ANALIZA SYSTEMOWA I ZARZĄDZANIE

Książka jubileuszowa
z okazji
50-lecia pracy naukowej

ROMANA KULIKOWSKIEGO

ISBN 83-85847-34-0

Druk: "ARGRAF" Agencja Poligraficzno-Wydawnicza, Warszawa
Skład: Barbara Kotuszewska

OPTYMALIZACJA NIESKOŃCZENIE WYMIAROWYCH SYSTEMÓW DYNAMICZNYCH

Henryk Górecki

Akademia Górniczo-Hutnicza

Wstęp

Opis systemu dynamicznego składa się zwykle z 3-ch zasadniczych części:

1. Modelu matematycznego rozważanego systemu
2. Ograniczeń (którym system podlega)
3. Kryterium jakości (opisującego cel działania systemu)

1. Modele rozważanych systemów

1.1. Równania różniczkowe z odchylonym argumentem - w dziedzinie zmiennej rzeczywistej reprezentującej najczęściej czas *t*.

W tej pracy będziemy korzystali z modeli stosunkowo prostej postaci

$$\sum_{i=0}^{N}[a_i\dot{\varepsilon}(t-\tau_i)+b_i\varepsilon(t-\tau_i)+\int_{-\tau}^{0}c_i\varepsilon(t+\tau_i)d\tau]=0 \qquad (1)$$

$$\varepsilon(t)\in R^n$$

przy czym a_i, b_i, c_i, są to macierze rzeczywiste odpowiednich wymiarów.

$\varepsilon(t)$ - reprezentuje błąd dynamiczny

$0=\tau_0<\tau_i<...<\tau_N=\tau$ - reprezentują opóźnienia.

Dane są warunki początkowe w postaci punktowej $\varepsilon(0)$ oraz w postaci funkcyjnej $\eta(t)$ na odcinku $(-\tau_i,0)$. W dziedzinie zmiennej zespolonej operatora „s", transformata błędu dynamicznego może mieć postać

$$E(s)=\frac{B_0(s)+B_1(s)e^{-s\tau}}{A_0(s)+A_1(s)e^{-s\tau}} \tag{2}$$

przy czym są to wielomiany operatora „s". W pracy będą również rozważane modele będące uogólnieniem zależności (2) w postaci

$$E(s)=\frac{B_0(s)+B_1(s)e^{-s\tau_1}+...+B_n(s)e^{-s\tau_n}}{A_0(s)+A_1(s)e^{-s\tau_1}+...+A_n(s)e^{-s\tau_n}} \tag{3}$$

$\tau_1,...,\tau_n>0$ mogą być niewspółmierne.

1.2. Równania różniczkowe cząstkowe

Modele w dziedzinie czasu typu

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}-a\frac{\partial^4\varepsilon}{\partial t^2\partial x^2}-b\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}=0 \tag{4}$$

z określonymi warunkami brzegowymi dla $t=0$, $x=0$ oraz $t=T$, $x=l$.

W dziedzinie zmiennej zespolonej operatora „s"

$$E(s)=\frac{B_0(s)+B_1(s)e^{-\tau q(s)}}{A_0(s)+A_1(s)e^{-\tau q(s)}} \tag{5}$$

gdzie q(s)- funkcja nieparzysta operatora „s".

Rozważane będą również uogólnienia zależności (5) typu

$$E(s) = \frac{B_0(s) + B_1(s)e^{-\tau q(s)} + ... + B_n(s)e^{-n\tau q(s)}}{A_0(s) + A_1(s)e^{-\tau q(s)} + ... + A_n(s)e^{-n\tau q(s)}} \tag{6}$$

gdzie n=1,2,... liczby naturalne.

Reasumując, uogólnienia dotyczą skomplikowanych zlinearyzowanych stacjonarnych systemów dynamicznych. Problemy otwarte dotyczą układów niestacjonarnych i/lub nieliniowych.

1.3. Ograniczenia

Rozważane w pracy ograniczenia związane są z wymaganiami dotyczącymi stabilności asymptotycznej systemów.

Spełniony zatem ma być warunek, że:

$$\lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = 0 \tag{7}$$

Prócz tego żąda się spełnienia warunków fizycznej realizowalności, to jest

$$\varepsilon(t) \equiv 0, \text{ dla } t < 0 \tag{8}$$

W związku z postacią kryterium rozważanego w pracy zakłada się by funkcje pod całką należały do klasy funkcji całkowalnych z kwadratem.

