Dr. A. Łomnicki. Gieometrja. Podręcznik dla szkół średnich. Stopień wyższy. Część III i IV. Trygonometrja. Gieometrja analityczna. Str. 302. Lwów. Gubrynowicz i Syn. 1912. Cena 3 kor. 80 hal.

Pomimo wszystko nasza literatura podręcznikowa matematyczna rozwija się. Ukazywać się zaczynają od czasu do czasu czy to oryginalnie napisane książki czy też przekłady, które świadczą, że racjonalne poglądy metodyczne przenikają do umysłów, że piszący umieją już odróżnić dwa pojęcia: zespół systematyczny faktów nauki i metodę ich przedstawienia.

Proste to napozór odróżnienie, jednakże bardzo powoli, jak wskazuje doświadczenie, podlega procesowi uświadamiania. Fakty, pozostając faktami, zmieniają się zależnie od punktu widzenia naukowego, a metoda może być modyfikowana przy zachowaniu warunku liczenie się z rozwojem myślenia uczących się i pojmowania tego rozwoju przez nauczycieli. Stan obecny nauki wpływać głęboko winien na nauczanie, ale nie w taki sposób, jak sądzą czasem ci, którzy chcieliby nieraz prawie żywcem przetransponować mimo słownych zastrzeżeń krytycyzm spółczesnej myśli matematycznej do klas, gdzie się uczą dzieci. Umiejętne powiązanie tych dwuch rzeczy stanowi zadanie dydaktyki, zadanie bardzo trudne.

Nie można się dziwić wobec tego, że dobrych książek jest zawsze niewiele. Podręcznik pod powyżej zaznaczonym tytułem, możemy to odrazu zaznaczyć, należy do książek lepszych. Odpowiedniejszego podręcznika szkolnego z dziedziny w nim omawianej nie mamy. Wobec tego warto przyjrzeć mu się nieco bliżej. Książka, jak to zresztą widocznym jest z samego tytułu,

www.rcin.org.pl

podzielona na 2 części: trygonometrję i początki gieometrji analitycznej oraz rachunków wyższych. Możnaby spierać się w kwestji potrzeby takiego podziału i wzajemnego ustosunkowania obu części. Podział taki widocznie usprawiedliwiony jest wobec wymagań programów szkół zaboru austryjackiego, ale tę sprawę jako w danym przypadku znacznie mniej ważną pozostawiamy na uboczu, a zapoznamy się po kolei z każdą z tych części zosobna. Jedno tylko trzeba odrazu nadmienić o całości; autor stosował w niej osobliwie w części pierwszej nieraz dobrze, czasem mniej szczęśliwie metodę gienetyczną wykładu, zrywając w tym względzie z tradycją, a zadośćczyniąc naprawdę istotnym potrzebom nauczania. Jest to zaleta książki pierwszorzędna, która ją stawia odrazu na wyższym poziomie dydaktycznym.

Przejdziemy teraz do części pierwszej. Wychodząc z potrzeby rozwiązywania zagadnień, nastręczanych przez życie i myśl naukową, autor wskazuje drogę powstawania trygonometrji, potrzebę jej i znaczenie naukowe. Dalej zaczyna od trójkąta prostokątnego, nadmieniwszy, że zagadnienia o rozwiązywaniu trójkątów wogóle dadzą się sprowadzić do rozwiązania trójkąta prostokątnego. Bliższa analiza zależności pomiędzy elementami trójkąta prostokątnego doprowadza do wniosku, że brakuje jeszcze jednej zależności, a poszukiwanie tej ostatniej doprowadza do rozpatrywania kątu ostrego i początkowego pojęcia o funkcji sinus i obliczenia niektórych jej wartości. Na str. 7 znajdujemy tabliczkę wartości funkcji sinus. Ta ostatnia pozwala autorowi zwrócić uwagę uczącego się na to, że sinus nie rośnie proporcjonalnie do wzrastania kąta, a także umożliwia wykres ćwiartki fali sinusojdy. Dalej następują zastosowania do rozwiązywania trójkątów prostokątnych, gdzie jeszcze równorzędnie autor używa twierdzenia Pitagorasa. Dalej po ćwiczeniach na str. 13 wprowadza funkcję cosinus, wskazuje na przebieg jej zmienności, na zależności pomiędzy nią a funkcją sinus, również podaje wykres w związku z poprzednim, na str. 16 podaje szczęśliwie pomyślaną tabliczkę wartości funkcji wspomnianych w sposób zwykle w tablicach używany, ale dzięki prostocie układu bardzo jasny i dla ucznia zrozumiały. Po zastosowaniach i ćwiczeniach w § 5 w ten sam sposób wprowadzona zostaje funkcja tangens, potym (§ 6) cotangens i pozostałe funkcje. Dalej mamy zestawienie zależności poznanych (§ 7), systematyczne rozwiązywanie trójkątów prostokątnych (§ 8), wartości funkcji trygonometrycznych dla małych kątów (§ 9), zadania sprowadzające się do rozwiązania trójkąta prostokątnego (§ 10) i drobnym drukiem (rzecz poznawanana przy powtórzeniu kursu) o kartach gieograficznych (§ 11). W § 10 autor robi przejście do rozwiązywania trójkątów ukośnokątnych i wzbudza na przykładach poczucie potrzeby wprowadzenia pojęcia funkcji kątów rozwartych. Znaczna liczba ćwiczeń uzupełnia ten rozdział, nad którym zatrzymaliśmy się dłużej dlatego, że właściwie pierwsze poczętki wykładu stanowią wszędzie niemal rzecz najtrudniejszą i bodaj najgłówniejszą.

