

## 7. Optymalizacja termicznej izolacji obiektów zagłębionych w gruncie na minimum strat ciepła

### 7.1 Wstęp

Zagadnienia izolacji termicznej budynków lub innych obiektów, których pomieszczenia powinny utrzymywać możliwie stałą na odpowiednim poziomie temperaturę (niezależnie od warunków zewnętrznych), są związane z ograniczeniem nieuniknionych strat ciepła. Jeżeli przyjmiemy, że w odniesieniu do określonej powierzchni przegród termicznych, oddzielających pomieszczenia obiektu od jego otoczenia, dysponujemy daną ilością (objętością) materiału izolacyjnego, mamy do rozwiązania problem następujący: w jaki sposób rozmieścić materiał izolacyjny na poszczególnych częściach powierzchni przegród aby globalne straty ciepła przenikające przez te izolowane powierzchnie były minimalne. To zagadnienie optymalnego rozmieszczenia warstw o zmiennej grubości materiału izolacyjnego ma szczególne znaczenie w obszarach otworów drzwiowych i okiennych, styków i połączeń różnych części budynku oraz w narożach. Ważnym przykładem problemu optymalizacyjnego jest zagadnienie izolacji termicznej części budynków lub innych obiektów zagłębionych w środowisku gruntowym. Zagadnienia optymalnej izolacji obiektów częściowo lub całkowicie zagłębionych w gruncie wskazującej rozmieszczenie materiału izolacyjnego na powierzchniach izolowanych zgodnie z kryterium minimum strat ciepła wnikaącego do gruntu na jednostkę czasu stanowić będzie przedmiot tej części opracowania.

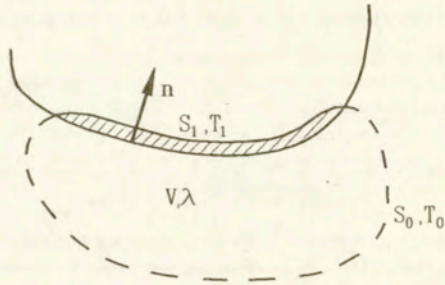
Rozdział ten opracowano na podstawie sprawozdania z badań Johana Claessona, Bengt Efring, których wyniki przedstawiono w 1980 roku w raporcie D:33, 1980 pt. *Optimal distribution of thermal insulation and ground heat losses* opublikowanym przez Szwedzką Radę Badań w Dziedzinie Budownictwa "Swedish Council for Building Research". Kierując się głównie względami użytkowymi tekstu, przedstawiono w sposób zwięzły niezbędne wzory i wykresy umożliwiające w sposób bezpośredni optymalne projektowanie izolacji termicznych rozpatrywanych obiektów przy wskazaniu na przykładach liczbowych sposobów ich wykorzystania.

Przedstawione w punkcie 7.2 i 7.3 sformułowanie problemu optymalizacji ma na celu wskazanie sposobu stawiania zagadnień optymalizacyjnych w dziedzinie ochrony cieplnej obiektów budowlanych, magazynów ciepła itp.

### 7.2 Sformułowanie i ogólne rozwiązanie problemu optymalizacji

Rozpatrzmy obszar gruntu  $V$ , otoczenie obiektu w nim zagłębionego, w którym zachodzi wymiana ciepła, rys. 7.1. Obszar ten ograniczony jest powierzchnią brzegową, którą stanowią dwie części  $S_1$  i  $S_0$ .  $S_1$  o normalnej  $\mathbf{n}$  jest powierzchnią brzegową obiektu zagłębionego w gruncie, która powinna być izolowana termicznie przed stratami ciepła do obszaru  $V$  w sposób optymalny. Zakładamy, że jest ona pokryta warstwą izolacyjną o zmiennej grubości  $d$ . Określenie zmiennej grubości  $d$  w taki sposób aby straty ciepła przez powierzchnię  $S_1$  do obszaru  $V$  były minimalne. Współczynnik przewodnictwa ciepła  $\lambda$  [ $J/mK$ ] gruntu w obszarze  $V$  może być zmienny. Temperatura na brzegu  $S_0$  jest dana i wynosi  $T_0$ . Natomiast temperatura pomieszczenia izolowanego obiektu wynosi  $T_1 > T_0$ . Pole temperatury  $T(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x_i)$   $i = 1, 2, 3$  w obszarze  $V$  gruntu spełnia obszarowe równanie stacjonarnego przewodnictwa ciepła

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) = 0 \quad \text{w } V \quad (7.1)$$



Rys. 7.1.

przy czym

$$\nabla = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} ( ) i_i$$

jest oznaczeniem operatora gradientu. Na części  $S_0$  powierzchni brzegowej obszaru  $V$  mamy warunek brzegowy

$$T = T_0 \quad \text{na } S_0. \quad (7.2)$$

Warunek brzegowy na części  $S_1$  formułujemy w sposób następujący: natężenie strumienia ciepła  $q_n = -\lambda \frac{dT}{dn}$  (proporcjonalnego do pochodnej  $T$  względem współrzędnej bieżącej  $n$  wzdłuż wektora normalnej  $n$ ) przepływającego do obszaru  $V$  w dowolnym punkcie powierzchni  $S_1$  jest równe natężeniu strumienia  $q_1$  strat ciepła wypływającego z pomieszczenia obiektu przez izolowaną powierzchnię  $S_1$ . Oznaczając przez  $\lambda_i$  współczynnik przewodności cieplnej izolacji oraz traktując warstwę izolacji jako nieskończenie cienką ze skończoną termiczną opornością  $d/\lambda_i$  mamy na podstawie równania Fouriera

$$q_1 = \frac{\lambda_i}{d} (T - T_1).$$

Skąd warunek brzegowy na części  $S_1$  powierzchni ograniczającej obszar  $V$  ma postać

$$\lambda \frac{dT}{dn} = \frac{\lambda_i}{d} (T_1 - T) \quad \text{na } S_1. \quad (7.3)$$

Wielkość strat ciepła  $Q_1$  [ $J/s = W$ ] przepływającego od pomieszczenia obiektu do gruntu przez izolowaną powierzchnię  $S_1$  jest określona za pomocą wzoru

$$Q_1 = - \int_{S_1} \lambda \frac{dT}{dn} dS. \quad (7.4)$$

Sformułowanie problemu optymalizacji jest następujące: zmienną grubość  $d$  izolacji termicznej przy stałej jej objętości należy tak dobrać aby straty ciepła przez powierzchnię  $S_1$  osiągały wartość minimum, tj.

$$Q_1 = \min \quad (7.5)$$

przy

$$\int_{S_1} d \, ds = \text{const.}$$

Wprowadzając pojęcie średniej grubości  $d_m > 0$  warstwy izolacyjnej warunek stałej objętości izolacji

$$\int_{S_1} d \, dS = d_m \int_{S_1} dS$$

zastąpiono warunkiem ustalonej wartości średniej

$$d_m = \frac{\int_{S_1} d \, dS}{S_1} > 0. \quad (7.6)$$

W celu wyprowadzenia warunków optymalnego rozkładu wzdłuż  $S_1$  materiału izolacji rozpatrzmy wpływ małych zmian  $\delta d$  grubości warstwy izolacji na straty ciepła  $Q_1$ . Załóżmy, że zmienna grubość izolacji jest równa  $d + \delta d > 0$  w dowolnym punkcie powierzchni  $S_1$ . W tym przypadku pole temperatury  $T$  ulega zmianie i wynosi  $T + \delta T$  w obszarze  $V$  i spełnia równanie obszarowe przewodnictwa ciepła o postaci

