WYŻSZA SZKOŁA
INFORMATYKI STOSOWANEJ
I ZARZĄDZANIA

ANALIZA SYSTEMOWA W FINANSACH I ZARZĄDZANIU

Wybrane problemy

Tom 2

Pod redakcją

Macieja KRAWCZAKA i Jerzego HOŁUBCA

Warszawa 2000

WYŻSZA SZKOŁA
INFORMATYKI STOSOWANEJ
I ZARZĄDZANIA

ANALIZA SYSTEMOWA W FINANSACH I ZARZĄDZANIU

Wybrane problemy
Tom 2

Pod redakcją
Macieja KRAWCZAKA i Jerzego HOŁUBCA

Warszawa 2000

Wykaz opiniodawców artykułów zamieszczonych w tomie:

doc dr hab. Dariusz **GĄTAREK**

prof. dr hab. Jakub **GUTENBAUM**

prof. dr hab. Jerzy **HOŁUBIEC**

doc. dr hab. Marek **LIBURA**

prof. dr hab. Stanisław **PIASECKI**

prof. dr hab. Andrzej **STRASZAK**

doc. dr hab. Sławomir **WIERZCHOŃ**

doc dr. hab. Leszek **ZAREMBA**

ISBN 83-85847-54-5

WYCENY INSTRUMENTÓW FINANSOWYCH ZALEŻNYCH OD STÓP PROCENTOWYCH Z UŻYCIEM KRAT DWUMIANOWYCH

Zygmunt Małecki
Zaoczne Studia Doktoranckie IBS PAN

1. Stałe i pewne przepływy pieniędzy

Najprostszym przykładem przepływu pieniędzy jest zero kuponowa obligacja. Jeśli jej czas do zapadalności wynosi n okresów , a parytet wartości wynosi 1 , to cena będzie n-okresowo dyskontującym czynnikiem B(n) który jest dany przez :

$$Cena = B(n) = 1/(1 + r(n))^n \tag{1}$$

gdzie r(n) jest n-okresową stopą spot , będącej jednocześnie yeld to maturity (YTM) zero kuponowej obligacji o zapadalności w okresie n. Jeśli wartość nominalna jest równa CF(n) , cena zero kuponowej obligacji wynosi : Cena = CF(n) * B(n). Ogólnie strumień przepływów pieniężnych (gdzie CF(t) jest przepływem w okresach czasu t=0,1,2,3,....,n) może być dekomponowany na sumę zero kuponowych obligacji o wartościach nominalnych CF(0),CF(1),...,CF(n) o zapadalnościach odpowiednio w okresie t = 0,1,2,...,n . Wartość bieżąca całkowitego strumienia pieniędzy będzie więc sumą bieżących wartości składowych zero kuponowych obligacji:

$$Cena = \sum_{t=0}^{n} CF(t) * B(t) \tag{2}$$

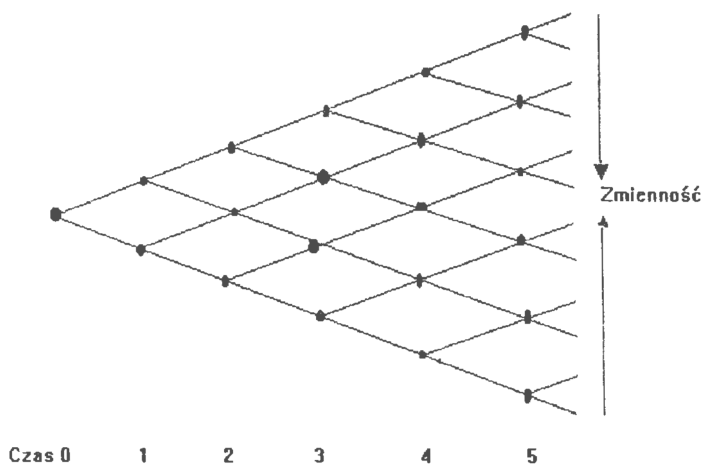
Dla obligacji której cena jest równa nominałowi (nominał = 1), z kuponem c(n) , która zapada w okresie n , równanie (2) otrzymuje następującą postać :

$$1 = B(n) + c(n) * \sum_{t=0}^{n} B(t) \tag{3}$$

Dla każdego możliwego okresu od 1 do n odpowiednia wartość obligacji będzie definiować równanie postaci (3).

