



**POLSKA AKADEMIA NAUK**  
**Instytut Badań Systemowych**

**ANALIZA  
PRZYPADKU ŚREDNIEGO  
W OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ**

Wielowymiarowe zadanie załadunku  
oraz zadanie szeregowania prac

**Krzysztof Szkatuła**







## **ANALIZA PRZYPADKU ŚREDNIEGO W OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ**

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

**Seria: BADANIA SYSTEMOWE**  
**tom 23**

---

**Redaktor naukowy:**

**Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum**

Warszawa 1999

Krzysztof SZKATUŁA

**ANALIZA PRZYPADKU ŚREDNIEGO  
W OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ**

Wielowymiarowe zadanie załadunku  
oraz zadanie szeregowania prac

Ww

opiniowanie  
opiniowa

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. Juliusz L. Kulikowski  
Dr hab. Włodzimierz Ogryczak

1999. 1. 4.

Copyright © by Instytut Badań Systemowych PAN  
Warszawa 1999



Siri



44246

ISBN 83-85847-39-1  
ISSN 0208-8029

# Wprowadzenie

Optymalizacja dyskretna stała się samodzielną dziedziną badawczą od połowy lat pięćdziesiątych dwudziestego wieku. Powstała ona na styku zastosowań praktycznych w dziedzinach takich jak ekonomia, zarządzanie, technika i wiele innych oraz matematyki ze szczególnym uwzględnieniem kombinatoryki, teorii grafów i logiki matematycznej. W pewnym uproszczeniu można powiedzieć, że podstawowym celem optymalizacji dyskretniej jest wybór optymalnego wariantu ze skończonego lub przeliczalnego ich zbioru. Optymalność jest rozumiana jako wyznaczenie maksimum lub minimum pewnej funkcji. Uzyskanie rozwiązania zadania optymalizacji dyskretniej umożliwia podejmowanie trafnych decyzji w odniesieniu do wielu aspektów działalności ludzkiej. Przykładami kryteriów optymalizacyjnych może być maksymalizacja zysków, minimalizacja kosztów lub strat i wiele innych.

Można powiedzieć, że w zaawansowanych zastosowaniach praktycznych pojawiło się wiele ważnych, złożonych i trudnych do rozwiązania problemów o powyższym charakterze. Do ich sformalizowania w najbardziej odpowiedni sposób bardzo przydatny okazał się aparat i metodologia matematyki.

W momencie gdy zagadnienie praktyczne zostało sformalizowane jako optymalizacyjny problem matematyczny, powstaje potrzeba jego efektywnego rozwiązania. Oznacza to konieczność opracowania algorytmów i wykonania ich komputerowej implementacji. Niestety, okazało się, że w przypadku wielu zadań optymalizacji dyskretniej oraz algorytmów opracowanych do ich rozwiązywania pojawia się zasadnicza trudność. Dla nawet niezbyt dużych przykładów tych zadań obliczenia numeryczne wymagają niemożliwego do zaakceptowania nakładu obliczeń, na przykład mierzonego w stuleciach pracy obecnych superkomputerów. Co więcej, nawet drastyczne zwiększenie wydajności komputerów nie jest w stanie zasadniczo poprawić sytuacji. Dla ustalenia uwagi, 100-krotne przyśpieszenie obliczeń zmniejsza nakład obliczeń ze 100 lat do jednego roku, co wciąż jest wielkością abstrakcyjną, niemożliwą do zaakceptowania w praktyce obliczeniowej. Efektem tej sytuacji był rozwój teorii i praktycznego zastosowania algorytmów przybliżonych, których celem jest wyznaczenie przybliżonego rozwiązania zadania o akceptowalnej jakości,

przy "niewielkim" nakładzie obliczeń.

Praktyczna niemożliwość uzyskania rozwiązań optymalnych dla licznych przykładów zadań optymalizacji dyskretnej spowodowała konieczność analizowania nakładu obliczeń wymaganego przez algorytmy, dla zadań o określonej wielkości.

W efekcie powstała dziedzina badawcza zwana złożonością obliczeniową. Jej podstawowym zadaniem jest analizowanie zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej z punktu widzenia oceny nakładu obliczeń niezbędnego do uzyskania rozwiązania optymalnego jako funkcji rozmiaru, wielkości zadania. Zadania optymalizacji dyskretnej zostały umownie podzielone na łatwe i trudne do rozwiązywania.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że uzyskane w ten sposób oceny noszą charakter absolutnej gwarancji, to znaczy, że są one prawdziwe dla wszystkich realizacji danych analizowanego zadania. Analiza taka nosi nazwę analizy przypadku najgorszego, gdyż oparta jest ona na najbardziej niekorzystnym zachowaniu się zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej.

Praktyka rozwiązywania zadań optymalizacji dyskretnej wykazała jednak szybko, że uzyskane w ten sposób oceny są bardzo często nadmiernie pesymistyczne. Oceny uzyskane w oparciu o podejście przypadku najgorszego nie charakteryzują w sposób właściwy przeciętnego, średniego zachowania się zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej.

Ta sytuacja spowodowała powstanie dziedziny nazywanej analizą przypadku średniego lub inaczej analizą probabilistyczną zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej. Przeprowadzenie analizy przypadku średniego wymaga zdefiniowania losowego modelu rozważanego zadania. Uzyskane w efekcie przeprowadzenia analizy przypadku średniego wyniki odnoszą się tylko do rozważanego losowego modelu zadania optymalizacji dyskretnej. Natomiast ich olbrzymią zaletą jest możliwość uzyskania alternatywnych, w stosunku do złożoności obliczeniowej w przypadku najgorszym, ocen zachowania się zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej.

Ważną i oryginalną właściwością analizy przypadku średniego jest możliwość analizowania innych charakterystyk zadania niż złożoność obliczeniowa. Dobrym przykładem jest asymptotyczna ocena zachowania się wartości rozwiązania optymalnego jako funkcji pewnych parametrów zadania. Wyniki tego typu znacznie poszerzają wiedzę na temat zadań optymalizacji dyskretnej i w efekcie umożliwiają ich rozwiązywanie w znacznie bardziej efektywny sposób.

Zasadniczym celem tej monografii jest wykazanie, na przykładzie wybranych, ważnych zadań optymalizacji dyskretnej, że przy zastosowaniu prostego aparatu rachunku prawdopodobieństwa można uzyskać wartościowe wyniki analizy przypadku średniego.



W celu właściwego osadzenia uzyskanych wyników w teorii i praktyce optymalizacji dyskretnej pierwsze rozdziały monografii poświęcone zostały prezentacji wybranych zadań optymalizacji dyskretnej, metod ich rozwiązywania, złożoności obliczeniowej oraz analizy przypadku średniego. Należy jednak podkreślić, że zamiarem autora była pogłębiona, a nie bardzo szczegółowa i wyczerpująca prezentacja tych zagadnień. Szczegółowy plan monografii jest następujący.

W rozdziale 1 zaprezentowano dziedzinę optymalizacji dyskretnej ze szczególnym uwzględnieniem programowania całkowitoliczbowego i liniowego, zadań binarnych, zadań teorii grafów oraz zadań harmonogramowania.

W rozdziale 2 zostały przedstawione znane metody rozwiązywania zadań optymalizacji dyskretnej, takie jak metoda podziału i oszacowań, programowanie dynamiczne, algorytmy zachłanne, metody lokalnej poprawy oraz algorytmy programowania liniowego.

W rozdziale 3 rozważono podejście przypadku najgorszego do oceny złożoności obliczeniowej zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej. Zdefiniowano niezbędne elementy oceny rozmiaru wielkości danych zadania i nakładu obliczeń, wprowadzono klasy złożoności obliczeniowej.

Podejście przypadku średniego zastało przedstawione w rozdziale 4. Szczególną uwagę poświęcono aparatowi probabilistycznemu niezbędnemu w dalszej części monografii oraz prezentacji wybranych wyników analizy przypadku średniego znanych z literatury.

W rozdziałach 5 oraz 6 zaprezentowano wielowymiarowe zadanie zaladunku oraz zadanie szeregowania prac z terminami zakończenia. Na przykładzie tych ważnych zadań optymalizacji dyskretnej dokonano dogłębnej analizy zagadnień będących przedmiotem zainteresowania niniejszej monografii, takich jak metody rozwiązywania, analiza złożoności obliczeniowej oraz analiza przypadku średniego. Przedstawione zostały oryginalne wyniki opisujące asymptotyczne zachowanie się rozwiązań optymalnych jako funkcji parametrów zadań w przypadku średnim. Wykazano również, że proste algorytmy przybliżone mogą być asymptotycznie optymalne w sensie analizy przypadku średniego.

Zamiarem autora było używanie możliwie najprostszej notacji matematycznej dla zachowania maksymalnej przejrzystości wywodu. W monografii stosowane są powszechnie przyjęte oznaczenia matematyczne. Dla przykładu:

- $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  oznacza zbiór  $n$  - elementowy.
- $[x_1, x_2, \dots, x_m]$  oznacza wektor o  $m$  składowych przyjmujących wartości liczbowe.

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  lub  $\lim_{n \rightarrow a} g_n$  oznacza granicę funkcji lub ciągu liczbowego, co jednoznacznie wynika z kontekstu.
- $\{X\}$  oznacza jednoznacznie zdefiniowane zdarzenie, na przykład  $x < b$ , gdzie  $x$  jest zmienną,  $b$  pewną stałą.
- $|a|$  oznacza wartość bezwzględną liczby  $a$ , natomiast  $|A|$  oznacza moc (liczbę elementów) zbioru  $A$ .

Kolejne oznaczenia są definiowane w tekście monografii w miarę potrzeb. W przypadku możliwości wystąpienia niejednoznaczności w trakcie przeprowadzania wywodów, odpowiednie pojęcia są przytaczane na bieżąco.

Oryginalna terminologia opisująca pojęcia i obiekty rozważane w monografii w przytłaczającej większości pochodzi z języka angielskiego. W monografii wykorzystywana jest polska terminologia, która zdaniem autora, z jednej strony właściwie oddaje sens oryginału angielskiego, z drugiej zaś strony jest dobrze osadzona w języku polskim. Poza przypadkami oczywistymi, w momencie pierwszego zastosowania nowego, specjalistycznego pojęcia w nawiasach przytoczono jego angielski odpowiednik.

Niniejsza monografia jest efektem wieloletniego zainteresowania autora tematyką analizy przypadku średniego wybranych zadań optymalizacji dyskretnej. Pracę naukową nad tymi zagadnieniami autor prowadził w Instytucie Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk kolejno w Zakładzie Programowania Matematycznego, Pionie Metod Modelowania Matematycznego i Optymalizacji oraz w Pracowni Metod Obliczeniowych Optymalizacji.

Pragnę serdecznie podziękować wszystkim koleżankom i kolegom z IBS PAN za wieloletnią współpracę. Przez cały okres mojej pracy naukowej szczególne znaczenie miała dla mnie współpraca z doc. dr hab. Markiem Liburą, na którego pomoc i cenne rady mogłem zawsze liczyć.

Swojej rodzinie składam wyrazy wdzięczności za cierpliwość, wyrozumiałość i wsparcie podczas całego okresu mojej pracy naukowej. Szczególnie gorąco pragnę podziękować mojej Żonie i Mamie.

## Rozdział 5

# Wielowymiarowe zadanie załadunku

### 5.1 Wprowadzenie

Rozważmy wielowymiarowe binarne zadanie załadunku, w postaci:

$$z_{OPT}(n) = \max \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i$$

przy ograniczeniach  $\sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i \leq b_j(n)$  (5.1)

gdzie  $j = 1, \dots, m$ ,  $x_i = 0$  lub  $1$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Najczęściej używaną nazwą angielską jest *multi-dimensional binary knapsack problem*. W literaturze stosowane są również nazwy *multi-knapsack problem*, *multi-constraint knapsack problem*, *m-constraint knapsack problem*, *m-dimensional knapsack problem*, *multiple knapsack problem* i inne.

Potraktowanie wartości rozwiązania optymalnego  $z_{OPT}(n)$  oraz prawych stron ograniczeń  $b_j(n)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , jako funkcji rozmiaru zadania  $n$  związane jest z rozważaniem asymptotycznej, przy  $n \rightarrow \infty$ , klasy losowych zadań w dalszej części monografii. Zagadnienia te zostaną bardziej szczegółowo omówione w dalszej części tego rozdziału.

Cechą wyróżniającą wszystkie postacie zadania załadunku spośród innych zadań programowania całkowitoliczbowego, patrz podrozdział 1.2, oraz zadań binarnych, patrz podrozdział 1.3, jest przyjęcie założenia o nieujemności współczynników funkcji celu i lewych stron ograniczeń. Biorąc pod uwagę fakt niejednoznacznej interpretacji zerowych wartości tych współczynników przyjmujemy dla potrzeb niniejszej monografii następujące założenia:

$$c_i, a_{ji} > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \quad (5.2)$$

Z (5.2) wynika, że jest sens rozważać jedynie

$$b_j(n) \geq 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Bez utraty ogólności rozważań można przyjąć założenie, że:

$$b_1(n) \leq b_2(n) \leq \dots \leq b_m(n). \quad (5.3)$$

Następnie przyjmujemy założenie, że prawe strony ograniczeń spełniają poniższe warunki:

$$0 < b_j(n) \leq \sum_{i=1}^n a_{ji} \quad \text{dla wszystkich } j = 1, \dots, m. \quad (5.4)$$

W przypadku niespełnienia (5.4) zachodzi jedna z poniższych sytuacji:

1.  $x_i = 0, i = 1, \dots, n$  gdy istnieje chociażby jedna wartość  $b_j = 0$ .
2. Jeżeli dla wszystkich  $j = 1, \dots, m$  są spełnione poniższe nierówności:

$$b_j(n) > \sum_{i=1}^n a_{ji} \quad (5.5)$$

to wtedy zadanie ma rozwiązanie optymalne w poniższej postaci:

$$x_i = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

3. Jeżeli istnieją ograniczenia takie, że (5.5) jest spełnione dla pewnych  $j = 1, \dots, m$ , to takie ograniczenia można wyeliminować oraz odpowiednio zmniejszyć liczbę ograniczeń, gdyż usunięte ograniczenia będą zawsze spełnione.

Powyżej opisane dwa pierwsze przypadki dotyczą zadań mających tylko trywialne rozwiązania i dlatego niezbyt interesujących z punktu widzenia teorii optymalizacji dyskretnej. Spełnienie założenia (5.4) jest pożądane dlatego, aby zadanie (5.1) było dobrze postawione, to znaczy:

- Było niespreczne.
- Nie posiadało ograniczeń w sposób oczywisty redundantnych (nadmiarowych, z definicji spełnionych).
- Nie miało w sposób oczywisty trywialnego rozwiązania optymalnego.

Przez wielu autorów rozważane było również wielowymiarowe binarne zadanie załadunku z kryterium minimalizacyjnym w postaci:

$$z_{MIN}(n) = \min \sum_{i=1}^n c_i \cdot y_i$$

przy ograniczeniach  $\sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot y_i \geq d_j(n)$  (5.6)

gdzie  $j = 1, \dots, m$ ,  $y_i = 0$  lub  $1$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

W odniesieniu do współczynników zadania (5.6), analogicznie do zadania (5.1), należy przyjąć następujące założenia:

$$c_i, a_{ji} > 0 \text{ oraz } 0 \leq d_j(n) < \sum_{i=1}^n a_{ji}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Dokonajmy następującej zamiany zmiennych dcyzyjnych

$$y_i = 1 - x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Wtedy zadanie (5.6) przyjmuje postać:

$$z_{MIN}(n) = \sum_{i=1}^n c_i - \max \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i$$

przy ograniczeniach  $\sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i \leq \sum_{i=1}^n a_{ji} - d_j(n)$

gdzie  $j = 1, \dots, m$ ,  $x_i = 0$  lub  $1$   $i = 1, \dots, n$ .

Rozważmy zadanie (5.1), gdzie:

$$b_j(n) = \sum_{i=1}^n a_{ji} - d_j(n), \quad j = 1, \dots, m. \quad (5.7)$$

Przy spełnieniu (5.7) uzyskujemy następującą relację pomiędzy wielowymiarowymi zadaniami załadunku (5.1) oraz (5.6):

$$z_{MIN}(n) = \sum_{i=1}^n c_i - z_{OPT}(n). \quad (5.8)$$

Z powyższych wywodów wynika, że rozpatrywanie wielowymiarowego binarnego zadania załadunku w postaci (5.1) nie ogranicza ogólności rozważań.

Z uwagi na przeliczalność zbioru rozwiązań dopuszczalnych wielowymiarowe binarne zadanie załadunku należy do problemów optymalizacji dyskretnej. Bardziej szczegółowo można je również zaliczyć do zadań programowania całkowitoliczbowego, a jeszcze konkretniej do zadań binarnego programowania całkowitoliczbowego, patrz podrozdział 1.2. Należy w tym miejscu nadmienić, że we wczesnych pracach poświęconych wielowymiarowemu binarnemu zadaniu załadunku (5.1) było ono rozpatrywane właśnie jako ogólna postać zadania binarnego programowania całkowitoliczbowego z nieujemnymi współczynnikami, patrz Hiller [66], Kochenberger i inni [87], Senju i Toyoda [123] oraz Zanakis [150].

Gdy  $m = 1$ , to wtedy mamy do czynienia z klasycznym *zadaniem załadunku* z jednym ograniczeniem. Zadaniu temu oraz metodom jego rozwiązywania poświęcona jest bardzo obszerna bibliografia, której dobry przegląd zawarty jest w monografii Martello i Toth [105]. Wybrane aspekty binarnego zadania załadunku z jednym ograniczeniem zostaną również rozważone w podrozdziale 5.6.

Cechą wyróżniającą zadania załadunku spośród innych klas zadań programowania matematycznego, optymalizacji dyskretnej lub programowania całkowitoliczbowego jest nieujemność współczynników funkcji celu i lewych stron ograniczeń, patrz (5.2). Innymi charakterystycznymi cechami rozważanej klasy zadań jest wymóg binarności zmiennych decyzyjnych

$$x_i = 0 \text{ lub } 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.9)$$

oraz liniowość funkcji celu: 
$$\sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i;$$

i ograniczeń: 
$$\sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i \leq b_j(n), \quad j = 1, \dots, m.$$

Innymi spotykanymi w literaturze wariantami zadania załadunku są *całkowitoliczbowe zadania załadunku*, gdzie warunek binarności zmiennych decyzyjnych (5.9) został zastąpiony przez:  $x_i \geq 0$ ,  $x_i$ -całkowite,  $i = 1, \dots, n$ ; lub *ograniczone całkowitoliczbowe zadania załadunku*, gdzie:

$$0 \leq x_i \leq d_i, \quad x_i\text{-całkowite, gdzie } d_i \geq 1 \text{ stałe, } i = 1, \dots, n.$$

W powyższych przypadkach wielowymiarowe zadanie załadunku może być rozpatrywane jako ogólna postać zadania programowania całkowitoliczbowego z nieujemnymi współczynnikami, patrz Garfinkel i Nemhauser [49], Nemhauser i Wolsey [110], Sysło i inni [131] oraz Wałukiewicz [146]. Próby jeszcze dokładniejszego modelowania realnych zagadnień związane są z wprowadzaniem elementów nieliniowości do sformułowania zadania załadunku,

głównie do funkcji celu, często w postaci funkcji kwadratowych, patrz Hochbaum [67]. Wtedy rozpatrywane jest *nieliniowe wielowymiarowe zadanie załadunku*. Rozważano również *matroidalne wielowymiarowe zadanie załadunku*, patrz Camerini i inni [18].

Binarne liniowe wielowymiarowe zadanie załadunku w sformułowaniu danym przez (5.1) może być uważane za podstawową, "klasyczną" postać wielowymiarowego zadania załadunku. W dalszej części tego rozdziału będziemy rozpatrywać binarne liniowe wielowymiarowe zadanie załadunku w postaci (5.1) i wszelkie odwołania do zadania załadunku, wielowymiarowego zadania załadunku bądź binarnego wielowymiarowego zadania załadunku powinny być rozumiane jako odwołania do zadania (5.1) chyba, że z kontekstu wynika inaczej.

Wielowymiarowe zadanie załadunku jest znacznie bardziej skomplikowane niż jego pierwowzór z pojedynczym ograniczeniem. Może być ono używane do modelowania wielu ważnych zagadnień praktycznych. Na szczególną uwagę zasługuje tutaj zadanie alokacji kapitału lub portfela inwestycji, patrz Lorie i Savage [100], gdzie projekt  $i$  przynosi zysk  $c_i$  oraz zużywa  $a_{ji}$  zasobu  $j$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Zasoby mogą przedstawiać koszty realizacji projektu, ograniczenia wynikające z dostępnych zasobów surowców, energii, siły roboczej i wielu innych. Celem zadania optymalizacyjnego jest zdefiniowanie takiego podzbioru z  $n$  możliwych do wyboru projektów, aby łączny zysk z realizacji wskazanych projektów był maksymalny, a ograniczenia na wykorzystanie zasobów  $b_j(n)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , nie zostały przekroczone.

Innymi ciekawymi przykładami zadań, do modelowania których może być zastosowane binarne wielowymiarowe zadanie załadunku (5.1) są: zadanie podziału i optymalizacji procesorów oraz zasobów danych w rozproszonych systemach komputerowych, patrz Gavish i Pirkul [51], zagadnienia wyboru projektów oraz ładowania palet do kontenerów, wagonów, ciężarówek itp., patrz Shih [124], zagadnienie optymalizacji wykrojów, patrz Gilmore i Gomory [54], wspomaganie głosowań aprobujących, patrz Straszak i inni [130] oraz wiele innych.

Binarne wielowymiarowe zadanie załadunku (5.1) może być również zastosowane do modelowania różnorodnych zadań szeregowania. W rozdziale 6 zostanie rozpatrzone zadanie szeregowania prac z terminami zakończenia (sequencing jobs with deadliness), które może być rozważane jako binarne wielowymiarowe zadanie załadunku o bardzo szczególnej postaci.

Zadania załadunku należą do  $\mathcal{NP}$ -trudnych zadań optymalizacji dyskretnej, co więcej dla  $m \geq 2$  binarne wielowymiarowe zadanie załadunku (5.1) jest zadaniem silnie  $\mathcal{NP}$ -trudnym, patrz Garey i Johnson [48] oraz rozdział 3.

Dla wielowymiarowych zadań załadunku znanych jest wiele wyników analizy przypadku średniego. Duża ich część dotyczy asymptotycznego wzrostu wartości rozwiązań optymalnych.

W pracach Frieze i Clarke [45], Mamer i Schilling [104], Schilling [121], [122] oraz Szkatuła [134], [135], [137], [136], [138] i [139] rozważano problematykę asymptotycznego, gdy  $n \rightarrow \infty$ , wzrostu wartości rozwiązań optymalnych dla klasy losowych wielowymiarowych binarnych zadań załadunku (5.1).

W pracach Van de Geer i Stougie [53], Meanti i innych [107] oraz Lee i Oh [94] przeprowadzono analizę probabilistyczną wartości rozwiązań optymalnych (5.1). Udowodniono zależność rozwiązania optymalnego (5.1) od wartości prawych stron  $b_j(n)$  zadania oraz oszacowano szybkość zbieżności. Tylko dla przypadku  $m = 1$  lub 2 autorzy byli w stanie uzyskać aproksymację funkcyjną zależności wartości rozwiązania optymalnego od wartości prawych stron ograniczeń i rozmiaru zadania.