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla (T + \delta T)) = 0 \quad \text{w } V \quad (7.7)$$

oraz warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} T + \delta T &= T_0 && \text{na } S_0, \\ -(d + \delta d)\lambda \frac{d}{dn}(T + \delta T) &= \lambda_i(T + \delta T - T_1) && \text{na } S_1. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Odejmując stronami równania obszarowe (7.1), (7.7) oraz warunki brzegowe (7.8)<sub>1</sub>, (7.2) i (7.8)<sub>2</sub>, (7.3) mamy:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\lambda \nabla \delta T) &= 0 && \text{w } V, \\ \delta T &= 0 && \text{na } S_0, \\ \delta T + \frac{\lambda}{\lambda_i} \left[ d \frac{d}{dn} \delta T + \delta d \frac{d}{dn} (T + \delta T) \right] &= 0 && \text{na } S_1. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Równania (7.9) opisują pole przyrostu temperatury  $\delta T$  w obszarze  $V$  wywołanego zmianą grubości warstwy izolacyjnej wzdłuż  $S_1$  o  $\delta d$ . Wprowadźmy następnie pojęcie konsumpcji termicznej układu w procesie wymiany ciepła ograniczonego powierzchnią brzegową  $S$  o temperaturze  $f$  zdefiniowane za pomocą wzoru

$$\Gamma = \oint_S f \lambda \frac{dT}{dn} dS. \quad (7.10)$$

Odejmując stronami równanie (7.10) od równania

$$\delta \Gamma + \Gamma = \oint_S f \lambda \left[ \frac{dT}{dn} + \frac{d\delta T}{dn} \right] dS.$$

termicznej konsumpcji układu o grubości izolacji  $d + \delta d$  otrzymamy wyrażenie

$$\delta \Gamma = \oint_S f \lambda \frac{d}{dn} \delta T dS \quad (7.11)$$

na zmianę termicznej konsumpcji wywołaną modyfikacją rozmieszczenia izolacji o  $\delta d$ . Przyjmijmy, że temperatura  $f$  na zewnątrz warstwy izolacyjnej wzdłuż powierzchni  $S$  ograniczającej obszar  $V$  jest równa

$$f = T + \frac{d}{\lambda_i} \lambda \frac{dT}{dn} \quad \text{na } S. \quad (7.12)$$

Stąd też wyrażenie (7.11) na zmianę termicznej konsumpcji przybiera postać

$$\delta\Gamma = \oint_S \left[ T + \frac{d}{\lambda_i} \lambda \frac{dT}{dn} \right] \lambda \frac{d\delta T}{dn} dS. \quad (7.13)$$

Uwzględniając tożsamość Greena odniesioną do dwóch dowolnych funkcji  $u, v$

$$\oint_S u \frac{dv}{dn} dS = \int_V u \Delta v dV + \int_V (\nabla u \nabla v) dV,$$

gdzie

$$\nabla(\nabla\varphi) = \Delta\varphi = \sum_{i=1}^3 \varphi_{,ii},$$

oraz równania (7.1) i (7.9) znajdujemy:

$$\begin{aligned} \oint_S T \lambda \frac{d}{dn} \delta T dS &= \int_V T \lambda \Delta(\delta T) dV + \int_V \nabla(T\lambda) \nabla(\delta T) dV = \\ &= \int_V \nabla(\nabla \delta T T \lambda) dV = \int_V \nabla(\lambda \nabla \delta T) T + \nabla T \lambda \nabla \delta T = \\ &= \int_V (\nabla T \lambda \nabla \delta T + \nabla(\lambda \nabla T) \delta T) dV = \\ &= \int_V \nabla(\delta T \nabla T \lambda) dV = \oint_S \lambda \delta T \frac{dT}{dn} dS. \end{aligned}$$

Stąd też wyrażenie (7.13) na zmianę termicznej konsumpcji przybiera postać

$$\delta\Gamma = \oint_S \left[ \delta T + \frac{d\lambda}{\lambda_i} \frac{d}{dn} (\delta T) \right] \lambda \frac{dT}{dn} dS \quad (7.14)$$

Uwzględniając z kolei warunki brzegowe (7.9)<sub>3</sub>, przy założeniu  $d \equiv 0$  i  $\delta d \equiv 0$  na  $S_0$  mamy

$$\delta\Gamma = - \oint_S \lambda \frac{dT}{dn} \frac{\delta d}{\lambda_i} \lambda \frac{d}{dn} (T + \delta T) dS = - \oint_S \frac{\delta d}{\lambda_i} \left[ \left( \lambda \frac{dT}{dn} \right)^2 + \lambda \frac{dT}{dn} \delta T \right] dS.$$

Ograniczając zmianę  $\delta\Gamma$  termicznej konsumpcji do wywołanej jedynie częścią liniową przyrostów  $\delta d$ , po pominięciu drugiego składnika we wzorze pod całką mamy

$$\delta\Gamma = - \oint_S \frac{1}{\lambda_i} \left( \lambda \frac{dT}{dn} \right)^2 \delta d dS. \quad (7.15)$$

Stąd dochodzimy do wniosku, że zmiana  $\delta\Gamma$  termicznej konsumpcji jest określona przez zmianę  $\delta d$  grubości izolacji oraz natężenie strumienia ciepła  $-\lambda \frac{dT}{dn}$  w układzie pierwotnym zgodnie ze wzorem (7.15). Uwzględniając fakt znikania  $\delta d = 0$  oraz  $d = 0$  wzdłuż części  $S_1$  powierzchni  $S$  mamy

$$\delta\Gamma = - \int_{S_1} \frac{1}{\lambda_i} \left( \lambda \frac{dT}{dn} \right)^2 \delta d dS. \quad (7.16)$$

W rozpatrywanym przypadku powierzchnia brzegowa  $S$  składa się z dwóch części  $S_0$  i  $S_1$ , wzdłuż których temperatura  $f$  jest odpowiednio równa  $T_0$  i  $T_1$ . Stąd zgodnie z definicjami (7.10) i (7.4) mamy

$$\Gamma = \oint_S f \lambda \frac{dT}{dn} dS = T_1 \int_{S_1} \lambda \frac{dT}{dn} dS + T_0 \int_{S_0} \lambda \frac{dT}{dn} dS.$$

Ponieważ warunkiem ustalonego przepływu ciepła jest stan równowagi pomiędzy ilością ciepła doprowadzonego i odprowadzonego tak więc zniknąć musi całka

$$\oint_S \lambda \frac{dT}{dn} dS = 0$$

Uwzględniając (7.4) mamy więc

$$Q_1 = - \int_{S_1} \lambda \frac{dT}{dn} dS = \int_{S_0} \lambda \frac{dT}{dn} dS,$$

skąd jest też

$$\begin{aligned} \Gamma &= -(T_1 - T_0)Q_1, \\ \delta\Gamma &= -(T_1 - T_0)\delta Q_1. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Przyrównując stronami równania (7.16) i (7.17) otrzymujemy następujące wyrażenie na przyrost strat ciepła  $\delta Q_1$  przez powierzchnię  $S_1$  wywołany zmianą  $\delta d$  grubości warstwy izolacyjnej

$$\delta Q_1 = \frac{1}{T_1 - T_0} \int_{S_1} \frac{\delta d}{\lambda_i} \left( \lambda \frac{dT}{dn} \right)^2 dS. \quad (7.18)$$

Na podstawie (7.18) wnioskujemy, że straty ciepła przepływającego z pomieszczenia obiektu przez część  $S_1$  izolowaną warstwą o grubości  $d$  są minimalne jeżeli  $\delta Q_1$  jest nie ujemne dla dowolnej redystrybucji  $\delta d$  izolacji wzdłuż  $S_1$ . Stąd warunek optymalności na podstawie (7.18) przy  $T_1 - T_0 > 0$  ma postać

$$\int_{S_1} \frac{1}{\lambda_i} \left( \lambda \frac{dT}{dn} \right)^2 \delta d dS \geq 0$$

przy dowolnej zmianie  $\delta d$  spełniającej warunek

$$\int_{S_1} \delta d dS = 0$$

stałej objętości izolacji. Oznaczając tildą  $\tilde{\phantom{x}}$  wielkości przynależne rozwiązaniu optymalnemu, dochodzimy do wniosku, że kryterium optymalności przy  $d > 0$  jest spełnione gdy

$$\lambda \frac{d\tilde{T}}{dn} = q_1 \quad \text{na } S_1, \quad (7.19)$$

przy czym

$$q_1 = \text{const.}$$

Ponieważ grubość izolacji  $d$  (także  $d + \delta d$ ) musi być dodatnia na  $S_1$  dlatego też warunek (7.19) jest ważny jedynie na tej części  $S_1$  gdzie  $\tilde{d} \geq 0$ . Dlatego też wszędzie tam gdzie  $\tilde{d}$  jest równe zero wnioskujemy, że  $\lambda \frac{d\tilde{T}}{dn}$  nie może przewyższać stałej wartości  $q_1$ , tj.

$$\lambda \frac{d\tilde{T}}{dn} \leq q_1 \quad \text{na części } S_1 \text{ przy } \tilde{d} = 0. \quad (7.20)$$

Równanie (7.19) stanowi, poza przypadkiem osobliwym (7.20), warunek optymalności izolacji zgodnie z kryterium minimum strat ciepła. Zgodnie z tym kryterium izolacja powinna być rozmieszczona w taki sposób, że przepływ ciepła jest taki sam i stały na izolowanej powierzchni  $S_1$ .