2. Przepływy pieniężne wrażliwe na wysokości stóp procentowych.

W celu wyceny strumienia procentowo wrażliwych przepływów pieniężnych, należy założyć w jaki sposób stopy procentowe będą zmieniać się wraz z upływem czasu. Załóżmy że ruchy stóp procentowych mogą być aproksymowane przez dyskretny dwumianowy proces reprezentowany przez kratę pokazaną na Rys.1.



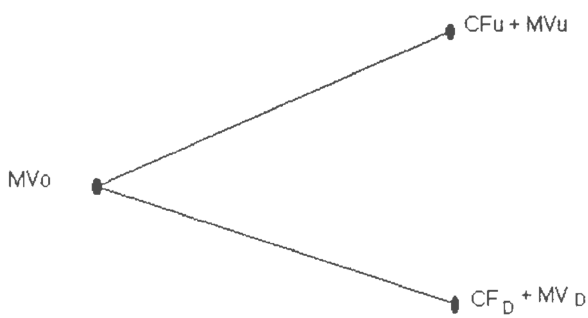
Rys.1 Krata stóp procentowych.

Na osi rzędnych oznaczone są dyskretne punkty w czasie. Okresami mogą być lata, półrocza, kwartały, miesiące , lub jakiekolwiek inne przedziały czasowe. Zakłada się że przepływy pieniędzy zachodzą tylko w określonych punktach czasu. Z każdym węzłem kraty związana jest wejściowa krzywa stóp spot. Z każdego węzła kraty droga prowadzi do jednego z dwóch innych w następnym punkcie czasu - do "górnego"(UP) albo do "dolnego"(DOWN) stanu. Krata jest połączona ponieważ zakłada się że dwie ścieżki "góra, dół" i "dół góra" wychodzące z dowolnego węzła zawsze prowadzą do tego samego węzła dwa okresy później.

2.1. Ścieżkowa niezależne przepływy pieniężne.

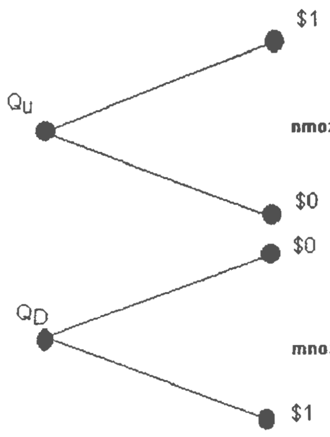
Strumień wrażliwych na stopy procentowe przepływów pieniężnych jest niezależny ścieżkowo jeśli każda składowa strumienia może zależeć od wysokości stóp procentowych aktualnych w czasie zachodzenia przepływu, ale nie zależy od wysokości stóp procentowych z żadnego poprzedniego okresu. Gdy przepływy pieniędzy są funkcją wysokości stóp procentowych w węzłach w których zachodzą, a nie ścieżek prowadzących do tych węzłów, problem obliczenia wartości bieżącej może być rozwiązany przez zdyskontowanie kraty od końca do początku. Obliczenia są konieczne dla każdego węzła w kracie , a nie dla każdej ścieżki. Rozwiązanie ścieżkowo niezależnego problemu sugeruje także jak rozwiązać bardziej ogólny ścieżkowo zależny problem.

Istotne do wyznaczenia wartości bieżącej całej kraty przepływów pieniężnych jest spostrzeżenie że potrzebna jest procedura wyznaczania wartości bieżącej dla pojedynczego wierzchołka. Rys.2 pokazuje pojedynczy wierzchołek.



