF^2 = \frac{1}{4}GE^2$, on aura $\frac{FH^2}{EH^2} = \frac{\frac{1}{4}AB + EG}{EG}$; et ainsi de suite indéfiniment, cette relation ayant d'ailleurs lieu pour toute ordonnée.

Proposition IV.

Cela posé, nous découvrons sans difficulté le théorème général.

Soient (*fig.* 138) notre parabole AC, AB son axe, BC la demi-base; soient formées sur elle les autres courbes en nombre infini AD, AE, AF, telles que, si l'on mène une ordonnée quelconque BCDEF, BD soit toujours égale à la première courbe CA, BE à la seconde AD, BF

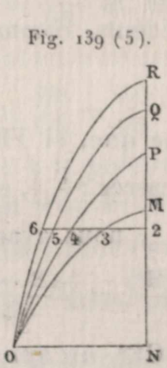
Fig. 138 (5).



à la troisième AE, et qu'il en soit de même pour toutes les courbes et toutes les ordonnées. Je dis que chacune de ces courbes AD, AE, AF, etc. à l'infini, est toujours égale à une droite donnée, de même que cela a lieu pour les courbes que dans la Dissertation nous avons construites du côté de la base par un procédé analogue.

Voici le théorème général : Soit construite à part (*fig.* 139) la parabole O3M absolument égale et semblable à la parabole AC, ayant par

Fig. 139 (5).



conséquent son axe $MN = AB$, sa demi-base $ON = BC$; c'est seulement pour éviter la confusion que nous faisons une figure à part. Soit $NP^2 = 2NM^2$, $NQ^2 = 3NM^2$, $NR^2 = 4NM^2$, et ainsi de suite indéfiniment. La demi-base ON restant la même, je construis, par les sommets P, Q, R, des paraboles de même nature que la parabole O3M ou AC; soient O4P, O5Q, O6R, etc. ces paraboles.

Je dis que la parabole O4P = courbe AD, que la parabole O5Q = courbe AE, que la parabole O6R = courbe AF; et ainsi de suite indéfiniment.

Comme, en effet, dans nos paraboles O4P, O5Q, O6R, si l'on mène l'ordonnée 23456, on a toujours, d'après la nature de ces paraboles,

$$\frac{ON^3}{(42)^3} = \frac{NP^2}{(P2)^2}, \qquad \frac{ON^3}{(52)^3} = \frac{NQ^2}{(Q2)^2}, \qquad \frac{ON^3}{(62)^3} = \frac{NR^2}{(R2)^2},$$

il est clair, d'après ce qui a été démontré dans la Dissertation, que chacune de ces paraboles est égale à une droite donnée; par suite, notre théorème général une fois démontré, il s'ensuivra que chacune des courbes AD, AE, AF est égale à une droite donnée.

Voici la démonstration du théorème général : Soient AS le paramètre de notre parabole, SY son neuvième, V le milieu du reste. Aux points C, D, E, je mène aux nouvelles courbes les tangentes CI, DH, EG, qui rencontrent l'axe aux points I, H, G. D'après ce qui a été démontré dans la Dissertation (prop. III) : $\frac{BC^2}{BI^2} = \frac{AV}{BC}$; *componendo :* $\frac{CI^2}{BI^2} = \frac{AV + BC}{BC}$. Mais, d'après la Dissertation (prop. VI) : $\frac{CI^2}{BI^2} = \frac{BD^2}{BH^2}$, BH étant la sous-tangente de DH; donc $\frac{BD^2}{BH^2} = \frac{AV + BC}{BC}$; *componendo :* $\frac{DH^2}{BH^2} = \frac{AV + 2BC}{BC}$. Mais, d'après la même proposition, $\frac{DH^2}{HB^2} = \frac{BE^2}{BG^2}$, BG étant la sous-tangente de EG; donc $\frac{BE^2}{BG^2} = \frac{AV + 2BC}{BC}$.

Nous prouverons de même que, si l'on mène à la courbe EA l'ordonnée ZTK, coupant en T la courbe CA, et que l'on imagine au point K la tangente à la courbe AKE : $\frac{KZ^2}{(\text{sous-tangente de K})^2} = \frac{AV + 2ZT}{ZT}$, et cela, quel que soit le point K.

Soit tracée (*fig.* 140) sur une figure à part, pour éviter la confusion, cette même courbe AKE, qui sera désignée dans cette figure nouvelle par $\beta\varphi\lambda$. Soient donc la base $\lambda\delta$ = EB, la tangente $\lambda\gamma$ = EG, l'axe $\delta\beta$ = BA, la sous-tangente $\delta\gamma$ = BG, l'ordonnée $\nu\varphi$ = ZK. De cette courbe $\lambda\varphi\beta$, j'en forme une moindre $\theta\pi\beta$, telle que les carrés de ses ordonnées soient moitié des carrés des ordonnées de la première courbe; ainsi $\delta\theta^2 = \frac{1}{2}\delta\lambda^2$, $\nu\pi^2 = \frac{1}{2}\nu\varphi^2$, etc. Je mène à cette nouvelle courbe les tangentes $\theta\gamma$, $\pi 7$, aux points θ, π.