W pracy Szkatuła [133] rozważono przypadek ograniczonych całkowitoliczbowych wielowymiarowych zadań załadunku.

W pracy Averbakh [5] przeanalizowano probabilistyczne właściwości zadania dualnego do (5.1).

Natomiast w pracy Fontanari [39] przeprowadzono analizę stochastyczną wielowymiarowych binarnych zadań załadunku (5.1).

W pracach Frieze i Clarke [45], Mamer i Schilling [104], Schilling [121] i [122] przeprowadzono analizę asymptotycznego wzrostu wartości rozwiązań optymalnych (5.1) w średnim przypadku przy założeniu, że  $b_j(n) = 1$ ,  $j = 1, \dots, m$ , co w istotny sposób zawęża klasę rozpatrywanych zadań.

W pracach Szkatuła [136], [138] i [139] przeprowadzono analizę przypadku średniego asymptotycznego wzrostu wartości rozwiązań optymalnych dla różnorodnych przypadków prawych stron ograniczeń  $b_j(n)$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Celem tego rozdziału jest przedstawienie wyników opisujących asymptotyczny wzrost wartości rozwiązań optymalnych dla klasy losowych wielowymiarowych binarnych zadań załadunku z pełnym zakresem zmienności prawych stron ograniczeń  $b_j(n)$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Pozostała część tego rozdziału monografii jest zorganizowana w następujący sposób. Podrozdział 5.2 przedstawia oszacowania wartości rozwiązań optymalnych i przybliżonych wielowymiarowego binarnego zadania załadunku uzyskane przy wykorzystaniu funkcji Lagrange'a i zadania dualnego do (5.1). W podrozdziale 5.3 przedyskutowano wybrane aspekty algorytmiczne wielowymiarowego binarnego zadania załadunku. Podrozdział 5.4 zawiera definicje przyjętych i wykorzystywanych w dalszej części monografii oznaczeń oraz losowego modelu wielowymiarowego binarnego zadania załadunku. W podrozdziale 5.5 przedstawiono wyniki opisujące asymptotyczne zachowanie się rozwiązania optymalnego dla rozważanego losowego modelu wielowymia-



rowego binarnego zadania załadunku jako funkcję  $n, m, b_j(n), j = 1, \dots, m$ . Są to zasadnicze i oryginalne wyniki teoretyczne tego rozdziału monografii. W podrozdziale 5.6 rozważono klasyczne, jednowymiarowe binarne zadanie załadunku jako przypadek szczególny. Na zakończenie tego rozdziału przeprowadzono ocenę uzyskanych wyników.

## 5.2 Oszacowania rozwiązania optymalnego

Rozważmy funkcję Lagrange'a dla wielowymiarowego binarnego zadania załadunku (5.1). Ma ona postać:

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \left( b_j(n) - \sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i \right) = \\ &= \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot b_j(n) + \sum_{i=1}^n \left( c_i - \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot a_{ji} \right) \cdot x_i \end{aligned}$$

gdzie  $x = [x_1, \dots, x_n]$  oraz  $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$  - wektor mnożników Lagrange'a. Ponadto, niech dla każdego  $\Lambda$ ,  $\lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, m$ :

$$\phi_n(\Lambda) = \max_{x \in \{0,1\}^n} L_n(x, \Lambda) = \max_{x \in \{0,1\}^n} \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j b_j(n) + \sum_{i=1}^n \left( c_i - \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{ji} \right) x_i \right\}.$$

Przyjmując poniższe oznaczenia

$$\begin{aligned} x_i(\Lambda) &= \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } c_i - \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot a_{ji} > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} & (5.10) \\ c_i(\Lambda) &= \begin{cases} c_i & \text{jeżeli } c_i - \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot a_{ji} > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \\ a_{ji}(\Lambda) &= \begin{cases} a_{ji} & \text{jeżeli } c_i - \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot a_{ji} > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \end{aligned}$$

otrzymujemy dla każdego  $\Lambda$ ,  $\lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, m$ :

$$\begin{aligned} \phi_n(\Lambda) &= \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot b_j(n) + \sum_{i=1}^n \left( c_i - \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot a_{ji} \right) \cdot x_i(\Lambda) = \\ &= \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot b_j(n) + \sum_{i=1}^n \left( c_i(\Lambda) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot a_{ji}(\Lambda) \right) \end{aligned}$$

Oczywiście

$$c_i(\Lambda) = c_i \cdot x_i(\Lambda), \quad a_{ji}(\Lambda) = a_{ji} \cdot x_i(\Lambda).$$

Zadanie dualne do wielowymiarowego binarnego zadania załadunku (5.1) może zostać sformułowane w następującej postaci:

$$\Phi_n^* = \min_{\Lambda \geq 0} \phi_n(\Lambda). \quad (5.11)$$

Dla każdego  $\Lambda \geq 0$  zachodzi

$$z_{OPT}(n) \leq \Phi_n^* \leq \phi_n(\Lambda).$$

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$z_n(\Lambda) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i(\Lambda) = \sum_{i=1}^n c_i(\Lambda), \quad s_j(\Lambda) = \sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i(\Lambda) = \sum_{i=1}^n a_{ji}(\Lambda),$$

$$S_{nm}(\Lambda) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot s_j(\Lambda), \quad B_m(\Lambda) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot b_j(n).$$

Z konstrukcji wynika, patrz (5.10) i kolejne definicje  $c_i(\Lambda)$  i  $a_{ji}(\Lambda)$ , że

$$c_i(\Lambda) \geq \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot a_{ji}(\Lambda)$$

i dlatego

$$z_n(\Lambda) \geq S_{nm}(\Lambda). \quad (5.12)$$

Dla pewnych  $\Lambda$ ,  $x_i(\Lambda)$  wyznaczone przez (5.10) może dawać rozwiązanie dopuszczalne (5.1), co oznacza, że:

$$s_j(\Lambda) \leq b_j(n) \quad \text{dla wszystkich } j = 1, \dots, m. \quad (5.13)$$

Wtedy:

$$z_n(\Lambda) \leq z_{OPT}(n) \leq \Phi_n^* \leq \phi_n(\Lambda) = z_n(\Lambda) + B_m(\Lambda) - S_{nm}(\Lambda).$$

Jeżeli zachodzi (5.13), to również zachodzi poniższa nierówność:

$$B_m(\Lambda) - S_{nm}(\Lambda) \geq 0.$$

Wykorzystując (5.12) uzyskujemy:

$$\frac{\phi_n(\Lambda)}{z_n(\Lambda)} = \frac{z_n(\Lambda)}{z_n(\Lambda)} + \frac{B_m(\Lambda) - S_{nm}(\Lambda)}{z_n(\Lambda)} \leq 1 + \frac{B_m(\Lambda) - S_{nm}(\Lambda)}{S_{nm}(\Lambda)}.$$

Dlatego, jeżeli spełnione jest (5.13), to prawdziwa jest następująca nierówność:

$$1 \leq \frac{z_{OPT}(n)}{z_n(\Lambda)} \leq \frac{\Phi_n^*}{z_n(\Lambda)} \leq \frac{\phi_n(\Lambda)}{z_n(\Lambda)} \leq \frac{B_m(\Lambda)}{S_{nm}(\Lambda)}. \quad (5.14)$$

Oszacowanie (5.14) pokazuje, że jeżeli potrafimy wskazać taką rodzinę wektorów mnożników Lagrange'a  $\Lambda(n)$ , że dla rozważanej klasy zadań załadunku spełniona jest nierówność (5.13) oraz jeśli zachodzi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_m(\Lambda(n))}{S_{nm}(\Lambda(n))} = 1 \quad (5.15)$$

to wtedy  $x_i(\Lambda(n))$ ,  $i = 1, \dots, n$ , dane przez (5.10), jest asymptotycznie suboptymalnym rozwiązaniem przybliżonym wielowymiarowego zadania załadunku (5.1), patrz podrozdział 2.1 oraz (2.1), (2.3) i (2.6). Równocześnie, wartość  $z_n(\Lambda(n))$  jest asymptotycznym przybliżeniem wartości rozwiązania optymalnego (5.1). Dalsze rozważania w tym rozdziale, a w szczególności w podrozdziale 5.5, będą w istotny sposób oparte na tych spostrzeżeniach.

### 5.3 Algorytmy dokładne i przybliżone

Wielowymiarowe zadanie załadunku (5.1) dla  $m \geq 2$  jest zadaniem silnie  $\mathcal{NP}$ -trudnym, patrz Garey i Johnson [47] i [48] oraz podrozdział 3.4. Natomiast jednowymiarowe zadanie załadunku (5.47) lub (5.1), gdzie  $m = 1$ , nie jest zadaniem silnie  $\mathcal{NP}$ -trudnym i istnieje dla niego wiele efektywnych algorytmów dokładnych i przybliżonych.

Poniżej przedstawiony zostanie krótki przegląd znanych z literatury dokładnych i przybliżonych algorytmów dla wielowymiarowego zadania załadunku (5.1), gdzie  $m \geq 2$ . Algorytmy uzyskujące zawsze rozwiązania optymalne oparte są głównie na metodzie podziału i oszacowań, programowaniu dynamicznym lub wykorzystują programowanie liniowe, patrz rozdział 2. Algorytmy przybliżone mogą zostać umownie zakwalifikowane do następujących grup: wczesne algorytmy heurystyczne, algorytmy wykorzystujące oszacowanie rozwiązania optymalnego, metody przeszukiwania z zakazami, algorytmy genetyczne, metody zachłanne i inne. W przypadku bardzo niewielu algorytmów przybliżonych dla wielowymiarowego zadania załadunku ( $m \geq 2$ ) znane są oszacowania dokładności ich działania w sensie najgorszego lub średniego przypadku.

### Algorytmy dokładne

Z uwagi na fakt, że wielowymiarowe zadanie załadunku (5.1), gdzie  $m \geq 2$ , jest zadaniem silnie  $\mathcal{NP}$ -trudnym, nie należy oczekiwać istnienia efektywnych algorytmów dokładnych rozwiązujących zadania o większych rozmiarach przy akceptowalnym nakładzie obliczeń. Znane z literatury i przedstawione poniżej algorytmy dokładne mogą być przy praktycznie dopuszczalnym nakładzie obliczeń stosowane do realizacji danych zadań mających kilka ograniczeń ( $m$ ) i nie więcej niż 200 zmiennych decyzyjnych ( $n$ ).

Intuicyjną metodą dokładną dla wielowymiarowego zadania załadunku (5.1) jest algorytm pełnego przeglądu. Idea jego działania jest następująca.

- Generowane są wszystkie możliwe wektory  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , gdzie  $x_i = 0$  lub  $1$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Wektorów takich istnieje  $2^n$ .
- Dla każdego z kolejnych wektorów sprawdzamy, czy jest on rozwiązaniem dopuszczalnym wielowymiarowego zadania załadunku (5.1) to znaczy, czy zachodzi  $\sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i \leq b_j(n)$ , dla wszystkich  $j = 1, \dots, m$ .
- Spośród wszystkich dopuszczalnych wektorów  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$  rozwiązaniami optymalnymi wielowymiarowego zadania załadunku (5.1) są te wektory, dla których uzyskana wartość funkcji celu  $\sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i$  jest maksymalna.

Złożoność obliczeniowa algorytmu pełnego przeglądu jest wykładnicza i wynosi  $\Theta(2^n)$ . Oznacza to, że metody tej można efektywnie używać do rozwiązywania bardzo niewielkich realizacji danych zadań, maksymalnie do kilkudziesięciu zmiennych decyzyjnych ( $n$ ).

Jednym z pierwszych algorytmów dokładnych stosowanych do rozwiązywania wielowymiarowego zadania załadunku (5.1) był addytywny algorytm Balasa [6] zaproponowany dla rozwiązywania ogólnych zadań programowania liniowego z binarnymi zmiennymi decyzyjnymi.

Shih, patrz [124], zaproponował dla wielowymiarowego zadania załadunku (5.1) algorytm podziału i oszacowań. Jako oszacowania wartości rozwiązania optymalnego użyto najmniejszej spośród wartości funkcji celu uzyskanej przez algorytm zaproponowany w pracy Dantzig [30] dla  $m$  jednowymiarowych zadań załadunku. Każde z nich miało taką samą postać funkcji celu, z oryginalnego zadania (5.1), natomiast pojedyncze ograniczenia każdego z  $m$  zadań jednowymiarowych były kolejnymi ograniczeniami oryginalnego wielowymiarowego zadania załadunku (5.1).

W pracy Gavish i Pirkul [52] zostało zaprezentowanych kilka wariantów metody podziału i oszacowań z wykorzystaniem różnych oszacowań wartości rozwiązania optymalnego uzyskanych z wykorzystaniem, między innymi,

relaksacji Lagrange'a, ograniczeń zastępczych oraz innych relaksacji, na przykład z wykorzystaniem algorytmów subgradientowych dla uzyskania wartości mnożników.

W pracach Gilmore i Gomory [54], Nemhauser i Ullman [109], Weingartner [148] oraz Weingartner i Ness [149] zaprezentowano szereg algorytmów dokładnych dla rozwiązywania wielowymiarowego zadania załadunku (5.1) opartych na ogólnej idei programowania dynamicznego, patrz również podrozdział 2.3.

W pracy Cabot [17] został przedstawiony algorytm przeglądu z wykorzystaniem procedury eliminacji Fouriera-Motzkina.

W pracy Soyster i inni [126] została zaprezentowana iteracyjna metoda wykorzystująca zadania programowania liniowego dla generowania podproblemów, które są rozwiązywane przy użyciu procedury pełnego przeglądu.

Większość znanych metod dokładnego rozwiązywania wielowymiarowego zadania załadunku (5.1) wykorzystuje oszacowania rozwiązania optymalnego uzyskane przy pomocy różnorodnych technik. Są to między innymi: programowanie liniowe, relaksacja Lagrange'a, ograniczenia zastępcze i inne relaksacje. Powszechnie uważano oszacowania uzyskiwane przez programowanie liniowe za najślabsze. W pracy Crana i Mazzola [28] wykazano, że wymienione techniki oszacowania wartości rozwiązania optymalnego wielowymiarowego zadania załadunku (5.1) uzyskują dokładniejsze oszacowania niż programowanie liniowe, ale uzyskana poprawa oszacowań jest ograniczona.

Generalnie, w przypadku algorytmów dokładnych można mówić o możliwości efektywnego rozwiązywania tylko niewielkich zadań. W przypadku konieczności rozwiązywania wielowymiarowych zadań załadunku (5.1) o większych rozmiarach należy liczyć się z koniecznością zastosowania algorytmów przybliżonych, w tym heurystycznych, bez żadnych gwarancji jakości uzyskiwanych rozwiązań.

### Algorytmy przybliżone

Pierwsze istotne dla praktyki obliczeniowej propozycje algorytmów przybliżonych dla wielowymiarowych zadań załadunku (5.1) pojawiły się w latach sześćdziesiątych i siedemdziesiątych, patrz Hillier [66], Kochenberger i inni [87], Senju i Toyoda [123] oraz Zanakis [150]. Następnie pojawiło się wiele propozycji kolejnych algorytmów przybliżonych dla wielowymiarowych zadań załadunku. Duża część zaproponowanych algorytmów związana była z adaptacją ogólnych metod proponowanych do rozwiązywania zadań optymalizacji dyskretnej.

Loulou i Michaelides w pracy [101] zaproponowali algorytm typu "załadkowego" oparty na prymarnym algorytmie Toyody, patrz [144]. W pracy

przedstawiono uogólnienie pojęcia efektywności zmiennych decyzyjnych stosowanych w przypadku jednowymiarowego zadania załadunku (5.47) jako  $c_i/u_i$ , gdzie  $u_i$  jest funkcją wektora  $[a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi}]$ .

Balas i Martin, patrz [7], sprowadzili wielowymiarowe zadanie załadunku (5.1) do zadania programowania liniowego poprzez pominięcie warunku binarności zmiennych decyzyjnych. Po rozwiązaniu relaksacji zadania pierwotnego - zadania programowania liniowego, zastosowano heurystyczną procedurę dla uzyskania binarności wszystkich wartości zmiennych decyzyjnych wyznaczonego rozwiązania.

Magazine i Oguz w pracy [103] przedstawili heurystyczny algorytm, który łączy podejście heurystyki dualnej Senju i Toyody, patrz [123], oraz uogólnionych mnożników Lagrange'a zaproponowanych przez Everetta [37].

Pirkul [113], zaproponował algorytm wykorzystujący ograniczenie zastępcze. Wielowymiarowe zadanie załadunku (5.1) zostało sprowadzone do jednowymiarowego zadania załadunku (5.47), gdzie  $a_i = \sum_{j=1}^m \omega_j \cdot a_{ji}$ , a  $\omega_j$  było pewnym mnożnikiem. Następnie rozwiązywano uzyskane jednowymiarowe zadanie załadunku z efektywnościami zmiennych decyzyjnych zdefiniowanymi jako  $c_i / \sum_{j=1}^m \omega_j a_{ji}$ .

Lee i Guignard [93], przedstawili algorytm będący połączeniem heurystyki Toyody [144] z metodami opartymi na wykorzystaniu programowania liniowego Balasa i Martina [7].

W pracy Volgenanta i Zoona [145] przedstawiono modyfikację algorytmu zaproponowanego przez Magazine i Oguza [103] poprzez równoczesne obliczanie wartości mnożników Lagrange'a w więcej niż jednym kroku algorytmu oraz poprzez poprawienie wartości oszacowania od góry rozwiązania optymalnego używanego w ostatniej fazie pracy algorytmu.

Freville i Plateau w pracy [43] zaproponowali efektywny algorytm wstępny, oparty na ich wcześniejszych wynikach zawartych w pracy [41]. Istotą zaproponowanej wstępnej procedury rozwiązywania wielowymiarowego zadania załadunku (5.1) jest uzyskanie ostrych oszacowań wartości rozwiązania optymalnego od góry i od dołu oraz zredukowanie rozmiaru rozwiązywanego zadania poprzez wyeliminowanie części ograniczeń oraz zmiennych decyzyjnych. Ci sami autorzy w pracy [44] zaproponowali wyspecjalizowany algorytm do rozwiązywania *dwwwymiarowego zadania załadunku*, to znaczy (5.1), gdzie  $m = 2$ .

Fox i Scudder [40], zaproponowali algorytm heurystyczny, w którym najpierw przyjmuje się, że wszystkie  $x_i = 1$  (lub  $x_i = 0$ ), a następnie dla pewnych zmiennych decyzyjnych ustala się  $x_i = 0$  (lub  $x_i = 1$ ). Zaproponowana metoda wydaje się szczególnie przydatna dla klasy wielowymiarowych zadań załadunku (5.1), gdzie  $c_i = 1$ , natomiast  $a_{ji} = 0$  lub 1.

Glover [57], przedstawił algorytm oparty na technice "ghost image" z

wykorzystaniem sieci neuronowych.

Przy konstruowaniu algorytmów przybliżonych do rozwiązywania wielowymiarowych zadań załadunku (5.1) używano również idei stosowanych w metodach przybliżonych programowania liniowego, całkowitoliczbowego, uogólnienia metod dla jednowymiarowego zadania załadunku (5.47) oraz wiele innych podejść stosowanych w algorytmach optymalizacji dyskretnej, takich jak na przykład symulowane wychładzanie, przeszukiwanie z zakazami czy algorytmy genetyczne.

Zgodnie z ogólnymi trendami w rozwiązywaniu zadań optymalizacji dyskretnej pojawiły się również próby skonstruowania algorytmów przybliżonych, gdzie podejście lokalnego poprawiania bieżącego rozwiązania wzbogacono o techniki losowe. Celem zastosowania elementów losowych w algorytmach jest umożliwienie ominięcia optimum lokalnego, które często w istotny sposób odbiega od rozwiązania optymalnego zadania, zaś metody deterministyczne często kończą w nim pracę. Metody losowe są stosowane również do zastąpienia wybranych procedur deterministycznych, których zastosowanie wymaga bardzo wysokiego nakładu obliczeń, zaś procedura losowa uzyskuje z wysokim prawdopodobieństwem zbliżone wyniki, przy znacznie mniejszym koszcie obliczeniowym.

Przykładem takich technik może być symulowane wychładzanie, patrz Cerny [19], Kirkpatrick i inni [85] oraz podrozdział 2.5, gdzie zadanie optymalizacji dyskretnej porównywane jest do procesu schładzania materii. Innymi przykładami są technika *akceptacji progę* (*threshold acceptance*), patrz Dueck [34] oraz Dueck i Schuer [35] lub *metoda szumów* (*noising method*), patrz Charon i Hudry [21].

Drexel [32] zaproponował metodę symulowanego wychładzania do przybliżonego rozwiązywania wielowymiarowego zadania załadunku (5.1).

Bertochi, Słomiński i Sobczyńska [12] przedstawili warianty algorytmu przeszukiwania lokalnego, oparte na wykorzystaniu różnych procedur (zachłannych, akceptacji progę, symulowanego wychładzania).

Hanafi, Freville i Abedellaoui [64] zaproponowali wielostopniowy algorytm heurystyczny wykorzystujący różnorodne procedury lokalnego przeszukiwania (zachłanne, akceptacji progę, symulowanego wychładzania oraz metodę szumów).

W ostatnich latach do rozwiązywania wielu zadań optymalizacji dyskretnej stosowano technikę przeszukiwania z zakazami oraz algorytmy genetyczne. Trendy te znalazły również szerokie odzwierciedlenie w metodach przybliżonego rozwiązywania wielowymiarowego zadania załadunku (5.1). W pracach Aboudi i Jörnsterne [1], Battiti i Tecchioli [9], Dammeyer i Voss [29], Glover i Kochenberger [58], Hanafi i Freville [63], Løkketangen i inni [97], Løkketangen i Glover [98] oraz [99] zaproponowano różnorodne warianty techniki

przeszukiwania z zakazami w algorytmach przybliżonych dla wielowymiarowego zadania załadunku (5.1). W pracach Chu i Beasley [22], Hoff i inni [68], Khuri i inni [84], Rudolph oraz Sprave [118] i [119] oraz Thiel i Voss [143] przedstawiono różne warianty algorytmów genetycznych dla wielowymiarowego zadania załadunku (5.1).

Wyżej wspomniane algorytmy przybliżone były testowane na danych generowanych losowo albo na znanych z literatury tak zwanych trudnych, wielowymiarowych zadaniach załadunku (5.1), patrz Freville i Plateau [42], o znanych rozwiązaniach optymalnych. Rozważane zadania testowe miały od kilku do kilkudziesięciu ograniczeń ( $m$ ) oraz od kilkudziesięciu do kilkuset zmiennych decyzyjnych ( $n$ ).

W literaturze znanych jest bardzo niewiele algorytmów przybliżonych dla wielowymiarowego zadania załadunku (5.1), które posiadają pewne gwarancje dokładności działania. Dotyczy to zarówno podejścia przypadku najgorszego, jak również przypadku średniego.

Frieze i Clarke w pracy [45] zaproponowali wielomianowy schemat aproksymujący dla wielowymiarowego zadania załadunku (5.1).

Rinnoy Kan, Stougie i Vercellis w pracy [117] przedstawili klasę uogólnionych algorytmów zachłannych, gdzie efektywności zmiennych decyzyjnych miały postać  $c_i / \sum_{j=1}^m \delta_j a_{ji}$ , a o konkretnej postaci algorytmu decydował wybór wartości współczynników  $\delta_j$ . W pracy przeprowadzono również analizę przypadków najgorszego i średniego złożoności obliczeniowej uzyskania najlepszego rozwiązania zachłannego.