Rys.2 Określenie warotści bieżącej

Węzeł do którego dołączone są węzły górny i dolny oznaczono O (ORIGIN) , węzeł na końcu górnej gałęzi U (UP) , a węzeł na końcu niższej gałęzi D (DOWN). Niech MV_U będzie zdyskontowaną wartością wszystkich przyszłych przepływów pieniężnych zachodzących w części kraty o początku w węźle U. Podobnie, niech MV_D będzie zdyskontowaną wartością w węźle D wszystkich przyszłych przepływów pieniężnych zachodzących w części kraty rozpoczynającej się z węzła D. Załóżmy że przepływ pieniędzy zachodzący w węźle U wynosi CF_U , w węźle D jest równy CF_D , a w węźle O wynosi MV_O . Problem sprowadza się do przedstawienie MV_O jako funkcji MV_U, CF_U, MV_D, CV_D i struktury czasowej stóp procentowych w węzłach O, U i D. Mnożniki dyskontujące potrzebne do obliczeń zilustrowane są na Rys.3.



Rys.3
podstawowe mnożniki
dyskonta

W dwumianowym modelu zmian stóp procentowych, są dwa mnożniki przy każdym węźle w kracie. "mnożnik UP" jest finansowym instrumentem który płaci $1 jeden okres później jeśli stopy procentowe wzrosną i nic gdy stopy procentowe spadną. Odwrotnie, "mnożnik DOWN" płaci $1 jeden okres od dziś jeśli stopy procentowe przesuną się do dolnego stanu i nic gdy stopy procentowe przesuną się do górnego stanu , Q_U będzie oznaczać cenę mnożnika UP a Q_D cenę czynnika DOWN. Ceny te są wartościami bieżącymi pojedynczych funkcji wypłat zobrazowanymi na Rys.3.

MV_O może wtedy być określony jako suma Q_U mnożonego przez (CF_U+MV_U) i Q_D mnożonego przez (CF_D+MV_D). Opis ten jest ujęty w równaniu (4), i pokazany na Rys.2.

$$MV_O = Q_U * (CF_U + MV_U) + Q_D * (CF_D + MV_D) \tag{4}$$

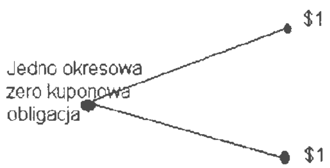
2.2. Ustalenie mnożników dyskonta.

Zapisane poniżej równanie wyraża wartość zero kuponowej obligacji w postaci mnożników wartości. Rys.4 pokazuje jak jedno okresowa zero kuponowa obligacja jest reprezentowana przez kratę - wypłaca $1 jeden okres później, bez względu na końcowy węzeł. Ponieważ cena jedno-okresowej zero -kuponowej obligacji w węźle O wynosi $B_O(1)$, równanie (4) implikuje :

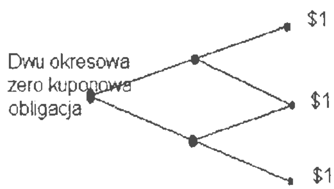
$$B_O(1) = 1 * Q_U + 1 * Q_D \tag{5}$$

W podobny sposób, dwu okresowa, zero kuponowa obligacja może być reprezentowana jako krata jak pokazano na Rys.5 - wypłacająca $1 dwa okresy później, niezależnie od węzła końcowego. Następujące równanie reprezentuje rezultat dwóch kroków :

$$B_O(2) = B_U(1) * Q_U + B_D(1) * Q_D \tag{6}$$



Rys.4
Określenie czynników dyskonta wartości



Rys.5
Określenie czynników dyskonta wartości

Równania (5) i (6) mogą być rozwiązane ze względu na Q_U i Q_D a rozwiązania zastosowane do wierzchołka O. Kontynuacja powyższych rozważań, doprowadza do następującego ogólnego równania, słusznego dla dowolnego dodatniego n :

$$B_O(n) = B_U(n-1) * Q_U + B_D(n-1) * Q_D \tag{7}$$

Wartości czynników dyskontujących w każdym węźle kraty dwumianowej są znajdowane przez rozwiązanie układu równań powstałego z zastosowania równania (7) dla poszczególnych węzłów kraty.