### 7.3 Zagadnienie brzegowe i równania optymalności izolacji termicznej

Optymalne rozwiązanie pola temperatury  $\bar{T}$  powinno dawać stały strumień ciepła  $q_1$  na izolowanej powierzchni  $S_1$ , którego wartość wynika z założonej średniej grubości  $d_m$  izolacji. Zagadnienie brzegowe optymalnego rozkładu temperatury  $\bar{T}$  w obszarze  $V$  ma następującą postać

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\lambda \nabla \bar{T}) &= 0 && \text{w } V, \\ \lambda \frac{d\bar{T}}{dn} &= q_1 && \text{na } S_1, \\ \bar{T} &= T_0 && \text{na } S_0. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Znając na podstawie rozwiązania zagadnienia brzegowego (7.21) pole temperatury  $\bar{T}$  (*constant-flow solution*) optymalną zmienną grubość izolacji możemy wyznaczyć na podstawie warunku brzegowego (7.3) ze wzoru

$$\bar{d} = (T_1 - \bar{T}) \frac{\lambda_i}{\lambda \frac{d\bar{T}}{dn}} \quad \text{na } S_1, \quad (7.22)$$

skąd wobec (7.21)<sub>3</sub> jest też

$$\bar{d} = (T_1 - \bar{T}) \frac{\lambda_i}{q_1}. \quad (7.23)$$

Jeżeli rozwiązanie zagadnienia brzegowego (7.21) wyrazimy za pomocą funkcji  $u(x_1/L, x_2/L, x_3/L)$  zmiennych bezwymiarowych  $x_i/L$  w postaci

$$\bar{T}(x_1, x_2, x_3) = T_0 + \frac{q_1 L}{\lambda_0} u(x_1/L, x_2/L, x_3/L) \quad (7.24)$$

gdzie

$L$  - oznacza dowolną długość w obszarze przepływu ciepła,

$\lambda_0$  - jest wielkością porównawczą odniesioną do współczynnika przewodnictwa  $\lambda = \lambda_0 \lambda'$ ,

$\lambda'$  - bezwymiarową przewodnością,

to funkcję  $u$  opisuje układ równań obszarowych i brzegowych o następującej postaci

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot (\lambda' \nabla' u) &= 0 && \text{w } V, \\ \lambda' \frac{du}{dn'} &= 1 && \text{na } S_1, \\ u &= 0 && \text{na } S_0. \end{aligned} \quad (7.25)$$

po wprowadzeniu oznaczeń

$$\nabla' = L \nabla, \quad n' = n/L.$$

Rozwiązanie tego problemu brzegowego przyjęto nazywać podstawowym rozwiązaniem stałego przepływu (*fundamental constant-flow solution*). Podstawiając do (7.23) wzór (7.24) mamy wyrażenie

$$\bar{d} = \left( T_1 - T_0 - \frac{q_1 L}{\lambda_0} u \right) \frac{\lambda_i}{q_1} \quad (7.26)$$

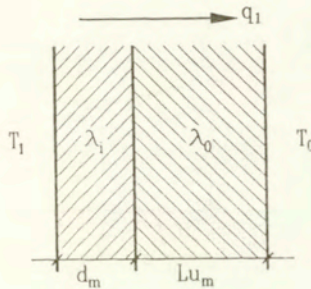
opisujące zmienną grubość  $\bar{d}$  na  $S_1$  w zależności od  $u$ . Stałą wartość  $q_1$  natężenia strumienia ciepła przez powierzchnię  $S_1$  możemy wyrazić przez wielkości średnie  $d_m$  oraz  $u_m = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} u \, dS$ . Dzieląc obie strony wzoru (7.26) przez pola  $S_1$  a następnie całkując po powierzchni  $S_1$  mamy po uwzględnieniu symboli  $d_m$ ,  $u_m$  równanie

$$d_m = \left( T_1 - T_0 - \frac{q_1 L}{\lambda_0} u_m \right) \frac{\lambda_i}{q_1},$$

skąd znajdujemy

$$q_1 = \frac{T_1 - T_0}{\frac{d_m}{\lambda_i} + \frac{L u_m}{\lambda_0}} \quad [J/m^2 s = W/m^2]. \quad (7.27)$$

Na podstawie (7.27) spostrzegamy, że natężenie strumienia ciepła  $q_1$  jest równe różnicy temperatur  $T_1 - T_0$  dzielonej przez termiczną oporność. Pierwszy składnik  $d_m/\lambda_i$  jest termiczną opornością warstwy izolacyjnej o grubości  $d_m$  równej średniej grubości izolacji. Składnik drugi  $L u_m/\lambda_0$  można interpretować jako średnią termiczną oporność gruntu o ekwiwalentnej grubości  $L u_m$  i termicznym współczynnikiem przewodnictwa  $\lambda_0$ . Rysunek 7.2 stanowi ilustrację formuły (7.27) strat ciepła. Podstawienie (7.27) do (7.26) daje



Rys. 7.2.

wyrażenie na optymalną zmienność grubości izolacji na  $S_1$  w następującej postaci

$$\bar{d} = d_m + \frac{\lambda_i}{\lambda_0} L(u_m - u). \quad (7.28)$$

Wartość średnią  $d_m$ , którą należy przyjąć w (7.28) określono na podstawie warunku  $\bar{d} \geq 0$ , który będzie spełniony na całej powierzchni  $S_1$  jeżeli

$$d_{min} \geq 0, \quad (7.29)$$

gdzie

$$d_{\min} = d_m + \frac{\lambda_i}{\lambda_0} L (u_m - u_{\max}).$$

Stąd też wzór (7.28) na zmienną grubość  $\bar{d}$  izolacji można wyrazić w postaci

$$\bar{d} = d_{\min} + \frac{\lambda_i}{\lambda_0} L \bar{u}, \quad (7.30)$$

gdzie

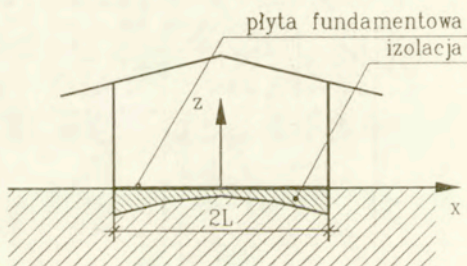
$$\bar{u} = u_{\max} - u \geq 0$$

przyjęto określać mianem funkcji optymalnej izolacji (*optimal insulation function*).

## 7.4 Optymalne rozmieszczenie izolacji termicznej płyt fundamentowych posadowionych na podłożu gruntowym

### 7.4.1 Płyta nieskończenie długa

Przedstawimy rozwiązanie optymalne dwuwymiarowego przypadku płyty posadowionej na podłożu gruntowym, w którym straty ciepła z pomieszczenia długiego budynku do gruntu **poniżej płyty mają miejsce w przekrojach pionowych**, rys. 7.3. Płyta fundamen-



Rys. 7.3.

towa o szerokości  $2L$  leży wzdłuż  $z = 0$ , dla  $-L < x < L$  na podłożu gruntowym o współczynniku przewodnictwa  $\lambda_0$  w obszarze  $-\infty < x < \infty$ ,  $z < 0$ .