Averbakh, patrz [5], zaproponował przybliżony algorytm o liniowej złożoności obliczeniowej, którego suboptymalność została dowiedziona w średnim przypadku.

## 5.4 Klasa zadań losowych i inne definicje

W dalszej części monografii wykorzystywane będą następujące oznaczenia.

Zapis  $f(n) = o(g(n))$  oznacza:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = 0$ , gdzie  $f(n), g(n) > 0$ .

Zapis  $V_n \approx Y_n, n \rightarrow \infty$  oznacza:

- $Y_n \cdot (1 - o(1)) \leq V_n \leq Y_n \cdot (1 + o(1))$ , jeżeli  $V_n$  oraz  $Y_n$  są wyrazami ciągów liczbowych;

lub

- $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{Y_n \cdot (1 - o(1)) \leq V_n \leq Y_n \cdot (1 + o(1))\} = 1$ , jeżeli  $V_n$  są wyrazami ciągów zmiennych losowych, natomiast  $Y_n$  są wyrazami ciągów liczbowych lub ciągów zmiennych losowych.



Zapis  $Y_n \preceq W_n$  oraz  $Y_n \succeq V_n$ ,  $n \rightarrow \infty$  oznacza:

- $Y_n = O(W_n)$  oraz  $Y_n = \Omega(V_n)$  jeżeli  $V_n$ ,  $W_n$  oraz  $Y_n$  są wyrazami ciągów liczbowych;

lub

- $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{Y_n = O(W_n)\} = 1$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{Y_n = \Omega(V_n)\}$ , jeżeli  $Y_n$  są wyrazami ciągów zmiennych losowych, natomiast  $V_n$  oraz  $W_n$  są wyrazami ciągów liczbowych lub ciągów zmiennych losowych.

$V_n \cong Y_n$ ,  $n \rightarrow \infty$  oznacza:

- $V_n \preceq Y_n \preceq V_n$ .

Niech ponadto

- $(x)_+ = \frac{|x| + x}{2} = \begin{cases} x & \text{jeżeli } x \geq 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$
- $[x]$  oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od  $x$ ;  $[x] \leq x$ .

Zdefiniowane powyżej relacje asymptotyczne  $\preceq$ ,  $\succeq$  oraz  $\cong$  są dla ciągów zmiennych losowych odpowiednikami relacji  $O(\cdot)$ ,  $\Omega(\cdot)$  oraz  $\Theta(\cdot)$  dla funkcji deterministycznych, patrz podrozdział 3.2. Relacje asymptotyczne  $\approx$ ,  $\preceq$ ,  $\succeq$  oraz  $\cong$  dla ciągów zmiennych losowych oznaczają zbieżność z prawdopodobieństwem odpowiednich zmiennych losowych, patrz podrozdział 4.4 oraz (4.15).

W dalszej części monografii będzie rozważany następujący losowy model wielowymiarowego binarnego zadania załadunku (5.1):

- $m$  jest zawsze dodatnią liczbą całkowitą,  $n$  - całkowite,  $n \rightarrow \infty$ .
- $c_i$ ,  $a_{ji}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ , są realizacjami wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym w przedziale  $(0, 1]$ .
- $0 < \delta \leq b_1(n) \leq b_2(n) \leq \dots \leq b_n(n) \leq \frac{n}{2}$ , przy czym  $b_j(n)$  są deterministycznymi funkcjami  $n$ ,  $\delta$  - stała,  $b_j(n) \leq b_j(n+1)$  dla wszystkich  $j = 1, \dots, m$  oraz  $n \geq 1$ .
- Również mnożniki Lagrange'a  $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$  są wielkościami deterministycznymi.

Dla uproszczenia notacji odpowiednie zmienne losowe będziemy oznaczać tak samo jak ich realizacje. Na przykład  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , będzie oznaczało zmienną losową której realizacjami są współczynniki funkcji celu zadania załadunku (5.1). Rozróżnienie pomiędzy zmiennymi losowymi a ich realizacjami będzie wynikało z kontekstu.

W odniesieniu do losowych realizacji wielowymiarowego binarnego zadania załadunku (5.1) można wyróżnić dwa modele: niezależny i inkrementalny, patrz Weide [147], Meanti i inni [107], Steele [128] oraz podrozdział 4.4. W przypadku *modelu niezależnego* dla losowych wielowymiarowych binarnych zadań załadunku (5.1) mamy do czynienia z próbkowaniem serii realizacji zadania (5.1) o rosnących rozmiarach. Dlatego też każda kolejna realizacja zadania (5.1) jest niezależna od pozostałych. Natomiast w przypadku *modelu inkrementalnego* realizacja zadania (5.1) o rozmiarze  $n$  jest rozszerzeniem klasy zadań o rozmiarze  $n - 1$  i mniejszych poprzez uzupełnienie współczynników zadania o  $c_n, a_{1n}, \dots, a_{mn}$ , będących realizacjami zmiennych losowych niezależnych wzajemnie od siebie oraz od zmiennych losowych opisujących zadania o rozmiarze  $n - 1$  i mniejszym. W dalszej części monografii będzie używany model niezależny dla losowych wielowymiarowych binarnych zadań załadunku (5.1). W rozprawie [147] rozważono wzajemne relacje tych modeli. W szczególności wykazano, że wyniki zbieżności uzyskane dla modelu niezależnego oznaczają również zbieżność w przypadku modelu inkrementalnego, co oznacza, że model niezależny jest w tym zakresie bardziej ogólny od modelu inkrementalnego.

W pracach Frieze i Clarke [45], Mamer i Schilling [104] oraz Schilling [121] i [122] rozważano losowe wielowymiarowe binarne zadanie załadunku dla podobnego do zaproponowanego powyżej modelu, ale przy założeniu, że  $b_j(n) = 1$ ,  $j = 1, \dots, m$ . W ogólnym przypadku, z uwagi na przyjęte względem  $a_{ji}$  założenia, zachodzą następujące zależności

$$0 < b_j(n) \leq \sum_{i=1}^n a_{ji} \leq n, \quad \sum_{i=1}^n a_{ji} \approx \frac{n}{2}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (5.16)$$

Oszacowanie to jest wzmocnione poprzez zaobserwowanie, że  $\sum_{i=1}^n a_{ji} \approx n/2$ , co wynika z mocnego prawa wielkich liczb, patrz Feller [38], gdzie:

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} \approx n \cdot E(a_{j1}), \quad E(a_{j1}) = \frac{1}{2}.$$

Z (5.4) wynika, że założenie  $b_j(n) = 1$ ,  $j = 1, \dots, m$ , bardzo ogranicza ogólność rozważanej klasy losowych wielowymiarowych binarnych zadań załadunku (5.1). Przy tym założeniu trudno jest na przykład mówić o w miarę

sensownym modelowaniu jakichkolwiek zagadnień praktycznych. W porównaniu do klasy zadań rozważanych w niniejszej monografii jest to po prostu bardzo szczególny i nie reprezentatywny przypadek, natomiast istotną zaletą uzyskanych wyników, patrz Schilling [122], jest szybkość zbieżności, która w niniejszej monografii nie jest przedmiotem analizy.

Założenie  $b_j(n) \leq b_j(n+1)$  wynika z faktu, że  $\sum_{i=1}^n a_{ji} \approx n/2$ . Trudno wyobrazić sobie rzeczywistą sytuację, zgodnie z (5.4), kiedy liczba zmiennych decyzyjnych  $n$ , na przykład decyzji o realizacji projektów do podjęcia, rośnie, natomiast ograniczenia na wykorzystanie zasobów  $b_j(n)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , maleją. Przyjęte założenie  $b_j(n) \leq b_j(n+1)$  oznacza tylko nie malenie  $b_j(n)$  wraz ze wzrostem  $n$  oraz  $\sum_{i=1}^n a_{ji}$ , co jest dość naturalnym założeniem przy rozważaniu asymptotycznie narastającej klasy losowych zadań, jak ma to miejsce w niniejszej monografii.

Celem dalszych rozważań w tym rozdziale jest przeanalizowanie asymptotycznego wzrostu wartości rozwiązania optymalnego (5.1) dla zdefiniowanej klasy losowych wielowymiarowych binarnych zadań załadunku jako funkcji  $n$ ,  $m$  i  $b_j(n)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , oraz (w sposób niejawny) dystrybuant zmiennych losowych  $c_i$ ,  $a_{ji}$ . W związku z tym, dalsze rozważania będą oparte na rozważaniu  $a_{ji}(\Lambda)$ ,  $c_i(\Lambda)$ ,  $z_n(\Lambda)$ ,  $s_j(\Lambda)$  jako funkcji argumentów  $n$ ,  $m$  oraz  $\Lambda$  w przypadku asymptotycznym, przy  $n \rightarrow \infty$ . Aby móc operować tymi wielkościami jako zmiennymi losowymi w rozważanej klasie losowych wielowymiarowych binarnych zadań załadunku (5.1), należy rozpatrzyć dystrybuantę następującej zmiennej losowej:

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot a_{ji}.$$

Zauważmy, że istnieje  $\binom{m}{k}$  różnych podzbiorów o mocy  $k$  wektora  $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ . Niech  $\lambda_l(r, k, \Lambda)$  oznacza  $l$ -ty element w  $r$ -tym podziorze o mocy  $k$  wektora  $\Lambda$ . Niech  $\Lambda \setminus \lambda_j$  oznacza  $[\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_m]$ . Dystrybuantą zmiennej losowej

$$\lambda_j \cdot a_{ji}$$

jest

$$F_1(x, \Lambda) = P \{ \lambda_j \cdot a_{ji} < x \} = ((x)_+ - (x - \lambda_j)_+) / \lambda_j.$$

Dystrybuantę zmiennej losowej  $\sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot a_{ji}$  można rekurencyjnie wprowadzić w następującej postaci

$$F_m(x, \Lambda) = P \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot a_{ji} < x \right\} = \quad (5.17)$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_m \cdot m!} \cdot \left( (x)_+^m + \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \sum_{r=1}^{\binom{m}{k}} \left( x - \sum_{l=1}^k \lambda_l(r, k, \Lambda) \right)_+^m \right)$$

W poniższych wyrażeniach wykorzystano całkę Lebesgue'a-Stieltjesa dla obliczenia prawdopodobieństw wystąpienia zdarzeń losowych oraz wartości oczekiwanych zmiennych losowych, patrz Feller [38] lub Loève [96] oraz rozdział 4. Wzory dystrybuant oraz wartości oczekiwanych  $a_{ji}(\Lambda)$ ,  $c_i(\Lambda)$  mają następującą postać:

$$\begin{aligned} G_{ij}(x, \Lambda) &= P\{a_{ji}(\Lambda) < x\} = \\ &= P\left\{\{a_{ji} < x\} \cup \{a_{ji} \geq x\} \cap \left\{\sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot a_{ik} \geq c_i\right\}\right\} = \\ &= 1 - \int_x^1 \int_0^1 F_{m-1}(r - \lambda_j \cdot t, \Lambda \setminus \lambda_j) dr dt \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} H_i(x, \Lambda) &= P\{c_i(\Lambda) < x\} = \\ &= P\left\{\{c_i < x\} \cup \{c_i \geq x\} \cap \left\{\sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot a_{ik} \geq c_i\right\}\right\} = \\ &= 1 - \int_x^1 F_m(t, \Lambda) dt, \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$E(a_{ji}(\Lambda)) = \int_0^1 x dG_{ij}(x, \Lambda) = \int_0^1 x \int_0^1 F_{m-1}(r - \lambda_j \cdot x, \Lambda \setminus \lambda_j) dr dx =$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda_j \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_m \cdot (m+2)!} \left( 1 + \sum_{k=1}^m (-1)^k \sum_{r=1}^{\binom{m}{k}} \left( 1 - \sum_{l=1}^k \lambda_l(r, k, \Lambda) \right)_+^{m+2} + \right. \\ &\left. - \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \sum_{r=1}^{\binom{m-1}{k}} \left( 1 - \lambda_j - \sum_{l=1}^k \lambda_l(r, k, \Lambda \setminus \lambda_j) \right)_+^{m+1} \cdot \lambda_j \cdot (m+2) \right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$E(c_i(\Lambda)) = \int_0^1 x dH_i(x, \Lambda) = \int_0^1 x \cdot F_m(x, \Lambda) dx = \frac{1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_m \cdot (m+2)!}.$$

$$\left( m+1 + \sum_{k=1}^m (-1)^k \sum_{r=1}^{\binom{m}{k}} \left( 1 - \sum_{j=1}^k \lambda_j(r, k, \Lambda) \right)_+^{m+1} \left( m+1 + \sum_{j=1}^k \lambda_j(r, k, \Lambda) \right) \right) \quad (5.21)$$

Zauważmy, że człony o postaci

$$\left( 1 - \sum_{j=1}^k \lambda_j(r, k, \Lambda) \right)_+^{m+1}$$

redukują się do zera wtedy, kiedy

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j(r, k, \Lambda) \geq 1.$$

Fakt ten powoduje, że powyższe wzory są bardzo trudne do efektywnego wykorzystania w ogólnym przypadku. Natomiast dwa ważne przypadki szczególne są znacznie prostsze do rozważenia:

1.  $\lambda_j \geq 1$  dla wszystkich  $j = 1, \dots, m$ . Wtedy  $s_j(\Lambda)$  i co z tego pośrednio wynika,  $E(s_j(\Lambda))$ ,  $z_n(\Lambda)$  oraz  $E(z_n(\Lambda))$  są niezbyt duże. Z obliczeniowego punktu widzenia w tym przypadku mamy zawsze

$$\left( 1 - \sum_{j=1}^k \lambda_j(r, k, \Lambda) \right)_+^{m+1} = 0 \text{ dla wszystkich } j, k = 1, \dots, m,$$

co w zdecydowany sposób upraszcza przedstawione powyżej wzory.

2.  $\sum_{j=1}^m \lambda_j \leq 1$ ; w tym przypadku mamy

$$\left( 1 - \sum_{j=1}^k \lambda_j(r, k, \Lambda) \right)_+^{m+1} > 0 \text{ dla wszystkich } j, k = 1, \dots, m,$$

żaden z tych członów nie zostaje wyeliminowany, następuje pełne rozwinięcie i znaczne uproszczenie powyższych wzorów.

Podstawowym celem dalszych rozważań jest wyznaczenie takich wartości mnożników Lagrange'a  $\Lambda(n) = [\lambda_1(n), \dots, \lambda_m(n)]$ , aby zaszła jedna z przedstawionych poniżej sytuacji:

- $E(s_j(\Lambda)) \approx b_j(n)$ ,  $j = 1, \dots, m$  i wtedy  $\lambda_j(n) \geq 0$ ;
- $E(s_j(\Lambda)) \approx b_j(n)$ ,  $\lambda_j(n) \geq 0$ , oraz  $E(s_k(\Lambda)) \leq b_k(n)$ ,  $\lambda_k(n) = 0$ , gdzie  $1 \leq j \leq m' \leq k \leq m$ .

Następnie, dla wyznaczonych według powyższych zasad mnożników Lagrange'a należy udowodnić asymptotyczną dopuszczalność, zgodnie z (5.13), rozwiązań wyznaczonych przez (5.10) oraz zastosować (5.14) i (5.15) tak, aby uzyskać oszacowanie rozwiązania optymalnego wielowymiarowego binarnego zadania załadunku w postaci (5.1).

Należy zwrócić uwagę, że przy zastosowaniu powyższego podejścia dla każdego konkretnego, deterministycznego wektora prawych stron ograniczeń klasy losowych binarnych wielowymiarowych zadań załadunku (5.1),

$$b_j(n), \quad j = 1, \dots, m,$$

zostanie wyznaczony deterministyczny wektor mnożników Lagrange'a

$$\Lambda(n) = [\lambda_1(n), \dots, \lambda_m(n)],$$

który będzie stosowany do wszystkich realizacji zmiennych losowych opisujących współczynniki funkcji celu  $c_i$  oraz współczynniki lewych stron ograniczeń  $a_{ji}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ , to znaczy do całej klasy losowych binarnych wielowymiarowych zadań załadunku zdeterminowanej przez wektor prawych stron ograniczeń  $b_j(n)$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

## 5.5 Analiza przypadku średniego

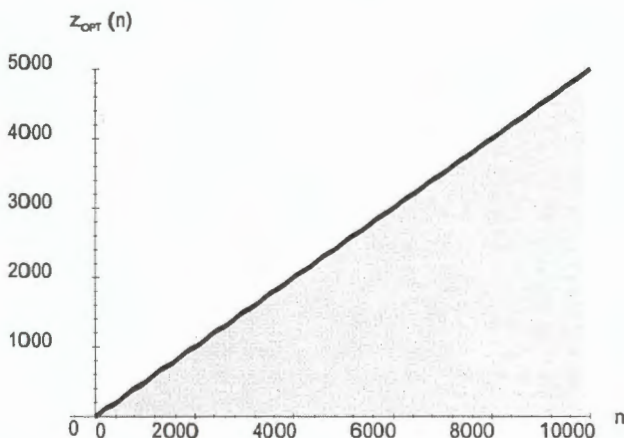
Jest intuicyjnie oczywiste, że na wartość rozwiązania optymalnego losowego wielowymiarowego binarnego zadania załadunku (5.1) mają wpływ parametry zadania takie jak: współczynniki funkcji celu  $c_i$ , współczynniki lewych stron ograniczeń  $a_{ji}$ , wartości prawych stron ograniczeń  $b_j(n)$ , gdzie  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Zgrubne oszacowanie wartości rozwiązania optymalnego dla rozważanego losowego modelu (5.1) jest dane przez:

$$0 \leq z_{OPT}(n) \leq \sum_{i=1}^n c_i \leq n, \quad \sum_{i=1}^n c_i \approx \frac{n}{2} \quad (5.22)$$

Oszacowanie to jest wzmocnione poprzez zaobserwowanie, że  $\sum_{i=1}^n c_i \approx n/2$ , co wynika z mocnego prawa wielkich liczb, patrz Feller [38], gdzie:

$$\sum_{i=1}^n c_i \approx n \cdot E(c_1), \quad E(c_1) = \frac{1}{2}.$$

Powyższe rozważania mogą być z łatwością zilustrowane graficznie. Na rysunku 5.1 w obszarze zaciemnionym przedstawiono zakres zmienności wartości rozwiązania optymalnego  $z_{OPT}(n)$  jako funkcji  $n$ , gdzie  $n \rightarrow \infty$ .



Rysunek 5.1: Zakres zmienności  $z_{OPT}(n)$  dla zadania załadunku

W przypadku przeprowadzanej asymptotycznej analizy przypadku średniego "uśrednieniu" ulegają wartości  $c_i$  oraz  $a_{ji}$ , zaś istotnego znaczenia nabierają przede wszystkim liczba zmiennych decyzyjnych ( $n$ ), zwana również rozmiarem zadania (5.1) oraz liczba ograniczeń ( $m$ ).

Szczególnie istotną rolę odgrywają wartości prawych stron ograniczeń

$$b_j(n), \quad j = 1, \dots, m,$$

zwłaszcza zaś ich współzależności. Im większa jest wartość  $b_1(n)$ , a więc zgodnie z (5.3) wartości wszystkich  $b_j(n)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , tym większa powinna być wartość rozwiązania optymalnego. Duże wzajemne zróżnicowanie wartości prawych stron ograniczeń powoduje szereg bardzo istotnych konsekwencji w odniesieniu do wzrostu wartości rozwiązań optymalnych (5.1):

1. "Negatywny" wpływ ograniczeń o mniejszych wartościach jest znacznie większy niż "pozytywny" tych o dużych wartościach.
2. Może się okazać, że część ograniczeń z dużymi, w stosunku do pozostałych, prawymi stronami ograniczeń jest w praktyce redundantna (nieaktywna, zbędna), to znaczy, że są one spełnione przez pozostałe ograniczenia, o mniejszych wartościach prawych stron ograniczeń i w związku z tym nie wywierają one żadnego wpływu na wartość rozwiązania optymalnego.

Wartości mnożników Lagrange'a  $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ , realizujące wartość optymalną rozwiązania zadania dualnego do wielowymiarowego binarnego zadania załadunku (5.1), patrz (5.11), bardzo dobrze ilustrują te rozważania. Mianowicie im większa jest wartość  $\lambda_j$ , tym mniejsza jest wartość prawej strony odpowiedniego ograniczenia  $b_j(n)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , i co jest z tym ściśle związane, tym większy ma ono "negatywny" wpływ na wartość rozwiązania optymalnego zadania. Przy tym  $\lambda_j = 0$  oznacza, że odpowiadające mu ograniczenie jest redundantne, to znaczy, że może być ono pominięte, a wartość rozwiązania optymalnego zadania nie ulegnie zmianie.

Dla dalszych rozważań zagadnieniem o zasadniczym znaczeniu jest wyznaczenie takich wartości składowych wektora mnożników Lagrange'a  $\Lambda(n) = [\lambda_1(n), \dots, \lambda_m(n)]$ ,  $n \rightarrow \infty$ , aby asymptotycznie były spełnione (5.13) oraz (5.15). Wykorzystując (5.14) możemy wtedy uzyskać dokładne oszacowanie wzrostu wartości optymalnych dla klasy losowych wielowymiarowych binarnych zadań załadunku (5.1).

Na takich założeniach oparte są dalsze rozważania przeprowadzone w tym rozdziale monografii. Rozważone zostaną 4 przypadki:

1. Umiarkowanych wartości prawych stron ograniczeń  $b_j(n)$ . Wtedy  $\lambda_j(n) \geq 1$ ,  $j = 1, \dots, m$ .
2. Bardzo dużych wartości prawych stron ograniczeń  $b_j(n)$ . Wtedy mamy  $\sum_{j=1}^m \lambda_j(n) \leq 1$ ,  $\sum_{j=1}^{m'} b'_j(n) \geq \max \left\{ \frac{3m'+1}{3} \cdot b'_{m'}(n) - \frac{n}{6}, \frac{(3m'-1)n}{12} \right\}$ , gdzie  $1 \leq m' \leq m$ ,  $b'_j(n) \approx b_j(n)$ .
3. Zróżnicowanych (umiarkowanych i większych) wartości prawych stron ograniczeń  $b_j(n)$ . Wtedy zachodzi  $\lambda_1(n) \geq \dots \geq \lambda_{m'}(n) \geq 1 > \lambda_{m'+1}(n) \geq \dots \geq \lambda_m(n)$ .
4. Dużych wartości prawych stron ograniczeń  $b_j(n)$ . Wtedy  $\lambda_j(n) \leq 1$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Przypadek pierwszy i drugi dotyczy wzmiankowanych powyżej sytuacji, kiedy znacznemu uproszczeniu podlegają wzory na dystrybuanty oraz wartości oczekiwane zmiennych losowych  $a_{ji}(\Lambda)$ ,  $c_i(\Lambda)$ . W pierwszym przypadku następuje wyzerowanie wszystkich składowych o postaci

$$\left( 1 - \sum_{j=1}^k \lambda_j(r, k, \Lambda) \right)_+^{m+1},$$



natomiast w drugim przypadku żadna z tych składowych nie zostaje wyzerowana, następuje ich pełne rozwinięcie i uproszczenie. Pozwala to na operowanie wprost wielkościami opisanymi poprzez (5.17), (5.18), (5.19), (5.20) oraz (5.21) czego efektem jest uzyskanie dokładniejszych oszacowań wartości rozwiązania optymalnego losowego wielowymiarowego binarnego zadania załadunku (5.1). Przypadki trzeci i czwarty związane są z sytuacją częściowego wyzerowania składowych  $\left(1 - \sum_{j=1}^k \lambda_j(r, k, \Lambda)\right)_+^{m+1}$ , co w praktyce oznacza konieczność rozważania ogólnej postaci wzorów na dystrybuanty i wartości oczekiwane zmiennych losowych  $a_{ji}(\Lambda)$ ,  $c_i(\Lambda)$ . Konsekwencją tego faktu jest konieczność operowania relaksacjami oryginalnego zadania (5.1), co powoduje uzyskanie w tych przypadkach nieco mniej dokładnych oszacowań wartości rozwiązania optymalnego losowego wielowymiarowego binarnego zadania załadunku (5.1).