Czytelnik widzi już z tego, że autor traktuje rzecz gienetycznie, że stara się wprowadzić nowe pojęcie nie jak Deus ex machina, ale w związku z rozwojem myślenia nad przedmiotem, z samej natury przedmiotu Rozdział ten świadczy o dobrym przemyśleniu rzeczy, pomimo to jednak, zdaniem moim, są w nim pewne uchybienia, łatwe zresztą do poprawienia w nowym wydaniu. Trygonometrja, może najlepiej ze wszystkich innych działów matema-

www.rcin.org.pl

tyki szkolnej, nadaje się do wyjaśnienia samego pojęcia funkcji. Z tego powodu należałoby już na początku, gdy autor szuka związku między bokami a kątami trójkąta, pojęcie to wyjaśnić, zdefinjować i następnie wykazać, że sinus, cosinus i t. d. spełniają definicję. Na str. 6 autor powiada: „wartość stosunku a i c zależy tylko od kąta α, czyli jest funkcją kąta α“. Popierwsze, pojęcie funkcji jest szersze niż możnaby wywnioskować z tego wysłowienia, wszak mogą być funkcję kilku zmiennych; po-drugie co to znaczy słowo „zależy“?

Dla nas jest ono zupełnie jasne, uczeń który przeczyta i pojmie poprzedzające rozumowanie autora będzie wiedział, że każdej wartości kątu odpowiada określona wartość sinusa, ale byłoby z punktu wiedzenia dydaktycznego lepiej, gdyby autor wyraźnie to zaznaczył w określeniu pojęcia funkcji. Gdyby autor zwrócił na tę stronę rzeczy większą uwagę, wyjaśniłby bodaj najkrócej, nietylko z gotowej tabliczki, że gdy kąt rośnie, rośnie również i sinns. Dla funkcji tangens było to na str. 4 pokazane, dlaczegoż nie zrobiono tego dla funkcji sinus, o której przecie na pierwszych stronicach głównie mowa. Dalej lepiej byłoby również wykazać dokładniej, nie tylko z tablicy, że sinus nie wzrasta proporcjonalnie do kąta (np. zad. 14 na str. 18 mogłoby dać asumpt do tego). To nie jest drobiazg: uczniowie niemal odruchowo gmatwają te rzeczy. Uwaga na str. 9 o linji prostej (wiersz 11-ty od dołu), będzie jasna tylko dla tego ucznia, który zna graficzne przedstawienie funkcji $y=ax$. To samo dotyczy innych funkcji. Zwykle zaczynamy od wyjaśnienia pojęć o funkcjach sinus i cosinus. Niektórzy na razie poprzestają na tym i dopiero w dalszych rozdziałach wprowadzają pojęcie pozostałych funkcji, określając je za pomocą dwuch poprzednich. Można również wychodzić z samej funkcji tangens i potym określić inne za pomocą niej. Autor idzie zwykłą drogą i z tego mu zarzutu robić nie można, ale należałoby cokolwiek wyraźniej zaznaczyć p o t r z e b ę wprowadzenia tylu funkcji. Do tego przydałoby się twierdzenie Pitagorasa, gdyby autor wcześniej niż na str. 22 w przykładzie pierwszym zaznaczył: „unikniemy zupełnie niewygodnego do rachunku twierdzenia Pitagorasa“, jeżeli wprowadzimy funkcję „sinus kąta dopełniającego albo cosinus tego samego”. W dalszych rozdziałach wskazujemy na to, że dopiero znajomość dwuch funkcji: cosinus i sinus wyznacza kąt w pierwszej ćwiartce; tutaj posługujemy się implicite zależnością $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, którą należałoby przyjąć za jedną podstawę definicji, gdyby wychodzono w systematycznym wykładzie z definicji funkcji, co oczywiście jest możliwe w teorji a nie w szkole. Dalej, zgodnie z duchem wykładu autora, możnaby zaznaczyć, że ominięcie równania $a^2+b^2=c^2$ da się wykonać jeszcze w inny sposób i następnie wprowadzić tangens. Uwagi powyższe, zdaniem moim, mogłyby udoskonalić gienetyczną metodę stosowaną z powodzeniem przez autora. Już na początku autor używa miary łukowej kąta, ale obszerniej o tym nigdzie nie mówi, co nie jest słuszne wtedy, gdy uczeń, jak to u nas bywa, o tej tak ważnej mierze dokładniej poprzednio się nie dowiedział. Nadmienię tu jeszcze o jednej drobniejszej sprawie. Na str. 20 słusznie zaznaczono, że „niewłaściwie piszą czasem tg $90^0=\infty$“. Każdy matematyk przyklaśnie intencji autora, ale niewiem czy każdy się zgodzi, gdy na str. 37 w wierszu 10-ym z dołu autor pisze: „w języku Hindusów cięciwa=dziwa“ i t. d. Znak równości wobec braku umowy tu również nie jest dobrze zastosowany.