Na podstawie rozwiązania zagadnienia brzegowego<sup>1</sup> (7.25), które w rozpatrywanym przypadku ma postać

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{w obszarze } -\infty < x < \infty, z < 0$$

<sup>1</sup>Dowód poprawności rozwiązania zagadnienia brzegowego przedstawiono w punkcie 7.7.



oraz

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 & x > L, \quad x < -L, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 1 & -1 < x < 1, \\ [u]_{x \rightarrow -\infty} &= 0, \end{aligned}$$

funkcja stałego przepływu  $u$  na powierzchni wewnętrznej płyty posadowienia przybiera postać

$$u\left(\frac{x}{L}, 0\right) = \sqrt{1 + x^2/L^2} \quad \text{dla } -L < x < L, \quad (7.31)$$

skąd jest też

$$u_{\max} = 1, \quad u_m = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2/L^2} dx = \pi/4.$$

Na podstawie wzoru (7.30) po uwzględnieniu (7.31) mamy następujące wyrażenie na optymalną zmienną grubość izolacji

$$\bar{d} = d_{\min} + \frac{\lambda_i}{\lambda_0} L \left(1 - \sqrt{1 - x^2/L^2}\right), \quad (7.32)$$

gdzie zgodnie z (7.29)

$$d_{\min} = d_m + \frac{\lambda_i}{\lambda_0} L(\pi/4 - 1)$$

przy czym

$$d_m \geq \frac{\lambda_i}{\lambda_0} L(1 - \pi/4).$$

Wyrażenie (7.27) określające natężenie strat ciepła  $q_1$  [ $J/m^2s$ ] przybiera postać

$$q_1 = \frac{T_1 - T_0}{\frac{d_m}{\lambda_i} + \frac{L}{\lambda_0} \frac{\pi}{4}}. \quad (7.33)$$

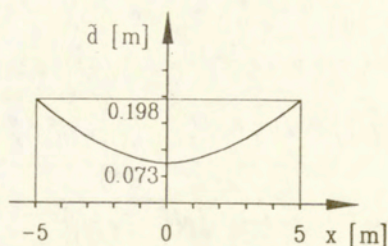
**Przykład.** Określmy funkcje optymalnego rozmieszczenia izolacji oraz straty ciepła  $Q_1 = 2Lq_1$  przyjmując następujące dane:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 2 \text{ [J/ms}^\circ\text{C]}, \\ \lambda_i &= 0.05 \text{ [J/ms}^\circ\text{C]}, \\ 2L &= 10 \text{ [m]}, \\ d_m &= 0.1 \text{ [m]}, \\ T_1 - T_0 &= 10 \text{ [}^\circ\text{C]}. \end{aligned}$$

Uwzględniając dane wartości liczbowe na podstawie powyżej wskazanych wzorów mamy:

$$\begin{aligned} d_{\min} &= 0.1 - \frac{0.05}{2} \cdot 5 \cdot (1 - \pi/4) = 0.073 \quad [m], \\ \bar{d} &= 0.073 + 0.125(1 - \sqrt{1 - (x/5)^2}) \quad [m], \\ Q_1 &= 10 \frac{10}{\frac{0.10}{0.05} + \frac{5}{2} \frac{\pi}{4}} = 25 \quad [J/ms]. \end{aligned}$$

Optymalną zmienność grubości  $\bar{d}$  izolacji termicznej płyty przedstawiono na wykresie (rys. 7.4).



Rys. 7.4.

### 7.4.2 Płyta kołowa

W przypadku płyty kołowej o promieniu  $R$ , zajmującej obszar  $z \equiv 0, 0 \leq r \leq R$  osiowo symetryczna funkcja stałego przepływu  $u$  dla  $z = 0$  ma postać

$$u(r, 0) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \quad 0 \leq r \leq R, \quad (7.34)$$

skąd znajdujemy

$$u_{max} = 2/\pi,$$

$$u_m = \frac{4}{3\pi}.$$

Podstawiając (7.34) do wzorów (7.29) i (7.30) oraz przyjmując  $L = R$  otrzymujemy następujące wyrażenie opisujące optymalną zmienność izolacji płyty

$$\bar{d} = d_{min} + \frac{\lambda_i}{\lambda_0} R \frac{2}{\pi} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right), \quad (7.35)$$

gdzie

$$d_{min} = d_m - \frac{\lambda_i}{\lambda_0} R \frac{2}{3\pi},$$

przy czym

$$d \geq \frac{\lambda_i}{\lambda_0} R \frac{2}{3\pi}.$$

Wyrażenie (7.27) określające natężenie strat ciepła  $q_1$  [ $J/m^2s$ ] przybiera postać

$$q_1 = \frac{T_1 - T_0}{\frac{d_m}{\lambda_i} + \frac{R}{\lambda_0} \frac{4}{3\pi}}. \quad (7.36)$$

**Przykład.** Określmy funkcję optymalnego rozmieszczenia izolacji płyty oraz straty ciepła przyjmując następujące dane:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= 1.1 \text{ [J/ms}^\circ\text{C]}, \\ \lambda_i &= 0.04 \text{ [J/ms}^\circ\text{C]}, \\ R &= 6.77 \text{ [m]}, \\ d_m &= 0.1 \text{ [m]}, \\ T_1 - T_0 &= 15 \text{ [}^\circ\text{C]}.\end{aligned}$$

Uwzględniając dane wartości liczbowe na podstawie powyżej wskazanych wzorów znajdujemy:

$$d_{\min} = 0.1 - \frac{0.04}{1.1} \cdot 6.77 \cdot \frac{2}{3\pi} = 1 - 0.052 = 0.048 \text{ [m]} > 0,$$

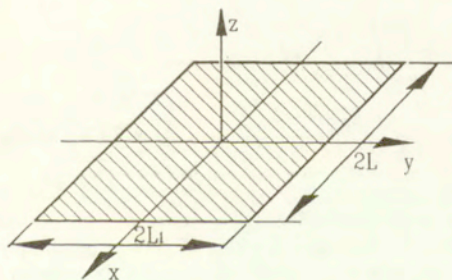
$$\bar{d} = 0.048 + 0.157 \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{r}{6.77} \right)^2} \right) \text{ [m]}.$$

Stąd wnioskujemy, że grubość izolacji zmienia się od 0.048 [m] w środku płyty do 0.205 [m] na krawędzi. Straty ciepła wnikańcego do gruntu przez izolację płyty wynoszą

$$Q_1 = \pi(6.77)^2 \frac{15}{\frac{0.10}{0.04} + \frac{6.77}{1.1} \frac{4}{3\pi}} = 423 \text{ [J/s]}.$$

### 7.4.3 Płyta prostokątna o wymiarach boków $2L$ i $2L_1$

Przedstawimy optymalne rozwiązanie izolacji płyty prostokątnej o wymiarach boków  $2L$  i  $2L_1$  (przy  $L_1 \geq L$ ) na podłożu gruntowym, rys. 7.5 Funkcja  $u$  stałego przepływu jest



Rys. 7.5.

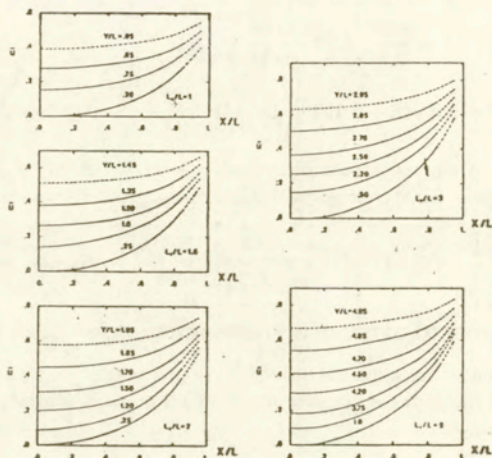
w rozpatrywanym przypadku rozwiązaniem następującego zagadnienia brzegowego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad z < 0$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 1 & \text{dla } z = 0, -L < x < L, -L_1 y < L_1, \\ u &= 0 & \text{dla } z = 0, x \leq -L, x \geq L, \\ & & y \leq -L_1, y \geq L_1. \end{aligned}$$

Na podstawie rozwiązania numerycznego dla  $L_1/L = 1, 1.5, 2, 3, 5$  zestawiono wyniki w postaci wykresów, zamieszczonych na rys. 7.6, funkcji  $\tilde{u} = u_{max} - u$  zmiennych  $x/L$  dla różnych  $y/L$ . Liniami kropkowanymi oznaczono wykresy charakteryzujące się mniejszą



Rys. 7.6.

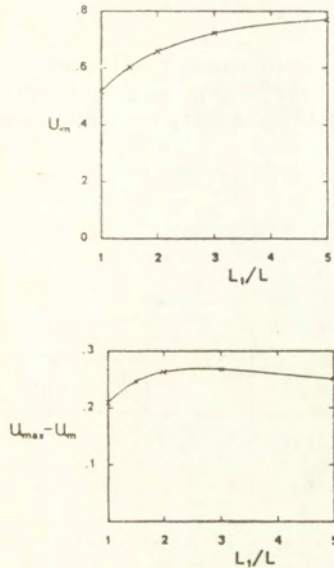
dokładnością.