W Twierdzeniu 1 rozważony został przypadek pierwszy, Twierdzenie 2 dotyczy przypadku drugiego, Twierdzenie 3 poświęcone jest przypadkowi trzeciemu, zaś Twierdzenie 4 zawiera uogólnienie uzyskanych wyników dla całej rozpatrywanej klasy zadań, jest w nim również rozpatrzony przypadek czwarty.

**Twierdzenie 1** *Jeżeli  $c_i, a_{ji}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  są realizacjami wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym w przedziale  $(0, 1]$ ;  $b_j(n)$  są funkcjami deterministycznymi,  $\delta \leq b_1(n) \leq b_2(n) \leq \dots \leq b_m(n) \leq \sqrt{\frac{n \cdot b_1(n) \cdot b_2(n) \cdot \dots \cdot b_{m-1}(n)}{(m+2)}}$ ,  $b_j(n) \leq n/2$ ,  $b_j(n) \leq b_j(n+1)$ , dla wszystkich  $n \geq n_0$ ; gdzie  $m \geq 1$ ,  $m = o(\ln(n \cdot b_1(n) \cdot \dots \cdot b_m(n)))$ ,  $n \rightarrow \infty$ ;  $n_0 \geq 1$ ,  $\delta > 0$  – stałe, to wtedy:*

$$z_{OPT}(n) \approx (m+1) \cdot \sqrt[m+1]{\frac{n \cdot b_1(n) \cdot b_2(n) \cdot \dots \cdot b_m(n)}{(m+2)!}} \quad (5.23)$$

**Dowód.** Jak już zasugerowano wcześniej, dowód będzie oparty na wykazaniu istnienia  $\Lambda(n)$  takiego, że

$$z_{OPT}(n) \approx z_n(\Lambda(n)) \quad (5.24)$$

oraz

$$z_n(\Lambda(n)) \approx E(z_n(\Lambda(n))) \approx (m+1) \cdot \sqrt[m+1]{\frac{n \cdot b_1(n) \cdot b_2(n) \cdot \dots \cdot b_m(n)}{(m+2)!}} \quad (5.25)$$

Niech, dla  $j = 1, \dots, m$ :

$$\begin{aligned}\psi_j(n) &= \sqrt[m+1]{\frac{n \cdot b_1(n) \cdot b_2(n) \cdot \dots \cdot b_m(n)}{(m+2)!}} \cdot \frac{1}{b_j(n)}; \\ \epsilon_j(n) &= \frac{(b_j(n))^{2/3}}{(\psi_j(n))^{1/3}}, \quad b'_j(n) = b_j(n) - \epsilon_j(n); \\ \lambda_j(n) &= \sqrt[m+1]{\frac{n \cdot b'_1(n) \cdot b'_2(n) \cdot \dots \cdot b'_m(n)}{(m+2)!}} \cdot \frac{1}{b'_j(n)}; \\ \alpha(n) &= \sum_{j=1}^m \lambda_j(n) \cdot \epsilon_j(n).\end{aligned}$$

Powyżej zdefiniowane wielkości są skonstruowane w taki sposób, że:

$$E(s_j(\Lambda(n))) = b'_j(n) = b_j(n) - \epsilon_j(n), \quad \frac{\epsilon_j(n)}{b_j(n)} = \frac{1}{\sqrt[3]{\psi_j(n) \cdot b_j(n)}} = o(1). \quad (5.26)$$

Z powyższych zależności wynika, że

$$\frac{\alpha(n)}{B_m(\Lambda(n))} = o(1), \quad b'_j(n) \approx b_j(n), \quad \lambda_j(n) \approx \psi_j(n), \quad \lambda_j(n) < \psi_j(n). \quad (5.27)$$

Mamy

$$s_j(\Lambda(n)) = \sum_{i=1}^n a_{ji}(\Lambda(n)), \quad \text{gdzie } a_{j1}(\Lambda(n)), a_{j2}(\Lambda(n)), \dots, a_{jn}(\Lambda(n)),$$

jest zgodnie z konstrukcją dla każdego  $j = 1, \dots, m$  wektorem wzajemnie niezależnych zmiennych losowych. Z (4.14) i (5.20) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\text{Var}(s_j(\Lambda(n))) &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(a_{ji}(\Lambda(n))) \leq \sum_{i=1}^n E(a_{ji}^2(\Lambda(n))) \leq \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^n E(a_{ji}(\Lambda(n)))}{\lambda_j(n)} = \frac{E(s_j(\Lambda(n)))}{\lambda_j(n)} = \frac{b'_j(n)}{\lambda_j(n)}.\end{aligned}$$

Z (5.14) wynika, że jeżeli są spełnione (5.13) oraz (5.15), to wtedy również zachodzi (5.24). Tak więc aby udowodnić (5.24), wystarczy wykazać, że zachodzi poniższa zależność:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left\{ \bigcap_{j=1}^m \{s_j(\Lambda(n)) \leq b_j(n)\} \right\} \cap \{B_m(\Lambda(n)) \approx S_{nm}(\Lambda(n))\} \right\} = 1. \quad (5.28)$$

Jeżeli spełnione jest

$$\bigcap_{j=1}^m \{|s_j(\Lambda(n)) - E(s_j(\Lambda(n)))| \leq \epsilon_j(n)\}$$

to wtedy zgodnie z konstrukcją, patrz (5.26) i (5.27), zachodzą nierówności

$$\bigcap_{j=1}^m \{b_j(n) - 2\epsilon_j(n) \leq s_j(\Lambda(n)) \leq b_j(n)\} \text{ oraz } \left| \frac{S_{nm}(\Lambda(n))}{B_m(\Lambda(n))} - 1 + o(1) \right| \leq o(1),$$

gdzie  $S_{nm}(\Lambda(n)) = \sum_{j=1}^m \lambda_j(n) \cdot s_j(\Lambda(n))$ ,  $B_m(\Lambda(n)) = \sum_{j=1}^m \lambda_j(n) \cdot b_j(n)$  i  $\alpha(n)/B_m(\Lambda(n)) = o(1)$ . Dlatego, aby udowodnić (5.28), rozważymy:

$$\begin{aligned} & P \left\{ \bigcap_{j=1}^m \{|s_j(\Lambda(n)) - E(s_j(\Lambda(n)))| \leq \epsilon_j(n)\} \right\} = \\ & = 1 - P \left\{ \bigcup_{j=1}^m \{|s_j(\Lambda(n)) - E(s_j(\Lambda(n)))| > \epsilon_j(n)\} \right\} \geq \\ & \geq 1 - \sum_{j=1}^m P \{|s_j(\Lambda(n)) - E(s_j(\Lambda(n)))| \geq \epsilon_j(n)\} \geq \end{aligned}$$

(z nierówności Czebyszewa dla zmiennych losowych, patrz Feller [38] lub Loève [96] oraz (4.12))

$$\geq 1 - \sum_{j=1}^m \frac{\text{Var}(s_j(\Lambda(n)))}{\epsilon_j^2(n)} \geq 1 - \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda_j(n) \cdot b_j(n)}}.$$

Zauważmy, że zgodnie z przyjętymi założeniami

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda_j(n) \cdot b_j(n)}} = o(1) \text{ oraz } \frac{1}{\sqrt[3]{\psi_j(n) \cdot b_j(n)}} = o(1)$$

co dowodzi prawdziwości (5.28) a więc również (5.24).

Aby zakończyć dowód Twierdzenia 1 wystarczy wykazać prawdziwość (5.25).  
Mamy:

$$z_n(\Lambda(n)) = \sum_{i=1}^n c_i(\Lambda(n)), \quad \text{gdzie } c_1(\Lambda(n)), \dots, c_n(\Lambda(n))$$

jest zgodnie z konstrukcją wektorem wzajemnie niezależnych zmiennych losowych. Z (4.14) otrzymujemy:

$$\text{Var}(z_n(\Lambda(n))) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(c_i(\Lambda(n))) \leq \sum_{i=1}^n E(c_i(\Lambda(n))) = E(z_n(\Lambda(n))).$$

Z (5.12) otrzymujemy

$$E(z_n(\Lambda(n))) \geq \sum_{j=1}^m \lambda_j(n) \cdot (b_j(n) - \varepsilon_j(n)),$$

co oznacza, że

$$E(z_n(\Lambda(n))) \approx \infty.$$

Niech

$$\gamma(n) = (E(z_n(\Lambda(n))))^{2/3}, \quad \beta(n) = \frac{\gamma(n)}{E(z_n(\Lambda(n)))} = \frac{1}{\sqrt[3]{E(z_n(\Lambda(n)))}}.$$

Tak więc

$$\gamma(n) \approx \infty, \quad \beta(n) = o(1), \quad o(1) \approx 0.$$

Z nierówności Czebyszewa dla ciągów zmiennych losowych, patrz Feller [38] lub Loève [96] oraz (4.12), uzyskujemy:

$$P \left\{ \left| \frac{z_n(\Lambda(n))}{E(z_n(\Lambda(n)))} - 1 \right| \geq \beta(n) \right\} = P \{ |z_n(\Lambda(n)) - E(z_n(\Lambda(n)))| \geq \gamma(n) \} \leq \beta(n) = o(1).$$

W tym przypadku mamy:

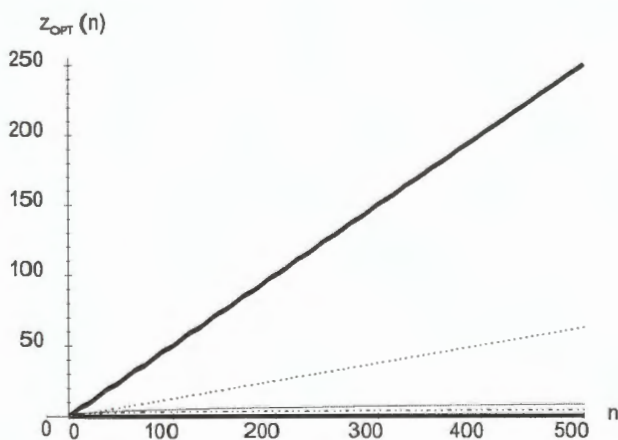
$$\begin{aligned} E(z_n(\Lambda(n))) &= \frac{n \cdot (m+1)}{(m+2)! \cdot \lambda_1(n) \cdot \lambda_2(n) \cdot \dots \cdot \lambda_m(n)} \approx \\ &\approx (m+1) \cdot \sqrt[m+1]{\frac{n \cdot b_1(n) \cdot b_2(n) \cdot \dots \cdot b_m(n)}{(m+2)!}} \end{aligned}$$

co kończy dowód Twierdzenia 1. ■

Wyniki Twierdzenia 1 mogą zostać poddane bardzo pouczającej interpretacji graficznej. Poniżej zostały zaprezentowane wybrane przykłady losowych wielowymiarowych binarnych zadań załadunku spełniające założenia Twierdzenia 1.

**Przykład 2** Rozważmy dwie różne rodziny wartości prawych stron ograniczeń  $b_j(n) = 1$  oraz  $b_j(n) = n/(m+2)!$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , oraz dwie różne wartości liczby prawych stron ograniczeń  $m = 2$  oraz  $m = 5$ .

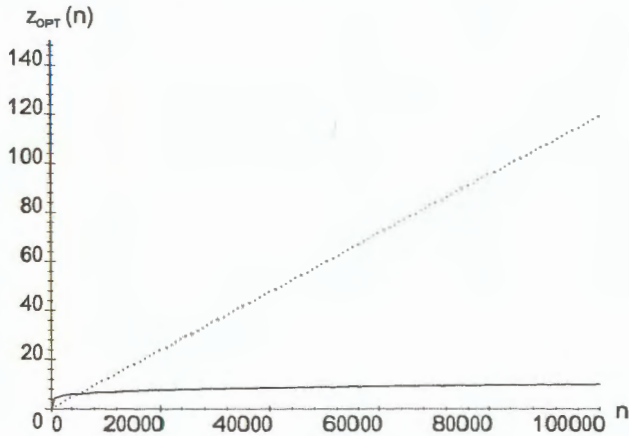
Na rysunku 5.2 przedstawiono zachowanie się wartości rozwiązań optymalnych  $z_{OPT}(n)$ . Dla  $m = 2$  rozważono następujące prawe strony ograniczeń  $b_j(n) = n/(m+2)!$  (linia wykropkowana) i  $b_j(n) = 1$  (linia ciągła niewytłuszczona). Dla  $m = 5$  rozważono następujące prawe strony ograniczeń  $b_j(n) = n/(m+2)!$  (linia przerywana-wykropkowana) i  $b_j(n) = 1$  (linia przerywana). Linie ciągłe wytłuszczone określają dopuszczalny zakres zmienności wartości  $z_{OPT}(n)$ .



Rysunek 5.2: Wykres wartości  $z_{OPT}(n)$  dla  $m = 2$  i  $m = 5$

Zauważmy, że wartości funkcji celu  $z_{OPT}(n)$  przy  $m = 5$  są tak bardzo bliskie zeru, że praktycznie przestają być widoczne nawet dla niezbyt dużych wartości  $n$ . Aby zaobserwować zachowanie się wartości  $z_{OPT}(n)$  dla  $m = 5$  oraz prawych stron ograniczeń  $b_j(n) = 1$  (linia ciągła niewytłuszczona) i  $b_j(n) = n/(m+2)!$  (linia wykropkowana), na rysunku 5.3 dokonano zmiany skali wykresu,  $n$  zmienia się od 0 do 100.000, natomiast  $z_{OPT}(n)$  od 0 do 150.

Na rysunkach 5.2 oraz 5.3 wyraźnie widać, że przypadek  $b_j(n) = 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , rozważany w pracach Frieze i Clarke [45], Mamer i Schil-



Rysunek 5.3: Wykres wartości  $z_{OPT}(n)$  dla  $m = 5$  na zmodyfikowanej skali

ling [104] oraz Schilling [121] i [122] jest nawet dla małych wartości  $m$  bardzo szczególnym przykładem nie pozwalającym zbudować ogólniejszych modeli.

Powyższe rozważania wykazują również dobitnie, jak wielki wpływ na asymptotyczny wzrost  $z_{OPT}(n)$  ma liczba ograniczeń  $m$ , szczególnie jeżeli wartości  $b_j(n)$  są niezbyt duże lub jeżeli ich wzrost jest w istotny sposób uzależniony od  $m$ . Dla większych wartości  $m$  ten wpływ jest znacznie silniejszy.

**Twierdzenie 2** Jeżeli  $c_i, a_{ji}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  są realizacjami wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym w przedziale  $(0, 1]$ ;  $b_j(n)$  są funkcjami deterministycznymi,  $0 \leq b_1(n) \leq b_2(n) \leq \dots \leq b_m(n) \leq n/2$ ,  $b_j(n) \leq b_j(n+1)$ ,  $\epsilon_j(n) = b_j^{2/3}(n)$ ,  $b'_j(n) = b_j(n) - \epsilon_j(n)$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $m = o(\sqrt[3]{n})$ ,  $m' = \max_{1 \leq k \leq m} \xi(k)$ ,  $m' \geq 1$  oraz  $b_1(n) \approx \infty$ , gdzie

$$\xi(k) = \begin{cases} k & \text{jeżeli } \sum_{j=1}^k b'_j(n) \geq \max \left\{ \frac{3k+1}{3} \cdot b'_k(n) - \frac{n}{6}, \frac{(3k-1)n}{12} \right\} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

to wtedy

$$z_{OPT}(n) \approx \frac{1}{3m'+1} \cdot \left( \frac{n}{2} + 6 \cdot \left( \sum_{j=1}^{m'} b_j(n) + \frac{6}{n} \cdot \sum_{j=1}^{m'} \sum_{k=j+1}^{m'} b_j(n) \cdot b_k(n) - \frac{3m'-2}{n} \cdot \sum_{j=1}^{m'} b_j^2(n) \right) \right) \quad (5.29)$$

**Dowód.** Analogicznie do dowodu Twierdzenia 1 wykazemy, że istnieje  $\Lambda(n)$  takie, że spełnione są poniższe zależności:

$$z_{OPT}(n) \approx z_n(\Lambda(n)) \quad (5.30)$$

oraz

$$z_n(\Lambda(n)) \approx E(z_n(\Lambda(n))) \approx \frac{1}{3m'+1} \cdot \left( \frac{n}{2} + 6 \cdot \left( \sum_{j=1}^{m'} b_j(n) + \right. \right. \quad (5.31)$$

$$\left. \left. + \frac{6}{n} \cdot \sum_{j=1}^{m'} \sum_{k=j+1}^{m'} b_j(n) \cdot b_k(n) - \frac{3m'-2}{n} \cdot \sum_{j=1}^{m'} b_j^2(n) \right) \right).$$

Niech  $\Lambda(n)$ ,  $\alpha(n)$ , oraz  $\psi(n)$  będą dane przez następujące wzory:

$$\lambda_j(n) = \frac{12}{3m'+1} \left( \frac{1}{2} - \frac{3m'+1}{n} \cdot b'_j(n) + \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{m'} b'_k(n) \right), \quad j = 1, \dots, m',$$

$$\lambda_j(n) = 0, \quad j = m'+1, \dots, m, \quad \text{oraz}$$

$$\alpha(n) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \epsilon_j(n), \quad \psi(n) = \frac{1}{\sqrt[3]{E(z(\Lambda(n)))}}.$$

Z uwagi na definicję  $b_j(n)$ ,  $\epsilon_j(n)$ ,  $b'_j(n)$ ,  $m'$  oraz  $\Lambda(n)$  poniższe wzory są prawdziwe:

$$\lambda_j(n) \geq 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad \sum_{j=1}^m \lambda_j(n) \leq 1;$$

$$E(S_{nm}(\Lambda(n))) = B_m(\Lambda(n)) - \alpha(n), \quad B_m(\Lambda(n)) = B_{m'}(\Lambda(n));$$

$$E(s_j(\Lambda(n))) \leq b'_j(n) = b_j(n) - \epsilon_j(n), \quad \frac{\epsilon_j(n)}{b_j(n)} = \frac{1}{\sqrt[3]{b_j(n)}} = o(1);$$

$$E(z(\Lambda(n))) \approx \infty, \quad b'_j(n) \approx b_j(n), \quad \frac{\alpha(n)}{B_{m'}(\Lambda(n))} = o(1), \quad \psi(n) = o(1).$$

Mamy

$$s_j(\Lambda(n)) = \sum_{i=1}^n a_{ji}(\Lambda(n)), \quad z_n(\Lambda(n)) = \sum_{i=1}^n c_i(\Lambda(n)).$$

Zgodnie z konstrukcją  $a_{j1}(\Lambda(n)), \dots, a_{jn}(\Lambda(n))$  dla każdego  $j = 1, \dots, m$ , oraz  $c_1(\Lambda(n)), \dots, c_n(\Lambda(n))$  są wektorami wzajemnie niezależnych zmiennych losowych. Z (4.14) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\text{Var}(s_j(\Lambda(n))) &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(a_{ji}(\Lambda(n))) \leq \sum_{i=1}^n E(a_{ji}^2(\Lambda(n))) \leq b'_j(n) < b_j(n); \\ \text{Var}(z(\Lambda(n))) &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(c_i(\Lambda(n))) \leq \sum_{i=1}^n E(c_i^2(\Lambda(n))) = E(z(\Lambda(n))).\end{aligned}$$

Z (5.14) wynika, że jeżeli są spełnione (5.13) oraz (5.15) to wtedy również zachodzi (5.30). Tak więc, aby udowodnić (5.30) wystarczy wykazać, że zachodzi (5.28). Jeżeli zachodzi

$$\bigcap_{j=1}^m \{|s_j(\Lambda(n)) - E(s_j(\Lambda(n)))| \leq \epsilon_j(n)\}$$

to wtedy zgodnie z konstrukcją spełnione są również

$$\bigcap_{j=1}^m \{b_j(n) - 2\epsilon_j(n) \leq s_j(\Lambda(n)) \leq b_j(n)\} \text{ oraz } \left| \frac{S_{nm}(\Lambda(n))}{B_m(\Lambda(n))} - 1 + o(1) \right| \leq o(1)$$

gdzie  $S_{nm}(\Lambda(n)) = \sum_{j=1}^m \lambda_j(n) \cdot s_j(\Lambda(n))$ ,  $B_m(\Lambda(n)) = \sum_{j=1}^m \lambda_j(n) \cdot b_j(n)$  i  $\alpha(n)/B_m(\Lambda(n)) = o(1)$ .

Analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 1, aby udowodnić (5.28), rozważymy

$$\begin{aligned}& P \left\{ \bigcap_{j=1}^m \{|s_j(\Lambda(n)) - E(s_j(\Lambda(n)))| \leq \epsilon_j(n)\} \right\} = \\ &= 1 - P \left\{ \bigcup_{j=1}^m \{|s_j(\Lambda(n)) - E(s_j(\Lambda(n)))| > \epsilon_j(n)\} \right\} \geq \\ &\geq 1 - \sum_{j=1}^m P \{|s_j(\Lambda(n)) - E(s_j(\Lambda(n)))| \geq \epsilon_j(n)\} \geq\end{aligned}$$

(z nierówności Czebyszewa dla zmiennych losowych, patrz Feller [38] lub Loève [96], oraz (4.12))

$$\geq 1 - \sum_{j=1}^m \frac{\text{Var}(s_j(\Lambda(n)))}{\epsilon_j^2(n)} \geq 1 - \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt[3]{b_j(n)}}.$$



Z założeń Twierdzenia wynika że,

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt[3]{b_j(n)}} = o(1).$$

Więc (5.28) i, co z tego wynika, również (5.30) są spełnione. Aby zakończyć dowód Twierdzenia, należy udowodnić (5.31).

$$\begin{aligned} P \left\{ |z(\Lambda(n)) - E(z(\Lambda(n)))| \geq (E(z(\Lambda(n))))^{2/3} \right\} &= \\ &= P \left\{ \left| \frac{z(\Lambda(n))}{E(z(\Lambda(n)))} - 1 \right| \geq \psi(n) \right\} \leq \psi(n) = o(1). \end{aligned}$$

W tym przypadku mamy

$$\begin{aligned} E(z_n(\Lambda(n))) &= \frac{n}{2} - \frac{n}{6} \cdot \sum_{j=1}^{m'} \lambda_j^2(n) - \frac{n}{4} \cdot \sum_{j=1}^{m'} \sum_{k=j+1}^{m'} \lambda_j(n) \cdot \lambda_k(n) \\ &\approx \frac{1}{3m' + 1} \cdot \left( \frac{n}{2} + 6 \cdot \left( \sum_{j=1}^{m'} b_j + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{6}{n} \cdot \sum_{j=1}^{m'} \sum_{k=j+1}^{m'} b_j \cdot b_k - \frac{3m' - 2}{n} \cdot \sum_{j=1}^{m'} b_j^2 \right) \right) \end{aligned}$$

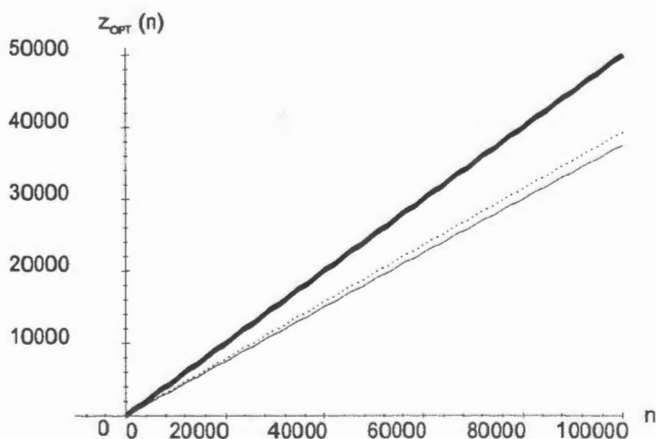
co kończy dowód Twierdzenia 2. ■

Również w przypadku Twierdzenia 2 jego wyniki mogą zostać poddane interesującej interpretacji graficznej.