2. 3. Ścieżkowo zależne przepływy pieniężne

Niech zmienne P_U i P_D w węźle O są zdefiniowane jak niżej:

$$\begin{aligned} P_U &= Q_U * (1 + r_o(1)) \\ P_D &= Q_D * (1 + r_o(1)) \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie $r_O(1)$ jest jedno okresową stopą spot w węźle O. Z równań (1),(5) oraz (8) wynika że zachodzi $P_U + P_D = 1$. Także $P_U > 0$ i $P_D > 0$. P_U i P_D

nazywane są "prawdopodobieństwami arbitrażu". Równanie (4) może być napisane następująco :

$$MV_O = P_U * (CF_U + MV_U) * B_O(1) + P_D * (CF_D + MV_D) * B_O(1) \quad (9)$$

Równanie (9) stwierdza że wartość bieżąca w węźle O może być wyliczona przez "ważenie probabilistyczne" wartości bieżących w węzłach U i D i następnie dyskontowania rezultatu do węzła O używając jedno okresowych aplikacji stóp spot w węźle O.

Najbardziej poprawne byłoby użycie równania (9) do wyceny wszystkich ścieżek, jednak, ponieważ , liczba ścieżek rośnie wykładniczo wraz z liczbą okresów , więc z praktycznego punktu widzenia, pełen zbiór ścieżek prowadzących przez kratę nie może być użyty i należy wyznaczyć próbkę. Przepływy pieniędzy są następnie projektowane wzdłuż każdej ścieżki w próbce i dyskontowane do początku używając sekwencji jedno okresowych stóp *spot* stosownie do ścieżek. Te dyskontowane wartości są realizacjami zmiennych losowych których wartość oczekiwana jest poszukiwaną ceną.

Tablela1 przedstawia ceny wyprowadzone z modelu oraz ceny rynkowe dla 7 i 10 letnich obligacji zero kuponowych oraz płacących stały kupon. Wykorzystana została krzywa yeld dla amerykańskich obligacji skarbowych z 16.04.1986:

5.95%, 6.06%, 6.14%, 6.35%, 6.42%, 6.52%, 6.65%, 6.76%, 6.95%, 7.21%, 7.12% dla terminów odpowiednio :

90 dni, 6-mies, 1 rok, 2 lata, 3 lata, 4 lata, 5 lat, 7 lat, 10 lat 20 lat, 30 lat.

Instrument	Cena rynkowa	Cena w Modelu	
		Wielkość próbki 512 szt.	Wielkość próbki 1024 szt.
7 letnia zero kuponowa obligacja	62.59	62.64	62.62
7 letnia obligacja o kuponie 6.76%	100.00	100.06	100.03
10 letnia zero kuponowa obligacja	50.05	50.12	50.05
10 letnia obligacja o kuponie 6.95	100.00	100.12	100.01

Tabl.1 Porównanie ceny rynkowej i wyliczonej z modelu.

Długość okresu w modelu przyjęto jako kwartał. Dla każdego z tych stałych i pewnych przepływów pieniędzy błąd ceny w modelu jest więc w granicach 0.5% wartości , ograniczono wzrost rozmiaru próbki wybieranej z 240 ścieżkowej kraty.

3. Zastosowanie

Metoda opisana w poprzednim rozdziale może być użyty do wyceny każdego strumienia przepływów pieniężnych który może być wyrażony jako funkcja czasu oraz stopy procentowej. Przykładem może być obligacja put . Jest to obligacja , która jako opcje daje inwestorowi prawo do zwrotu obligacji z powrotem emitentowi po ustalonej cenie w określonym czasie wykonania.

