Przyczynek do hipotezy o pochodzeniu komet.

Stosowanie teorji prawdopodobieństwa do zagadnień przyrodniczych staje się coraz bardziej metodą na dobie. Jeśli tylko mamy do czynienia z większą ilością przedmiotów, można zawsze spodziewać się, że porównanie stosownie przeprowadzonej statystyki z rezultatami teoretycznemi, osiągniętemi przez rozważania prawdopodobieństwa, dadzą wynik, jeżeli nie wyjaśniający zagadnienie, to przynajmniej dający pewne, mniej lub więcej ciekawe oświetlenie.

W niniejszym artykule chcemy się zająć spadaniem komet na słońce.

Kwestja ta, pozornie bardzo oderwana, daje jednak pogląd na pochodzenie komet, przez co staje się aktualną i budzi zainteresowanie nie tylko z punktu widzenia matematyki, ale i astronomji.

Dane o kometach, które na ziemi w ciągu całej ery historycznej były widziane i obserwowane, pouczają nas, że wszystkie odległości przysłoneczne tych komet są większe od promienia słońca, a nawet, z wyjątkiem kilku, znacznie większe. Fakt ten nie jest oczywisty. Odległość przysłoneczna nie jest bynajmniej wielkością, dającą się bezpośrednio mierzyć. Wielkość ta jest rezultatem rachunkowym, wynikającym ze znajomości położeń komet zarówno przed, jak i po przejściu przez punkt przysłoneczny.

Fakt ten nie oznacza niczego innego, jak tylko, że historja astronomji nie zna ani jednej komety, którąby spadła na tarczę słoneczną; i dziwnym się może wydawać, wobec znacznych w porównaniu z systemem planetarnym rozmiarów słońca, że żadna kometa w wędrówce swej na słońce nie natrafiła. Jedynym sposobem zorjentowania się w tej sprawie jest obliczenie prawdopodobieństwa spadnięcia komety na słońce. Zgodność lub niezgodność rezultatu rachunku z rzeczywistością rzucić może pewne światło na porobione przez nas założenia, jak również na samo pochodzenie komet.

Przypuśćmy więc, że komety są to drobne skupienia materji, rozrzucone zupełnie przypadkowo we wszechświecie, przytym prędkości ich są też zupełnie przypadkowe.

Wyobraźmy sobie dalej, że w pewnej chwili w tę zadymkę kometarną wstawiamy słońce i że od tej chwili zacznie działać przyciąganie Newtonowskie. Oczywiście, że prostolinjowe dotąd drogi komet staną się krzywemi stopnia drugiego. Przy tych warunkach pewna ilość komet spadnie na słońce.

Żeby obliczyć prawdopodobieństwo, trzeba znać ilość wypadków możliwych i korzystnych. Korzystnemi będą te komety, które na słońce spadną. Możliwemi zaś bynajmniej nie będą „wszystkie“ komety*), a jedynie te, które z ziemi spostrzeżone być mogą, innemi słowy komety „widzialne“.

Wiemy, że nieliczne tylko komety mają odległość przysłoneczną większą, niż 2 jednostki astronomiczne**).

Jeżeli więc warunek widzialności wyrazimy przez założenie, że odległość przysłoneczna musi być mniejsza niż 4 jednostki astronomiczne, to niewątpliwie wszystkie komety „widzialne“ uwzględnimy.

Zagadnienie nasze formułujemy więc w następujący sposób.

Przypuszczając, że komety były początkowo rozsiane w przestrzeni zarówno co do położenia, jak i prędkości według praw losu, zapytujemy: jaki odsetek komet o odległości przysłonecznej mniejszej, niż promień sfery widzialności q_1, będzie miał odległość przysłoneczną mniejszą, niż promień słońca q_0.