Fig. 138 (5).

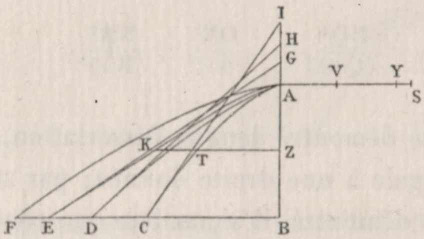
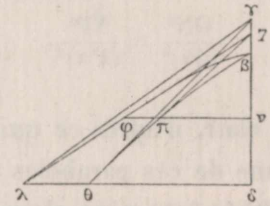


Fig. 140 (5).



D'après la proposition III ci-dessus, il est clair que les tangentes $\theta\gamma$, $\lambda\gamma$ rencontrent l'axe au même point γ; de même les tangentes en φ, π rencontrent l'axe au même point 7, puisque les ordonnées des deux courbes sont en rapport constant.

Je trace encore à part (*fig.* 141) une parabole de même nature que OM, OP, etc., d'axe $98 = MN = AB = \beta\delta$; de demi-base $\theta\chi = NO\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou $BC\sqrt{\frac{1}{2}}$. Soit $\chi\,11\,9$ cette parabole dont je forme une autre courbe $9\,12\,\psi$, de même axe 98, mais dont l'ordonnée $8\psi = \text{arc}\,\chi\,11\,9$; l'ordonnée $10\,11\,12 = \text{arc}\,11\,9$, et de même pour les autres.

Fig. 139 (5).

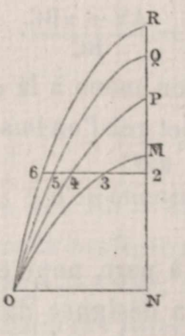
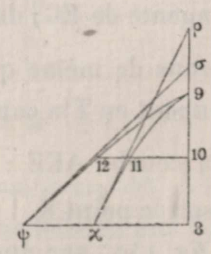


Fig. 141 (5).



Il faut prouver en premier lieu que les courbes $\theta\pi\beta$ et $\psi\,12\,9$ sont les mêmes, c'est-à-dire absolument égales et semblables. Voici comment. Nous avons prouvé que $\frac{BE^2}{EG^2}$ ou $\frac{\lambda\delta^2}{\delta\gamma^2} = \frac{AV + 2CB}{CB}$. Prenant la moitié des antécédents, comme nous avons supposé $\theta\delta^2 = \frac{1}{2}\lambda\delta^2$, $\frac{\theta\delta^2}{\delta\gamma^2} = \frac{\frac{1}{2}AV + CB}{CB}$. Nous prouverons de même, pour une autre ordonnée quelconque $\pi\nu$, $\frac{\pi\nu^2}{(\pi 7)^2} = \frac{\frac{1}{2}AV + ZT}{ZT}$, etc.

Il faut maintenant examiner si la courbe $\psi 129$ jouit de la même propriété. Voici comment on y arrivera.

Dans la courbe $\chi 119$, dont la demi-base $\chi 8 = BC\sqrt{\frac{1}{2}}$, et l'axe $89 = AB$, d'après le lemme précédent, si l'on mène les tangentes $\chi\rho$, $\psi\sigma$ aux points χ, ψ : $\frac{(8\chi)^2}{(8\rho)^2} = \frac{\frac{1}{2}AV}{CB}$; *componendo*, $\frac{(\chi\rho)^2}{(8\rho)^2} = \frac{\frac{1}{2}AV + CB}{CB}$.

De même, si l'on suppose la droite $9\,10 = AZ$, c'est-à-dire si les points 10 et Z sont à égale distance du sommet, le rapport du carré de la tangente en 11 au carré de la sous-tangente sera $\frac{\frac{1}{2}AV + ZT}{ZT}$. Mais (prop. VI) : $\frac{(\chi\rho)^2}{(8\rho)^2} = \frac{(\psi 8)^2}{(8\sigma)^2}$, et de même $\frac{\overline{\text{tang}\,11}^2}{\overline{\text{sous-tang}\,11}^2} = \frac{\overline{12\,10}^2}{\overline{\text{sous-tang}\,12}^2}$. Donc $\frac{(\psi 8)^2}{(8\sigma)^2} = \frac{\frac{1}{2}AV + BC}{BC}$.

Mais, sur l'autre figure (*fig.* 140), nous avons prouvé que $\frac{\theta\delta^2}{\delta\gamma^2} = \frac{\frac{1}{2}AV + BC}{CB}$; donc, dans les deux courbes $\psi 129$, $\theta\pi\beta$, $\frac{\psi 8}{8\sigma} = \frac{\theta\delta}{\delta\gamma}$.