Z punktu widzenia zastosowania modelu, przepływ pieniędzy z obligacji PUT może być rozpatrywany na dwa sposoby. W pierwszym , obligacja PUT może być dekomponowana do jej dwóch składowych papierów wartościowych, obligacji stałych wypłat i opcji PUT typu Europejskiego na obligacji stałych wypłat. Przepływ pieniędzy na obligacji jest niewrażliwy na wysokości stóp procentowych , niezależny ścieżkowo i może być wyceniony przy użyciu kraty. Europejska opcja PUT jest przykładem procentowo-wrażliwego , ścieżkowo-niezależnego przepływu pieniędzy. Przepływ pieniędzy na opcji zachodzi na koniec piątego roku. Będzie on równy cenie wykonania opcji (strike price of the option) minus wartość obligacji w tym czasie. Gdy przyszłe przepływy pieniędzy z obligacji są niezależne od wcześniejszych stóp procentowych , ich wartość jest ścieżkowo niezależna. W tym sposobie podejścia do przepływu pieniędzy , cena , trwałość , wypukłość są określone dla każdego z dwóch komponentów a później połączone.

Yeld na obligacji %	Cena			Trwałość[lat]			Wypukłość[lat^2]		
	Bez put	put	z put	bez put	put	z put	bez put	put	z put
7.0	114,21	1.10	115.31	7.0	-72,6	6,3	61	2738	86
7.5	110.42	1.48	111,90	7,0	-61,6	6,1	60	1746	82
8.0	106.80	2.01	108,81	6,9	-52,5	5,8	59	1073	78
8.5	103.32	2.49	105,82	6,9	-47,4	5,6	59	695	74
9.0	100.00	3.13	103,13	6,8	-38,8	5,4	58	417	69
9.5	96.82	3.75	100,56	6,7	-34,1	5,2	57	235	64
10.0	93.77	4.33	98,56	6,7	-30,4	5,0	57	106	59
10.5	90.85	5.04	95,88	6,6	-26,6	4,9	56	7	54
11.0	88.05	5.68	93,73	6,6	-23,5	4,7	55	-68	48

Tabl.3. Cena , Trwałość , Wypukłość
10-cio letnia obligacja z 5-cio letnią Europejską opcją PUT
kupony 9% płatny rocznie , cena wykonania 100.

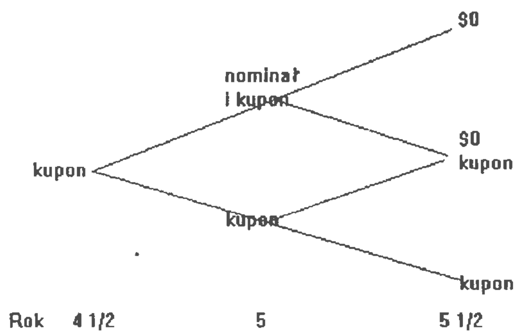
Tabela 3 przedstawia ceny uzyskane przy zastosowaniu modelu dla obligacji put dla różnych wartości yeld. Obligacja miała zapadalność za 10 lat oraz opcję PUT typu Europejskiego z ceną wykonania równą nominałowi (100) w 5 roku. Zamiast rozważania przypływu pieniędzy z obligacji put jako kombinacji dwu papierów wartościowych , spróbujmy popatrzeć na łączny przepływ pieniądza. Rys.6 pokazuje dwa sposoby podejścia do przepływu pieniądza na obligacji put.

Obligacja PUT	=	Obligacja ustalonych wypłat	+	Europejska opcja typu PUT
Procentowo wrażliwe ścieżkowo zależne przepływ pieniędzy		Procentowo niewrażliwy ścieżkowo niezależny przepływ pieniędzy		Procentowo wrażliwy ścieżkowo niezależny przepływ pieniędzy

Rys 6. Dekompozycja obligacji PUT

Przez pierwsze 4 1/2 roku "życia" obligacji , przepływ pieniędzy jest niewrażliwy na poziomy stóp procentowych. Na końcu 5-ego roku przepływ pieniędzy będzie równy cenie wykonania opcji (strike price) plus płacony kupon , albo jedynie płacony kupon. Po końcu 5 roku przepływ pieniędzy będzie zależał od tego czy opcja put została wykonana. Możemy zobaczyć to na rys.7 , gdzie przepływ pieniędzy w środkowym węźle przy końcu 5 1/2 roku będzie zależny od poziomu stóp procentowych w poprzednim okresie.