1.4. Kryteria jakości

Podstawowe kryterium jest określone w następujący sposób

$$J = \int_0^\infty \varepsilon^2(t)dt \tag{9}$$

Możliwe są uogólnienia w trzech kierunkach:

a) poprzez wprowadzenie funkcji wagi $w_i(t)$

b) poprzez wprowadzenie pod całką kwadratów pochodnych błędu $\left[\varepsilon^{(i)}(t)\right]^2$,

c) poprzez przyjęcie wyższych niż 2-ga potęg błędu $\varepsilon^k(t), k \geq 2$.

Uogólnione kryterium może mieć zatem postać następującą:

$$J = \sum_{i=0}^{m} \int_{0}^{\infty} w_i(t) \left[\varepsilon^{(i)}(t)\right]^k dt, \quad k = 2,3.... \tag{10}$$

2. Postawienie problemu

Rozwiązanie problemu obliczenia całki z kwadratu błędu w postaci analitycznej umożliwia w konsekwencji ustalenie najlepszych wartości parametrów regulatorów. W tym celu wykorzystuje się zwykle warunki konieczne dla istnienia ekstremum - różniczkując funkcję kryterialną J ze względu na parametry regulatora i przyrównując pierwsze pochodne do zera. Jest także możliwe badanie wrażliwości funkcji J ze względu na zmianę parametrów regulatora, lub też rozważanego procesu.

Rozważmy zatem całkę

$$J = \int_0^\infty \varepsilon^2(t) dt \tag{11}$$

Na podstawie twierdzenia Parsevala całka (11) może być obliczona z następującego wzoru:

$$J = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} E(s)E(-s) ds \tag{12}$$

gdzie E(s) jest transformatą Laplace'a błędu $\varepsilon(t)$.

Zakładamy następującą postać transformaty

$$E(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{13}$$

przy czym

$$\left.\begin{aligned}A(s) &= A_0(s) + A_1(s)e^{-\tau q(s)} + \ldots + A_n(s)e^{-n\tau q(s)}\\ B(s) &= B_0(s) + B_1(s)e^{-\tau q(s)} + \ldots + B_n(s)e^{-n\tau q(s)}\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$A_0(s), A_1(s), \ldots, A_n(s); B_0(s), B_1(s), \ldots, B_n(s)$ są wielomianami operatora „s”, a funkcja q(s) spełnia ważny związek:

$$q(s) = -q(-s) \tag{15}$$

Z podstawowego założenia o asymptotycznej stabilności systemu wynika, że wszystkie bieguny funkcji E(s) czyli zera funkcji A(s) leżą w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej „s”. Fakt ten, łącznie z warunkiem (15), stanowi podstawę proponowanej metody.

3. Obliczenie całki z kwadratu błędu

Podstawiając E(s) z równania (13) do związku (12) otrzymujemy, że

$$J = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{B(s)B(-s)}{A(s)A(-s)}ds \tag{16}$$

Całkę (16) przedstawimy w postaci sumy dwu całek, a mianowicie:

$$J = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{B(s)B(-s)}{A(s)A(-s)}ds = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{C(s)}{A(s)}ds + \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{C(-s)}{A(-s)}ds \tag{17}$$

Wprowadzimy następujące oznaczenia dla uproszczenia zapisu:

$$\left.\begin{aligned}e^{-\tau q(s)} &= z\\ B(-s) &= \overline{B}\\ A(-s) &= \overline{A}\\ C(-s) &= \overline{C}\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Korzystając ze związków (14) i (15) oraz oznaczeń (18) możemy iloczyn pod całką (16) przedstawić w postaci sumy:

$$\frac{B_0 + B_1 z + \ldots + B_n z^n}{A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n} \cdot \frac{\overline{B}_0 + \overline{B}_1 z^{-1} + \ldots + \overline{B}_n z^{-n}}{\overline{A}_0 + \overline{A}_1 z^{-1} + \ldots + \overline{A}_n z^{-n}} =$$

$$= \frac{C_0 + C_1 z + \ldots + C_n z^n}{A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n} + \frac{\overline{C}_0 + \overline{C}_1 z^{-1} + \ldots + \overline{C}_n z^{-n}}{\overline{A}_0 + \overline{A}_1 z^{-1} + \ldots + \overline{A}_n z^{-n}} \tag{19}$$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach „z" po obu stronach równania (19) otrzymujemy (2n+1) równań na (2n+2) niewiadomych $C_0, C_1, \ldots, C_n,; \overline{C}_0, \overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_n$.