Uprzedzając rozwiązanie zagadnienia, twierdzimy, że odsetek ten wyrazi się przez związek

$$100\sqrt{q_0/q_1}\,,$$

lub też prawdopodobieństwo, że jedna z widzialnych komet spadnie na słońce, wyrazi się przez

$$\sqrt{q_0/q_1}\,.$$

Wzór ten jest bardzo charakterystyczny i ilustruje wpływ przyciągania słonecznego; istotnie gdyby go nie było, kwestja spadnięcia redukowałaby się do prawdopodobieństwa trafienia do tarczy podczas strzelania z odległego punktu, które to prawdopodobieństwo wyraża się przez wzór

$$q^2_0/q^2_1\,.$$

Zajmijmy się dowodem twierdzenia.

Zakładamy, że pewna kometa w chwili początkowej znajduje się w odległości R od słońca, prędkość jej tworzy z promieniem wodzącym kąt β, a co do wartości bezwzględnej równa się v. Z danych tych łatwo obliczyć odległość przysłoneczną.

Jeżeli $F(v)dv$ jest prawdopodobieństwem, że prędkość komety jest zawarta między granicami v i $v+dv$, to przez wzór

$$\tfrac{1}{2}F(v)\sin\beta\, dv d\beta$$

wyrazi się prawdopodobieństwo, że prędkość leży w granicach v i $v+dv$, a jednocześnie kąt (R, v) zawarty jest w granicach β i $\beta+d\beta$.

Wyrażenie więc

---

*) Jeśli brać pod uwagę „wszystkie“ komety, prawdopodobieństwo spadnięcia na słońce będzie $1:\infty$.

**) Jednostka astronomiczna = średniej odległości ziemi od słońca

$$\left[\int\int \tfrac{1}{2}F(v)\sin\beta dv d\beta\right] \begin{matrix}\beta=0 \ldots \pi\\ v=0 \ldots \infty\end{matrix}$$

da nam całkowitą liczbę komet, wychodzących z danego punktu, zaś

$$I(q_1)=\left[\int\int \tfrac{1}{2}F(v)\sin\beta dv d\beta\right] q<q_1$$

całkowitą liczbę komet o odległości przysłonecznej mniejszej niż q_1.

Poszukiwane prawdopodobieństwo wyrazi się więc przez

$$P=\frac{I(q_0)}{I(q_1)}.$$

Nieznaną nam funkcję $F(v)$ określmy w sposób następujący. Niechaj wszystkie prędkości aż do pewnej w będą jednakowo prawdopodobne, komety zaś o prędkości początkowej większej niż w nie istnieją.

Mamy więc

$$\int_0^\infty F(v)dv=1 \text{ (definicja prawdopodobieństwa)}$$

$$\int_0^w F(v)dv+\int_w^\infty F(v)dv=1$$

$$\int_w^\infty F(v)dv=0\,; \text{ więc o ile } v<w, \text{ to}$$

$$F(v)=\frac{1}{w}.$$

Pozostaje nam teraz ustalić granice całkowania.

Ze znanych związków ruchu Keplerowskiego mamy

$$e^2=1-\frac{p}{a} \;{}^{*)}$$

$$q=a(1-e)$$

$$v^2=k^2\left(\frac{2}{R}-\frac{1}{a}\right) \text{ (zasada energji)}$$

$$Rv\sin\beta=k\sqrt{p} \text{ (zasada pól).}$$

---

*) e—mimośród.
p—parametr.
a—połowa wielkiej osi.
q—odległość przysłoneczna.
k—stała grawitacji Gaussa.
R—odległość komety od słońca (promień wodzący).

Przez kolejne rugowanie otrzymamy

$$q=\frac{R}{2-R\left(\frac{v}{k}\right)^2}\left\{1-\sqrt{1-\left[2-R\left(\frac{v}{k}\right)^2\right]R\left(\frac{v}{k}\right)^2\sin^2\beta}\right\}.$$