**Przykład 3** Rozważmy dwie różne rodziny wartości prawych stron ograniczeń  $b_j(n) = n/4$  oraz  $b_j(n) = n/2$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  oraz dwie różne wartości liczby prawych stron ograniczeń  $m = 2$  oraz  $m = 1000$ .

Zauważmy, że  $b_j(n) = n/2$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , jest wartością graniczną  $b_j(n)$  oraz, że w tym przypadku zawsze  $z_{OPT}(n) = n/2$ , niezależnie od wartości  $m$ , co jest wartością graniczną rozwiązania optymalnego, zgodnie z (5.22).

Na rysunku 5.4 przedstawiono zachowanie się wartości rozwiązań optymalnych  $z_{OPT}(n)$  odpowiednio dla  $m = 2$  i  $m = 1000$ . Dla każdej z wartości  $m$  oraz  $b_j(n) = n/2$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , mamy  $z_{OPT}(n) = n/2$ , co zaznaczono linią ciągłą wytłuszczoną, natomiast dla  $b_j(n) = n/4$  i  $m = 2$  wartość  $z_{OPT}(n)$  zaznaczono linią wykropkowaną, zaś dla  $b_j(n) = n/4$  i  $m = 1000$  wartość  $z_{OPT}(n)$  zaznaczono linią ciągłą niewytłuszczoną.



Rysunek 5.4: Wykres wartości  $z_{OPT}(n)$  dla różnych wartości  $m$  oraz  $b_j(n)$

Wyraźnie widać zupełnie odmienną interpretację Przykładu 3 dla Twierdzenia 2 niż w przypadku Przykładu 2 dla Twierdzenia 1. Jest oczywiste, że wartość  $z_{OPT}(n)$  jest w przypadku Przykładu 3 w bardzo niewielkim stopniu zależna od liczby ograniczeń  $m$ , zmiana  $m$  z wartości bardzo małej np. 2 na wartość dużą np. 1000 w znikomym stopniu wpływa na asymptotyczne zachowanie się wartości  $z_{OPT}(n)$ .

Inną ciekawą obserwacją jest fakt, że dwukrotna różnica wartości prawych stron ograniczeń nie znajduje proporcjonalnego odzwierciedlenia w zmianie wartości rozwiązania optymalnego  $z_{OPT}(n)$ . Wytlumaczeniem tych ciekawych zjawisk jest fakt, że Twierdzenie 2 opisuje przypadek dużych wartości prawych stron  $b_j(n)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , które mają zdecydowanie niewielki asymptotyczny wpływ na wartość rozwiązania optymalnego  $z_{OPT}(n)$ . Rozważania dotyczące interpretacji wyników Twierdzeń 1 oraz 2 pozwalają sformułować następujący intuicyjny wniosek.

**Wniosek 1** *Jeżeli wartość  $b_1(n)$  jest "bliska"  $n/2$ , to wtedy wpływ wartości parametru  $m$  na asymptotyczny wzrost wartości rozwiązania optymalnego  $z_{OPT}(n)$  jest "niewielki".*

*Jeżeli natomiast  $b_1(n)$  rośnie "istotnie wolniej" niż  $n/2$ , na przykład w "zauważalny" sposób ubywając ze wzrostem  $m$ , to wtedy wpływ zwiększenia wartości parametru  $m$  na asymptotyczny wzrost wartości rozwiązania optymalnego  $z_{OPT}(n)$  jest "znaczący" i "negatywny".*

Twierdzenia 1 oraz 2 opisują przypadki umiarkowanych oraz bardzo dużych wartości prawych stron ograniczeń wielowymiarowego binarnego zada-

nia załadunku 5.1. Wyniki te w zbliżonej postaci zostały opublikowane w pracach Szkatuła [136] oraz [138]. Uzyskane wyniki opisują zbieżność rozwiązań optymalnych losowej klasy zadań w sensie asymptotycznej równości  $\approx$  do deterministycznych funkcji rozmiaru zadania  $n$ , liczby ograniczeń  $m$ , oraz  $b_j(n)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , wartości prawych stron ograniczeń wielowymiarowego binarnego zadania załadunku (5.1).

Poniżej zostaną przedstawione dwa twierdzenia opisujące pozostałe przypadki wartości prawych stron ograniczeń, przy czym Twierdzenie 4 jest również syntetycznym podsumowaniem wszystkich uzyskanych wyników. Przedstawiono opis wzrostu wartości rozwiązań optymalnych losowej klasy zadań w sensie asymptotycznych relacji  $\preceq$ ,  $\succeq$  oraz  $\cong$  jako deterministycznych funkcji rozmiaru zadania  $n$ , liczby ograniczeń  $m$ , oraz  $b_j(n)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , wartości prawych stron ograniczeń wielowymiarowego zadania załadunku (5.1).

Należy nadmienić, iż asymptotyczna relacja  $\cong$  oznacza asymptotyczną równość z dokładnością do stałego mnożnika, a więc jest nieco słabszym oszacowaniem niż asymptotyczna relacja  $\approx$ . Tym niemniej uzyskanie wyników tego typu też stanowi wartościowe oszacowanie wzrostu wartości rozwiązań optymalnych w przypadku asymptotycznym.

**Twierdzenie 3** *Jeżeli  $c_i, a_{ji}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  są realizacjami wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym w przedziale  $(0, 1]$ ;  $b_j(n)$  są funkcjami deterministycznymi,  $\delta \leq b_1(n) \leq b_2(n) \leq \dots \leq b_{m'}(n) \leq \frac{m'+1}{(m+2)!} \sqrt{\frac{n \cdot b_1(n) \cdot b_2(n) \cdot \dots \cdot b_{m'}(n)}{(m+2)!}} < b_{m'+1}(n) \leq \dots \leq b_m(n) \leq \frac{1}{2} \cdot n$ ,  $b_j(n) \leq b_j(n+1)$ , dla wszystkich  $n \geq n_0$ ; gdzie  $m \geq 1$ ,  $m = o(\ln(n \cdot b_1(n) \cdot \dots \cdot b_m(n)))$ ,  $1 \leq m' < m$ ,  $n \rightarrow \infty$ ;  $n_0 \geq 1$ ,  $\delta > 0$  - stałe, to wtedy:*

$$(m+1) \cdot \frac{m'+1}{(m+2)!} \sqrt{\frac{n \cdot b_1(n) \cdot b_2(n) \cdot \dots \cdot b_{m'}(n)}{(m+2)!}} \preceq z_{OPT}(n) \preceq \quad (5.32)$$

$$\preceq (m'+1) \cdot \frac{m'+1}{(m'+2)!} \sqrt{\frac{n \cdot b_1(n) \cdot b_2(n) \cdot \dots \cdot b_{m'}(n)}{(m'+2)!}}.$$

**Dowód.** Rozważmy następujące relaksacje wielowymiarowego binarnego zadania załadunku (5.1):

$$z'_{OPT}(n) = \max \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \quad (5.33)$$

przy ograniczeniach  $\sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i \leq b_j(n)$

$$j = 1, \dots, m', 1 \leq m' < m, x_i = 0 \text{ lub } 1, i = 1, \dots, n,$$

$$z''_{OPT}(n) = \max \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i$$

przy ograniczeniach  $\sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i \leq b'_j(n)$

$$b'_j(n) = b_j(n), \quad j = 1, \dots, m',$$

$$b'_j(n) = \sqrt[m'+1]{\frac{n \cdot b_1(n) \cdot b_2(n) \cdot \dots \cdot b_{m'}(n)}{(m+2)!}}, \quad j = m' + 1, \dots, m,$$

gdzie  $x_i = 0$  lub  $1$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

(5.34)

Zauważmy, że każdy wektor  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  będący rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (5.1) jest również rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (5.33). Z uwagi na pominięcie w zadaniu (5.33) części ograniczeń występujących w zadaniu (5.1), może istnieć wektor  $x' = [x'_1, x'_2, \dots, x'_n]$  będący rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (5.33), natomiast nie będący rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (5.1). Co więcej, może się zdarzyć, że

$$\sum_{i=1}^n c_i \cdot x'_i > z_{OPT}(n).$$

Dalej zauważmy, że prawdziwe są nierówności:

$$b''_j(n) \leq b_j(n), \quad \text{dla wszystkich } j = 1, \dots, m.$$

Każdy wektor  $x'' = [x''_1, x''_2, \dots, x''_n]$  będący rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (5.34) jest również rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (5.1). Natomiast może istnieć wektor  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  będący rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (5.1), ale nie będący rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (5.34). Co więcej, jest możliwe, że

$$\sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i > z''_{OPT}(n).$$

Tak więc wykorzystując relaksacje (5.33) i (5.34) uzyskujemy następujące oszacowanie rozwiązania optymalnego wielowymiarowego binarnego zadania załadunku (5.1):

$$z''_{OPT}(n) \leq z_{OPT}(n) \leq z'_{OPT}(n). \quad (5.35)$$

Zauważmy, że dla każdego z wielowymiarowych binarnych zadań załadunku (5.33) oraz (5.34) można zastosować Twierdzenie 1 uzyskując następujące oszacowania ich wartości optymalnych:

$$z'_{OPT}(n) \approx (m' + 1) \cdot \sqrt[m'+1]{\frac{n \cdot b_1(n) \cdot b_2(n) \cdot \dots \cdot b_{m'}(n)}{(m' + 2)!}}, \quad (5.36)$$

$$z''_{OPT}(n) \approx (m + 1) \cdot \sqrt[m+1]{\frac{n \cdot b_1(n) \cdot b_2(n) \cdot \dots \cdot b_m(n)}{(m + 2)!}}. \quad (5.37)$$

Prawdziwość (5.32) wynika z (5.35), (5.36) oraz (5.37), co kończy dowód Twierdzenia 3. ■

Wyniki przedstawione w Twierdzeniu 3 dotyczą przypadku zróżnicowanych (umiarkowanych i większych) wartości prawych stron ograniczeń  $b_j(n)$  wielowymiarowego binarnego zadania załadunku (5.1). Interpretacja graficzna tych wyników jest zbliżona do przypadku Twierdzenia 1, patrz Przykład 2, z zamianą  $m$  na  $m'$ . Istotny sens Twierdzenia 3 jest taki, że w praktyce ograniczenia  $m' + 1, \dots, m$  są nadmiarowe i mogą nie być brane pod uwagę. Wyniki te zostały zawarte w pracy Szkatuła [139] w nieco zmodyfikowanej postaci.

**Twierdzenie 4** Niech  $c_i, a_{ji}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  będą realizacjami wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym w przedziale  $(0, 1]$ ;  $b_j(n)$  funkcjami deterministycznymi,  $\delta \leq b_1(n) \leq b_2(n) \leq \dots \leq b_m(n) \leq n/2$ ,  $b_j(n) \leq b_j(n + 1)$ , dla wszystkich  $n \geq n_0$ ; gdzie  $m \geq 1$ ,  $m = o(\ln(n \cdot b_1(n) \cdot \dots \cdot b_m(n)))$ ,  $n \rightarrow \infty$ ;  $n_0 \geq 1$ ,  $\delta > 0$  - stałe. Jeżeli  $b_1(n) \leq n/(m + 2)!$ , to wtedy istnieje  $m'$ ,  $1 \leq m' \leq m$  takie, że:

$$z_{OPT}(n) \cong (m' + 1) \cdot \sqrt[m'+1]{\frac{n \cdot b_1(n) \cdot b_2(n) \cdot \dots \cdot b_{m'}(n)}{(m' + 2)!}}. \quad (5.38)$$

Jeżeli  $b_1(n) > n/(m + 2)!$ , to wtedy:

$$z_{OPT}(n) \cong \eta \cdot n, \text{ gdzie } - \eta \text{ stała, } \frac{m + 1}{(m + 2)!} \leq \eta \leq \frac{1}{2}. \quad (5.39)$$

**Dowód.** Jeżeli  $b_1(n) \leq n/(m + 2)!$ , to ze względu na monotoniczność  $b_j(n)$  istnieje  $m'$ ,  $1 \leq m' \leq m$ , takie, że

$$\begin{aligned} b_1(n) &\leq b_2(n) \leq \dots \leq b_{m'}(n) \leq \sqrt[m'+1]{\frac{n \cdot b_1(n) \cdot b_2(n) \cdot \dots \cdot b_{m'}(n)}{(m + 2)!}} < \\ &< b_{m'+1}(n) \leq \dots \leq b_m(n) \leq \frac{1}{2} \cdot n. \end{aligned}$$

Powyższe oznacza, że jeżeli  $m' < m$ , to spełnione są założenia Twierdzenia 3, natomiast jeżeli  $m' = m$ , to spełnione są założenia Twierdzenia 1, co dowodzi prawdziwości (5.38).

W przypadku gdy

$$b_1(n) > \frac{n}{(m+2)!}$$

mamy

$$\frac{n}{(m+2)!} < b_1(n) \leq b_2(n) \leq \dots \leq b_m(n) \leq \frac{1}{2} \cdot n.$$

Rozważmy następujące relaksacje wielowymiarowego binarnego zadania załadunku (5.1):

$$\begin{aligned} z'_{OPT}(n) &= \max \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \\ \text{przy ograniczeniach } \sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i &\leq b'_j(n) \end{aligned} \quad (5.40)$$

$b'_j(n) = n/(m+2)!, j = 1, \dots, m,$   
gdzie  $x_i = 0$  lub  $1, i = 1, \dots, n,$

$$\begin{aligned} z''_{OPT}(n) &= \max \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \\ \text{przy ograniczeniach } \sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i &\leq b''_j(n) \end{aligned} \quad (5.41)$$

$b''_j(n) = n/2, j = 1, \dots, m,$   
gdzie  $x_i = 0$  lub  $1, i = 1, \dots, n.$

Zauważmy, że każdy wektor  $x' = [x'_1, x'_2, \dots, x'_n]$  będący rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (5.40) jest również rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (5.1). Z uwagi na spełnienie nierówności  $b'_j(n) \leq b_j(n), j = 1, \dots, m$ , może istnieć wektor  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  będący rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (5.1), natomiast nie będący rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (5.40). Co więcej, może się zdarzyć, że

$$\sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i > z'_{OPT}(n).$$

Dalej zauważmy, że ze względu na prawdziwość nierówności  $b'_j(n) \geq b_j(n), j = 1, \dots, m$  każdy wektor  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  będący rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (5.1) jest również rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (5.41). Natomiast może istnieć wektor  $x'' = [x''_1, x''_2, \dots, x''_n]$  będący rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (5.41), ale nie będący rozwiązaniem dopuszczalnym

zadania (5.1). Co więcej, jest możliwe, że

$$\sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i'' > z_{OPT}(n).$$

Tak więc wykorzystując relaksacje (5.40) i (5.41) uzyskujemy następujące oszacowanie rozwiązania optymalnego wielowymiarowego binarnego zadania załadunku (5.1):

$$z'_{OPT}(n) \leq z_{OPT}(n) \leq z''_{OPT}(n). \quad (5.42)$$

Dla zadania (5.40) możemy zastosować Twierdzenie 1 i uzyskać następujące oszacowanie:

$$z'_{OPT}(n) \approx \frac{(m+1) \cdot n}{(m+2)!}. \quad (5.43)$$

Natomiast dla zadania (5.41) zastosowanie Twierdzenia 2 daje poniższe oszacowanie:

$$z''_{OPT}(n) \approx \frac{1}{2} \cdot n. \quad (5.44)$$

Aby zakończyć dowód Twierdzenia, wystarczy zauważyć, że (5.42), (5.43) oraz (5.44) dowodzą prawdziwości (5.39). ■

Uzyskane w Twierdzeniach 1 - 4 wyniki mają istotną wartość poznawczą oraz mogą być wykorzystywane do efektywnego analizowania i rozwiązywania wielowymiarowych liniowych binarnych zadań załadunku (5.1).

**Uwaga 1** Założenia Twierdzeń 1 - 4 dopuszczają sytuację

$$m \rightarrow \infty \text{ wraz z } n \rightarrow \infty,$$

przy czym dopuszczalny asymptotyczny wzrost  $m$  jest znacznie wolniejszy niż  $n$ . W znanych z literatury i zacytowanych wcześniej pracach powszechnie przyjmuje się, że  $m$  jest stałą. Szczególnie w przypadku wystąpienia funkcyjnej zależności pomiędzy  $m$  oraz  $b_j(n)$ ,  $j = 1, \dots, m$  oraz przy spełnieniu warunków typu

$$b_j(n) \leq \sqrt[m'+1]{\frac{n \cdot b_1(n) \cdot b_2(n) \cdot \dots \cdot b_{m'}(n)}{(m+2)!}}, \text{ gdzie } 1 \leq m' \leq m,$$

rozważenie  $m \rightarrow \infty$  może prowadzić do niezbyt jasnych sytuacji. Tak więc założenie, że  $m \rightarrow \infty$ , należy traktować jako cenne rozszerzenie ogólności rozważań, ale przy zachowaniu dużej ostrożności.

**Wniosek 2** Dla rozważanego modelu losowego wielowymiarowego zadania załadunku (patrz podrozdział 5.4) prawdziwa jest następująca ocena wartości rozwiązania optymalnego

$$(m+1) \cdot \sqrt[m+1]{(n \cdot \delta^m)/(m+2)!} \leq z_{OPT}(n) \leq \frac{n}{2}. \quad (5.45)$$

Spełnienie (5.45) wynika wprost z wyników Twierdzeń 1 - 4, poprzez rozważenie dwóch zadań pomocniczych  $b'_j(n) = \delta$  oraz  $b''_j(n) = n/2$ , dla  $j = 1, \dots, m$ .

**Uwaga 2** Dla wielowymiarowego zadania załadunku z kryterium minimalizacyjnym (5.6), gdzie

$$d_j(n) = \frac{n}{2} - b_j(n), \quad j = 1, \dots, m,$$

mamy

$$z_{MIN}(n) \approx \frac{n}{2} - z_{OPT}(n).$$

Dowód Uwagi 2 wynika wprost z (5.7), (5.8), gdzie zgodnie z (5.16) oraz (5.22) mamy dla  $n \rightarrow \infty$ :

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} \approx \frac{n}{2}, \quad j = 1, \dots, m, \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^n c_i \approx \frac{n}{2}.$$

Uzyskane w Twierdzeniach 1 - 4 wyniki mogą więc być z łatwością zastosowane do przypadku wielowymiarowego zadania załadunku z kryterium minimalizacyjnym (5.6).

Dość powszechnym zjawiskiem podczas przeprowadzania analizy przypadku średniego zadań optymalizacji dyskretnej jest uzyskanie wyników dowodzących, że dla rozważanych klas losowych zadań wartość rozwiązania optymalnego dąży do swojej wartości oczekiwanej, będącej funkcją deterministyczną rozmiaru zadania i ewentualnie innych jego parametrów. Funkcja ta jest często jednoznacznie zdefiniowana dla całej klasy zadań, patrz Steele [128]. Oznacza to, że następuje swoiste "uśrednienie" wartości rozwiązania optymalnego dla całych klas zadań. Dokładnie taka sama sytuacja występuje w przypadku klasy losowych wielowymiarowych zadań załadunku (5.1) rozważanych w tym rozdziale, patrz Twierdzenia 1, 2, 3 i 4 oraz w przypadku jednowymiarowego zadania załadunku (5.47) rozważanego w podrozdziale 5.6, patrz Lemat 1, Wnioski 3 i 4 oraz Twierdzenie 5. Natomiast próba zastąpienia klasy zadań losowych jednym "uśrednionym" zadaniem (z wykorzystaniem wartości oczekiwanych zamiast odpowiednich zmiennych losowych)



na ogół nie przynosi dobrych efektów, patrz Steele [128]. Poniżej zjawisko to zostanie omówione na przykładzie wielowymiarowego zadania załadunku (5.1).

W rozważanym modelu losowym wartości oczekiwane współczynników funkcji celu i lewych stron ograniczeń zadania mają następującą postać:

$$E(c_i) = E(a_{ji}) = \frac{1}{2}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Tak więc "uśrednione" wielowymiarowe zadanie załadunku (5.1) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \bar{z}_{OPT}(n) &= \max \sum_{i=1}^n x_i / 2 \\ \text{przy ograniczeniach} \quad &\sum_{i=1}^n x_i \leq 2 \cdot b_j(n) \\ \text{gdzie } j &= 1, \dots, m, \quad x_i = 0 \text{ lub } 1, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Uwzględniając (5.3) łatwo jest zauważyć, że (5.46) jest tożsame z jednowymiarowym zadaniem załadunku o postaci

$$\begin{aligned} \bar{z}_{OPT}(n) &= \max \sum_{i=1}^n x_i / 2 \\ \text{przy ograniczeniu} \quad &\sum_{i=1}^n x_i \leq 2 \cdot b_1(n) \\ \text{gdzie } x_i &= 0 \text{ lub } 1, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Wartość jego rozwiązania optymalnego wynosi:

$$\bar{z}_{OPT}(n) = \lfloor b_1(n) \rfloor.$$

Łatwo jest zauważyć, że wynik ten w bardzo rażąco sposób odbiega od oszacowań danych przez (5.23), (5.29), (5.32) oraz (5.38). Na wartość  $\bar{z}_{OPT}(n)$  wpływ ma tylko wartość prawej strony pierwszego ograniczenia  $b_1(n)$ . Uzyskana wartość oszacowania rozwiązania optymalnego w ogólnym przypadku jest istotnie różna od oszacowań uzyskanych w podrozdziale 5.5. Relacja

$$\bar{z}_{OPT}(n) \approx z_{OPT}(n)$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, kiedy

$$b_1(n) \approx b_2(n) \approx \dots \approx b_m(n) \approx \frac{1}{2} \cdot n$$

a więc w przypadku zadań o maksymalnej wartości rozwiązania optymalnego, porównaj (5.3), (5.5), (5.16) oraz (5.22).

W pozostałej części tego podrozdziału zostanie przeprowadzona analiza i interpretacja uzyskanych wyników w odniesieniu do możliwości ich zastosowania w praktyce obliczeniowej. W podrozdziale 5.6 rozważone zostanie jednowymiarowe zadanie załadunku jako samodzielne zadanie badawcze.