W związku z tym, że ilość niewiadomych jest większa niż ilość równań rozwiązanie nie jest jednoznaczne, a system (19) jest nieokreślony. Z nieskończonego zbioru możliwych rozwiązań wybierzemy jedno najprostsze, korzystając z symetrii jednego z równań względem zmiennych C_i, oraz $\overline{C}_i$, Układ równań możemy zapisać w postaci macierzowej (20) i (21).

$$\left[\begin{array}{ccccc:ccccc}
A_0 & & & & & \overline{A}_n & & & & \\
A & A_0 & & & & \overline{A}_{n-1} & \overline{A}_n & & & \\
\mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{O} & & & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{O} & & \\
A_{n-1} & A_{n-2} & \mathrm{L} & A_0 & & \overline{A}_1 & \overline{A}_2 & \mathrm{L} & \overline{A}_n & \\
A_n & A_{n-1} & \mathrm{L} & A_1 & A_0 & \overline{A}_0 & \overline{A}_1 & \mathrm{L} & \overline{A}_{n-1} & \overline{A}_n \\
 & A_n & \mathrm{L} & A_2 & A_1 & & \overline{A}_0 & \mathrm{L} & \overline{A}_{n-2} & \overline{A}_{n-1} \\
 & & \mathrm{O} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & & & \mathrm{O} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\
 & & & A_n & A_{n-1} & & & & \overline{A}_0 & \overline{A}_1 \\
 & & & & A_n & & & & & \overline{A}_0
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} \overline{C}_n \\ \overline{C}_{n-1} \\ \mathrm{M} \\ \overline{C}_0 \\ C_0 \\ \mathrm{M} \\ C_{n-1} \\ C_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \overline{D}_n \\ \overline{D}_{n-1} \\ \mathrm{M} \\ \overline{D}_1 \\ D_0 \\ D_1 \\ \mathrm{M} \\ D_{n-1} \\ D_n \end{bmatrix}$$

(20)

$$\begin{bmatrix} \overline{D}_n \\ \overline{D}_{n-1} \\ \vdots \\ \overline{D}_1 \\ D_0 \\ D_1 \\ \vdots \\ D_{n-1} \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 & & & & \\ B_1 & B_0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ B_{n-1} & B_{n-2} & \cdots & B_0 & \\ B_n & B_{n-1} & \cdots & B_1 & B_0 \\ & B_n & \cdots & B_2 & B_1 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & B_n & B_{n-1} \\ & & & & B_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{B}_n \\ \overline{B}_{n-1} \\ \vdots \\ \overline{B}_1 \\ \overline{B}_0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Dalsze obliczenia przeprowadzamy wg metody zaproponowanej w [1].

Po obliczeniach nieznanych wielomianów $C_0, C_1, .., C_n$, możemy obliczyć całkę J_2 zgodnie ze wzorem (17).

$$J_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{C_0(s) + C_1(s)e^{-\tau q(s)} + ... + C_n(s)e^{-\tau n q(s)}}{|P(s)|\left[A_0(s) + A_1(s)e^{-\tau q(s)} + ... + A_n(s)e^{-\tau n q(s)}\right]} ds +$$
$$+ \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{C_0(-s) + C_1(-s)e^{\tau q(s)} + ... + C_n(-s)e^{\tau n q(s)}}{|P(-s)|\left[A_0(-s) + A_1(-s)e^{\tau q(s)} + ... + A_n(-s)e^{\tau n q(s)}\right]} ds \tag{22}$$

Ze względu na fizyczną realizowalność, oraz dla istnienia całki stopnie wielomianów $B_0(s), ..., B_n(s)$, muszą być niższe niż stopnie wielomianów $A_0(s), ..., A_n(s)$. Niech stopień wielomianu $A_0(s)$ wynosi m, wtedy stopień wielomianu $B_0(s)$ może wynosić co najwyżej m-1, a wobec tego stopień wielomianu $C_0(s)$ wynosi co najwyżej 2(m-1)-m=m-2.

