O pracach matematycznych H. Poincarégo.

Od czasu do czasu zjawiają się ludzie nieskończenie wyżsi ponad poziom myślicieli swojej epoki. Takim mocarzem był H. Poincaré. Władną myślą ogarnął tak wiele, sięgnął tak głęboko, że pracy paru pokoleń nie starczy, by wydobyć na jaw ogrom bogactw zawartych w jego dziełach. Tak szczodrze sypał pomysłami, że na opracowanie ich dokładne czasu nieraz nie starczyło, pomimo tytanicznej pracy, którą liczyć trzeba na 495 prac i artykułów. Dawał więc nie tylko dzieła skończone, ale i szkice, rzuty naprędce skreślone, niby w gorączce twórczej. Nikt dziś ogarnąć nie zdoła całości, ocenić całkowitej spuścizny którą nam zostawił przedwcześnie wydarty nauce gienjusz. Bardzo niewielu zdołało zgłębić poszczególne działy jego pracy. Toteż celem tego artykułu jest przedstawić tylko to, co stało się klasycznym, dorobkiem powszechnym, co weszło w obieg ogólny dzisiejszej myśli naukowej. Zadanie jest ułatwione dzięki temu, iż istnieją liczne prace, rozwijające w formie przystępnej pomysły Poincarégo; wystarczy wymienić książkę Kleina o funkcjach automorficznych, wykłady Humberta o grupach automorficznych; niektóre rozdziały „Traité d'Analyse" Picarda, (t. III, rozdział I, II, VIII i IX), o rozwiązaniach perjodycznych i o rozwiązaniach asymptotycznych niektórych równań różniczkowych oraz o punktach osobliwych funkcji, które są całkami rzeczywistemi równań różniczkowych pierwszego rzędu. Teorja szeregów asymptotycznych wyłożona jest w „Leçons sur les séries divergentes" Borela, a w „Leçons sur les fonctions entières" tegoż autora mamy obraz obecnego stanu teorji funkcji całkowitych, której zaczątkiem była krótka rozprawa Poincarégo w „Bulletin de la S. M. de France" (1883).

Prace z teorji funkcji.

Pierwsze miejsce należy się bezsprzecznie teorji funkcji automorficznych i związanych z niemi równań różniczkowych linjowych, gdyż one chronologicznie pierwsze zwróciły uwagę świata naukowego na ich autora; na tym polu pokazał odrazu pełną miarę sił swoich, gienjusz jego zabłysnął w całej mocy.

Wiek XIX znamionuje świetny rozwój teorji funkcji; ważnym było zwłaszcza wprowadzenie pojęcia funkcji analitycznej przez rozszerzenie pola zmiennej i wprowadzenia zmiennej zespolonej na płaszczyźnie. W ten tylko sposób udało się objaśnić najważniejsze, a najbardziej skryte własności funkcji, związane przeważnie z istnieniem punktów tak zwanych osobliwych. Tak np. gdy okrążamy pewne punkty osobliwe, zwane krytycznemi, może się zdarzyć, że funkcja przybiera inne wartości, naprzykład zwiększa się o ilość stałą za każdym powrotem do tego samego punktu po okrążeniu punktu krytycznego. Jeśli teraz funkcję odwrócimy, t. j. zmienną i funkcję zamienimy rolami, owa tylko co określona ilość stała będzie okresem, t. j. funkcja się nie zmieni, jeśli do zmiennej dodamy tę ilość stałą albo jej wielokrotność. W ten sposób dochodzimy do określenia pewnych funkcji okresowych i podwójnie okresowych, zwanych trygonometrycznemi i eliptycznemi. Teorja tych funkcji opracowana była oddawna i bardzo dokładnie; najważniejszemi z odkrytych własności były: twierdzenie o dodawaniu, analogiczne dla funkcji eliptycznych do podobnego twierdzenia dla funkcji trygonometrycznych, następnie podwójna okresowość, wreszcie związek ich z pewnemi całkami, z których powstają drogą „odwrócenia", jak to było objaśnione poprzednio. Otóż Poincaré jednym rzutem myśli przeniósł te wszystkie pomysły do całkiem nowej dziedziny, do całkowania równań różniczkowych linjowych przez uogólnienie pojęcia podwójnej okresowości i przez rozszerzenie tego, co rozumieć należy przez „odwrócenie".