Na rysunku 7.7 zestawiono wartości  $u_m$ ,  $u_{max} - u_m$  w funkcji stosunku  $L_1/L$  długości boków płyty.

Mając określone na podstawie tych wykresów rzędne  $\tilde{u}$  oraz wielkości  $u_m$ ,  $u_{max} - u_m$  możemy sporządzić wykresy zmiennej grubości izolacji  $\tilde{d}$  na podstawie wzoru (7.30) przyjmując określone dane występujących w nim wielkości spełniających warunek (7.29)  $d_{min} \geq 0$ . Następnie straty ciepła  $q_1$  [J/m<sup>2</sup>s] optymalnie izolowanej płyty są określone na podstawie wzoru (7.27).

**Przykład.** Określmy funkcję optymalnego rozmieszczenia izolacji płyty kwadratowej tj.  $L_1 = L$  oraz straty ciepła przyjmując następujące dane:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1.1 \text{ [J/ms}^\circ\text{C]}, \\ \lambda_1 &= 0.04 \text{ [J/ms}^\circ\text{C]}, \\ T_1 - T_0 &= 15 \text{ [}^\circ\text{C]}, \\ L = L_1 &= 6 \text{ [m]}, \\ d_m &= 0.1 \text{ [m]}. \end{aligned}$$



Rys. 7.7.

Uwzględniając dane wartości liczbowe na podstawie (7.29) oraz wykresów zamieszczonych na rysunkach 7.6 i 7.7 znajdujemy:

$$d_{min} = 0.1 - \frac{0.04}{1.1} \cdot 6 \cdot 0.21 = 0.1 - 0.046 = 0.054 \text{ [m]},$$

$$\bar{d} = 0.054 + 0.218\bar{u},$$

przy czym powierzchniowy rozkład funkcji  $\bar{u}$  optymalnej izolacji płyty określony jest postacią wykresów na rys. 7.6 przy  $L_1 = L$ . Straty ciepła  $Q_1 = 4L^2q_1$  wnikającego do gruntu przez izolację płyty obliczone na podstawie wzoru (7.27) wynoszą

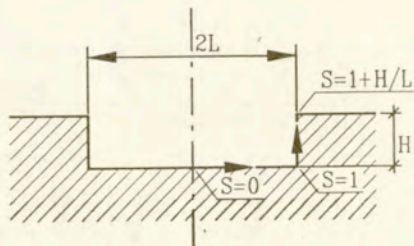
$$Q_1 = 144 \frac{15}{\frac{0.1}{0.04} + \frac{6 \cdot 0.52}{1.1}} = 405 \text{ [J/s]}.$$

## 7.5 Optymalne rozmieszczenie izolacji termicznej przegród częściowo zagłębionych obiektów

W tym punkcie zestawiono rozwiązania optymalne izolacji termicznej płyty podłogowej i ścian piwnic lub podziemnych kondygnacji budynku. Zagadnienie izolowania przegród pomieszczeń odgrywających rolę magazynów ciepła jest ważnym z punktu widzenia ochrony ciepła w czasie eksploatacji obiektów.

### 7.5.1 “Nieskończenie” długa komora o przekroju prostokątnym

Rozpatrujemy pomieszczenie o postaci komory prostokątnej o wysokości  $H$  mogącej stanowić część zagłębioną w gruncie długiego budynku o szerokości  $2L$  (rys. 7.8). Wprowadzmy **bezwymiarową współrzędną biejącą**  $s$  konturu przekroju poprzecznego

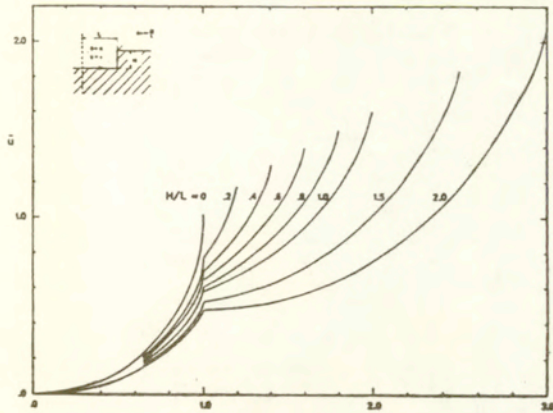


Rys. 7.8.

komory. Przyjmuje ona wzdłuż jego zarysu wartości od  $s = 0$  (w środkowym punkcie podłogi komory), poprzez  $s = 1$  w narożu łączącym podłogę ze ścianą oraz wartości zawarte w przedziale  $1 \leq s \leq 1 + H/L$  w punktach ściany pionowej komory.

Zgodnie ze wzorem (7.30) optymalne rozmieszczenie izolacji termicznej jest określone poprzez funkcję  $\tilde{u}$  optymalnej izolacji, która to w rozpatrywanym przypadku dla różnych stosunków  $H/L = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.5, 2.0$  przybiera wartości wskazane za pomocą wykresu na rys. 7.9 w punktach  $0 \leq s \leq 1 + H/L$ . Część wykresów na lewo od  $s = 1$  w przedziale  $0 \leq s \leq 1$  daje rozkłady izolacji termicznej płyty podłogowej od punktu środkowego do naroża. Wykresy na prawo od  $s = 1$  określają przy  $1 \leq s \leq 1 + H/L$  wartości funkcji izolacji termicznej wzdłuż ściany pionowej pomieszczenia. Na podstawie tych wykresów oraz wykresów  $u_m$  i  $u_{max} - u_m$  w funkcji stosunku  $H/L$  wskazanych na rysunku 7.10, możemy wyznaczyć optymalną zmienną grubość izolacji zgodnie ze wzorami (7.29–7.30). W szczególnym przypadku  $d_{min} = 0$ , izolacja  $\tilde{d}$  jest bezpośrednio proporcjonalna do optymalnej funkcji  $\tilde{u}$  izolacji. Na rysunku 7.11 przedstawiono wykres zmiennej izolacji odpowiadającej temu przypadkowi przy  $H/L = 0.8, L\lambda_i/\lambda_0 = 1$ .

**Przykład.** Określmy optymalną zmienną grubość  $\tilde{d}$  izolacji pomieszczenia – piwnicy długiego budynku oraz straty ciepła do otaczającego środowiska gruntowego przyjmując



Rys. 7.9.

następujące dane:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1.1 \text{ [J/ms}^\circ\text{C]}, \\ \lambda_i &= 0.04 \text{ [J/ms}^\circ\text{C]}, \\ T_1 - T_0 &= 15 \text{ [}^\circ\text{C]}, \\ 2L &= 12 \text{ [m]}, \\ H &= 2.4 \text{ [m]}, \\ H/L &= 0.4, \\ d_m &= 0.12 \text{ [m]}. \end{aligned}$$

Na podstawie wzorów (7.29–7.30) i wykresu wartości  $u_{max} - u_m$  na rys. 7.10 oraz uwzględniając dane wartości liczbowe znajdujemy:  $u_{max} - u_m = 0.39$  dla  $H/L = 0.4$

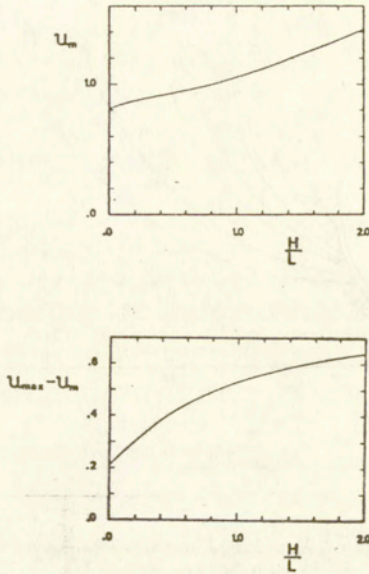
$$\begin{aligned} d_{min} &= 0.12 - \frac{0.04}{1.1} \cdot 6 \cdot 0.39 = 0.12 - 0.085 = 0.035 \text{ [m]}, \\ \bar{d} &= 0.035 + 0.218\bar{u} \text{ [m]}. \end{aligned}$$

Wartości liczbowe funkcji  $\bar{u}$  odczytać możemy z wykresu dla  $H/L = 0.4$  przedstawionego na rysunku 7.9. Tak więc maksymalna grubość izolacji na brzegu ściany piwnicy tj. przy  $s = 1.4$  wynosi  $0.035 + 0.218 \cdot 1.3 = 0.32 \text{ [m]}$ .