### Aspekty algorytmiczne

Należy zauważyć, że (5.10) daje nam pewne heurystyczne rozwiązanie wielowymiarowego zadania załadunku (5.1). Jest ono dopuszczalne, jeżeli jest spełnione (5.13). Oszacowanie współzależności rozwiązania optymalnego i przybliżonego dane jest przez (5.14). Jeżeli zachodzą równocześnie (5.13) oraz (5.15), to wtedy możemy mówić o suboptymalności rozwiązania danego przez (5.10). Powyżej w niniejszym rozdziale skonstruowana została rodzina wektorów  $\Lambda(n) = [\lambda_1(n), \dots, \lambda_m(n)]$ , która spełnia (5.13) oraz (5.15) dla całej rozważanej klasy losowych wielowymiarowych zadań załadunku (5.1), co jest zagwarantowane przez (5.28).

Przy okazji dowodów Twierdzeń 1 i 2 została również udowodniona asymptotyczna suboptymalność heurystycznego rozwiązania wielowymiarowego zadania załadunku (5.1) danego przez (5.10) w średnim przypadku. Natomiast w przypadku Twierdzeń 3 i 4 możemy mówić, że rozwiązanie dane przez (5.10) jest w średnim przypadku rozwiązaniem przybliżonym wielowymiarowego zadania załadunku z gwarantowaną dokładnością, zgodnie z (2.3).

Pomijając nakład obliczeń niezbędny dla przeformułowania zadania oraz wyznaczenia wektora  $\Lambda(n) = [\lambda_1(n), \dots, \lambda_m(n)]$ , złożoność obliczeniowa metody jest liniowa, a więc wynosi  $O(n)$ . Rozwiązania dane przez (5.10) oraz zdeterminowane przez postać wektorów  $\Lambda(n) = [\lambda_1(n), \dots, \lambda_m(n)]$  są efektywne tylko dla rozważanej klasy losowych wielowymiarowych zadań załadunku (5.1).

Wyniki przedstawione w tym rozdziale mają więc znaczenie zarówno dla teorii wielowymiarowego zadania załadunku (5.1) jak również dla metod jego rozwiązywania.

Należy zwrócić szczególną uwagę na fakt, że bardzo często algorytmy przybliżone dla rozwiązywania binarnego wielowymiarowego zadania załadunku (5.1) są testowane na zadaniach losowych, które są praktycznie tożsame z rozważanym losowym modelem zadania.

W wielu algorytmach przybliżonych dla wielowymiarowego zadania załadunku (5.1) przytoczonych w podrozdziale 5.3 ma miejsce agregacja  $m$  ograniczeń zadania (5.1)  $[a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}]$ ,  $j = 1, \dots, m$  do postaci wektora  $[\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n]$ , przy czym  $\tilde{a}_i$  są funkcją odpowiedniej kolumny macierzy ograniczeń, to znaczy  $\tilde{a}_i = f_i(a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi})$ , gdzie  $f_i(\cdot)$  - pewna funkcja. W większości przypadków  $\tilde{a}_i$  przyjmuje następującą postać:  $\tilde{a}_i = \sum_{j=1}^m \delta_j \cdot a_{ji}$ . W zależności od konkretnego rozważanego algorytmu wektor  $[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m]$  może być na przykład:

- wektorem mnożników Lagrange'a, patrz Everett [37], Magazine i Oguz [103] oraz Volgenant i Zoon [145];

- wektorem mnożników dualnych, patrz Averkbah [5] oraz Senju i Toyoda [123];
- wektorem mnożników ograniczenia zastępczego, patrz Pirkul [113];
- wektorem mnożników zachłannych, patrz Loulou i Michaelides [101] oraz Rinnooy Kan i inni [117], lub wektorem innych mnożników.

W świetle podejścia prezentowanego w podrozdziałach 5.2 oraz 5.5 wektor mnożników  $\Lambda(n) = [\lambda_1(n), \dots, \lambda_m(n)]$  ma w licznych przypadkach interpretację praktycznie tożsamą z wektorem  $[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m]$ .

Umiejętne wykorzystanie wyników podrozdziałów 5.2 oraz 5.5 może być bardzo pomocne w przypadku podejścia przypadku średniego, dla poprawienia jakości stosowanych oszacowań rozwiązania optymalnego oraz, co z tego wynika, wartości różnych mnożników używanych przez algorytmy przybliżone. Przeprowadzenie tego typu operacji może w znacznym stopniu przyczynić się do poprawy pracy algorytmów przybliżonych w sensie wyników analizy przypadku średniego.

Unikalną właściwością uzyskanych w podrozdziale 5.5 wyników jest asymptotyczna aproksymacja wartości rozwiązania optymalnego dla rozważanej klasy losowych wielowymiarowych zadań załadunku (5.1) uzyskana w Twierdzeniach 1 - 4.

Zakładając, że rozważany losowy model wielowymiarowego zadania załadunku (5.1) dobrze opisuje realną sytuację, można zastosować uzyskane wyniki do określenia celowości dalszego rozważania wielowymiarowego zadania załadunku (5.1) i uzyskiwania rozwiązań przybliżonych.

Na przykład, rozważając zadanie alokacji kapitału, patrz strona 109, potencjalny inwestor znając istniejące ograniczenia na zasoby może od razu, w przybliżony sposób, wyrobić sobie opinię, czy przy istniejących uwarunkowaniach warto inwestować, czy nie. Oczywiście, w przypadku pozytywnej odpowiedzi należy rozwiązywać odpowiednie wielowymiarowe zadania załadunku (5.1), aby zdefiniować konkretną strategię inwestowania.

## 5.6 Jednowymiarowe zadanie załadunku

Jak już wspomniano, liniowe binarne zadanie załadunku z jednym ograniczeniem jest klasycznym zadaniem programowania całkowitoliczbowego i szerzej - optymalizacji dyskretnej. Poświęcono mu wiele prac, które na ogół dotyczą aspektów algorytmicznych. Dobry przegląd literatury przedmiotu znajduje się w monografii Martello i Toth, patrz [105]. W tym rozdziale termin *jednowymiarowe zadanie załadunku*, lub krócej *zadanie załadunku*, będzie używany

w odniesieniu do liniowego binarnego zadania załadunku z jednym ograniczeniem, to znaczy (5.1) przy  $m = 1$ .

Angielska nazwa zadania załadunku *knapsack problem* wzięła się z interpretacji zadania załadunku (5.1) przy  $m = 1$ , jako zagadnienia, które ma do rozwiązania podróżnik przy pakowaniu swojego plecaka. Należy dobrać taki zestaw przedmiotów, każdy o wadze lub objętości  $a_i$  i użyteczności lub wartości  $c_i$ , których waga lub objętość sumaryczna nie przekracza pojemności plecaka  $b(n)$ , zaś łączna użyteczność lub wartość zapakowanych przedmiotów jest maksymalna. Zadanie to może być wykorzystywane do modelowania licznych zagadnień praktycznych, takich jak na przykład zagadnienie optymalnej alokacji kapitału lub portfela inwestycji, omówione na stronie 109, ale z uwzględnieniem tylko jednego rodzaju zasobów, na przykład kosztu realizacji projektu. Innym przykładem jest optymalizacja załadunku palet z towarami do samochodów, wagonów, konterów itp.

Zauważmy, że na przykład w odniesieniu do zagadnienia alokacji kapitału model uzyskany poprzez zastosowanie zadania załadunku z jednym ograniczeniem będzie znacznie uboższy i przez to mniej realistyczny w odniesieniu do rzeczywistości, niż mógłby być uzyskany z zastosowaniem wielowymiarowego zadania załadunku. W tym konkretnym przypadku zamiast  $m$  ograniczeń na różnorodne zasoby, takie jak: koszt realizacji projektu, dostępność surowców, energia, siła robocza i inne, możemy użyć tylko jednego, dla ustalenia uwagi np. kosztu realizacji projektów.

Natomiast niewątpliwą zaletą zadania załadunku z jednym ograniczeniem jest prostota jego sformułowania i względna łatwość rozwiązywania w praktyce, patrz Goldberg i Marchetti-Spaccamela [60]. Zauważmy, że zgodnie z ogólną postacią zadania (5.1) jednowymiarowe zadanie załadunku może być przedstawione w poniższej postaci:

$$z_{OPT}(n) = \max \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i$$

przy ograniczeniu  $\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i \leq b(n)$  (5.47)

gdzie  $x_i = 0$  lub  $1$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Jednowymiarowe zadanie załadunku należy do  $\mathcal{NP}$ -trudnych zadań optymalizacji dyskretnej, patrz Garey i Johnson [48], ale nie jest zadaniem silnie  $\mathcal{NP}$ -trudnym. Istnieje wiele efektywnych algorytmów przybliżonych do jego rozwiązywania, patrz na przykład Balas i Zemel [8], Goldberg i Marchetti-Spaccamela [60], Martello i Toth [105] oraz Hausmann i inni [65].

Do analizy jednowymiarowego zadania załadunku (5.47) będzie stosowany losowy model zadania analogiczny do modelu używanego dla wielowymiarowego zadania załadunku, patrz podrozdział 5.4. Biorąc pod uwagę fakt, że

$m = 1$ , możemy wyeliminować z zapisu charakterystyk indeks  $j$ ,  $j = 1, \dots, m$ . W związku z tym  $b_j(n)$ ,  $a_{ji}$  zapiszemy odpowiednio jako  $b(n)$ ,  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Dla wartości rozwiązania optymalnego jednowymiarowego zadania załadunku (5.47) w rozważanym modelu losowym zadania prawdziwa jest ocena (5.22) dla zadania wielowymiarowego (5.1). W związku z tym zakres zmienności wartości  $z_{OPT}(n)$  przedstawiony został na rysunku 5.1.

Różnorodne aspekty związane z analizą przypadku średniego jednowymiarowego zadania załadunku oraz metod jego rozwiązywania zostały omówione w pracach d'Atri [3], Ausiello i inni [4], Lee i Oh [94], Lueker [102], Szkutela i Libura [141] i [142] oraz innych.

W żadnej z powyżej zacytowanej pozycji literatury nie uzyskano dla rozważanego modelu losowego zadania wyniku, który opisywałby asymptotyczny wzrost  $z_{OPT}(n)$  dla pełnego zakresu zmienności prawej strony ograniczenia,  $\delta \leq b(n) \leq n/2$ , gdzie  $\delta$  - stała.

Zauważmy, że w przypadku jednowymiarowego zadania załadunku założenie Twierdzenia 1:

$$\delta \leq b_1(n) \leq b_2(n) \leq \dots \leq b_m(n) \leq \sqrt[m]{\frac{n \cdot b_1(n) \cdot b_2(n) \cdot \dots \cdot b_{m-1}(n)}{(m+2)!}}$$

przyjmuje postać

$$\delta \leq b(n) \leq \frac{n}{6}.$$

Natomiast założenie Twierdzenia 2:

$$\sum_{j=1}^k b'_j(n) \geq \max \left\{ \frac{3k+1}{3} \cdot b'_k(n) - \frac{n}{6}, \frac{(3k-1)n}{12} \right\}$$

przyjmuje postać

$$\frac{n}{6} \leq b'(n) \leq \frac{n}{2}.$$

Oznacza to, że w przypadku jednowymiarowego zadania załadunku (5.47) Twierdzenia 1 i 2 pozwalają rozpatrzeć pełen zakres zmienności prawych stron  $\delta \leq b(n) \leq \frac{n}{2}$ , gdzie  $\delta$  - stała. Wynik ten może zostać przedstawiony w poniższej postaci:

**Lemat 1** Niech  $c_i, a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  będą realizacjami wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym w przedziale  $(0,1]$  oraz niech  $\delta \leq b(n) \leq \frac{n}{2}$ , gdzie  $\delta$  - stała. Wtedy:

$$z_{OPT}(n) \approx \begin{cases} \sqrt{\frac{2 \cdot n \cdot b(n)}{3}} & \text{jeżeli } \delta \leq b(n) \leq \frac{n}{6} \\ \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{n}{2} + 6 \cdot b(n) \cdot \left( 1 - \frac{b(n)}{n} \right) \right) & \text{jeżeli } \frac{n}{6} \leq b(n) \leq \frac{n}{2} \end{cases} \quad (5.48)$$

**Dowód.** Dowód wynika wprost z dowodów Twierdzeń 1 i 2 poprzez zauważenie, że

$$\lambda(n) = \begin{cases} \sqrt{\frac{n}{6 \cdot b'(n)}} & \text{jeżeli } 0 \leq b'(n) \leq \frac{n}{6} \\ \frac{3}{2} - \frac{3 \cdot b'(n)}{n} & \text{jeżeli } \frac{n}{6} \leq b'(n) \leq \frac{n}{2} \end{cases} \quad (5.49)$$

jest zgodne z postacią  $\lambda_j(n)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , rozważanych w dowodach Twierdzeń 1 i 2, gdzie

$$\begin{aligned} \psi(n) &= \arg\{s(\Lambda) = b(n)\}, \quad \varepsilon(n) = (b(n))^{2/3} / \max\{1, \psi(n)^{1/3}\}, \\ b'(n) &= b(n) - \varepsilon(n), \text{ oraz } b'(n) \approx b(n) \text{ wtedy, kiedy } b(n) \approx \infty, \end{aligned}$$

co kończy dowód Lematu. ■

Wynik ten został zaprezentowany w pracy Szkatuła [138]. Zauważmy, że dla losowej klasy jednowymiarowych zadań załadunku (5.47) w przypadku asymptotycznym dość oczywistą konsekwencją (5.48) jest stwierdzenie funkcjonalnej zależności wartości rozwiązania optymalnego od rozmiaru zadania  $n$  oraz wartości prawej strony ograniczenia  $b(n)$ .

Zgodnie z (5.16) relacja  $z_{OPT} \cong \xi \cdot n$ , gdzie  $\xi \leq \frac{1}{2}$  - stała, oznacza, że mamy do czynienia z "dużymi" wartościami rozwiązań optymalnych (5.47), zaś relacja  $b(n) \cong \varsigma \cdot n$ , gdzie  $\varsigma \leq \frac{1}{2}$ , - stała oznacza, że mamy do czynienia z "dużymi" wartościami prawych stron ograniczeń (5.47).

Zgodnie z założeniem  $\delta \leq b(n)$  relacja  $b(n) \cong \mu$ , gdzie  $\mu > 0$  - stała, oznacza, że mamy do czynienia z "małymi" prawymi stronami ograniczeń. Lemat 1 pozwala na sformułowanie ważnych zależności, przedstawionych poniżej.

### Wniosek 3

$$z_{OPT}(n) \cong \xi \cdot n$$

gdzie  $\xi \leq \frac{1}{2}$  - stała, wtedy i tylko wtedy kiedy  $b(n) \cong \varsigma \cdot n$ , gdzie  $\varsigma \leq \frac{1}{2}$  - stała. Jeżeli  $b(n) \cong \delta$ , gdzie  $\delta > 0$  - stała, to wtedy

$$z_{OPT}(n) \cong \sqrt{\frac{2 \cdot \delta \cdot n}{3}}$$

**Wniosek 4** Dla rozważanego modelu losowego jednowymiarowego zadania załadunku (5.47) prawdziwa jest następująca ocena wartości rozwiązania optymalnego

$$\sqrt{\frac{2 \cdot \delta \cdot n}{3}} \leq z_{OPT}(n) \leq n/2, \text{ gdzie } \delta > 0 \text{ stała.}$$

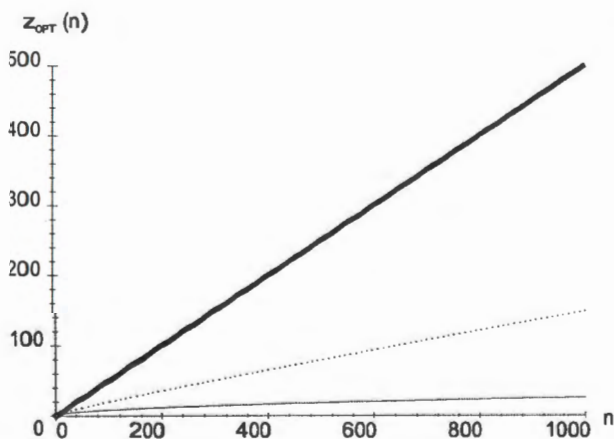
Dowód Wniosku 3 wynika wprost z Lematu 1, natomiast Wniosek 4 wynika z Lematu 1 oraz z Wniosku 3.

Zauważmy, że uzyskana we Wniosku 4 ocena asymptotyczna zachowania  $z_{OPT}(n)$  dla jednowymiarowego zadania załadunku jest zgodna z oszacowaniem (5.45) dla wielowymiarowego zadania załadunku.

Lemat 1 oraz Wniosek 4 pozwalają zaprezentować syntetyczną interpretację graficzną asymptotycznego wzrostu wartości rozwiązań optymalnych  $z_{OPT}(n)$  dla całej klasy zadań losowych.

**Przykład 4** Rozważmy trzy przypadki:  $b(n) = 1$ ,  $b(n) = \sqrt{n}$  oraz  $b(n) = n/2$ .

Na rysunku 5.5 przedstawiono wykresy przebiegu wartości  $z_{OPT}(n)$  dla  $b(n) = 1$  (linia ciągła niewytłuszczona),  $b(n) = \sqrt{n}$  (linia wykropkowana) oraz  $b(n) = n/2$  (linia ciągła wytłuszczona). Łatwo jest zauważyć, zgodnie z Wnioskiem 4, że pomiędzy wykresami przebiegu wartości  $z_{OPT}(n)$  dla  $b(n) = 1$  oraz  $b(n) = n/2$  (linie ciągłe) zawarte są praktycznie wszystkie wartości rozwiązań optymalnych  $z_{OPT}(n)$  dla całej klasy rozważanych zadań losowych.



Rysunek 5.5: Wykres wartości  $z_{OPT}(n)$  dla różnych postaci  $b(n)$

Należy zauważyć, że dobór  $\lambda(n)$  może mieć istotny związek z możliwością efektywnego, przybliżonego rozwiązywania jednowymiarowego zadania załadunku (5.47). Zagadnienia związane z wybranymi aspektami przybliżonych algorytmów dla jednowymiarowego zadania załadunku (5.47) zostaną omówione poniżej.

### Proste algorytmy przybliżone

Do przybliżonego rozwiązywania wielu zadań optymalizacji dyskretnej często używane są *algorytmy zachłanne* (*greedy algorithms*), patrz na przykład Kannan i Korte [77] oraz podrozdział 2.4. Podstawową ideą podejścia zachłanego jest konstruowanie przybliżonego rozwiązania zadania w taki sposób, aby na każdym etapie poszerzać aktualnie rozważane rozwiązanie o najbardziej efektywne elementy, to znaczy takie, które lokalnie najbardziej poprawiają wartość rozwiązania optymalnego. W poglądowy sposób możemy te ogólne rozważania uszczegółwić w przypadku jednowymiarowego zadania załadunku (5.47). Algorytm zachłanny dla jednowymiarowego zadania załadunku (5.47), patrz Kannan i Korte [77], Martello i Toth [105] oraz Sysło i inni [131], może zostać przedstawiony w poniższej postaci:

#### Algorytm zachłanny

**Krok 0<sup>0</sup>:** Definiujemy *efektywności* zmiennych decyzyjnych jednowymiarowego zadania załadunku (5.47)  $x_i$  jako  $c_i/a_i$ . Dokonujemy reorientacji (sortowania, przenumerowania) zmiennych decyzyjnych zadania, tak aby efektywności zmiennych decyzyjnych spełniały następującą zależność:

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \dots \geq \frac{c_{n-1}}{a_{n-1}} \geq \frac{c_n}{a_n}. \quad (5.50)$$

Ustalamy wartości początkowe  $i \leftarrow 0$ ,  $z_{GRE}(n) \leftarrow 0$ ,  $s_{GRE}(n) \leftarrow 0$ .

**Krok 1<sup>0</sup>:**  $i \leftarrow i + 1$ , Jeżeli

$$s_{GRE}(n) + a_i \leq b(n) \quad (5.51)$$

to wtedy:

$$x_i(n) \leftarrow 1; \quad z_{GRE}(n) \leftarrow z_{GRE}(n) + c_i; \quad s_{GRE}(n) \leftarrow s_{GRE}(n) + a_i$$

w przeciwnym przypadku  $x_i(n) \leftarrow 0$ .

**Krok 2<sup>0</sup>:** Jeżeli  $i < n$ , to wracamy do kroku 1<sup>0</sup>.

**Krok 3<sup>0</sup>:** Jeżeli  $i = n$ , to algorytm kończy pracę.  $z_{GRE}(n)$  jest wartością używanego przez algorytm zachłanny rozwiązania przybliżonego. Natomiast  $s_{GRE}(n)$  przedstawia wykorzystanie przez algorytm zachłanny zasobu  $b(n)$ , gdzie  $s_{GRE}(n) \leq b(n)$  zgodnie z (5.51).

Powstaje pytanie, na czym polega "zachłanność" przedstawionego algorytmu i jaki jest sens "efektywności" zmiennych decyzyjnych. Jeżeli dla pewnych zmiennych decyzyjnych  $j$  oraz  $k$  zachodzi

$$\frac{c_j}{a_j} > \frac{c_k}{a_k}$$



to istnieją podstawy aby sądzić, że zmienna decyzyjna  $j$  wnosi więcej do funkcji celu ( $c_j$ ) w stosunku do zużycia zasobu ( $a_j$ ), niż zmienna decyzyjna  $k$ . Z tego punktu widzenia zmienna decyzyjna  $j$  jest lepszym kandydatem do uwzględnienia w rozwiązaniu przybliżonym (na ustalenie  $x_j(n) \leftarrow 1$ ) niż zmienna decyzyjna  $k$  w danym momencie.

Idea algorytmu polega na tym, że zmienne decyzyjne o wyższych efektywnościach są rozpatrywane w pierwszej kolejności, natomiast zmienne decyzyjne o niższych efektywnościach są rozważane w dalszej kolejności, a więc ich potencjalny wpływ na uzyskiwane rozwiązanie przybliżone jest mniejszy.

Zachłanność (lokalność, krótkowzroczność) przedstawionego algorytmu polega na tym, że w każdym kroku  $i$  jego pracy rozpatrywana jest zmienna decyzyjna o najwyższej efektywności spośród zmiennych dotychczas nierozważonych. Jeśli spełnione jest (5.51), a więc dołączenie zmiennej decyzyjnej  $i$  nie narusza dopuszczalności konstruowanego rozwiązania, to jest ona akceptowana,  $x_i(n) \leftarrow 1$ .

Złożoność obliczeniowa algorytmu zachłannego wynosi  $O(n \cdot \log(n))$  i jest ona zdeterminowana przez nakład obliczeń konieczny do posortowania efektywności zmiennych decyzyjnych zadania  $c_i/a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , w taki sposób, aby spełniona była nierówność (5.50).

Balas i Zemel w pracy [8] zaproponowali algorytm wykorzystujący w pierwszym etapie swojego działania efektywności zmiennych decyzyjnych do redukcji rozmiaru rozwiązywanego zadania. Zamiast sortowania zmiennych decyzyjnych tak, aby spełniona była zależność (5.50), dokonywano porównania efektywności zmiennych decyzyjnych z wartością progową  $\lambda$ . Zauważmy, że zgodnie z (5.10)

$$x_i(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } c_i > \lambda \cdot a_i \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \quad (5.52)$$

da je rozwiązanie przybliżone zadania, o ile spełniona jest nierówność (5.13), która w przypadku jednowymiarowego zadania załadunku (5.47) przyjmuje postać:

$$s(n, \lambda) = \sum_{i=1}^n a_i(\lambda) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i(\lambda) \leq b(n). \quad (5.53)$$

Uzyskane zgodnie z (5.52) oraz przy spełnieniu (5.53) rozwiązanie przybliżone jednowymiarowego zadania załadunku (5.47), którego wartość wynosi

$$z_n(\lambda) = \sum_{i=1}^n c_i(\lambda) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i(\lambda)$$

będziemy nazywać rozwiązaniem *progowym* dla wartości progę  $\lambda$ . Algorytm, którego działanie opisuje (5.52) nazwiemy *algorytmem progowym*. Algorytm

progowy należy do klasy metod zachłanych, ale wyeliminowana jest konieczność sortowania zmiennych decyzyjnych jednowymiarowego zadania załadunku (5.47) tak, aby były spełnione nierówności (5.50). Zauważmy, że rozwiązanie heurystyczne wielowymiarowego zadania załadunku (5.1) dane przez (5.10) może być uważane za uogólnienie idei rozwiązania progowego.