Funkcje perjodyczne czyli okresowe są to funkcje spełniające warunek $f(z)=f(z+w)$ t. j. nie ulegające zmianie, jeśli zmienną „z" poddamy podstawieniu $(z,\ z+w)$. Funkcje podwójnie okresowe są to funkcje, spełniające warunki $f(z)=f(z+w_1)=f(z+w_2)$ t. j. nie ulegające zmianie, jeśli zmienną poddamy podstawieniom: $(z,\ z+w_1)$ i $(z,\ z+w_2)$; do funkcji podwójnie okresowych należą funkcje eliptyczne. Podstawieniem najogólniejszym tego typu, co podstawienie $z'=z+w$, jest podstawienie t. zw. linjowe $z'=\frac{az+b}{cz+d}$, przyczym a, b, c, d mają spełniać warunek $ad-bc=1$; podstawienie to wyrażamy symbolicznie tak: $\left(z,\ \frac{az+b}{cz+d}\right)$. Podstawienia linjowe tworzą grupę, t. j. dwa po sobie następujące podstawienia linjowe stanowią jedno podstawienie wypadkowe tego samego typu. Jeżeli zmienną „z" przedstawimy sposobem zwykłym na płaszczyźnie, to podstawienie linjowe każdemu punktowi podporządkowuje punkt tejże płaszczyzny i ta odpowiedniość jest jedno-jednoznaczną. Własnością zasadniczą podstawień linjowych jest to, że każde koło przekształca się na koło. Otóż funkcjami automorficznemi są funkcje, które spełniać mają warunek $f(z)=f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$ t. j. są to funkcje nie ulegającą zmianie, jeśli zmienną poddamy podstawieniom linjowym pewnej grupy. Przed pojawieniem się pracy Poincarégo znane już były poszczególne przypadki takich funkcji, mianowicie funkcje modułowe, odpowiadające podstawieniom grupy modułowej $\left(z,\ \frac{az+b}{cz+d}\right)$, gdzie a, b, c, d są to liczby całkowite dodatnie, spełniające warunek $ad-bc=1$, i funkcje trójkątne Schwartza. Zagadnienie ogólne rozpada się na dwa. Po pierwsze należy zbadać, jakim warunkom powinny zadośćczynić podstawienia $z'=\frac{az+b}{cz+d}$, aby mogła odpowiadać im funkcja jednowartościowa, i zbadać odpowiedniość, jaką ustanawia pomiędzy różnemi częściami płaszczyzny; powtóre należało podać metodę tworzenia owych funkcji zapomocą wzorów analitycznych. Oba te zagadnienia rozwiązał Poincaré całkowicie w całym szeregu notatek w Comptes Rendus i w Acta Mathematica t. I, III, IV i V (1882—1884).

Grupy podstawień linjowych mogą zawierać skończoną lub nieskończoną ilość podstawień. Grupa zawierająca nieskończoną ilość podstawień może posiadać tę własność, iż są w niej podstawienia, które przekształcają każdy punkt płaszczyzny na punkt dowolnie bliski; mówimy wtedy, że grupa posiada podstawienia nieskończonostkowe.

Aby ta okoliczność zachodzić nie mogła, trzeba i wystarcza, aby istniała liczba α, ($\alpha \neq 0$) taka, że dla wszystkich podstawień grupy nigdy nie są spełnione jednocześnie wszystkie cztery nierówności $|a-1|<\alpha$, $|b|<\alpha$, $|c|<\alpha$, $|d-1|<\alpha$. Tylko w wypadku, gdy warunek ten jest spełniony, może być mowa o funkcji, która nie zmienia się dla wszystkich podstawień grupy. W przeciwnym bowiem razie, t. j. gdy grupa zawiera podstawienia nieskończonostkowe, funkcja analityczna jej odpowiadająca musiałaby przyjmować tę samą wartość w punktach nieskończenie bliskich, t. j. funkcja $f(z)-f(z_0)=0$ zmiennej z musiałaby posiadać nieskończenie wiele zer w otoczeniu dowolnego punktu z_0, co jest niemożliwe, o ile ta funkcju $f(z)$ nie jest ilością stałą.

Rozważmy grupy złożone z przeliczalnej mnogości podstawień, które można otrzymać wszystkie przy pomocy podstawień zasadniczych w liczbie skończonej. Jeśli grupa nie zawiera podstawień nieskończonostkowych, to może się okazać, iż płaszczyzna zmiennej zespolonej z rozdzieli się na pewną liczbę pól skończonych lub nieskończonych, które przekształcają się nawzajem za pomocą podstawień grupy. Jedna z takich części może się dzielić na nieskończoną liczbę obszarów w ten sposób, że kiedy punkt z przebiega ten obszar, punkt przekształcony przy pomocy podstawienia grupy przebiega inny obszar, który możemy nazwać kongruentnym z pierwszym. Każdemu obszarowi odpowiada wtedy podstawienie grupy; linja oddzielająca dwa sąsiednie (przyległe) obszary, nazywa się bokiem. Te boki są po dwa ze sobą sprzężone, t. j. odpowiednie podstawienie grupy przekształca punkty jednego na punkty drugiego; punkt przecięcia się dwuch boków kolejnych nazywa się wierzchołkiem obszaru.