Czy wyceniamy przepływ pieniędzy przy pomocy jego składowych czy w całości wartość jego będzie taka sama.



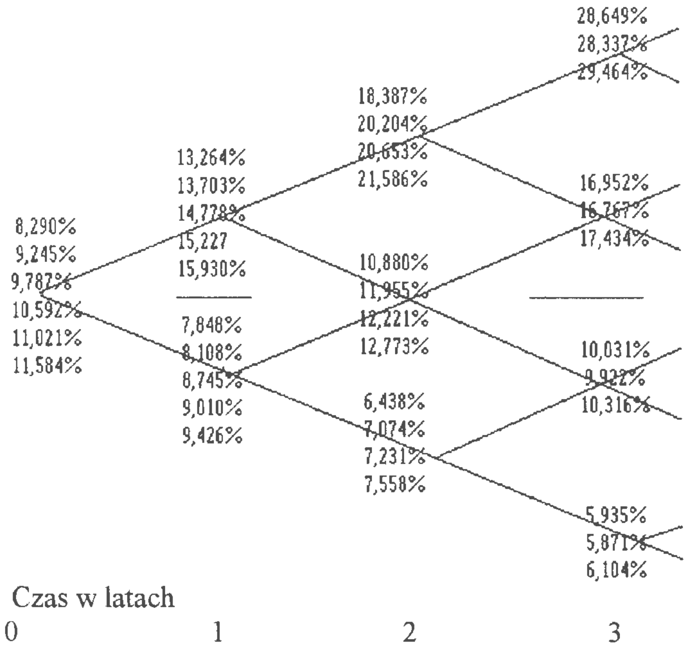
Rys.7 . Diagram przepływu pieniędzy na obligacji typu PUT

Dodatek

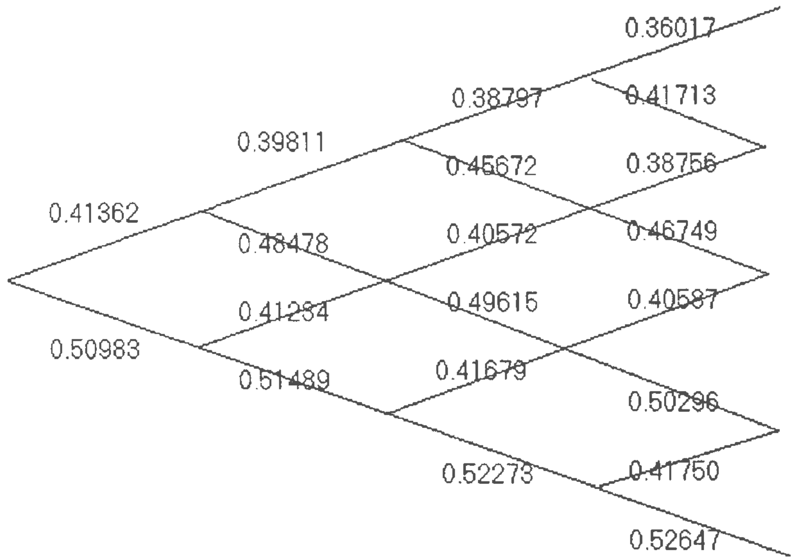
Techniki opisane w rozdziale II zostaną teraz zastosowane do wyceny 3 letniej obligacji o nominale 100 płacącej rocznie kupon w wysokości maksymalnej z rocznej stopy spot za ostatnie 2 lata w dacie wypłaty kuponu. Sposób wyznaczenia stóp spot dla tego przykładu pokazana w Tabl.4. Strukturę czasową stóp procentowych pokazano na rys.12. Krata przedstawiona na rys.8 podaje jedno okresowe mnożniki dyskonta (Qu(t);QD(t)) wyliczone dla czasowej struktury stóp procentowych pokazanych na rys.9.
Tabl.5 przedstawia wycenę obligacji metodą ważenia ścieżek.