Zastosowanie porównania z wartością progą zamiast sortowania zmiennych decyzyjnych zadania ma bardzo istotną zaletę w przypadku analizy przypadku średniego. Mianowicie, spełnienie warunku (5.50) wymaga zastosowania statystyk pozycyjnych, patrz Feller [38], co powoduje wystąpienie zależności pomiędzy zmiennymi losowymi opisującymi charakterystyki modelu zadania i praktycznie uniemożliwia przeprowadzenie dalszych kroków analizy przypadku średniego.

Różnorodne aspekty algorytmu progowego dla jednowymiarowego zadania załadunku (5.47) zostały przedyskutowane w pracy Szkatuła i Libura [142]. Dla potrzeb naszych rozważań istotne są następujące fakty:

- Algorytm progowy ma bardzo niską złożoność obliczeniową  $O(n)$  oraz jest on bardzo prosty, wręcz trywialny, w implementacji.
- Wartość uzyskiwanego przez algorytm progowy rozwiązania przybliżonego jednowymiarowego zadania załadunku (5.47)  $z_n(\lambda)$  oraz jego dopuszczalność, zgodnie z (5.53), zależą od wartości progowej  $\lambda$ . Ogólnie można stwierdzić, że jeżeli wartość progowa  $\lambda$  jest zbyt mała, to uzyskiwane rozwiązanie może nie być dopuszczalne, tzn. nie będzie spełnione (5.53), natomiast zbyt duża wartość progowa  $\lambda$  może dawać rozwiązania przybliżone o bardzo małych, w porównaniu do wartości rozwiązania optymalnego  $z_{OPT}(n)$ , wartościach  $z_n(\lambda)$ .
- Jeżeli spełnione jest (5.53), to wtedy

$$z_n(\lambda) \leq z_{GRE}(n) \leq z_{OPT}(n) \quad (5.54)$$

przy czym nierówność

$$z_{GRE}(n) \leq z_{OPT}(n)$$

zachodzi zawsze, ze względu na dopuszczalność rozwiązań uzyskiwanych przez algorytm zachłanny.

Dla rozważanej klasy losowych jednowymiarowych zadań załadunku (5.47) prawdziwe są następujące wyniki.

**Twierdzenie 5** Niech  $c_i, a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  będą realizacjami wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym w przedziale  $(0, 1]$  oraz niech  $\delta \leq b'(n) \leq \frac{n}{2}$ , gdzie  $\delta$  - stała,  $\lambda(n)$  dane przez (5.49). Wtedy:

$$z_n(\lambda(n)) \approx z_{GRE}(n) \approx z_{OPT}(n) \approx \quad (5.55)$$

$$\approx \begin{cases} \sqrt{\frac{2 \cdot n \cdot b(n)}{3}} & \text{jeżeli } \delta \leq b(n) \leq \frac{n}{6} \\ \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{n}{2} + 6 \cdot b(n) \cdot \left( 1 - \frac{b(n)}{n} \right) \right) & \text{jeżeli } \frac{n}{6} \leq b(n) \leq \frac{n}{2} \end{cases}$$

**Dowód.** Dla rozważanej klasy losowych jednowymiarowych zadań załadunku (5.47) wartości progowe  $\lambda(n)$  dane są przez (5.49). Zgodnie z ideą dowodów Twierdzeń 1 oraz 2 asymptotycznie spełnione są (5.24) oraz (5.53) i co z tego wynika, również (5.54). Zastosowanie Lematu 1 oraz (5.48) kończy dowód Twierdzenia. ■

Zauważmy, że wektor mnożników Lagrange'a  $\Lambda(n)$  stosowany w dowodach Twierdzeń 1 - 4 dla przypadku wielowymiarowego zadania załadunku (5.1) jest naturalnym uogólnieniem wartości progowej  $\lambda(n)$ , patrz (5.49), dla jednowymiarowego zadania załadunku (5.47).

Przedstawione w Twierdzeniu 5 wyniki w dobitny sposób wykazują wartość wyników analizy przypadku średniego i ich znaczenie dopełniające wyniki analizy przypadku najgorszego. Z punktu widzenia analizy przypadku najgorszego algorytm progowy nie ma żadnych gwarancji jakości uzyskiwanych rozwiązań, co więcej, nawet uzyskanie rozwiązania dopuszczalnego nie jest zapewnione. Algorytm zachłanny również nie gwarantuje asymptotycznej optymalności w ogólnym przypadku.

Natomiast zgodnie z (5.55), przy odpowiednim doborze wartości progowej  $\lambda(n)$ , algorytm progowy jest asymptotycznie optymalny dla całej rozważanej klasy losowych jednowymiarowych zadań załadunku (5.47). Potwierdzona zostaje również intuicyjna ocena wysokiej jakości wyników uzyskiwanych przez algorytm zachłanny.

"Zachłanność" obu omawianych algorytmów wynika z faktu wykorzystania efektywności zmiennych decyzyjnych. Należy w tym miejscu nadmienić, że istnieje kategoria jednowymiarowych zadań załadunku (5.47), która może być znacznie trudniejsza dla algorytmów: zachłannego i progowego.

Wyobraźmy sobie sytuację, kiedy efektywności wszystkich lub bardzo wielu zmiennych decyzyjnych  $c_i/a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , są sobie bardzo bliskie lub wręcz równe. W tym przypadku idea zachłanności (lokalnej maksymalizacji) może zawieść. Natomiast w przypadku zróżnicowanych wartości efektywności

zmiennych decyzyjnych algorytmy zachłanne powinny dawać dobrej jakości rozwiązania przybliżone.

Powstaje dość naturalne pytanie: jaki jest wpływ "zachłanności" (maksymalizacji efektywności zmiennych decyzyjnych) prezentowanych algorytmów na jakość rozwiązań uzyskiwanych przez algorytm zachłanny i algorytm progowy? Uzyskane wyniki pozwalają na przedstawienie pewnego przykładu ilustrującego tę sytuację. Rozważmy następujący szczególny przypadek jednowymiarowych zadań załadunku (5.47):

$$z_{OPT}(n) = \max \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i$$

przy ograniczeniu  $\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i \leq 1$  (5.56)

gdzie  $x_i = 0$  lub  $1$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

W pracy Szkatuła i Libura [141] rozważono algorytm najprostszy dla rozwiązywania zadania (5.47).

### Algorytm najprostszy

**Krok 0<sup>0</sup>:** Ustalamy wartości początkowe  $i \leftarrow 0$ ,  $z_{SIM}(n) \leftarrow 0$ ,  $s_{SIM}(n) \leftarrow 0$ .

**Krok 1<sup>0</sup>:**  $i \leftarrow i + 1$ , Jeżeli

$$s_{SIM}(n) + a_i \leq 1$$

to wtedy:

$$x_i(n) \leftarrow 1 \quad z_{SIM}(n) \leftarrow z_{SIM}(n) + c_i; \quad s_{SIM}(n) \leftarrow s_{SIM}(n) + a_i$$

w przeciwnym przypadku  $x_i(n) \leftarrow 0$ .

**Krok 2<sup>0</sup>:** Jeżeli  $i < n$ , to wracamy do kroku 1<sup>0</sup>.

**Krok 3<sup>0</sup>:** Jeżeli  $i = n$ , to algorytm kończy pracę.  $z_{SIM}(n)$  jest wartością uzyskanego przez algorytm najprostszy rozwiązania przybliżonego. Natomiast  $s_{SIM}(n)$  przedstawia wykorzystanie przez algorytm zachłanny zasobu  $b(n) = 1$ , gdzie  $s_{SIM}(n) \leq 1$ , to znaczy, że uzyskiwane przez algorytm najprostszy rozwiązania jest zawsze dopuszczalne.

Zauważmy, że algorytm najprostszy różni się od algorytmu zachłannego brakiem posortowania efektywności zmiennych decyzyjnych, patrz (5.50). Z wyników zaprezentowanych w pracy Szkatuła i Libura [141] wynika, że dla rozważanej klasy losowych zadań (5.56) zachodzi:

$$z_{SIM}(n) \approx \frac{1}{2} \cdot \ln(n)$$

Natomiast z Twierdzenia 5, (5.55) uzyskujemy dla tej samej klasy losowych zadań (5.56):

$$z_n(\lambda(n)) \approx z_{GRE}(n) \approx z_{OPT}(n) \approx \sqrt{\frac{2 \cdot n}{3}}.$$

Z przedstawionych powyżej wzorów widać więc wyraźnie, że nie uwzględnienie elementu zachłanności ma bardzo negatywny wpływ na wyniki działania algorytmu najprostszego i na jakość uzyskiwanych przez niego rozwiązań w sensie asymptotycznego wzrostu wartości rozwiązań przybliżonych w średnim przypadku.

**Wniosek 5** Niech  $c_i, a_i, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$  będą realizacjami wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym w przedziale  $(0, 1]$  oraz niech  $b(n) = 1$ , gdzie  $\lambda(n)$  dane jest przez (5.49). Wtedy:

$$\frac{z_{SIM}(n)}{z_n(\lambda(n))} \approx \frac{z_{SIM}(n)}{z_{GRE}(n)} \approx \frac{z_{SIM}(n)}{z_{OPT}(n)} \approx \frac{\sqrt{3} \cdot \ln(n)}{\sqrt{8 \cdot n}} \approx 0.$$

Aby zakończyć rozważania dotyczące analizy w sensie przypadku średniego jednowymiarowego zadania załadunku zauważmy, że zgodnie z podejściem przypadku najgorszego algorytmu progowy i najprostszy nie dają żadnych gwarancji jakości uzyskiwanych rozwiązań. Natomiast Twierdzenie 5 oraz Wniosek 5 przedstawiają zupełnie inny obraz sytuacji w sensie analizy przypadku średniego: algorytm zachłanny i progowy są asymptotycznie suboptymalne, natomiast algorytm najprostszy uzyskuje rozwiązania przybliżone o niskiej jakości. Wyniki te są potwierdzeniem wysokiej praktycznej użyteczności metod zachłannych.

Na zakończenie omówienia zagadnień związanych z metodami rozwiązywania jednowymiarowego zadania załadunku (5.47) należy podkreślić, że omówione zostały tylko wybrane aspekty zagadnień dotyczących metod zachłannych. Celem przeprowadzonych rozważań było przedstawienie możliwości, jakie daje analiza przypadku średniego. Ponadto jednowymiarowe zadanie załadunku (5.47) było rozważane jako szczególny, wspomagający przypadek wielowymiarowego zadania załadunku (5.1), a nie jako samodzielne zadanie badawcze.

Istnieje bardzo bogaty dorobek w dziedzinie dokładnych i przybliżonych metod rozwiązywania jednowymiarowego zadania załadunku (5.47), który nie był przedmiotem zainteresowania w niniejszej monografii, patrz monografia Martello i Toth [105].

## 5.7 Podsumowanie

Binarne wielowymiarowe zadanie załadunku (5.1) jest ważnym zadaniem optymalizacji dyskretnej mającym wiele istotnych zastosowań praktycznych. Wielowymiarowe zadanie załadunku jest zadaniem  $\mathcal{NP}$ -trudnym. Jeżeli  $m$  - liczba ograniczeń jest nie mniejsza niż dwa,  $m \geq 2$ , to jest ono zarazem zadaniem silnie  $\mathcal{NP}$ -trudnym. W literaturze znacznie lepiej zbadane zostało binarne zadanie załadunku z jednym ograniczeniem (5.47), które jest bardzo szczególnym przypadkiem wielowymiarowego zadania załadunku. W rzeczywistości jest ono od niego znacznie prostsze zarówno w sensie sformułowania, jak i wielu właściwości. Dla przykładu, zadanie załadunku z jednym ograniczeniem jest zadaniem  $\mathcal{NP}$ -trudnym, ale nie silnie  $\mathcal{NP}$ -trudnym.

Celem tego rozdziału było przeprowadzenie analizy przypadku średniego dla binarnego wielowymiarowego zadania załadunku. Rozważono również binarne zadanie załadunku z jednym ograniczeniem, dla którego uzyskane wyniki analizy przypadku średniego przyjmują znacznie prostszą postać. Zostały również omówione możliwości efektywnego rozwiązywania zadań załadunku.

Aby zrealizować wyżej wymienione cele, zastosowano następujący schemat postępowania:

- Sformułowano binarne liniowe wielowymiarowe zadanie załadunku w postaci (5.1) oraz jednowymiarowe zadanie załadunku w postaci (5.47).
- W oparciu o zadanie dualne i funkcję Lagrange'a uzyskano oszacowanie wartości rozwiązania optymalnego zadania oraz innych jego charakterystyk.
- Zdefiniowano model losowy zadania przyjmując założenie, że współczynniki funkcji celu i lewych stron ograniczeń są realizacjami zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym w przedziale  $(0, 1]$ .
- Przeprowadzono analizę przypadku średniego wartości rozwiązania optymalnego i przybliżonego uzyskując ich asymptotyczną postać jako deterministyczną funkcję parametrów zadania.
- Omówiono możliwość efektywnego rozwiązywania zadań załadunku, w tym, z wykorzystaniem wyników analizy przypadku średniego.

Należy podkreślić, że przy zastosowaniu analizy przypadku średniego można uzyskać dla wielowymiarowego zadania załadunku wartościowe wyniki opisujące asymptotyczne zachowanie się rozwiązań optymalnych zadań w średnim przypadku.

Dla całej rozważanej klasy zadań losowych został również zdefiniowany sposób wyznaczania współczynników Lagrange'a. Mogą one mieć istotne znaczenie dla rozwiązywania zadań załadunku w praktyce obliczeniowej. Uzyskane wyniki wykazują, że rozwiązania przybliżone uzyskane z pomocą wyznaczonych współczynników Lagrange'a są w średnim przypadku asymptotycznie sub-optymalne lub mają gwarantowaną jakość rozwiązań.

Czynnikiem ograniczającym bardziej ogólny wymiar uzyskanych w tym rozdziale monografii wyników jest fakt, że są one prawdziwe tylko dla rozważanej klasy losowych wielowymiarowych zadań załadunku.

# Uwagi końcowe

W monografii rozważono podejście przypadku średniego do analizy zadań oraz algorytmów optymalizacji dyskretnej. Celem monografii było wykazanie, na przykładzie binarnego wielowymiarowego zadania załadunku, zadania szeregowania prac z terminami zakończenia oraz wyników znanych z literatury, że podejście przypadku średniego jest bardzo użytecznym narzędziem analizy zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej.

W monografii dokonano przeglądu dziedziny optymalizacji dyskretnej z zaprezentowaniem najbardziej charakterystycznych zadań, takich jak: programowanie całkowitoliczbowe i liniowe, programowanie binarne, zadania pokrycia, pakowania i rozbitcia zbiorów, wybrane zadania teorii grafów oraz zadania harmonogramowania.

Następnie zaprezentowano popularne i powszechnie stosowane techniki rozwiązywania zadań optymalizacji dyskretnej, takie jak: metoda pełnego przeglądu, metoda podziału i oszacowań, programowanie dynamiczne, algorytmy zachłanne, metody programowania liniowego i inne.

Zdefiniowane zostały sposoby oceny dokładności pracy algorytmów optymalizacji dyskretnej. Do oceny złożoności obliczeniowej zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej wprowadzono metodologię przypadku najgorszego. Dokonano podziału zadań optymalizacji na umowne kategorie zadań łatwych (należących do klasy  $\mathcal{P}$ ), trudnych (należących do klasy zadań  $\mathcal{NP}$ -trudnych) oraz szczególnie trudnych (zadań silnie  $\mathcal{NP}$ -trudnych). Z pewnym uproszczeniem można powiedzieć, że o łatwości rozwiązywania wybranych zadań optymalizacji dyskretnej decyduje istnienie dla nich algorytmów dokładnych o wielomianowej złożoności obliczeniowej.

Jako dopełnienie oraz poszerzenie możliwości poznawczych podejścia przypadku najgorszego zaprezentowano podejście przypadku średniego. Zdefiniowano niezbędne podstawy teoretyczne analizy przypadku średniego oraz dokonano prezentacji wybranych wyników znanych z literatury.

Ogólne rozważania dotyczące zadań optymalizacji dyskretnej, metod ich rozwiązywania, podejścia analizy przypadku najgorszego i średniego do oceny zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej szczegółowo omówiono na przy-



kładzie wielowymiarowego binarnego zadania załadunku, z odrębnym rozpatrzeniem przypadku jednowymiarowego oraz zadania szeregowania prac z terminami zakończenia.

Dla rozważanych modeli losowych zadań, które uzyskano przyjmując założenie, że współczynniki funkcji celu i lewych stron ograniczeń są realizacjami zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym w przedziale  $(0, 1]$ , uzyskano szereg ciekawych wyników analizy przypadku średniego. Najważniejszym z nich było wykazanie, że wartości rozwiązań optymalnych dla całych losowych klas zadań dążą do swoich wartości oczekiwanych - deterministycznych funkcji: rozmiaru zadania  $n$  (liczby zmiennych decyzyjnych), liczby ograniczeń  $m$  (w przypadku binarnego wielowymiarowego zadania załadunku), oraz wartości prawych stron ograniczeń. Z przeprowadzonych rozważań wynika istotny wpływ wartości i wzajemnych uwarunkowań wektorów prawych stron ograniczeń na asymptotyczny wzrost wartości rozwiązań optymalnych jako funkcji rozmiaru zadania  $n$ .

W przypadku binarnego wielowymiarowego zadania załadunku można zauważyć, że liczba ograniczeń  $m$  ma bardzo duży wpływ na asymptotyczny wzrost wartości rozwiązań optymalnych jako funkcji rozmiaru zadania  $n$ , szczególnie w przypadku funkcyjnej zależności wartości prawych stron ograniczeń od  $m$  oraz małych wartości prawych stron ograniczeń  $b_j(n)$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Dla dużych wartości  $b_j(n)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , zależność od  $m$  ulega znacznemu osłabieniu, a przy  $b_j(n) \approx n/2$  praktycznie zanika.

Powszechnie stosowaną w praktyce obliczeniowej metodą służącą do oceny algorytmów przybliżonych jest testowanie ich na zadaniach generowanych losowo. Uzyskane wyniki są następnie poddawane analizie statystycznej. Łatwo jest zauważyć, że powszechnie stosowane generatory zadań losowych są praktycznie tożsame z rozważanymi w monografii losowymi modelami zadań. Wyniki analizy przypadku średniego są więc w wielu przypadkach potwierdzeniem i teoretycznym uzasadnieniem wyników eksperymentalnych.

Co więcej, w uzasadnionych przypadkach wyniki analizy przypadku średniego mogą wyeliminować konieczność przeprowadzania eksperymentu obliczeniowego testującego algorytmy dla zadań optymalizacji dyskretniej. W takim przypadku w oczywisty sposób jest oszczędzany czas badaczy oraz zmniejszane wykorzystanie zasobów komputerowych.

W monografii wykazano, że bardzo proste algorytmy heurystyczne, o liniowej złożoności obliczeniowej, nie mające nawet gwarancji uzyskania rozwiązań dopuszczalnych zadań, są asymptotycznie optymalne w średnim przypadku. Wyniki tego typu są w oczywisty sposób odmienne od wyników analizy przypadku najgorszego i dlatego stanowią ich wartościowe uzupełnienie.

Pogląd, że analiza przypadku średniego może zastąpić analizę przypadku

najgorszego jest w odczuciu autora błędny. Zarówno analiza przypadku najgorszego, jak również analiza przypadku średniego mają swoją specyfikę oraz uzyskują wartościowe wyniki i oceny. Dopiero zapoznanie się z wynikami analiz różnego rodzaju pozwala wyrobić sobie możliwie najbardziej obiektywny pogląd na różne aspekty analizowanego zadania lub algorytmu optymalizacji dyskretnej.

Należy również podkreślić, że wyniki analizy przypadku średniego są prawdziwe tylko dla rozważanych losowych klas zadań. Należy więc zachować szczególną ostrożność przy próbach uogólniania uzyskanych wyników na inne klasy zadań, gdyż może to prowadzić do fałszywych i nieuzasadnionych wniosków.

Istotnym wyzwaniem badawczym pozostaje nadal przeprowadzenie analizy przypadku średniego dla szczególnie trudnych zadań optymalizacji dyskretnej. Dobrym przykładem jest zadanie programowania całkowitoliczbowego, patrz podrozdział 1.2 oraz wzór (1.2). W przypadku zadania programowania całkowitoliczbowego postać funkcji Lagrange'a oraz zadania dualnego nie sprzyja zastosowaniu technik i oszacowań wykorzystanych w podrozdziałach 5.2 oraz 6.2.

Innym ważnym celem przyszłych prac badawczych wydaje się rozważenie bardziej realistycznych modeli zadań, co w szczególności może wymagać zastosowania złożonych rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych opisujących charakterystyki analizowanych zadań. Również w tym przypadku oczekiwane jest uzyskanie analitycznych wyników o podobnym charakterze jak wyniki zawarte w podrozdziałach 5.5 oraz 6.3 niniejszej monografii.



# Literatura

- [1] R. Aboudi, K. Jörnsten. Tabu search for general zero-one integer programs using the pivot and complement heuristic. *ORSA Journal on Computing*, 6:82–93, 1994.
- [2] A.V. Aho, J.E. Hopcroft, J.D. Ullman. *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1974.
- [3] G. d' Atri. Probabilistic analysis of the knapsack problem. Working Paper 7, Groupe de Recherche 22, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1978.
- [4] G. Ausiello, A. Marchetti-Spaccamela, M. Protasi. Probabilistic analysis of the solution of the knapsack problem. W: *Proceedings of the Tenth IFIP Conference*, ss. 557–565, New York, 1982. Springer.
- [5] I. Averbakh. Probabilistic properties of the dual structure of the multi-dimensional knapsack problem and fast statistically efficient algorithms. *Mathematical Programming*, 65:311–330, 1994.
- [6] E. Balas. An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables. *Operations Research*, 13:517–546, 1965.
- [7] E. Balas, C.H. Martin. Pivot and complement - a heuristic for 0-1 programming. *Management Science*, 26:86–96, 1980.
- [8] E. Balas, E. Zemel. An algorithm for large zero-one knapsack problems. *Operations Research*, 28:1130–1154, 1980.
- [9] R. Battiti, G. Tecchiolli. Local search with memory: benchmarking RTS. *OR Spektrum*, 17:67–86, 1995.
- [10] J. Beardwood, J. Halton, J.M. Hammersley. The shortest path through many points. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 55:299–327, 1959.