W punktach sobie odpowiadających dwuch obszarów kongruentnych funkcja $f(z)$ przyjmuje, wedle założenia, te same wartości. Wystarczy więc znać podział płaszczyzny zmiennej zespolonej na obszary kongruentne i wartości funkcji dla punktów jednego tylko obszaru, a wtedy znane nam będą własności funkcji dla całego zakresu jej istnienia. W poszczególnych wypadkach mamy do czynienia z faktami znanemi; np. funkcja okresowa przyjmuje te same wartości w punktach odpowiednich, które wszystkie leżą na jednej prostej w równej od siebie odległości (równej okresowi). Płaszczyzna dzieli się na pasy równe i równoległe, które stanowią podział na obszary kongruentne odpowiadające podstawieniom grupy, utworzonej z podstawień $z'=z+w$. Jeśli funkcja jest podwójnie okresowa, odpowiada jej grupa, utworzona z podstawień: $z'=z+w$ i $z'=z+w'$; podział zaś płaszczyzny w tym wypadku na obszary kongruentne otrzymamy, prowadząc dwa szeregi równooddalonych od siebie linji równoległych, przytym punkty przecięcia się którejkolwiek z linji pierwszego szeregu z którąkolwiek linją drugiego dają nam wierzchołki obszarów. W ten sposób cała płaszczyzna pokrywa się siecią równoległoboków przystających do siebie. W każdym z tych równoległoboków funkcja podwójnie perjodyczna w punktach sobie odpowiadających przyjmuje te same wartości. Boki równoległe każdego z tych równoległoboków są po dwa ze sobą sprzężone, t. j. odpowiadają podstawieniom tworzącym $z'=z+w$, $z'=z+w'$. Znajomość jednego równoległoboku prowadzi do podziału całej płaszczyzny na równoległoboki kongruentne i pozwala określić podstawienia tworzące, a więc i grupę temu podziałowi odpowiadającą. Otóż Poincaré udowodnił, że gdy spółczynniki a, b, c, d są liczbami rzeczywistemi, zamiast równoległoboków mamy wielokąty, ograniczone okręgami lub łukami okręgów kół. Mamy wtedy podział płaszczyzny na wielokąty kongruentne. Jeśli znamy jeden taki wielokąt (początkowy albo tworzący) i rozkład boków jego na pary boków sprzężonych, to grupa jest określoną, gdyż podstawieniami zasadniczemi są te, które przekształcają obszar początkowy na obszary sąsiednie do niego przylegające, a więc przekształcają każdy z boków na bok względem niego sprzężony. Wszystkie te podstawienia zostawiają niezmienną oś zmiennej rzeczywistej.

Podstawienia linjowe, któreśmy tylko co określili, są najprostsze ze wszystkich; w najogólniejszym przypadku, grupa zawiera podstawienia, których spółczynniki a, b, c, d są liczbami zespolonemi. Poincaré rozróżnia dwa rodzaje grup: grupy najogólniejsze, które zawierają podstawienia o spółczynnikach a, b, c, d zespolonych i które nazywa grupami Kleina*), i powtóre, grupy Fuchsa. Te ostatnie składają się właśnie z podstawień, dla których oś liczb rzeczywistych jest niezmiennikiem, jak to było wyjaśnione powyżej, lub też podstawień, które nie zmieniają pewnego stałego koła. Te ostatnie podstawienia T' powstają z podstawień T o spółczynnikach rzeczywistych przez skombinowanie ich z pewnym określonym podstawieniem S o spółczynnikach zespolonych, a mianowicie przez przekształcenie ich za pomocą podstawienia S; jeśli pierwsza grupa składa się z podstawień T, to grupa przekształcona składać się będzie z podstawień $T'=STS^{-1}$. Okrąg koła, który zostaje niezmiennym przy przekształceniach T' jest to właśnie koło, na które przekształca się oś liczb rzeczywistych, gdy do niej zastosujemy przekształcenie S; Poincaré nazywa je kołem zasadniczym (cercle fondamental). Określenie wszystkich grup Fuchsa sprowadza się więc do odnalezienia wszystkich możliwych podziałów półpłaszczyzny lub wnętrza koła na wieloboki kongruentne, ograniczone łukami kół, ortogonalnych do osi lub ewentualnie do koła zasadniczego. W przypadku najogólniejszym grup Kleina mamy zadanie podobne, ale tyczące się przestrzeni nie zaś płaszczyzny: chodzi o podział regularny na wielościany sferyczne.

*) Nazwa ta mało jest używana obecnie. Utarła się wprowadzona przez Kleina nazwa grup automorficznych.

Grupy Fuchsa a gieometrja nieeuklidesowa.

W badaniach swoich posiłkował się Poincaré stale jako środkiem pomocniczym gieometrją nieeuklidesową, której pojęcia i metody okazały tak wielką pomoc, iż im właśnie należy zawdzięczać formę wykończoną i ostateczną, jaką nadał Poincaré swojej teorji.