www.rcin.org.pl

W rozdziale II-im podane są na początku nowe określenia ogólne funkcji trygonometrycznych, np. „sinus kąta jestto stosunek rzędnej do promienia wodzącego“ (str. 55). Skonstatowowszy dalej, że między funkcjami zachodzą te same zależności, o których była mowa poprzednio, i podawszy tabliczkę znaków w różnych ćwiartkach, autor wprowadza koło trygonometryczne i przy jego pomocy wyjaśnia okresowość funkcji oraz daje pojęcie o kątach ujemnych, przyczym w następnym paragrafie (13), korzystając z miary łukowej, przedstawia graficznie równanie $y=\sin x$, a następnie (§ 15) inne równania. W § 14 mowa o t. zw. wzorach redukcyjnych, które potraktowane są dość pobieżnie: np. nic nie powiedziano dokładniej o funkcjach kątów $180+\alpha$, $270\pm\alpha$, jakkolwiek rzecz to nie małej wagi i dla dokładnego zbadania przebiegu zmienności funkcji, i dla celów praktycznych, np. dla równań trygonometrycznych. Nie znajdujemy w podręczniku należytego starania przy dawaniu o g ó l n e j odpowiedzi na zadania takiego np. typu: „$\sin x=\frac{1}{2}$, jakie odpowiadają mu łuki“? Rozwiązywanie ogólne (jedyne zresztą poprawne) takich zadań ma wielką wartość, każe uczniowi dokładnie zdawać sobie sprawę z przebiegu zmienności funkcji, a przytym wcale nie jest trudne. Przy wyprowadzaniu wzorów redukcyjnych dobra byłaby metoda ogólna, niezależna od rozpatrywania tych lub innych trójkątów, a dająca się zastosować przy wszelkich wartościach kąta. Taka metoda, oparta na obracaniu osi, tymbardziej dałaby się zastosować, że autor przy graficznym przedstawieniu posługuje się podobnym sposobem, np. przy wykreślaniu $y=\operatorname{ctg}x=-\operatorname{tg}(90^0+x)$ (str. 67). Być może, że przeoczenie, które znajdujemy w wierszu 4-ym na str. 86 przy rozwiązaniu równania $\operatorname{ctg}x-\cos x=1-\sin x$ pochodzi stąd, że autor wogóle mało zwraca uwagi na ogólne odpowiedzi. Pierwiastek $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ równaniu zadość czyni, a kąt, który w tym przypadku daje rozwiązanie jest $k\pi+(-1)^k\frac{5\pi}{4}$. Poprzednie rozwiązania też nie są słuszne. Np. dla $\sin x=$ $=+\frac{1}{\sqrt{2}}$, autor pisze $x=45^0$, $45^0\pm360,\ldots,45^0\pm n360$, co nie jest słuszne, gdyż 45^0 i 45^0-360^0 nie są przedewszystkiem różnemi rozwiązaniami, a powtóre, pominięte zostało istotnie różne $x=135^0$. Wzór powinien być $x=$ $=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{4}$. Autor bardzo właściwie nadmienia na str. 58 o tym, że każdy kąt ujemny można zamienić na dodatni, posiadający te same funkcje, z czego wynika ułatwienie tworzenia ogólnych wzorów, przy których trzeba brać pod uwagę cały okres funkcji, a więc cały okrąg. Przy rozwiązywaniu równań trygonometrycznych należałoby przedewszystkim zwrócić uwagę na najprostsze, np. $\cos x=\sin x$, bo tylko wtedy uczeń zacznie wprawnie dawać odpowiedzi.

