SUR LE

PROBLÈME D'ADRIEN ROMAIN.

AU TRÈS ILLUSTRE CHRISTIAN **HUYGENS.**

En examinant plus attentivement, l'année dernière, la célèbre réponse de François Viète au problème d'Adrien Romain, et en tombant sur ce passage du Chapitre VI où ce subtil mathématicien avance ne pas savoir si Adrien lui-même a bien connu la formation et les propriétés de l'équation qu'il a proposée, j'ai commencé à douter que Viète de son côté eût bien donné et découvert une solution suffisamment générale de cette fameuse équation.

Adrien Romain proposait en effet, suivant l'énoncé corrigé par Viète, de trouver la valeur de la racine de l'équation algébrique :

$$\begin{aligned}
&45x - 3795x^3 + 95\,634x^5 - 113\,8500x^7 + 781\,1375x^9 - 3451\,2075x^{11}\\
&\quad + 1\,0530\,6075x^{13} - 2\,3267\,6280x^{15} + 3\,8494\,2375x^{17} - 4\,8849\,4125x^{19}\\
&\quad + 4\,8384\,1800x^{21} - 3\,7865\,8800x^{23} + 2\,3603\,0652x^{25} - 1\,1767\,9100x^{27}\\
&\quad + 4695\,5700x^{29} - 1494\,5040x^{31} + 376\,4565x^{33} - 74\,0259x^{35}\\
&\quad + 11\,1150x^{37} - 1\,2300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = \textit{un nombre donné.}
\end{aligned}$$

Il est certain que Viète a fait une très élégante et très savante réduction de ce problème, suivant son habitude, en employant les sections angulaires et qu'il a construit, page 318 de l'édition elzévirienne, une Table importante qu'il est aisé d'étendre indéfiniment à un nombre quelconque de termes en continuant à appliquer la méthode dont il s'est servi; cette Table permet de reconnaître quelle équation correspond à une division spéciale des angles.

Ainsi, si l'on prend d'abord, dans les rangs impairs, $x^3 - 3x$ et qu'on égale cette expression à un nombre donné qui soit au plus égal à 2, la question se ramène à la trisection de l'angle. Si ensuite on égale $x^5 - 5x^3 + 5x$ à un nombre donné qui soit au plus égal à 2, la question se ramène à diviser un angle en cinq parties égales. Si c'est $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x$ que l'on égale encore à un nombre donné au plus égal à 2, il s'agira de prendre la septième partie d'un angle; si l'on continue indéfiniment la Table de Viète selon la méthode qu'il a donnée, le premier membre de l'équation proposée par Adrien sera le 45e terme de la Table, et la question sera ramenée à prendre la 45e partie d'un angle donné.

Mais il faut observer que, dans toutes ces équations, la méthode de Viète et l'emploi des sections angulaires ne sont applicables qu'aux cas où, comme nous l'avons dit, le nombre donné, auquel on égale une quelconque des expressions algébriques de la Table, ne dépasse pas 2; si au contraire ce nombre donné est supérieur à 2, aussitôt tout ce mystère des sections angulaires devient inutile et ne rend plus aucun service pour la solution de la question proposée.

Cependant Adrien avait proposé en général de résoudre l'équation en s'en donnant le second membre; il faut donc recourir à un autre moyen qu'aux sections angulaires de Viète.

Si l'on propose tout d'abord, comme premier cas, d'égaler $x^3 - 3x$ à un nombre donné qui soit au plus égal à 2, la question, comme nous l'avons déjà indiqué, se ramène à la trisection de l'angle; si, au contraire, on égale $x^3 - 3x$ à 4 ou à tout autre nombre supérieur à 2, l'équation proposée est résolue par les analystes au moyen de la méthode de Cardan. Mais, dans les autres cas suivants, la solution peut-elle être obtenue indéfiniment par des extractions de racines, voilà ce que les analystes n'ont pas encore essayé; mais pourquoi ne pas faire progresser l'Algèbre de ce côté, surtout sous vos auspices, illustre Huygens, vous dont tous les savants honorent à juste titre le brillant mérite?