Rozważmy całki

$$\int_{\gamma} \frac{C_0(s) + C_1(s)e^{-\tau q(s)} + ... + C_n(s)e^{-n\tau q(s)}}{|P(s)|\left[A_0(s) + A_1(s)e^{-\tau q(s)} + ... + A_n(s)e^{-n\tau q(s)}\right]} ds$$

$$\int_{C} \frac{C_0(-s) + C_1(-s)e^{\tau q(s)} + ... + C_n(-s)e^{n\tau q(s)}}{|P(-s)|\left[A_0(-s) + A_1(-s)e^{\tau q(s)} + ... + A_n(-s)e^{n\tau q(s)}\right]} ds$$

Kładąc $s = \mathrm{Re}^{j\phi}$ widzimy, że całki te są równe zeru na łukach, gdy $R \to \infty$, ponieważ stopnie C(s) są co najwyżej (m-2), a stopnie A(s) są równe m. Wobec powyższego możemy uzupełnić tymi całkami całki (22) bez zmiany ich wartości.

Mamy zatem

$$\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{C_0(s)+C_1(s)e^{-\tau q(s)}+\ldots+C_n(s)e^{-n\tau q(s)}}{|P(s)|\left[A_0(s)+A_1(s)e^{-\tau q(s)}+\ldots+A_n(s)e^{-n\tau q(s)}\right]}ds =$$

$$= \int \frac{C_0(s)+C_1(s)e^{-\tau q(s)}+\ldots+C_n(s)e^{-n\tau q(s)}}{|P(s)|\left[A_0(s)+A_1(s)e^{-\tau q(s)}+\ldots+A_n(s)e^{-n\tau q(s)}\right]}ds \qquad (23)$$

oraz

$$\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{C_0(-s)+C_1(-s)e^{\tau q(s)}+\ldots+C_n(-s)e^{n\tau q(s)}}{|P(-s)|\left[A_0(-s)+A_1(-s)e^{\tau q(s)}+\ldots+A_n(-s)e^{n\tau q(s)}\right]}ds =$$

$$= \int \frac{C_0(-s)+C_1(-s)e^{\tau q(s)}+\ldots+C_n(-s)e^{n\tau q(s)}}{|P(-s)|\left[A_0(-s)+A_1(-s)e^{\tau q(s)}+\ldots+A_n(-s)e^{n\tau q(s)}\right]}ds \qquad (24)$$

Do całek konturowych (23) i (24) możemy teraz zastosować twierdzenie Cauchy'ego o residuach.

Korzystając z faktu, że quasi-wielomian

$\left[A_0(s)+A_1(s)e^{-\tau q(s)}+\ldots+A_n(s)e^{-n\tau q(s)}\right]$ w mianowniku całki (23) nie ma zer w prawej półpłaszczyźnie, gdyż z założenia układ jest stabilny i podobnie quasi-wielomian $\left[A_0(s)+A_1(s)e^{\tau q(s)}+\ldots+A_n(s)e^{n\tau q(s)}\right]$ w mianowniku całki (24) nie ma zer w lewej półpłaszczyźnie możemy obliczać wartości tych całek obliczając residua w punktach s_i, które są pierwiastkami równań $|P(s)| = 0$ i $|P(-s)| = 0$. Ze względu na symetrię tych całek wystarczy podwoić wartość jednej z nich. Ostatecznie otrzymujemy, że

$$J_2 = -2 \int_{-j\infty}^{j\infty} \operatorname*{Res}_{s_i} \frac{C_0(s)+C_1(s)e^{-\tau q(s)}+\ldots+C_n(s)e^{-n\tau q(s)}}{|P(s)|\left[A_0(s)+A_1(s)e^{-\tau q(s)}+\ldots+A_n(s)e^{-n\tau q(s)}\right]}ds \qquad (25)$$

Przy czym należy wziąć pod uwagę pierwiastki (s_i) równania

$$|P(s)| = 0 \tag{26}$$

przy czym

$$P(s) = M_1(s)M_2(s) - M_3(s)M_4(s) \tag{27}$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned}
&M_1(s) = \begin{bmatrix} A_0(s) & 0 & \dots & 0 \\ A_1(s) & A_0(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n-1}(s) & A_{n-2}(s) & \cdots & A_0(s) \end{bmatrix} \qquad M_2(s) = \begin{bmatrix} A_0(-s) & A_1(-s) & \dots & A_{n-1}(-s) \\ 0 & A_0(-s) & \cdots & A_{n-2}(-s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_0(-s) \end{bmatrix} \\
&M_3(s) = \begin{bmatrix} A_n(-s) & 0 & \dots & 0 \\ A_{n-1}(-s) & A_n(-s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1(-s) & A_2(-s) & \cdots & A_n(-s) \end{bmatrix} \qquad M_4(s) = \begin{bmatrix} A_n(s) & A_{n-1}(s) & \dots & A_1(s) \\ 0 & A_n(s) & \cdots & A_2(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n(s) \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Zatem otrzymujemy wzór