Twierdzenie o dodawaniu funkcji trygonometrycznych wyprowadzone zostało na zasadzie twierdzeń elementarnych z teorji rzutów prostokątnych, jak to czyni Borel. Metoda dobra i przejrzysta, ale wymaga gruntownego zapoznania się z wzorami redukcyjnemi. Autor, uwzględniwszy jeszcze w rozdziale poprzednim własności kątów małych, w obecnym daje przystępnie, zwięźle

www.rcin.org.pl

i jasno pojęcie o sposobie obliczania funkcji trygonometrycznych, wychodząc z nierówności $x > \sin x > x - \frac{x^3}{4}$. Swoją drogą, należałoby parę uwag poświęcić przyczynie, dla której targens jest czulszy na zmianę kąta, i podać, w jaki sposób należy prowadzić obliczenia przy kątach małych i blizkich do 90^0, jeżeli używamy zwyczajnych tablic. Zwrócę tu jeszcze uwagę w tym rozdziale na parę drobnych kwestji. Na str. 73 podane są wzory $\sin\gamma = \frac{2t}{1+t^2}$ i $\cos\gamma = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Dobrze byłoby, gdyby wzory te związano z trójkątami prostokątnemi o bokach wymiernych (wzory Platona). Na str. 83 w zadaniu 42 b) jest błąd. Powinno być $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$. Na str. 84 powiedziano o równaniach trygonometrycznych: „Równania takie posiadają nieskończenie wiele rozwiązań, są więc równaniami przestępnemi“. Nie jest to ściśle wyrażone.

Rozdział III autor poświęca właściwej trygonometrji, nie starając się o często spotykaną u nas drobiazgowość, nadającą szczegółom zbyt wielkie znaczenie. W § 29, oznaczonym gwiazdką i przeznaczonym dla szkół realnych, mówi o podziale anharmonicznym i podaje w formie trygonometrycznej stosunek podziału podwójnego. Muszę tu jednakże zaznaczyć, że w rozdziale tym przydałoby się zwrócenie uwagi na dyskusję przy rozwiązywaniu zadań. Autor to czyni przy zadaniu III-im klasycznym, ale tego za mało. Jest wielką wadą naszego nauczania, że tę stronę rzeczy pomijamy milczeniem, czego nie robią np. francuzi, gdzie dyskusja zajmuje bardzo wybitne miejsce w nauczaniu. W rozdziale tym, jak również w poprzednich, znajdujemy sporo zadań, co stanowi zaletę niemałą książki.

Rozdział IV zawiera zastosowania trygonometrji do miernictwa. Bogactwo treści, jak również dokładność przedstawienia wyróżnia znakomicie ten rozdział, w przeciętnym podręczniku naszym traktowany zwykle bez znawstwa, po macoszemu. W ostatnim V rozdziale autor zajmuje się trygonometrją sferyczną. Przeznaczony on jest w całości dla szkoły realnej. Czytelnik znajdzie tu podstawowe wzory trygonometrji sferycznej oraz główniejsze jej zastosowania do zagadnień stereometrycznych, gieograficznych i astronomicznych.

Całość wykładu trygonometrji w tym podręczniku robi wrażenie dodatnie i stanowi duży krok naprzód w porównaniu z istniejącemi u nas podręcznikami.

Drugą część książki poświęcono, jak nadmieniliśmy, gieometrji analitycznej i początkom rachunków wyższych. Część ta składa się z jedenastu rozdziałów, z których dziesięć początkowych niemal wyłącznie zajmuje gieometrja analityczna (str. 163—285). W pierwszym rozdziale zajmuje się autor wyjaśnieniem układu spółrzędnych Descartesa oraz wykreśleniem obrazów gieometrycznych z danych równań; dalej daje pojęcie o spółrzędnych biegunowych jak również stosuje je do wykreślania krzywych z danych równań, wyrażonych w tych spółrzędnych. Pomimo znacznej liczby przykładów autor nie podał ani jednego (prócz paraboli), w którym wykreślanie odbywałoby się nie na zasadzie jakiejś dostrzeżonej z równania lub przedtym danej własności gieometrycznej, lecz zapomocą układania tabliczki i obliczeń. To