Soit donc proposé d'égaler $x^5 - 5x^3 + 5x$ à 4 ou à tout autre nombre supérieur à 2. Dans ce cas, la méthode de Viète est inapplicable; mais nous pouvons affirmer hardiment, pour résoudre généralement le problème d'Adrien, que pour toutes les expressions de la Table précitée, toutes les fois que le nombre donné est supérieur à 2, la question proposée peut être facilement résolue par des extractions de racines.

Nous avons en effet remarqué, bien plus nous avons démontré que, dans tous ces cas, la question peut être ramenée, de même que dans l'équation cubique, à une quadratique par une racine cubique, selon la méthode de Cardan et de Viète; si l'équation est du cinquième degré, à une quadratique par une racine du cinquième degré; si l'équation est du septième degré, à une quadratique par une racine du septième degré, et ainsi de suite indéfiniment.

Soit, par exemple, $x^3 - 3x = 4$. Tous savent que la méthode précitée donne la racine : $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$.

Mais proposons, dans l'exemple d'Adrien ou de Viète, d'égaler $x^5 - 5x^3 - 5x$ à 4 ou à tout autre nombre plus grand que 2.

Par une méthode qui est générale et qui s'appliquera indéfiniment à tous les cas de la Table, nous supposerons que la racine cherchée est de la forme $\frac{y^2+1}{y}$; en opérant la substitution, nous verrons toujours se détruire réciproquement les termes qui s'opposent à la simple résolution de la question par une extraction de racine; par exemple, dans le cas proposé, la racine sera $\sqrt[5]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[5]{2 - \sqrt{3}}$.

Si l'on prend la septième expression dans la Table de Viète (je veux dire celle dont l'exposant de la plus haute puissance est 7), soit

$$x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x = 4,$$

et que l'on imagine, comme ci-dessus, $x = \frac{y^2+1}{y}$, tous les termes s'opposant à la solution par extraction de racine se détruiront de même, et l'on trouvera pour la racine cherchée : $\sqrt[7]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[7]{2-\sqrt{3}}$, et ainsi de suite à l'infini.

C'est ce que vous pourrez non seulement reconnaître par l'expérience, mais aussi démontrer, aussitôt que vous le désirerez; car c'est une propriété spécifique de toutes les équations que l'on peut former avec la Table de Viète, que leurs solutions s'obtiennent toujours par de simples extractions de racines, lorsque le terme connu est supérieur à 2.

Or le nombre donné, auquel peut être égalée une expression analytique de la Table, peut être soit 2, soit plus petit que 2, soit plus grand que 2.

Dans le premier cas, la racine cherchée est toujours 2.

Dans le second, la question se ramène, d'après Viète, aux sections angulaires.

Dans le troisième, elle se résout facilement au moyen de notre méthode, c'est-à-dire par des extractions de racines.

Ainsi, si l'on prend l'expression analytique proposée par Adrien :

$$45x - 3795x^3 + \ldots = 4,$$

la racine cherchée sera $x = \sqrt[45]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[45]{2-\sqrt{3}}$.

Nous n'avons pas à nous arrêter plus longtemps sur un sujet désormais éclairci par des exemples suffisants; on peut toutefois remarquer que l'extraction de la racine du 45^{e} degré, ou l'invention de quarante-quatre moyennes proportionnelles entre deux quantités données, peut se ramener très facilement à l'extraction successive de deux racines cubiques et d'une racine du 5^{e} degré, ce que montrent suffisamment les diviseurs 5 et 9 du nombre 45; 5 en effet correspond à une racine du 5^{e} degré, et 9 à l'extraction de deux racines cubiques, puisque 9 est le carré de 3, exposant du cube.

Ainsi, l'invention de deux moyennes proportionnelles réitérée deux fois et celle de quatre moyennes, opérée une seule fois, fournissent quarante-quatre moyennes et résolvent notre question, de même que

Viète a ramené la division de l'angle en 45 parties égales, ce qui est le problème d'Adrien, à une équation cubique réitérée deux fois et à une équation du 5^{e} degré, c'est-à-dire à une double trisection et à une seule division en 5.

Je n'ajoute rien sur les solutions multiples de l'équation ou question proposée; j'ai seulement donné celle qui se présente en premier lieu, me réservant à traiter à loisir des autres dont la discussion demande plus de travail.

Adieu, homme illustre, aimez-moi.