- [11] R. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957.
- [12] M. Bertocchi, L. Słomiński, J. Sobczyńska. Probabilistic and deterministic local search for solving the binary multiknapsack problem. *Optimization*, 33:155–166, 1995.
- [13] J. Błażewicz, K.H. Ecker, E. Pesch, G. Schmidt, J. Węglarz. *Scheduling Computer and Manufacturing Processes*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.
- [14] J. Błażewicz, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan. Scheduling subject to resource constraints: classification and complexity. *Discrete Applied Mathematics*, 5:11–24, 1983.
- [15] K.H. Borgwardt. The average number of steps required by simplex-method is polynomial. *Zeitschrift für Operations Research*, 26:157–177, 1982.
- [16] I.N. Bronsztejn, K.A. Siemiendiajew. *Matematyka, poradnik encyklopedyczny*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1973.
- [17] A.V. Cabot. An enumeration algorithm for knapsack problems. *Operations Research*, 18:306–311, 1970.
- [18] P.M. Camerini, F. Maffioli, C. Vercellis. Multi-constrained matroidal knapsack problems. *Mathematical Programming*, 45:211–231, 1989.
- [19] V. Cerny. A thermodynamical approach to the travelling salesman problem: an efficient simulation algorithm. Preprint, Institute of Physics and Biophysics, Comenius University, Bratislava, 1982.
- [20] L.G. Chaczian. Wielomiananowy algorytm programowania liniowego. *Dokl. Akad. Nauk SSSR, Nova Seria*, 244(5):1093–1096, 1979. (w języku rosyjskim).
- [21] I. Charon, O. Hudry. The noising method: a new method for combinatorial optimization. *Operations Research Letters*, 14:133–137, 1993.
- [22] P.C. Chu, J.E. Beasley. A genetic algorithm for the multidimensional knapsack problem. *Journal of Heuristics*, 4(1):63–86, 1998.
- [23] E.G. Coffman Jr, M.R. Garey, D.S. Johnson. Approximation algorithm for bin-packing - an updated survey. W: G. Ausiello, M. Lucertini, P. Serafini, editors, *Algorithm Design for Computer System Design*, ss. 49–106, New York, 1984. Springer.

- [24] E.G. Coffman Jr, G.S. Lueker. *Probabilistic Analysis of Packing and Partitioning Algorithms*. Wiley-Interscience, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1991.
- [25] E.G. Coffman Jr, G.S. Lueker, A.H.G. Rinnooy Kan. Asymptotic methods in the probabilistic analysis of sequencing and packing heuristics. *Management Science*, 34:266–290, 1988.
- [26] S.A. Cook. The complexity of theorem-proving procedures. W: *Proc. 3rd Annu. ACM Symp. On Theory of Computing*, ss. 151–158, New York, 1971. ACM Press.
- [27] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest. *Wprowadzenie do algorytmów*. Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Warszawa, 1997.
- [28] Y. Crama, J.B. Mazzola. On the strength of relaxations of multidimensional knapsack problems. *INFOR*, 32:219–225, 1994.
- [29] F. Dammeyer, S. Voss. Dynamic tabu list management using reverse elimination method. *Annals of Operations Research*, 41:31–46, 1993.
- [30] G.B. Dantzig. Discrete variable problems. *Operations Research*, 5:266–277, 1957.
- [31] G.B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.
- [32] A. Drexl. A simulated annealing approach to the multiconstraint zero-one knapsack problem. *Computing*, 40:1–8, 1988.
- [33] K. Dudziński, K. Szkatuła. A note on sequencing jobs with deadlines problem. *European Journal of Operational Research*, 59:333–336, 1992.
- [34] G. Dueck. New optimization heuristics. *Journal of Computational Physics*, 104:86–92, 1993.
- [35] G. Dueck, T. Schuer. Threshold accepting: a general purpose optimization algorithm appearing superior to simulated annealing. *Journal of Computational Physics*, 90:161–175, 1990.
- [36] A.E. Eiben, E.H.L. Aarts, K.H. Van Hee. Global convergence of genetic algorithms: A markov chain analysis. *Lecture Notes in Computer Science*, 496:4–9, 1991.

- [37] H. Everett. Generalized lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources. *Operations Research*, 11:399–417, 1963.
- [38] W. Feller. *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, tom II*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1981.
- [39] J.F. Fontanari. A statistical analysis of the knapsack problem. *Journal of Physics A - Mathematical and General*, 28:4751–4759, 1995.
- [40] G.E. Fox, G.D. Scudder. A heuristic with tie breaking for certain 0-1 integer programming models. *Naval Research Logistics Quarterly*, 32:613–623, 1985.
- [41] A. Freville, G. Plateau. Heuristics and reduction methods for multiple constraints 0-1 linear programming problems. *European Journal of Operational Research*, 24:206–215, 1986.
- [42] A. Freville, G. Plateau. Hard 0-1 multiknapsack test problems for size reduction methods. *Investigacion Operativa*, 1:251–270, 1990.
- [43] A. Freville, G. Plateau. An efficient preprocessing procedure for the multidimensional 0-1 knapsack problem. *Discrete Applied Mathematics*, 49:189–212, 1994.
- [44] A. Freville, G. Plateau. The 0-1 bidimensional knapsack problem: toward an efficient high-level primitive tool. *Journal of Heuristics*, 2:147–167, 1997.
- [45] A.M. Frieze, M.R.B Clarke. Approximation algorithms for the m-dimensional 0-1 knapsack problem: Worst case and probabilistic analysis. *European Journal of Operational Research*, 15:100–109, 1984.
- [46] M.R. Garey, R.L. Graham, D.S. Johnson, A. Yao. Resource constrained scheduling as generalized bin packing. *J. Combin. Theory A*, (21):257–298, 1976.
- [47] M.R. Garey, D.S. Johnson. Strong NP-completeness results: motivation, examples and implications. *Journal of the Association of Computer Machinery*, 25:499–508, 1978.
- [48] M.R. Garey, D.S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, San Francisco, 1979.

- [49] R.S. Garfinkel, G.L. Nemhauser. *Programowanie całkowitoliczbowe*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1978.
- [50] S.L. Gass. *Programowanie liniowe*. PWN, Warszawa, 1976.
- [51] B. Gavish, H. Pirkul. *Allocation of Databases and Processors in a Distributed Computing System*. North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [52] B. Gavish, H. Pirkul. Efficient algorithms for solving multiconstraint zero-one knapsack problems to optimality. *Mathematical Programming*, 31:78–105, 1985.
- [53] S. Van de Geer, L. Stougie. On rates of convergence and asymptotic normality in the multiknapsack problem. *Mathematical Programming*, 51:349–358, 1991.
- [54] P.C. Gilmore, R.E. Gomory. The theory and computation of knapsack functions. *Operations Research*, 14:1045–1075, 1966.
- [55] F. Glover. Heuristic for integer programming using surrogate constraints. *Decision Sciences*, 8:156–160, 1977.
- [56] F. Glover. Tabu search: a tutorial. *Interfaces*, 20(4):74–94, 1991.
- [57] F. Glover. Optimization by ghost image processes in neural networks. *Computers and Operations Research*, 21:801–822, 1994.
- [58] F. Glover, G.A. Kochenberger. Critical event tabu search for multidimensional knapsack problems. W: I.H. Osman and J.P. Kelly, editors, *Meta-Heuristics: Theory and Applications*, ss. 407–427. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [59] F. Glover, M. Laguna. *Tabu Search*. Kluwer, Boston, 1997.
- [60] A.V. Goldberg, A. Marchetti-Spaccamela. On finding the exact solutions of a 0-1 knapsack problem. W: *Proceedings of the 16th ACM Symposium on Theory of Computing*, ss. 359–368, New York, 1984. Association for Computing Machinery.
- [61] M.R. Graham, E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling theory: a survey. *Annals of Discrete Mathematics*, 5:287–326, 1979.
- [62] M. Grötschel, L. Lovász. Combinatorial optimization. W: R. Graham, M. Grötschel, L. Lovász, editors, *Handbook of Combinatorics*, ss. 1541–1597. Elsevier Science B.V., 1995.



- [63] S. Hanafi, A. Freville. An efficient tabu search approach for the 0-1 multidimensional knapsack problem. *European Journal of Operational Research*, to appear.
- [64] S. Hanafi, A. Freville, A.El. Abedellaoui. Comparison of heuristics for the 0-1 multidimensional knapsack problem. W: I.H. Osman and J.P. Kelly, editors, *Meta-Heuristics: Theory and Applications*, ss. 449-465. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [65] D. Hausman, R. Kannan, B. Korte. Exponential lower bounds on a class of knapsack algorithms. *Mathematics of Operations Research*, 6:225-232, 1981.
- [66] F.S. Hiller. Efficient heuristic procedures for integer linear programming with an interior. *Operations Research*, 17:600-637, 1969.
- [67] D.S. Hochbaum. A nonlinear knapsack problem. *Operations Research Letters*, 17:103-110, 1995.
- [68] A. Hoff, A. Løkketagen, I. Mittet. Genetic algorithms for 0/1 multidimensional knapsack problems. Working paper, Molde College, Britvein 2, Molde, Norway, 1996.
- [69] J.H. Holland. Adaptation in natural and artificial systems. Technical report, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
- [70] D.S. Johnson. *Near-optimal allocation algorithms*. PhD thesis, MIT, Cambridge, MA, 1973.
- [71] D.S. Johnson. The NP completeness column: an ongoing guide. *J. Algorithms*, 5:284-299, 1984.
- [72] D.S. Johnson. The NP-completeness column: an ongoing guide. *J. Algorithms*, 9:426-444, 1988.
- [73] D.S. Johnson. Local optimization and the travelling salesman problem. W: *Proc. 17th Coll. On Automata, Languages and Programming*, ss. 446-461, Heidelberg, 1990. Springer.
- [74] D.S. Johnson. The NP-completeness column: an ongoing guide. *J. Algorithms*, 13:502-524, 1992.
- [75] D.S. Johnson, C.R. Aragon, L.A. McGeoch, C. Schevon. Optimization by simulated annealing: an experimental evaluation; part I, graph partitioning. *Operational Research*, 37:865-892, 1989.

- [76] D.S. Johnson, C.R. Aragon, L.A. McGeoch, C. Schevon. Optimization by simulated annealing; an experimental evaluation, part II, graph coloring and number partitioning. *Operations Research*, 39:378–406, 1991.
- [77] R. Kannan, B. Korte. Approximative combinatorial algorithms. W: *Mathematical Programming*, ss. 195–248, Amsterdam, New York, 1984. North Holland.
- [78] N. Karmarkar. A new polynomial time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4:375–395, 1984.
- [79] R.M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. W: R.E. Miller and J.W. Thatcher, editors, *Complexity of Computer Computations*, ss. 85–103. Plenum Press, New York, 1972.
- [80] R.M. Karp. The probabilistic analysis of some combinatorial search algorithms. W: J.F. Traub, editor, *Algorithms and Complexity: New Directions and Recent Results*, ss. 1–19. Academic Press, 1976.
- [81] R.M. Karp. Probabilistic analysis of partitioning algorithms for the travelling salesman problem in the plane. *Mathematics of Operations Research*, 2:209–224, 1977.
- [82] R.M. Karp. A patching algorithms for the nonsymmetric travelling salesman problem. *SIAM Journal on Computing*, 8:561–573, 1979.
- [83] R.M. Karp, J.K. Lenstra, C.J.H. McDiarmid, A.H.G. Rinnooy Kan. Probabilistic analysis of combinatorial algorithms. W: M. OhEigeartaigh, J.K. Lenstra, A.G.H. Rinnooy Kan, editors, *Combinatorial Optimization: Annotated Bibliographies*, ss. 52–88. Wiley-Interscience, New York, Chichester, 1985.
- [84] S. Khuri, T. Bäck, J. Heitkötter. The zero/one multiple knapsack problem and genetic algorithms. W: *Proceedings of the 1994 ACM Symposium on Applied Computing (SAC'94)*, ss. 188–193. ACM Press, 1994.
- [85] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt, M. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220:621–680, 1983.
- [86] V. Klee, G.J. Minty. How good is the simplex algorithm. W: O. Shisba, editor, *Inequalities III*, ss. 159–175. Academic Press, 1972.
- [87] G.A. Kochenberger, B.A. McCarl, F.P. Wyman. A heuristic for general integer programming. *Decision Sciences*, 5:36–44, 1974.

- [88] B. Korte, D. Hausmann. An analysis for the greedy algorithm for independence systems. *Ann. Discrete Math.*, 2:65–74, 1978.
- [89] B. Korte, L. Lovász, R. Schrader. *Greedoids*. Springer, Heidelberg, 1991.
- [90] J.B. Kruskal. On the shortest spanning subtree of a graph and the travelling salesman problem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2:48–50, 1956.
- [91] J.L. Kulikowski. *Zarys Teorii Grafów*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1986.
- [92] E.L. Lawler, J.M. Moore. A functional equation and its application to resource allocation and sequencing problems. *Management Science*, 16:77–84, 1969.
- [93] J.S. Lee, M. Guignard. An approximate algorithm for multidimensional zero-one knapsack problems - a parametric approach. *Management Science*, 34:402–410, 1988.
- [94] T.-E. Lee, G.-T. Oh. The asymptotic value-to-capacity ratio for the multi-class stochastic knapsack problem. *European Journal of Operational Research*, 103:584–594, 1997.
- [95] L.A. Levin. Average case complete problems. *SIAM J. Comput.*, 15:285–286, 1986.
- [96] M. Loève. *Probability Theory I*. Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1977.
- [97] A. Løkketangen, K. Jörnsten, S. Storøy. Tabu search within a pivot and complement framework. *International Transactions of Operations Research*, 1:305–316, 1994.
- [98] A. Løkketangen, F. Glover. Probabilistic move selection in tabu search for zero-one mixed integer programming problems. W: I.H. Osman and J.P. Kelly, editors, *Meta-Heuristics*, ss. 467–487. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [99] A. Løkketangen, F. Glover. Solving zero-one mixed integer programming problems using tabu search. *European Journal of Operational Research*, to appear.
- [100] G.S. Lorie, L. Savage. Three problems in capital rationing. *Journal of Business*, 28:229–239, 1955.

- [101] R. Loulou, E. Michaelides. New greedy-like heuristics for the multidimensional 0-1 knapsack problem. *Operations Research*, 27:1101–1114, 1979.
- [102] G.S. Lueker. On the average difference between the solution to linear and integer knapsack problems. W: *Applied Probability-Computer Science, the Interface, Vol 1*, ss. 489–504. Birkhauser, Basel, 1982.
- [103] M.J. Magazine, O. Oguz. A heuristic algorithm for the multidimensional zero-one knapsack problem. *European Journal of Operational Research*, 16:319–326, 1984.
- [104] J.W. Mamer, K.E. Schilling. On the growth of random knapsacks. *Discrete Applied Mathematics*, 28:223–230, 1990.
- [105] S. Martello, P. Toth. *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations*. Wiley & Sons, 1990.
- [106] M. May, K. Szkatuła. On the bipartite crossing number. *Control and Cybernetics*, 17:85–98, 1988.
- [107] M. Meanti, A.H.G. Rinnooy Kan, L. Stougie, C. Vercellis. A probabilistic analysis of the multiknapsack value function. *Mathematical Programming*, 46:237–247, 1990.
- [108] M. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *J. Chemical Physics*, 21:1087–1092, 1953.
- [109] G.L. Nemhauser, Z. Ullmann. Discrete dynamic programming and capital allocation. *Management Science*, 15:494–505, 1969.
- [110] G.L. Nemhauser, L.A. Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1988.
- [111] C.H. Papadimitriou, K. Steiglitz. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.
- [112] R.G. Parker, R.L. Rardin. *Discrete Optimization*. Academic Press, Boston, 1988.
- [113] H. Pirkul. A heuristic solution procedure for the multiconstraint zero-one knapsack problem. *Naval Research Logistics*, 34:161–172, 1987.

- [114] C.N. Potts, L.N. Van Wassenhove. Algorithms for scheduling a single machine to minimize the weighted number of late jobs. *Management Science*, 34:843–858, 1988.
- [115] A.H.G. Rinnooy Kan. Probabilistic analysis of algorithms. *Annals of Discrete Mathematics*, 31:365–384, 1987.
- [116] A.H.G. Rinnooy Kan, L. Stougie. Probabilistic analysis of algorithms. W: J.K. Lenstra, H. Tijms, T. Volgenant, editors, *Twenty Five Years of Operations Research in the Netherlands*, ss. 104–121. Math. Centrum Wish. Inform, Amsterdam, 1989.
- [117] A.H.G. Rinnooy Kan, L. Stougie, C. Vercellis. A class of generalized greedy algorithms for the multi-knapsack problem. *Discrete Applied Mathematics*, 42:279–290, 1993.
- [118] G. Rudolph, J. Sprave. A cellular genetic algorithm with self-adjusting acceptance threshold. W: *Proceedings of the First IEE/IEEE International Conference on Genetic Algorithms in Engineering Systems: Innovations and Applications*, ss. 365–372, London, 1995. IEE.
- [119] G. Rudolph, J. Sprave. Significance of locality and selection pressure in the grand deluge evolutionary algorithm. W: H.M. Voigt, W. Ebeling, I. Rechenberg, H.P. Schwefel, editors, *Parallel Problem Solving from Nature IV. Proceedings of the International Conference on Evolutionary Computation*, ss. 686–694. Springer, Lecture Notes in Computer Science, 1996.
- [120] S.K. Sahni. Algorithms for scheduling independent jobs. *Journal of ACM*, 23:116–127, 1976.
- [121] K.E. Schilling. The growth of m-constraint random knapsacks. *European Journal of Operational Research*, 46:109–112, 1990.
- [122] K.E. Schilling. Random knapsacks with many constraints. *Discrete Applied Mathematics*, 48:163–174, 1994.
- [123] S. Senju, Y. Toyoda. An approach to linear programming with 0-1 variables. *Management Science*, 15:196–207, 1968.
- [124] W. Shih. A branch and bound method for the multiconstraint zero-one knapsack problem. *Journal of the Operational Research Society*, 30:369–378, 1979.

- [125] S. Smale. On the average number of steps of the simplex method of linear programming. *Mathematical Programming*, 27:241–262, 1983.
- [126] A.L. Soyster, B. Lev, W. Slivka. Zero-one programming with many variables and few constraints. *European Journal of Operational Research*, 2:195–201, 1978.
- [127] J.M. Steele. Probabilistic and worst case analyses of classical problems of combinatorial optimization in Euclidean space. *Mathematics of Operations Research*, 15(4):749–770, 1990.
- [128] J.M. Steele. *Probability Theory and Combinatorial Optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1996.
- [129] H.I. Stern, Z. Avivi. The selection and scheduling of textile orders with due dates. *European Journal of Operational Research*, 44:11–16, 1990.
- [130] A. Straszak, M. Libura, J. Sikorski, D. Wagner. Computer-assisted constrained approval voting. *Group Decision and Negotiation*, 2:375–385, 1993.
- [131] M.M. Sysło, N. Deo, J.S. Kowalik. *Discrete Optimization Algorithms*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1983.
- [132] K. Szkatuła. Probabilistic analysis of the sequencing jobs with deadlines problem and the threshold algorithm. W: G.Menga and V.Kempe, editors, *Proceedings of the Workshop on Informatics in Industrial Automation*, ss. 113–124, Berlin, 1989.
- [133] K. Szkatuła. Analiza probabilistyczna wielowymiarowych, ograniczonych całkowitoliczbowych zadań załadunku. *Technическая Кибернетика*, 4:236–241, 1994. (w języku rosyjskim).
- [134] K. Szkatuła. On the asymptotical growth of multi-constraint entirely random knapsacks. W: *Systems Analysis and Decision Support in Economics and Technology*, ss. 299–304, Warszawa, 1994.
- [135] K. Szkatuła. On the growth of entirely random multi-constraint 0-1 knapsacks. W: *BOS 93, Trzecia Konferencja Badań Operacyjnych I Systemowych*, ss. 205–304, Warszawa, 1994.
- [136] K. Szkatuła. On the growth of multi-constraint random knapsacks with various right-hand sides of the constraints. *European Journal of Operational Research*, 73:199–204, 1994.

- [137] K. Szkatuła. Analiza średniego przypadku m-wymiarowych zadań załadunku. W: *Wspomaganie Decyzji, Systemy Eksperyckie*, ss. 195–200, Warszawa, 1995.
- [138] K. Szkatuła. The growth of multi-constraint random knapsacks with large right-hand sides of the constraints. *Operations Research Letters*, 21:25–30, 1997.
- [139] K. Szkatuła. The growth of multi-constraint random knapsacks with mixed right-hand-sides of the constraints. Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa, 1997.
- [140] K. Szkatuła. Random sequencing jobs with deadlines problem: growth of the optimal solutions values. *European Journal of Operational Research*, 109:160–169, 1998.
- [141] K. Szkatuła, M. Libura. Probabilistic analysis of simple algorithms for binary knapsack problem. *Control and Cybernetics*, 12:147–157, 1983.
- [142] K. Szkatuła, M. Libura. On probabilistic properties of greedy like algorithms for the binary knapsack problem. W: *Stochastics in Combinatorial Optimization*, Singapore, 1987. World Scientific Publishing.
- [143] J. Thiel, S. Voss. Some experiences on solving multiconstraint zero-one knapsack problems with genetic algorithms. *INFOR*, 32:226–242, 1994.
- [144] Y. Toyoda. A simplified algorithm for obtaining approximate solutions to zero-one programming problems. *Management Science*, 21:1417–1427, 1975.
- [145] A. Volgenant, J.A. Zoon. An improved heuristic for multidimensional 0-1 knapsack problems. *Journal of the Operational Research Society*, 41:963–970, 1990.
- [146] S. Walukiewicz. *Programowanie dyskretne*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1986.
- [147] B. Weide. *Statistical methods in algorithm design and analysis*. PhD thesis, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA, 1978. CMU-CS 78-142.
- [148] H.M. Weingartner. *Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems*. Markham Publishing, Chicago, 1967.

- [149] H.M. Weingartner, D.N. Ness. Methods for the solution of the multidimensional 0/1 knapsack problem. *Operations Research*, 15:83–103, 1967.
- [150] S.H. Zanakis. Heuristic 0-1 linear programming: an experimental comparison of three methods. *Management Science*, 24:91–104, 1977.
- [151] K. Zorychta, W. Ogryczak. *Programowanie liniowe i całkowitoliczbowe: metoda podziału i ograniczeń*. Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Warszawa, 1981.





IBS *Serie*

44246

Bibl. podręczna

**Analiza przypadku średniego  
w optymalizacji dyskretnej**  
Wielowymiarowe zadanie załadunku  
oraz zadanie szeregowania prac

**Krzysztof Szkatuła**

W monografii omawiane są wybrane zadania optymalizacji dyskretnej i metody ich rozwiązywania oraz problematyka analizy złożoności obliczeniowej zadań i algorytmów.

Głównym celem książki jest wykazanie, na przykładzie wielowymiarowego zadania załadunku i zadania szeregowania prac, że przy zastosowaniu niezbyt zaawansowanego aparatu rachunku prawdopodobieństwa można uzyskać wartościowe wyniki analizy przypadku średniego w optymalizacji dyskretnej.

Wyniki zaprezentowane w monografii potwierdzają, że analiza przypadku średniego jest bardzo efektywnym narzędziem wspomagającym i uzupełniającym powszechnie stosowane do analizy zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej podejście przypadku najgorszego.

**ISBN 83-85847-39-1**

**ISSN 0208-8029**

---

---

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy  
prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN  
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa  
tel. 37-35-78 w. 241 e-mail: [kotuszew@ibspan.waw.pl](mailto:kotuszew@ibspan.waw.pl)