$$J_2 = -2\sum_{s_i} \frac{C_0(s_i) + C_1(s_i)e^{-\tau q(s_i)} + \ldots + C_n(s_i)e^{-n\tau q(s_i)}}{\left[A_0(s_i) + A_1(s_i)e^{-\tau q(s_i)} + \ldots + A_n(s_i)e^{-n\tau q(s_i)}\right] \cdot \frac{d}{ds}|P(s)|_{s_i}} \tag{29}$$

Przykład

Rozważmy układ regulacji złożony z obiektu o transmitancji

$$G_0(s) = \frac{1}{s}e^{-as\sqrt{s^2+b^2}} \tag{30}$$

oraz regulatora proporcjonalnego o wzmocnieniu K.

Transmitancja układu zamkniętego wynosi

$$G_z(s) = \frac{\frac{K}{s}e^{-as\sqrt{s^2+b^2}}}{1 + \frac{K}{s}e^{-as\sqrt{s^2+b^2}}} \tag{31}$$

Zakładając skok jednostkowy na wejściu otrzymujemy transformatę sygnału wyjściowego w następującej postaci.

$$X(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{Ke^{-as\sqrt{s^2+b^2}}}{s + Ke^{-as\sqrt{s^2+b^2}}} \tag{32}$$

Wartość sygnału wyjściowego w stanie ustalonym wynosi

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s) = 1 \tag{33}$$

Transformata błędu

$$E(s) = \frac{1}{s}\left[1 - \frac{Ke^{-as\sqrt{s^2+b^2}}}{s + Ke^{-as\sqrt{s^2+b^2}}}\right] = \frac{1}{s + Ke^{-as\sqrt{s^2+b^2}}} \tag{34}$$

Przy przyjętych oznaczeniach mamy, że:

$$\left.\begin{aligned} B_0(s) &= 1 \\ B_1(s) &= 0 \\ A_0(s) &= s \\ A_1(s) &= K \\ q(s) &= as\sqrt{s^2+b^2} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Wielomian charakterystyczny przyjmuje postać

$$A_0(s)A_0(-s) - A_1(s)A_1(-s) = -s^2 - K^2 = 0 \tag{36}$$

mamy zatem jeden pierwiastek na dodatniej półosi urojonych $s_1 = jK$

Ostatecznie, wartość całki jest równa wg wzoru (29)

$$J=\frac{1}{4K}\cdot\frac{\cos aK\sqrt{b^2-K^2}}{1-\sin aK\sqrt{b^2-K^2}} \tag{37}$$

Analizując mianownik wyrażenia (37) znajdujemy krytyczną wartość wzmocnienia na granicy stabilności K_{kr}

$$K_{kr}\left(1-\sin aK_{kr}\right)\sqrt{b^2-K_{kr}^2}=0 \tag{38}$$

i zakres stabilności wynosi

$$0<K<K_r=\sqrt{\frac{b^2}{2}-\sqrt{\left(\frac{b^2}{2}\right)^2-\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2}},\quad \frac{b^2}{2}-\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2\geq 0 \tag{39}$$

Z relacji (37) widać, że całka J_2 osiąga minimum przy optymalnej wartości wzmocnienia K_0 określonej z warunku $\frac{\partial J}{\partial K}=0$.

Z tego warunku koniecznego otrzymujemy, że

$$\cos aK_0\sqrt{b^2-K_0^2}=aK_0\sqrt{b^2-K_0^2}\,\frac{2K_0^2-b^2}{K_0^2-b^2} \tag{40}$$