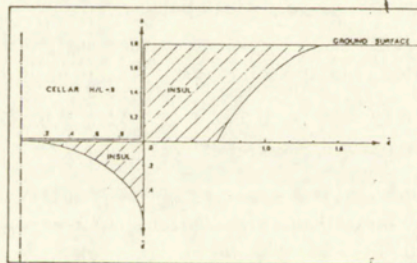
Straty ciepła  $Q_1 \equiv q_1(2L + 2H)$  wnikającego do gruntu przez izolowaną powierzchnię płyty podłogowej i ścian na jednostkę czasu zgodnie z (7.27) oraz wartością  $u_m = 0.91$  odczytaną z wykresu na rysunku 7.10 przy  $H/L = 0.4$ .

$$Q_1 = (12 + 4.8) \frac{15}{\frac{0.12}{0.04} + \frac{6 \cdot 0.91}{1.1}} = 32 \text{ [J/s m]}.$$

Należy zaznaczyć, że przedstawione wyniki uzyskane ze wzorów odniesionych do dwuwymiarowego przypadku długiego budynku tracą ważność w obszarach skrajnych budynku, w których powinien być uwzględniony efekt przestrzenny.



Rys. 7.10.



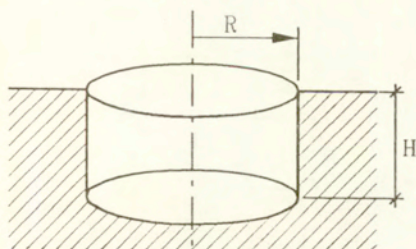
Rys. 7.11.

### 7.5.2 Cylindryczny magazyn ciepła

Przedstawimy optymalne rozwiązanie problemu izolacji termicznej cylindrycznego obiektu o promieniu  $R$  i wysokości  $H$  stanowiącego piwnicę lub magazyn ciepła.

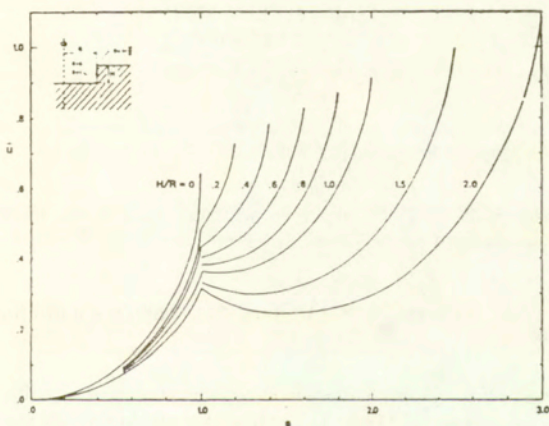
Postacie funkcji  $\bar{u}$  optymalnej izolacji ścian bocznych i dna obiektu przy różnym stosunku  $H/R = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.5, 2.0$  przedstawiono na rysunku 7.13.





Rys. 7.12.

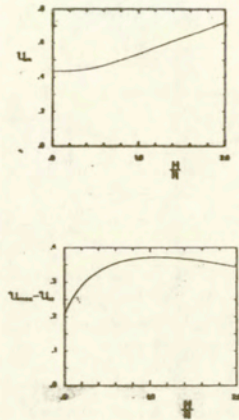
Zmienną niezależną jest bezwymiarowa współrzędna  $0 \leq s \leq 1 + H/R$  przybierają wartości  $s = 0$  w środku okręgu dna zbiornika,  $s = 1$  na jego brzegu oraz  $1 \leq s \leq 1 + H/R$  wzdłuż pobocznicę powierzchni walcowej ściany. Wartości  $u_m$  i  $u_{max} - u_m$  dla



Rys. 7.13.

różnych stosunków  $H/R$  przedstawiono za pomocą wykresów na rys. 7.14. Na podstawie przedstawionych na rys. 7.13 i 7.14 wykresów i wzorów (7.29–7.30) możemy określić zmienną grubość izolacji  $\bar{d}$  dna i ścian obiektu. Straty ciepła  $Q_1 = (\pi R^2 + 2\pi RH)q_1$  do gruntu przez powierzchnie izolowane są określone za pomocą wzoru (7.27).

**Przykład.** Określmy optymalną zmienną grubość  $\bar{d}$  izolacji ścian i dna zbiornika magazynującego ciepło oraz straty ciepła otaczającego środowiska gruntowego przyjmując



Rys. 7.14.

następujące dane:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1.1 \text{ [J/ms}^\circ\text{C]}, \\ \lambda_i &= 0.04 \text{ [J/ms}^\circ\text{C]}, \\ T_1 - T_0 &= 20 \text{ [}^\circ\text{C]}, \\ R &= 6 \text{ [m]}, \\ H &= 2.4 \text{ [m]}, \\ H/R &= 0.4, \\ d_m &= 0.15 \text{ [m]}. \end{aligned}$$

Na podstawie wzorów (7.29–7.30), wykresu wartości  $u_{max} - u_m$  na rys. 7.14 oraz uwzględniając dane wartości liczbowe znajdujemy:

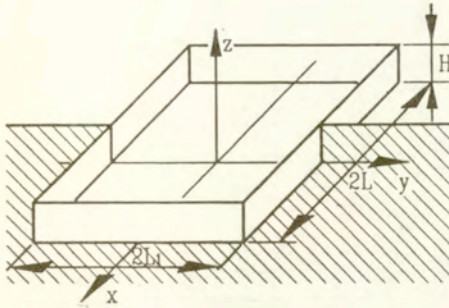
$$\begin{aligned} u_{max} - u_m &= 0.34 \\ d_{min} &= 0.15 - \frac{0.04}{1.1} \cdot 6 \cdot 0.34 = 0.15 - 0.074 = 0.076 \text{ [m]} \\ \bar{d} &= 0.076 + 0.218\bar{u} \text{ [m]}. \end{aligned}$$

Wartości liczbowe funkcji  $\bar{u}$  optymalnej izolacji odczytać możemy dla  $H/R = 0.4$  z wykresu przedstawionego na rys. 7.13. Tak więc maksymalna grubość izolacji na szczycie ściany tj. przy  $s = 1,4$  wynosi  $0.076 + 0.218 \cdot 0.78 = 0.25 \text{ [m]}$ . Straty ciepła  $Q_1$  wnikającego do gruntu przez izolowaną powierzchnię dna i bocznych ścian na jednostkę czasu zgodnie z (7.27) oraz wartością  $u_m = 0.45$  odczytaną z wykresu na rys. 7.14 przy  $H/L = 0.4$  wynoszą

$$Q_1 = (\pi \cdot 6^2 + 2\pi \cdot 6 \cdot 2.4) \frac{20}{\frac{0.15}{0.04} + \frac{6 \cdot 0.45}{1.1}} = 660 \text{ [J/s]}.$$

### 7.5.3 Prostopadłościenne pomieszczenie piwniczne lub magazynowe

Przedstawimy optymalne rozwiązanie problemu izolacji termicznej prostopadłościennego pomieszczenia o wysokości  $H$  i wymiarach boków w planie  $L, L_1$  przedstawionego schematycznie na rys. 7.15. Postacie funkcji  $\tilde{u}$  optymalnej izolacji, wyznaczonej numerycznie



Rys. 7.15.

dla stosunku  $L_1/L = 1, 2, 5$  boków oraz  $H/L = 0.4$  przedstawiono na rys. 7.16. W odniesieniu do płyty podłogowej obejmującej obszar określony przez  $z = -H/L, 0 < x < 1, 0 < y < L_1/L$  rzędne  $\tilde{u}$  są określone na przecięciu współrzędnych  $x, y$ . Rzędne funkcji  $\tilde{u}$  na ścianach bocznych w obszarach  $y = L_1/L, 0 < x < 1, -H/L < z < 0$  i  $x = 1, 0 < y < L_1/L, -H/L < z < 0$  są odpowiednio określone na przecięciach  $x, z$  oraz  $y, z$ . Współrzędne  $x, y, z$  punktów przestrzennej siatki wskazano na zewnątrz trzech prostopadłościanów zestawień wartości  $\tilde{u}$ . Wartości  $u_m$  i  $u_{max} - u_m$  odpowiadające stosunkowi  $L_1/L = 1, 2, 5$  wymiarów boków płyty podłogowej przedstawiono w zestawieniu