Dostrzeżenie głębokiej analogji, jaka istnieje pomiędzy podstawieniami linjowemi a ruchami w gieometrji nieeuklidesowej, pomiędzy grupami tych podstawień a grupami złożonemi z przesunięć i obrotów w przestrzeni nieeuklidesowej, jest dowodem gienjalnej przenikliwości ich twórcy. Dzięki tej analogji uzyskaliśmy odrazu nić przewodnią, chwytamy intuicyjnie i pojmujemy zależności, których uzasadnienie ścisłe wynika skądinąd na drodze bardzo zawiłych rachunków. Z poprzednich rozważań wynika, że zbadanie grup Fuchsa sprowadza się do poznania własności pewnego podziału półpłaszczyzny lub koła na wieloboki, ograniczone łukami kół ortogonalnych. Otóż okazuje się, że własności tych łuków są identyczne z własnościami, które gieometrja Łobaczewskiego przypisuje linjom prostym. Analogja sięga jednak daleko głębiej. Tak np., wieloboki kongruentne są sobie równe z punktu widzenia gieometrji Łobaczewskiego, zatym podstawienie linjowe zmienia tylko położenie figury na płaszczyźnie, ale nie zmienia jej kształtów w tej nowy interpretacji. W celu uzyskania jaknajwiększej prostoty, możemy wprowadzić inną jeszcze interpretację, mianowicie gieometrję hiperboliczną na stożkowej rzeczywistej (absolut Cayley'a), chociaż tą interpretacją, o ile wiadomo, nie posługiwał się Poincaré bezpośrednio. Każda prosta płaszczyzny przecina stożkową w dwuch punktach, które są rzeczywistemi, urojonemi sprzężonemi lub zlewającemi się; te dwa punkty M i N nazwijmy punktami zasadniczemi dla danej prostej. Otóż odległością dwuch punktów A i B na tej prostej nazwiemy liczbę proporcjonalną do logarytmu dwustosunku (stosunku anharmonicznego) czterech punktów A, B, M i N; współczynnik proporcjonalności powinien być ustalony raz na zawsze. Odległość w tym znaczeniu oznaczać będziemy symbolem LAB, mamy więc $LAB = klg\left\{\frac{AM}{AN} : \frac{BM}{BN}\right\}$. Podobnież dla kątów. Z każdego punktu płaszczyzny można poprowadzić dwie styczne do stożkowej absolutnej; te dwie styczne będą prostemi zasadniczemi dla gieometrji pęku prostych, wychodzących z tego punktu; kąt dwuch promieni określamy przy pomocy logarytmu stosunku anharmonicznego pęku czterech promieni, które się utworzą, gdy przez wierzchołek kąta poprowadzimy dwie styczne, czyli proste zasadnicze. Łatwo sprawdzić, że te określenia zadość czynią warunkowi zasadniczemu dodawania odcinków na

---

*) $LAB = klg\frac{AM \,.\, BN}{AN \,.\, BM}$, $LBD = klg\frac{BM \,.\, DN}{BN \,.\, DM}$, $LAB + LBD = klg\frac{AM \,.\, BN}{AN \,.\, BM} +$
$+ klg\frac{BM \,.\, DN}{BN \,.\, DM} = klg\frac{AM \,.\, BN \,.\, BM \,.\, DN}{AN \,.\, BM \,.\, BN \,.\, DM} = klg\frac{AM \,.\, DN}{AN \,.\, DM} = LAD$.

prostej i kątów. Np., jeśli A, B, D są trzema punktami na prostej, oczywiście $LAB+LBD=LAD$*); tak samo dla kątów. Jeśli punkt A lub B dąży do punktów zasadniczych M lub N, długość LAB rośnie nieograniczenie. Gdy dwie proste MN i MP przecinają się na stożkowej absolutnej w punkcie M, to kąt jaki ze sobą tworzą, jest równy zeru i o tych prostych powiemy, że są do siebie równoległe. Z tego wynika, iż przez punkt (np. E) można poprowadzić dwie równoległe do prostej i nieskończoną ilość prostych nie przecinających jej. Wystarczy dla poprowadzenia tych równoległych do prostej MN połączyć punkt E z punktami M i N, w których dana prosta przecina stożkową graniczną (absolutną); wszystkie proste, poprowadzone przez punkt E zostały tym sposobem podzielone na dwie klasy: te, które spotykają prostą MN, i te, które jej nie spotykają; pierwsze zawarte są w kącie AEB, drugie zaś w kącie AED—wynik zgodny w zupełności z zasadami gieometrji Łobaczewskiego.