4. Uogólnienie metody na przypadek wielu różnych funkcji nieparzystych $q_1(s),\dots q_n(s)$

Każdą z funkcji $\tau_i q_i(s)$ rozwijamy w szereg Taylora uwzględniając jedynie pierwsze wyrazy rozwinięcia. Mamy zatem

$$\tau_i q_i(s)=\tau_i\beta_i s \tag{41}$$

Otrzymaliśmy układ z wieloma na ogół niewspółmiernymi opóźnieniami. Opóźnienia $\tau_i\beta_i$ uszeregujemy w następujący sposób

$$\left.\begin{array}{c} \tau_1\beta_1 = \tau + \alpha_1\tau \\ \tau_2\beta_2 = 2\tau + \alpha_2\tau \\ \vdots \\ \tau_n\beta_n = n\tau + \alpha_n\tau \end{array}\right\} \qquad (42)$$

gdzie $0 < \alpha_i < 1, \quad i = 1,2,\ldots,n$

W ten sposób otrzymaliśmy układ z wieloma współmiernymi opóźnieniami [1] z modyfikacją polegającą na tym, że wyrażenia $e^{-\alpha_i\tau s}$ są uwzględnione w wielomianach $A_i(s)$ i $B_i(s)$, $i = 1,\ldots,n$. Zamiast układu

$$\left.\begin{array}{l} A(s) = A_0(s) + A_1(s)e^{-\tau_1 q_1(s)} + \ldots + A_n(s)e^{-\tau_n q_n(s)} \\ B(s) = B_0(s) + B_1(s)e^{-\tau_1 q_1(s)} + \ldots + B_n(s)e^{-\tau_n q_n(s)} \end{array}\right\} \qquad (43)$$

otrzymujemy układ

$$\left.\begin{array}{l} A^*(s) = A_0(s) + A_1^*(s)e^{-s\tau} + \ldots + A_n^*(s)e^{-ns\tau} \\ B^*(s) = B_0(s) + B_1^*(s)e^{-s\tau} + \ldots + B_n^*(s)e^{-ns\tau} \end{array}\right\} \qquad (44)$$

Wyrażenia $\left.\begin{array}{l} A_i^*(s) = A_i^*(s)e^{-\alpha_i\tau s} \\ B_i^*(s) = B_i^*(s)e^{-\alpha_i\tau s} \end{array}\right\}_{i=1,2,\ldots,n}$ (45)

są quasi-wielomianami.

Związki dla układów z wieloma opóźnieniami pozostają w mocy lecz równanie charakterystyczne.

$$P(s) = 0 \qquad (46)$$

gdzie

$$P(s)=\left|\begin{bmatrix} A_0(s) & 0 & \cdots & 0 \\ A_1^*(s) & A_0(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n-1}^*(s) & A_{n-2}^*(s) & \cdots & A_0(s) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A_0(-s) & A_1^*(-s) & \cdots & A_{n-1}^*(-s) \\ 0 & A_0(-s) & \cdots & A_{n-2}^*(-s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_0(-s) \end{bmatrix}+\right.$$

$$\left.-\begin{bmatrix} A_n^*(-s) & 0 & \cdots & 0 \\ A_{n-1}^*(-s) & A_n^*(-s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^*(-s) & A_2^*(-s) & \cdots & A_n^*(-s) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A_n^*(s) & A_{n-1}^*(s) & \cdots & A_1^*(s) \\ 0 & A_n^*(s) & \cdots & A_2^*(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n^*(s) \end{bmatrix}\right| \tag{47}$$

nie jest już równaniem algebraicznym lecz przestępnym. W celu usunięcia tej trudności zastosujemy aproksymację Padé do funkcji $e^{-\alpha_i \tau s}$

$$e^{-\alpha_i \tau s}=\frac{1-\frac{\alpha_i \tau s}{2}}{1+\frac{\alpha_i \tau s}{2}} \quad i=1,\dots,n \tag{48}$$

lub

$$e^{-\alpha_i \tau s}=\frac{1-\frac{\alpha_i \tau s}{2}+\frac{\alpha_i^2\tau^2 s^2}{12}}{1+\frac{\alpha_i \tau s}{2}+\frac{\alpha_i^2\tau^2 s^2}{2}} \quad i=1,\dots,n \tag{49}$$

Po podstawieniu wyrażeń (48) i (49) do związków (45) i (46) otrzymujemy nowe wielomiany wyższego stopnia w porównaniu do $A_i(s)$ lecz równanie charakterystyczne (46) będzie znów wielomianem. Dalsze postępowanie przebiega już zgodnie z procedurą określoną dla funkcji współmiernych.

Literatura

1. Górecki H., Korytowski A.: *Advances in Optimization and Stability Analysis of Dynamical Systems*, AGH Kraków, 1993.

ISBN 83-85847-34-0