$L_1/L$	1	2	5
$u_m$	0.48	0.66	0.80
$u_{max} - u_m$	0.39	0.45	0.46

$$H/L = 0.4$$

**Przykład.** Określmy optymalną zmienną grubość  $\tilde{d}$  izolacji ścian i płyty podłogowej prostopadłościennego pomieszczenia – komory oraz straty ciepła do otaczającego środowiska gruntowego przyjmując następujące dane:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1.1 \text{ [J/ms}^\circ\text{C]}, \\ \lambda_i &= 0.04 \text{ [J/ms}^\circ\text{C]}, \\ T_1 - T_0 &= 20 \text{ [}^\circ\text{C]}, \\ 2L &= 10.63 \text{ [m]}, \\ 2L_1 &= 10.63 \text{ [m]}, \\ L_1/L &= 1, \\ H &= 2.13 \text{ [m]}, \\ H/L &= 0.4, \\ d_m &= 0.15 \text{ [m]} \end{aligned}$$

		x							
		20	30	40	50	20	30	40	50
20	4	30	32	34	37	32	30	28	26
30	14	35	37	39	42	37	35	33	31
40	24	40	42	44	47	42	40	38	36
50	34	45	47	49	52	47	45	43	41
60	44	55	57	59	62	57	55	53	51
70	54	65	67	69	72	67	65	63	61
80	64	75	77	79	82	77	75	73	71
90	74	85	87	89	92	87	85	83	81
100	84	95	97	99	102	97	95	93	91

 $u_{p,1} = 1 \text{ m/s} \cdot 0,4$ 

		x							
		20	30	40	50	20	30	40	50
20	20	22	24	27	30	27	25	23	21
30	30	32	34	37	40	37	35	33	31
40	40	42	44	47	50	47	45	43	41
50	50	52	54	57	60	57	55	53	51
60	60	62	64	67	70	67	65	63	61
70	70	72	74	77	80	77	75	73	71
80	80	82	84	87	90	87	85	83	81
90	90	92	94	97	100	97	95	93	91
100	100	102	104	107	110	107	105	103	101

 $u_{p,2} = 2 \text{ m/s} \cdot 0,4$ 

		x							
		1,00	2,50	5,00	7,50	10,00	12,50	15,00	17,50
20	20	20	20	21	22	24	26	28	30
30	30	30	31	32	33	35	37	39	41
40	40	40	41	42	43	45	47	49	51
50	50	50	51	52	53	55	57	59	61
60	60	60	61	62	63	65	67	69	71
70	70	70	71	72	73	75	77	79	81
80	80	80	81	82	83	85	87	89	91
90	90	90	91	92	93	95	97	99	101
100	100	100	101	102	103	105	107	109	111

 $u_{p,3} = 3 \text{ m/s} \cdot 0,4$ 

Rys. 7.16.

Na podstawie wzorów (7.29-7.30) oraz uwzględnieniu danych wartości liczbowych oraz wartości  $u_{max} - u_m = 0,39$  odczytanych z zestawienia dla  $L_1/L = 1$  znajdujemy:

$$d_{min} = 0,15 - \frac{0,04}{1,1} \cdot 5,32 \cdot 0,39 = 0,15 - 0,075 = 0,075 \text{ [m]},$$

$$\bar{d} = 0,075 + \frac{0,04}{1,1} \cdot 5,32 \bar{u} = 0,075 + 0,193 \bar{u} \text{ [m]}.$$

Rzędne funkcji  $\bar{u}$  określono na rysunku 7.16 w pierwszym tabelarycznym zestawieniu odpowiadającym  $L_1/L$ .

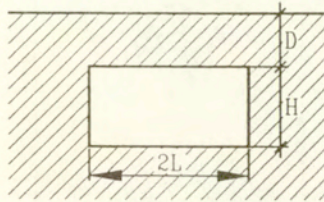
Straty ciepła  $Q_1 = (10,63^2 + 4 \cdot 10,63 \cdot 2,13)q_1$ , wnikającego do gruntu przez izolowaną powierzchnię płyty posadzki i ścian bocznych pomieszczenia na jednostkę czasu zgodnie ze wzorem (7.27) oraz wartością  $u_m = 0,48$  określoną w zestawieniu wynoszą:

$$Q_1 = (10,63^2 + 4 \cdot 10,63 \cdot 2,13) \frac{20}{0,04 + \frac{5,32}{1,1} \cdot 0,48} = 670 \text{ [J/s]}.$$

## 7.6 Optymalne rozmieszczenie izolacji termicznej obiektów całkowicie zagłębionych w gruncie

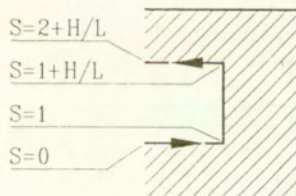
Obiekty takie jak rurociągi transportu ciepła, tunele, przepusty, z uwagi na ich istotny wzdłużny wymiar przekraczający wielokrotnie wymiary poprzeczne, są szczególnie narażone na straty ciepła. Dlatego też problem ograniczania strat ciepła dzięki odpowiednio rozwiązanej izolacji ma duże znaczenie gospodarcze.

Rozpatrzmy przypadek obiektu o przekroju prostokątnym i wymiarach: wysokości  $H$  i szerokości  $2L$  oraz długości wielokrotnie przekraczającej wymiary przekroju. To ostatnie założenie zezwala na traktowanie z dostateczną dokładnością problemu przepływu ciepła jako dwuwymiarowego w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku wzdłużnego obiektu. Górna płaszczyzna obiektu leży na głębokości  $D$  poniżej powierzchni gruntu.



Rys. 7.17.

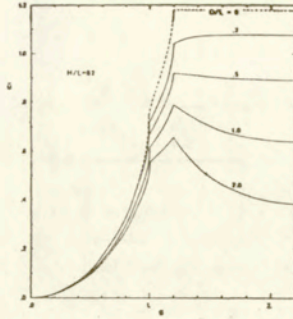
Przedstawimy wykresy umożliwiające określenie optymalnego rozkładu izolacji termicznej na powierzchniach płyty spągowej, ścian bocznych oraz płyty stropowej. W tym celu wprowadzono bezwymiarową współrzędną biegnącą  $S$  określoną w przedziale  $S(0, 2 = H/L)$ , obejmującą symetryczną połowę przekroju poprzecznego, w sposób wskazany na rys. 7.18. Punktem startu  $S = 0$  jest środek płyty spągowej,  $S = 1$  wyzna-



Rys. 7.18.

cza naroże łączące tę płytę ze ścianą,  $S = 1 + H/L$  - naroże łączące płytę stropową ze ścianą boczną,  $S = 2 + H/L$  środek płyty stropowej. Postacie funkcji  $\tilde{u}$  optymalnej izolacji określone wzdłuż współrzędnej biegnącej  $0 \leq S \leq 2 + H/L$  przekroju prostokątnego

wyznaczone numerycznie dla stosunków  $H/L = 0.2, 0.5, 1.0, 2.0$  przedstawiono odpowiednio na wykresach (7.19 - 7.22) w zależności od wielkości zagłębienia  $D$  tj. przy  $D/L = 0, 0.2, 0.3, 1.0, 2.0$ . Przy czym krzywe oznaczone linią przerywaną odpowiadają granicznemu przypadkowi  $D/L = 0$  rozpatrzonemu poprzednio. Wartości średnie  $u_m$



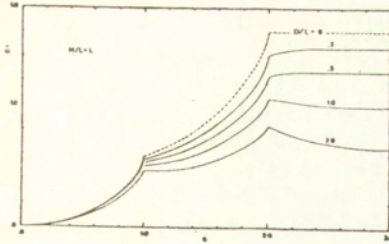
Rys. 7.19.