Ruchem nazwiemy wszelkie przekształcenie, które nie zmienia ani długości, ani kątów (w znaczeniu tylko co przez nas określonym). Wystarczy w tym celu rozpatrzeć ogół wszystkich przekształceń homograficznych, czyli jednokreślnych, które nie zmieniają stożkowej zasadniczej. W tym przekształceniu, jak wiemy, prostej odpowiada prosta, a ponieważ przekształcenia jednokreślne nie zmieniają wartości dwustosunku czterech punktów ani pęku czterech prostych, więc oczywiście ani długości, ani kąty nie zmienią się. Np. prosta MN, na której mamy dwa punkty A i B, przekształci się na prostą M_1, N_1, punkty zaś A i B staną się punktami A_1 i B_1. Atoli będzie zawsze: $LAB=LA_1B_1$. Chodzi więc o to, czy takie przekształcenia homograficzne istnieją. Nie trudno przekonać się, iż tak jest w istocie. Niechaj $z_1z_3-z^2{}_2=0$ będzie równaniem stożkowej zasadniczej w spółrzędnych trójkątnych, przytym trójkąt odniesienia utworzony jest z dwuch stycznych i z cięciwy, łączącej punkty styczności.

Łatwo sprawdzić, że podstawienie: (Σ) $z'_1=\alpha^2z_1+2\alpha\beta z_2+\beta^2z_3$, $z'_2=$ $=\alpha\gamma z_1+(\alpha\beta+\beta\gamma)z_2+\beta\delta z_3$, $z'_3=\gamma^2z_1+2\gamma z_2+\delta^2z_3$ nie zmienia stożkowej, gdyż zachodzi istotnie tożsamość: $z'_1z'_3-z_2'^2=(z_1z_3-z^2{}_2)(\alpha\beta-\delta\gamma)^2$. Przekształcenia te, jako nie zmieniające stożkowej, tworzą, oczywiście, grupę i, jak łatwo sprawdzić, przekształcają punkty wewnętrzne w punkty wewnętrzne, punkty zaś zewnętrzne w punkty zewnętrzne. W jaki sposób podstawienia te przekształcają punkty na stożkowej? Zauważmy, iż spółrzędne punktów na stożkowej można wyrazić przy pomocy pewnego parametru pomocniczego ζ, mianowicie zakładając, że $\frac{z_2}{z_3}=\zeta$, $\frac{z_1}{z_3}=\zeta^2$. Każdemu punktowi odpowiada pewna wartość ζ; każdej zaś wartości parametru odpowiada, odwrotnie, jeden tylko punkt na stożkowej. Zagadnienie sprowadza się do określenia, jakie podstawienie ma miejsce dla parametru ζ, gdy wykonamy owo przesunięcie, odpowiadające przekształceniu (Σ). Okazuje się, iż ζ podlega podstawieniu linjowemu typu $\zeta'=\frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}$. Rzeczywiście, niechaj punkt (z'_1, z'_2, z'_3) odpowiada punktowi (z_1, z_2, z_3) w podstawieniu (Σ), gdy tymczasem ζ' odpowiada ζ. Mamy wtedy $\zeta'=\frac{z'_2}{z'_3}=\frac{\alpha^2\zeta^2+2\alpha\beta\zeta+\beta^2}{\alpha\gamma\zeta^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)\zeta+\beta\delta}=\frac{(\alpha\zeta+\beta)^2}{(\alpha\zeta+\beta)(\gamma\zeta+\delta)}=\frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}$. Właściwie tylko w wypadku, gdy $\alpha\delta-\beta\gamma>0$ mamy przesunięcie, czyli ruch we właściwym znaczeniu, bo wypadek, gdy $\alpha\delta-\beta\gamma<0$ odpowiada przesunięciu w połączeniu z przekształceniem przez symetrję względem prostej. Przekształcenia pierwszego typu tworzą grupę, przekształcenia zaś drugiego typu nie; będziemy mieli grupę dopiero wtedy, gdy rozpatrywać będziemy podstawienia jednego i drugiego typu łącznie. Słowem rzecz się ma zupełnie tak samo, jak dla przesunięć i symetrji w gieometrji euklidesowej. Z tej odpowiedniości, jaka istnieje między grupą ruchów na płaszczyźnie nieeuklidesowej, a grupą podstawień linjowych, wynikają ważne wnioski. Jak to zobaczymy poniżej, można ściśle udowodnić zapomocą pewnej określonej odpowiedniości (E), że zbadanie i określenie wszystkich grup Fuchsa podstawień linjowych sprowadza się do wykrycia wszystkich możliwych podziałów płaszczyzny (lub ewentualnie przestrzeni) na obszary sobie równe w znaczeniu gieometrji Łobaczewskiego. Z jednego obszaru tworzącego powinniśmy otrzymać wszystkie inne w ten sposób, aby wypełnić niemi całą płaszczyznę (lub ewentualnie całą przestrzeń) bez luk żadnych i bez fałdów. Obszar zasadniczy czyli tworzący powinien być tak dobraną figurą gieometryczną, aby po przesunięciu jej otrzymane obszary sąsiednie przystawały szczelnie do siebie. Zadanie to łatwo jest rozwiązać dla gieometrji zwyczajnej. Np., równoległobok, sześciokąt foremny posiadają tę własność; mianowicie, możemy zapomocą którejkolwiek z tych figur wyłożyć t. j. wybrukować płaszczyznę, jak to widzimy np. na posadzkach mozajkowych. Dla płaszczyzny (ewentualnie przestrzeni) nieeuklidesowej zagadnienie to jest nieco bardziej złożone, jednakowoż posługiwanie się tym punktem widzenia ułatwia znakomicie orjentację.