Lat do zapa-dal-ności	Kupon % rocznie	Cena za 100 jedn.	Stopa % spot	Stopa % forward za				
				1 rok	2 lata	3 lata	4 lata	5 lat
1	0	92.34	8.295	10.203	10.888	13.040	12.756	14.444
2	9	99.64	9.245	10.541	11.955	12.898	13.597	
3	10	100.74	9.787	11.368	12.221	13.411		
4	10	98.71	10.592	11.713	12.773			
5	8.75	92.35	11.021	11.584				
6	11	99.07	11.584					

Tabl.4 Wyznaczenie stóp procentowych spot oraz forward dla przykładowych obligacji płacących roczny kupon.



Rys.8. Struktura czasowa stóp procentowych



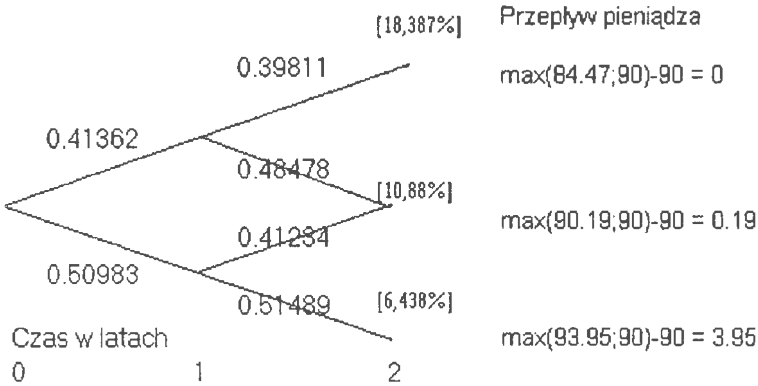
Czas w latach

0 1 2 3 4

Rys.9. Jedno okresowe mnożniki dyskonta

Ścieżka	wartość bieżąca ścieżki	waga procentowa ścieżki [%]	ważona wartość bieżąca ścieżki
u-u-u	115,847	8,449	9,788
u-u-d	108,770	9,946	10,818
u-d-u	109,058	10,759	11,734
u-d-d	106,346	13,157	13,992
d-u-u	106,877	11,280	12,056
d-u-d	102,188	13,794	14,086
d-d-u	102,482	14,469	14,828
d-d-d	100,726	18,147	18,280
		100,001	105,582

Tablela5. Wyznaczenie ceny przez ważenie ścieżek 3 letnia obligacja płacąca roczny kupon w wysokości maksymalnej z rocznej stopy spot za ostatnie 2 lata w dacie wypłaty kuponu lub aktualna.



Rys. 10 Wycena Europejskiej opcji call na 3 letniej zero kuponowej obligacji przy cenie rozliczenia 90 i wykonaniu w drugim roku

Na rysunku 10 przedstawiono sposób wyceny Europejskiej opcji call na 3 letniej zero kuponowej obligacji o nominale 100 , przy cenie rozliczenia 90 i wykonaniu w drugim roku. Przy wykorzystaniu metody opisanej w niniejszym artykule otrzymano cenę opcji równa 1.11 , natomiast przy wykorzystaniu tradycyjnych metod dyskontowania otrzymano wynik 0.93 (błąd wyceny na poziomie 16% !).

WYŻSZA SZKOŁA
INFORMATYKI STOSOWANEJ
I ZARZĄDZANIA

pod auspicjami
Polskiej Akademii Nauk

ZAŁOŻYCIELEM
Wyższej Szkoły Informatyki Stosowanej i Zarządzania
jest
FUNDACJA KRZEWIENIA NAUK SYSTEMOWYCH
powołana z inicjatywy
Prezesa
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

FUNDATOREM
Fundacji Krzewienia Nauk Systemowych
jest
POLSKA AKADEMIA NAUK

ORGANEM
sprawującym nadzór jest
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania
prowadzi studia wyższe na kierunkach:
INFORMATYKA
ZARZĄDZANIE I MARKETING

SIEDZIBA
Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa

ISBN 83-85847-54-5