Całkowanie powinno się odbywać wewnątrz obszaru $q \leqq q_1$. Zbadajmy więc krzywe $q=\text{const.}$ w płaszczyźnie v, β. Przez podniesienie do kwadratu i skrócenie przez $2-R\left(\frac{v}{k}\right)^2$, otrzymujemy

$$2q^2-R\left(\frac{v}{k}\right)^2 q^2-2qR+R^3\left(\frac{v}{k}\right)^2\sin^2\beta=0$$

skąd $$\sin^2\beta=\frac{1}{R^3\left(\frac{v}{k}\right)}\left\{2qR+R\left(\frac{v}{k}\right)^2 q^2-2q^2\right\}$$

oraz $$\left(\frac{v}{k}\right)^2=\frac{R^3\sin^2\beta-Rq^2}{2q(R-q)};$$

ponieważ muszą zachodzić nierówności $0 \leqq \sin^2\beta \leqq 1$, oraz $0 \leqq \left(\frac{v}{k}\right)^2$, więc zachodzą też nierówności

$$(R+q)\left(\frac{v}{k}\right)^2 \geqq \frac{2q}{R},\quad |\sin\beta| \geqq \frac{q}{k}.$$

Widać też, że zachodzi

$$\frac{d}{d\beta}\left(\frac{v}{k}\right)^2=-\frac{2q(R-q)R^3\sin 2\beta}{(R^3\sin^2\beta-Rq^3)^2};$$

Związki te wyrażają następujące własności krzywej, ograniczającej obszar całkowania:

I. Krzywa ta jest symetryczną względem prostej $\beta=\pi$.

II. Leży ona całkowicie ponad prostą $\frac{v}{k}=\sqrt{\frac{2a}{R(R+q)}}$ i staje się styczną do tej prostej w punktach $\beta=\frac{\pi}{2}$ i $\beta=\frac{3}{2}\pi$.

III. Krzywa ta jest tylko tam rzeczywistą, gdzie $|\sin\beta| \geqq \frac{q}{R}$.

IV. Między punktami 0 i $\frac{\pi}{2}$ oraz π i $\frac{2}{3}\pi$ krzywa maleje, między zaś $\frac{\pi}{2}$ i π oraz $\frac{3}{2}\pi$ i 2π krzywa rośnie.

V. Krzywa jest wszędzie jednoznacznie określona, gdyż gałęź $v<0$ nie ma sensu.

Żeby zamknąć nasz obszar, przeprowadzamy następujące proste

$$v=0,\ v=w,\ \beta=0,\ \beta=2\pi.$$

Ponieważ z komet oddalających się $\left(\frac{\pi}{2}<\beta<\beta\frac{3}{2}\pi\right)$ tylko eliptyczne mogą się znów zbliżyć do słońca, więc musimy w okolicach punktu $\beta=\pi$ przeciągnąć prostą $\frac{v}{k}=\sqrt{\frac{2}{R}}$. Jestto oczywiste, gdy zważymy, że prędkość komet eliptycznych musi spełniać nierówność

$$\frac{v}{k}<\sqrt{\frac{2}{R}}\,.$$

Po tym szczegółowym omówieniu obszaru całkowania przystąpimy do samego całkowania. Ze względu na symetrję wystarczy ograniczyć nasz obszar do połowy, poprzestając mianowicie na $\beta\leqq\pi$.

Rozbijmy naszą całkę na 3 części

$$\tfrac{1}{2}I(q)=\int\limits_0^{\beta_1}\sin\beta d\beta\int\limits_0^{w}\frac{1}{w}\,dv+\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2}\sin\beta d\beta\int\limits_0^{k\sqrt{\frac{2q(R-q)}{R^3\sin^2\beta-Rq}}}\frac{1}{w}\,dv+\int\limits_{\beta_2}^{\pi}\sin\beta d\beta\int\limits_0^{k\sqrt{\frac{2}{R}}}\frac{1}{w}dv$$