Grupa ruchu na płaszczyźnie uieeuklidesowej.

W gieometrji zwykłej dwie figury równe posiadają środek obrotu, t. j. przystają do siebie, jeśli wykonamy pewien obrót lub jeśli jedną z figur przesuniemy równolegle do siebie. W najprostszym wypadku dwiema figurami równemi mogą być dwa odcinki równe. To samo ma miejsce dla naszych odcinków, których długość określamy przy pomocy logarytmu podziału anharmonicznego. Niechaj np., AB i A_1B_1 będą równemi odcinkami; znaczy to, iż dwustosunki $\frac{MA}{NA}:\frac{MB}{NB}$ i $\frac{M_1A_1}{N_1A_1}:\frac{M_1B_1}{N_1B_1}$ są sobie równe. Istnieje przekształcenie jednokreślne, które prostą MN przekształca w prostą M_1N_1, tak że punkty M, N, A i M_1, N_1 i A_1 stanowią dwie trójki punktów sobie odpowiadających; wtedy na zasadzie równości podziałów anharmonicznych $(M, N, A, B)=(M_1, N_1, A_1, B_1)$, punkty B i B_1 będą też punktami sobie odpowiadającemi. To przekształcenie jednokreślne można uważać za pewien obrót na płaszczyźnie; wiadomo mianowicie, że przekształcenie jednokreślne posiada trzy punkty podwójne, z których dwa w naszym przypadku znajdują się na stożkowej absolutnej, trzeci zaś może być nazewnątrz niej, na niej, lub wewnątrz niej. Otóż ten trzeci punkt podwójny jest środkiem obrotu, jak to wynika z określenia kąta. Gdy środek obrotu jest wewnątrz stożkowej, mamy coś zupełnie analogicznego do obrotów dokoła punktu w gieometji zwykłej; gdy środek obrotu znajduje się na stożkowej, mamy właściwie przesunięcie równoległe, trzeci zaś wypadek, gdy środek obrotu jest nazewnątrz stożkowej, jest bez wszelkiej analogji w gieometrji zwykłej. Mamy tu do czynienia z nowym składnikiem, wzbogacającym grupę ruchu, tak że przy jego pomocy możemy otrzymać kombinacje nowe; tej to okoliczności przypisać należy rozmaitość rozwiązań, które otrzymujemy w zadaniu o wybrukowaniu płaszczyzny nieeuklidesowej wielobokami równemi; po części przyczynia się też do tego i ta okoliczność, że suma kątów wieloboku nie jest równa ściśle $2d(n-2)$. Tak np., wnętrze stożkowej zasadniczej możemy podzielić na równe części za pomocą pęku promieni, tworzących ze sobą kąty (w znaczeniu przez nas określonym) równe. Jeśli wierzchołek pęku znajduje się wewnątrz stożkowej, to pęk zawiera skończoną ilość n siecznych, tworzących ze sobą kąty $\frac{2\pi}{n}$, jeśli zaś wierzchołek pęku leży na stożkowej albo nazewnątrz niej, możemy poprowadzić nieograniczoną ilość siecznych i sieczne te zagęszczają się coraz bardziej, gdy zbliżamy się do stycznej lub stycznych, ponieważ pomiędzy ostatnią z przeprowadzonych siecznych, a styczną istnieje zawsze nowe położenie siecznej. W ten sposób w pierwszym wypadku mamy podział na skończoną, w drugim — na nieskończoną ilość równych sobie części. Podział płaszczyzny euklidesowej na nieskończoną ilość części za pomocą szeregu prostych, przecinających się najwyżej w jednym punkcie, możliwy jest tylko w przypadku, gdy proste są równoległe, tu zaś widzimy, że proste mogą nie być równoległemi.

Podział płaszczyzny zmiennej zespolonej na obszary kongruentne.