www.rcin.org.pl

ostatnie nie jest tak proste, a wprawianie w te rzeczy może być bardzo pożyteczne. Autor w ćwiczeniach, dołączonych do tegoż rozdziału podaje cały szereg zadań na wykreślenie krzywych z równań, np. $y=\frac{x+2}{(x-1)(x-3)}$, $2y=e^x+e^{-x}$ i t. d. Należałoby wobec tego poprzednio tej sprawie cokolwiek więcej uwagi poświęcić. W rozdziale II autor zajmuje się zastosowaniami układu spółrzędnych i należy zaznaczyć, że rozdział ten należy do najlepszych. Wyjaśniono tu szereg ważnych pojęć, jak odległość, spadek, zastosowano metodę spółrzędnych do obliczania pól i t. p. W rozdziale III znowu mowa o równaniu linji prostej w różnych postaciach i o głównych zagadnieniach, dotyczących linji prostej. Szkoda, że autor nie rozwinął gruntownej dyskusji układu dwuch równań 1-go stopnia z dwiema niewiadomemi; sposobność do tego dawało mu zadanie: „znaleźć punkt spotkania się prostych, znając ich równania". Podano na str. 200 tylko 3 przypadki, a powinno być 8. Na str. 210 figura jest nie dosyć wyraźna. W rozdziale IV mowa o zmianie osi spółrzędnych. Autor w tym rozdziale daje też pojęcie szersze o przekształceniu (str. 216). W rozdziale V znajdujemy naukę o kole (na str. 219 jest błąd; zamiast: $-r \geqslant x \geqslant +r$ powinno być: $-r \leqslant x \leqslant +r$). Wyprowadzono równanie stycznej do koła, podano pojęcie o biegunowej i osi pierwiastnej W krótkim rozdziale VI znaleść można uwagi ogólne o dyskusji równań linji krzywych. Sam temat jest bardzo ważny, ale uwagi podane możnaby rozszerzyć. Do tego nadawałoby się bardzo ze względu na swój elementarny, ale bardzo pouczający charakter t. zw. przez francuzów „méthode des régions". Rzecz polega na tym, że badamy znak funkcji, stanowiącej lewą stronę równania, w różnych punktach płaszczyzny i dzięki temu możemy płaszczyznę podzielić na obszary dodatnie i ujemne, na pograniczu których przebiega krzywa. W rozdziałach VII, VIII i IX autor kolejno zajmuje się parabolą, elipsą i hiperbolą. Rozdział o paraboli jest bardzo pouczający, jeden z lepszych rozdziałów książki. Tutaj w § 64 autor daje definicje pochodnej i stosuje ją do wyprowadzenia równania stycznej do paraboli, a w interesującym § 65 oblicza dwoma sposobami pole odcinka paraboli i daje pojęcie o całce. Rozdział X jest potraktowany dogmatycznie i właściwie nie zasługują na tytuł jaki mu nadano: „ogólny rozbiór równania drugiego stopnia o dwuch niewiadomych". W ostatnim rozdziale XI autor bliżej omawia pojęcia pochodnej i całki. Pojęcia te nie podległy tu większemu rozszerzeniu i zastosowaniu, gdyż poza pojęciem maximum i minimum funkcji, metody Newtona przy rozwiązywaniu przybliżonym równań (§ 7) i wyjaśnieniem związku całki z pochodną (§ 80), autor nie podaje ani większej liczby zastosowań, ani też nie rozszerza teorji. Jest to tylko wprowadzenie pierwszych pojęć, widocznie żądanych w tej formie przez program szkoły realnej galicyjskiej.

Na tym samym miejscu miałem możność przed rokiem omawiać pierwszą część tego podręcznika. O ile tam dało się skonstatować dążenie do nowych, czasem niewypróbowanych sposobów wykładu gwoli zadośćuczynieniu wymaganiom czystej nauki, o tyle teraz autor z wielką ostrożnością traktuje nowości, gruntowniej opracowuje metodę wykładu i daje podręcznik praktyczniejszy. Fakt ten znamionuje postęp, ostrożność wspomniana jest na miejscu również ze względu poniekąd na nowy materjał naukowy, jakim są początki rachunków wyższych. Taka niewielka „doza" tych rachunków jaką znajdzie-

www.rcin.org.pl

my w podręczniku, oraz łatwość przedstawienia spopularyzują rzecz należycie, przejednają przeciwników (o ile ich nie „przekonała“, co często bywa, władza wyższa, nakazując wprowadzenie) i grunt przygotują do dalszej w tym kierunku pracy, która oby nie ustawała w szkole polskiej. Książkę, jak już zaznaczyłem na początku, zaliczam do wybitnych zjawisk w naszej literaturze podręcznikowej.

L. Zarzecki.

www.rcin.org.pl