We wzorze tym β_1 i β_2 oznaczają wielkości, które mamy wyznaczyć z równań

$$\sin^2\beta_1=\frac{1}{R^3\left(\frac{w}{k}\right)^2}\left\{2qR+R\left(\frac{w}{k}\right)^2q^2-2q^2\right\},$$

$$\beta_1<\frac{\pi}{2},$$

$$\sin^2\beta_2=\frac{q}{R},\ \beta_2>\frac{\pi}{2};$$

Otrzymujemy więc

$$\tfrac{1}{2}I=(1-\cos\beta_1)+\frac{k}{w}\sqrt{\frac{2q(R-q)}{R^3}}\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{\sin\beta d\beta}{\sqrt{\sin^2\beta-\left(\frac{q}{R}\right)^2}}+(1+\cos\beta_2)\frac{k}{w}\sqrt{\frac{2}{R}}\,.$$

Ponieważ w rachunku tym R jest wielkością dużą (np. Laplace'owskim promieniem sfery przyciągania słonecznego 100.000 jedn. astr.), q zaś i w są w porównaniu do R wielkościami niewielkiemi, zarówno więc $\sin\beta_1$, jak $\sin\beta_2$ są wielkościami małemi.

Możemy więc przyjęć; że $1-\cos\beta_1=0$, oraz $\frac{k}{w}\sqrt{\frac{2}{R}}(1+\cos\beta_2)=0$.

Pozostaje więc

$$\tfrac{1}{2}I=\frac{k}{w}\sqrt{\frac{2q(R-q)}{R^3}}\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{\sin\beta d\beta}{\sqrt{\sin^2\beta-\left(\frac{q}{R}\right)^2}}\,.$$

Uwzględniając po raz wtóry, że $\frac{q}{R}$ jest małe, otrzymamy na I wzór następujący

$$\tfrac{1}{2}I=\frac{k}{w}\sqrt{\frac{2q}{R^2}}(\beta_2-\beta_1)=\frac{k}{w}\sqrt{\frac{2q}{R^2}}\pi\,.$$

Poszukiwane prawdopodobieństwo wyrazi się więc przez

$$P=\frac{I(q)}{I(q)}=\sqrt{\frac{q_0}{q_1}}$$

co było do okazania.

Rezultat ten jest niezależny od górnej granicy w; dałby się więc pewnie uogólnić i na inne kształty funkcji F (v).

Wstawiając dane liczbowe: $q_0=\frac{1}{200}$ (promień słońca), $q_1=4$ (granica widzialności komet), otrzymamy wartość liczbową na P.

$$P=\sqrt{\frac{1}{800}}=\frac{1}{28}\,.$$

Co dwudziesta ósma kometa powinna spadać na słońce. Tak jednak nie jest. Dotychczas znanych komet jest około 400. Z tych, chcąc być bardzo skrupulatnym, należy odrzucić te komety, które zostały odkryte po przejściu przez punkt przysłoneczny, a więc nie podpadają pod nasz teoretyczny rachunek.

Tych komet jest mniej więcej 33%. Z pozostałych 267 powinnoby 7 spaść na słońce. Wiemy, że nie spadła żadna. Rachunek nasz jest matematycznie poprawnym, błąd więc powinien leżeć w założeniach.

Musimy mieć do czynienia nie z zadymką kometarną; widziane komety są prawdopodobnie stałemi towarzyszami słońca. Drogi ich powinniśmy uważać za wydłużone elipsy, spotykaną zaś hiperboliczność tłomaczyć perturbacjami planetarnemi (E l l i s S t r ö m g r e n).

Hipoteza o przynależności komet do systemu słonecznego nie jest nową. Analogiczne stosowanie teorji prawdopodobieństwa do innych zagadnień o kometach było dokonywane przez Laplace'a, Gaussa, a w nowszych czasach przez Seeligera i Fabry'ego. W rozważaniach tych chodziło o prawdopodobieństwo komet hiperbolicznych, i podobnież, jak w naszym przypadku natrafiano na niezgodność praktyki z teorją, którą to niezgodność usuwano jedynie przez hipotezę o przynależności komet do naszego systemu.

Również brak wpływu ruchu własnego słońca na rozmieszczenie punktów przysłonecznych komet każe uważać komety za naszych stałych towarzyszy w wędrówce kosmicznej.

Monachjum. *Janina i Kazimierz Jantzenowie.*