Rozważania poprzednio przytoczone mają charakter tylko pomocniczy, gdyż właściwym celem naszym jest podział płaszczyzny zmiennej zespolonej na obszary kongruentne, t. j. odpowiadające sobie przy przekształceniach linjowych pewnej grupy podstawień. Otóż cel ten jest osiągnięty, albowiem istnieje bardzo prosta odpowiedniość dwujednoznaczna pomiędzy punktami wewnętrznemi stożkowej absolutnej, a punktami na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Odpowiedniość tę ustalić możemy w następujący sposób: równanie stożkowej absolutnej jest $z_1 z_3 - z^2{}_2 = 0$; każdemu jej punktowi (z_1, z_2, z_3) odpowiada pewna wartość parametru ζ, i odwrotnie. Z dowolnego punktu M można poprowadzić dwie styczne do elipsy; niech ζ_1 i ζ_2 oznaczają wartości parametru ζ dla punktów styczności; gdy punkt jest wewnątrz stożkowej, wartości ζ_1 i ζ_2 są liczbami zespolonemi ze sobą sprzężonemi, Na płaszczyźnie zmiennej zespolonej „ζ", odpowiadają im dwa punkty P i P' symetryczne względem osi liczb rzeczywistych. Gdy punkt M leży na stożkowej, odpowiadające im punkty P i P' schodzą się ze sobą na osi liczb rzeczywistych. Punktom zewnętrznym stożkowej odpowiada para punktów na osi liczb rzeczywistych. Ponieważ wewnętrzna część stożkowej jest obrazem całej płaszczyzny nieeuklidesowej, więc ostatni z wymienionych przypadków odpowiedniości zgoła nas nie obchodzi. Tylko co określoną odpowiedniość między punktami wewnętrznemi elipsy, a płaszczyzną zmiennej zespolonej nazwijmy odpowiedniością (E).

Własności jej są następujące: 1) Cięciwom stożkowej absolutnej odpowiadają na płaszczyźnie ζ okręgi kół ortogonalnych do osi liczb rzeczywistych; dla wszystkich tych kół średnicą jest zawsze odcinek osi liczb rzeczywistych *). 2) Grupie ruchów (obrotów i przesunięć) wewnątrz stożkowej odpowiada grupa podstawień linjowych $\zeta' = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$, $(ad - bc = 1)$, jak to widzieliśmy poprzednio. 3) Przekształcenia (E) nie zmieniają kątów, co należy rozumieć w ten sposób, iż kąt, określony jako logarytm dwustosunku pęku czterech prostych, równa się odpowiadającemu mu istotnemu kątowi na płaszczyźnie zmiennej ζ **).

Z tych trzech własności wynika, że wielobokom równym, ograniczonym odcinkami prostych wewnątrz stożkowej, odpowiadają na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wieloboki kongruentne, ograniczone łukami kół ortogonalnych do osi liczb rzeczywistych, po jednemu z każdej jej strony. Aby odpowiedniość (E) była jedno—jednoznaczną, należy się ograniczyć do połowy płaszczyzny, leżącej np. ponad osią liczb rzeczywistych. Wystarczy teraz kierować się stale analogją, jaka istnieje dzięki odpowiedniości (E) pomiędzy wybrukowaniem płaszczyzny wewnątrz stożkowej wielobokami równemi, a podziałem płaszczyzny zmiennej zespolonej ζ na obszary kongruentne. Kształt wieloboku zasadniczego rozstrzyga, oczywiście, czy można wybrukować nim płaszczyznę bez luk i fałdów, czy też nie. Ponieważ zaś znamy wszystkie podstawienia grupy, jeśli znamy rozkład wieloboków na płaszczyźnie, mamy więc w ręku klucz do zbadania, jakim warunkom zadość czynić powinny podstawienia grupy, aby grupa była ciągłą. Podstawienia, odpowiadające wielobokom przyległym do wieloboku zasadniczego, są to ruchy, które trzeba wykonać, aby wielobok zasadniczy przenieść na miejsce wieloboku sąsiedniego; podstawienia te nazwane zostały podstawieniami tworzącemi grupy. Z ich kombinacji powstają wszystkie podstawienia grupy, gdyż każdy wielobok przyległy można traktować jako wielobok zasadniczy, i od niego przejść kolejno

---

*) Równanie stycznej do stożkowej zasadniczej jest $z_1 - 2\zeta z_2 + \zeta^2 z_3 = 0$. Istnieją więc dwie styczne, przechodzące przez punkt z_1, z_2, z_3, a parametry ζ_1 i ζ_2 punktu styczności są pierwiastkami tylko co napisanego równania, stąd $\zeta_1 + \zeta_2 = \frac{2z_2}{z_3}$, $\zeta_1\zeta_2 = \frac{z_1}{z_3}$, tak iż zachodzi proporcja: $z_1 : z_2 : z_3 = \zeta\zeta_1 : \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2} : 1$. Prosta $a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 = 0$ przekształci się więc na krzywą, której równanie jest $a_1\zeta_1\zeta_2 + a_2\frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2} + a_3 = 0$, lecz kładąc $\zeta_1 = x + iy$, $\zeta_2 = x - iy$, mamy $a_1(x^2 + y^2) + a_2 x + a_3 = 0$, t. j. równanie koła ortogonalnego.