La même relation aura lieu pour tous les autres points; on prouvera de même, par exemple, que $\frac{10\,12}{\text{sous-tang}\,12} = \frac{\pi\nu}{\nu 7}$, etc.

Donc (*Appendice*, prop. I) les courbes $9\,12\,\psi$, $\theta\pi\beta$ ayant même axe et leurs ordonnées étant aux sous-tangentes constamment dans le même rapport que leurs correspondantes de l'une à l'autre courbe, ces courbes seront égales entre elles ainsi que leurs demi-bases et les ordonnées à égale distance des sommets.

Mais, par construction, la demi-base $\psi 8 = \widehat{\chi 119}$; donc $\widehat{\chi 119} = \theta\delta$. Mais $\theta\delta = \delta\lambda\sqrt{\frac{1}{2}}$; donc la courbe parabolique $\chi 119 = \delta\lambda\sqrt{\frac{1}{2}}$. Mais $\delta\lambda = BE$ et, dans la construction des courbes dérivées de la première AC, on suppose $BE = \widehat{AD}$.

Donc parab. $\chi\,11\,9 = \sqrt{\frac{1}{2}}\,\widehat{AD}$. Mais on a aussi $\widehat{\chi\,11\,9} = \sqrt{\frac{1}{2}}\,\widehat{O\,4\,P}$, car la base $\chi 8 = \sqrt{\frac{1}{2}}\,BC = \sqrt{\frac{1}{2}}\,NO$, et l'axe $8\,9 = AB = NM = \sqrt{\frac{1}{2}}\,NP$. Les paraboles $O4P$, $\chi\,11\,9$ étant de même nature, et l'axe et la base de la parabole $\chi\,11\,9$ étant respectivement dans le rapport $\sqrt{\frac{1}{2}}$ avec l'axe et la base de la parabole $O\,4\,P$, on aura aussi (*Appendice*, prop. II) parab. $\chi\,11\,9 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ parab. $O\,4\,P$. Puisque nous avons ainsi prouvé que la parabole $\chi\,11\,9$ est dans le rapport $\sqrt{\frac{1}{2}}$, soit avec la parabole $O\,4\,P$, soit avec la courbe AD, la courbe AD et la parabole $O\,4\,P$ seront égales. C. Q. F. D.

On prouvera de même que la courbe AE et la parabole $O\,5\,P$ sont égales.

En effet, $\frac{BE^2}{BG^2} = \frac{AV + 2BC}{BC}$, comme il a été démontré; *componendo* etc., $\frac{EG^2}{BG^2} = \frac{AV + 3BC}{BC}$. Mais (*Dissertation*, prop. VI) : $\frac{EG^2}{BG^2} = \frac{BF^2}{(\text{sous-tang } F)^2}$; donc $\frac{BF^2}{(\text{sous-tang} F)^2} = \frac{AV + 3BC}{BC}$.

Pour la suite, nous suivrons de point en point la démonstration précédente, sauf que dans la figure à part (*fig.* 140), après avoir pris $\lambda\delta = BF$, on prendra $\delta\theta = \sqrt{\frac{1}{3}}\,BF$ ou $\sqrt{\frac{1}{3}}\,\delta\lambda$; la courbe $\lambda\varphi\beta$ sera égale à la courbe FA, et $\theta\pi\beta$ sera de telle sorte que ses ordonnées suivent le rapport des bases $\frac{\lambda\delta}{\theta\delta}$.

Dans l'autre figure à part (*fig.* 141), où sont les courbes $9\,11\,\chi$, $9\,12\,\psi$, on prendra comme ci-dessus $9\,8 = NM = AB = \beta\delta$, mais ensuite la base $8\chi = \sqrt{\frac{1}{3}}\,ON = \sqrt{\frac{1}{3}}\,CB$. La parabole $\chi\,\overline{11}\,9$ sera de même nature que les paraboles CTA ou $O\,3\,M$. On en formera la courbe $\psi\,12\,9$ dont les ordonnées 8ψ, $10\,12$ seront, comme ci-dessus, égales aux arcs $\chi\,9$, $11\,9$, et on prouvera, comme ci-dessus, que les courbes $\beta\pi\theta$, $9\,11\,\chi$ sont égales et semblables, c'est-à-dire identiques.

On conclura l'égalité des bases $\theta\delta$, $\psi\,8$; par suite la base $\psi\,8$ ou la courbe $9\,11\,\chi = \sqrt{\frac{1}{3}}\,\delta\lambda = \sqrt{\frac{1}{3}}\,BF = \sqrt{\frac{1}{3}}$ courbe AE. Mais on aura démontré précédemment que parab. $\chi\,11\,9 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ parab. $O\,5\,Q$. Donc la courbe AE et la parabole $O\,5\,Q$ seront égales.

On emploiera le même raisonnement pour les cas subséquents, et l'on établira ainsi la vérité générale du théorème.

Qui aura lu attentivement la Dissertation précédente et cet Appendice reconnaîtra aussitôt les principaux fondements de notre méthode et verra qu'on en déduit très facilement la mesure des courbes.