**) Chociaż przekształcenie (E) nie jest homograficzne, jednak styczne do krzywych, przechodzących przez ten sam punkt, podlegają przekształceniu homograficznemu. Ponieważ styczne określają kąt dwuch krzywych, a dwie proste zasadnicze stają się prostemi przechodzącemi przez punkta kołowe urojone, więc wynika stąd oczywiście, że kąt nie zmienia się przy przekształceniu (E).

do wieloboków sąsiadujących przez powtarzanie tych samych podstawień. Jeśli więc wielobok zasadniczy otoczyć się daje wielobokami przyległemi bez luk i fałdów, nie spotkamy już żadnej trudności przy tworzeniu dalszych obszarów. tak że pewna określona część płaszczyzny zwartą masą da się pokryć siecią wieloboków. Można więc łatwo określić warunki, którym powinien zadość czynić wielobok zasadniczy, np. co do kątów przy wierzchołkach i t. d., a następnie od tych warunków tyczących się kształtu wieloboku przejść do rozkładu jego boków na pary boków kongruentnych, wreszcie i do warunków, którym zadość czynić powinny podstawienia tworzące. Na tej podstawie oparł Poincaré klasyfikację grup Fuchsa, które podzielił na siedem rodzin. W dalsze szczegóły wchodzić tu nie możemy.

Znany jest dowcipnie przez Poincarégo obmyślany przykład świata, w którym panują takie warunki fizyczne, np. termiczne, iż ciała przy poruszeniach kurczą się w odpowiedni sposób; gieometrja, którą się posługują mieszkańcy tego świata, jest gieometrją Łobaczewskiego. Możemy więc powiedzieć, że inżenierowie, ba, nawet robotnicy, którzy brukują chodniki na ulicach tego świata, powinni znać teorję grup automorficznych, albo raczej posługują się nią bezwiednie!

W celu badania grup automorficznych najogólniejszych, należy się posługiwać odpowiedniością w przestrzeni pomiędzy punktami wewnętrznemi elipsojdy a całą przestrzenią, albo też częścią jej, ograniczoną płaszczyzną; w pierwszym przypadku odpowiedniość jest dwu—, w drugim jedno—jednoznaczną. Obszar zasadniczy w tym wypadku, o ile istnieje, jest ograniczony nieskończoną ilością łuków kół, albo też krzywą nieanalityczną, dla której promień krzywizny nie istnieje.

Po zbadaniu grup automorficznych ciągłych i odpowiadającego każdej grupie podziału półpłaszczyzny lub koła, pozostało, przeprowadzając w dalszym ciągu analogję pomiędzy funkcjami automorficznemi a podwójnie okresowemi, zdefinjować i dać wyrażenie analityczne dla funkcji należących do każdej z tych grup. Otóż w teorji funkcyj eliptycznych wielkie usługi oddają tak zwane funkcje „theta", które wprawdzie nie są okresowe, lecz mają tę własność, że dodanie okresu do zmiennej nadaje funkcji nową wartość, która równa się poprzedniej, pomnożonej przez funkcję wykładniczą. Funkcje te wprowadził Jacobi, określiwszy je za pomocą bardzo prostych szeregów; funkcje eliptyczne określić można jako stosunki dwuch odpowiednio dobranych funkcji „theta".

Tą samą drogą szedł i Poincaré; zbudował on szeregi zbieżne w ten sposób, że odrazu z samego ich kształtu wywnioskować można było bezpośrednio, że posiadają własność podobną do tej, która cechuje funkcje „theta" eliptyczne. Są one kształtu

$$\theta(z) = \Sigma\, H\left(\frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right) \frac{1}{(c_i z + d_i)^{2m}}, \quad (m > 1)$$

gdzie suma rozciąga się na wszystkie podstawienia grupy i gdzie H oznacza funkcję wymierną; szeregi te określają funkcje, które Poincaré nazywa funkcjami theta-fuchsowemi. Funkcje te zadość czynią własności wyrażonej przez wzór

$$\theta\left(\frac{a_k z + b_k}{c_k z + d_k}\right) = \theta(z) \cdot \frac{1}{(c_k z + d_k)^{2m}}, \text{ gdzie } \left(z, \frac{a_k z + b_k}{c_k z + d_k}\right)$$

jest którymkolwiek z podstawień należących do danej grupy.

Stosunek dwuch funkcji theta-fuchsowych tego samego rzędu „m“ określa nową funkcję, która pozostaje niezmienną dla wszystkich podstawień grupy; są to funkcje automorficzne. Dwie funkcje automorficzne, odpowiadające tej samej grupie, są zawsze związane ze sobą równaniem algiebraicznym.

(Dokończenie nastąpi). *Juljusz Rudnicki.*