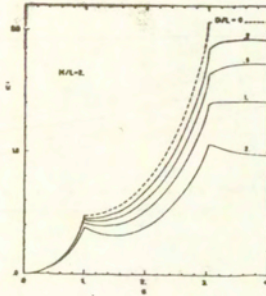
Rys. 7.20.

oraz wielkości  $u_{max} - u_m$  są określone na wykresach przedstawionych odpowiednio na rys. 7.23 i rys. 7.24, jako funkcje parametrów geometrycznych  $H/L$  i  $D/L$ . Mając określoną postać funkcji  $\bar{u}$  oraz wielkości  $u_{max} - u_m$ ,  $u_m$  optymalną zmienną grubość izolacji możemy wyznaczyć na podstawie wzorów (7.29 - 7.30). Natomiast całkowite straty ciepła  $Q = 2(H + 2L)q_1$  wnikającego do gruntu na jednostkę długości obiektu w czasie 1 [s] określić możemy ze wzoru (7.27).

**Przykład.** Określmy funkcję optymalnego rozmieszczenia izolacji prostokątnego tunelu



Rys. 7.21.



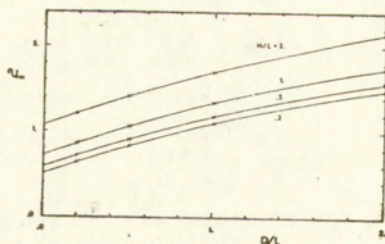
Rys. 7.22.

przyjmując następujące dane:

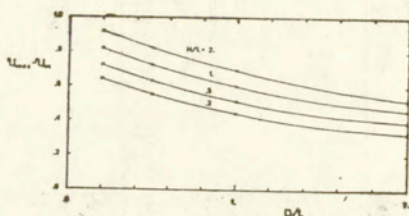
$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1.2 \text{ [J/ms}^\circ\text{C]}, \\ \lambda_i &= 0.04 \text{ [J/ms}^\circ\text{C]}, \\ T_1 - T_0 &= 13 \text{ [}^\circ\text{C]}, \\ 2L &= 8 \text{ [m]}, \\ H &= 4 \text{ [m]}, \\ D &= 4 \text{ [m]}, \\ d_m &= 0.10 \text{ [m]}. \end{aligned}$$

Dla wynikających z powyższych danych stosunków  $H/L = 1$ ,  $D/L = 1$  na podstawie (7.29) i po uwzględnieniu zgodnych z rys. 7.23 wartości  $u_m = 0.61$  mamy

$$\begin{aligned} d_{min} &= 0.10 - \frac{0.04}{1.2} \cdot 4 \cdot 0.61 = 0.10 - 0.081 = 0.019 \text{ [m]} \\ \bar{d} &= 0.19 + 0.133\bar{u} \end{aligned}$$



Rys. 7.23.



Rys. 7.24.

Stąd na podstawie wykresu na rys. 7.21 znajdujemy

$$\begin{aligned} \bar{d} &= 0.019 \text{ [m]} && \text{dla } s = 0, \\ \bar{d} &= 0.019 + 0.133 \cdot 0.51 = 0.087 \text{ [m]} && \text{dla } s = 1, \\ \bar{d} &= 0.019 + 0.133 \cdot 1.06 = 0.160 \text{ [m]} && \text{dla } s = 2, \\ \bar{d} &= 0.019 + 0.133 \cdot 0.99 = 0.151 \text{ [m]} && \text{dla } s = 3. \end{aligned}$$

Straty ciepła wnikającego do gruntu przez zaizolowaną powierzchnię tunelu o długości 1 [m] w czasie 1 [s] zgodnie z (7.27) oraz wartością  $u_m = 1.34$  odczytaną z rys. 7.23 wynoszą

$$Q_1 = (2.8 + 2.4) \frac{13^\circ\text{C}}{\frac{0.10}{0.04} + \frac{4}{1.2} \cdot 1.34} = 45 \text{ [J/sm]}.$$

## 7.7 Dodatek

Przedstawimy dowód poprawności rozwiązania zagadnienia brzegowego funkcji  $u(x, z)$  stałego przepływu ciepła spełniającej równanie obszarowe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad -\infty < x < \infty, z \leq 0 \quad (7.37)$$

oraz warunki brzegowe

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 && x > 1, x < -1 \\ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} &= 1 && -1 < x < 1. \end{aligned} \quad (7.38)$$



Wykażemy, że równanie obszarowe (7.37) oraz warunki brzegowe (7.38) spełnia funkcja  $u(x, z)$  o następującej postaci

$$u(x, z) = \sqrt{\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f} + z, \quad (7.39)$$

gdzie

$$f = \frac{1 + z^2 - x^2}{2} \quad (7.40)$$

### 7.7.1 Sprawdzenie równania obszarowego $\Delta u = 0$

Obliczmy następujące pochodne

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f}} \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f), \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f}} \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f) + 1, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{1}{4(\sqrt{\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f})^3} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f) \right]^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -\frac{1}{4(\sqrt{\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f})^3} \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f) \right]^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f), \end{aligned} \quad (7.41)$$

Z kolei uwzględniając

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = z \quad (7.42)$$

znajdujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f) &= \frac{1}{\sqrt{f^2 + x^2 z^2}} (xz^2 - fx) - x, \\ \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f) &= \frac{1}{\sqrt{f^2 + x^2 z^2}} (x^2 z + fz) + z, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f) &= -\frac{1}{(\sqrt{f^2 + x^2 z^2})^3} (xz^2 - fx)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{f^2 + x^2 z^2}} (x^2 + z^2 - f) - 1, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f) &= -\frac{1}{(\sqrt{f^2 + x^2 z^2})^3} (x^2 z + fz)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{f^2 + x^2 z^2}} (x^2 + z^2 + f) + 1. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Należy wykazać, że

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \\ &= -\frac{1}{4(\sqrt{\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f})^3} \cdot \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f) \right]^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f) \right]^2 \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f}} \cdot \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Obliczmy składnik w pierwszej parze nawiasów klamrowych równania (7.44)

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f) \right]^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f) \right]^2 = \\
 & = \left[ \frac{1}{\sqrt{f^2 + x^2 z^2}} (xz^2 - fx) - x \right]^2 + \left[ \frac{1}{\sqrt{f^2 + x^2 z^2}} (x^2 z + fz) - z \right]^2 = \\
 & = \frac{1}{f^2 + x^2 z^2} [(xz^2 - fx)^2 + (x^2 z + fz)^2] + x^2 + z^2 + \\
 & \quad + \frac{2}{\sqrt{f^2 + x^2 z^2}} [-x^2 z^2 + fx^2 + x^2 z^2 + fz^2] = \\
 & = 2(x^2 + z^2) + 2 \frac{f(x^2 + z^2)}{\sqrt{f^2 + x^2 z^2}} = \\
 & = 2(x^2 + z^2) \frac{\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f}{\sqrt{f^2 + x^2 z^2}},
 \end{aligned} \tag{7.45}$$

gdzie skorzystano z tożsamości

$$(xz^2 - fx)^2 + (x^2 z + fz)^2 = (x^2 + z^2)(f^2 + x^2 z^2). \tag{7.46}$$

Obliczmy z kolei składnik w drugiej parze nawiasów klamrowych równania (7.44)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f) = \\
 & = -\frac{1}{(\sqrt{f^2 + x^2 z^2})^3} [(xz^2 - fx)^2 + (x^2 z + fz)^2] + \frac{2(x^2 + z^2)}{\sqrt{f^2 + x^2 z^2}} = \\
 & = \frac{x^2 + z^2}{\sqrt{f^2 + x^2 z^2}},
 \end{aligned} \tag{7.47}$$

gdzie ponownie skorzystano z tożsamości (7.46). Ostatecznie podstawiając (7.45) i (7.47) do (7.44) znajdujemy

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} & = -\frac{1}{4(\sqrt{f^2 + x^2 z^2})^3} \cdot 2(x^2 + z^2) \frac{\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f}{\sqrt{f^2 + x^2 z^2}} + \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{f^2 + x^2 z^2} + f} \frac{x^2 + z^2}{\sqrt{f^2 + x^2 z^2}} = 0,
 \end{aligned} \tag{7.48}$$

co było do okazania.

## 7.7.2 Sprawdzenie warunków brzegowych

Sprawdźmy spełnienie przez funkcję  $u(x, z)$  określoną równaniem (7.39) pierwszego warunku brzegowego (7.38)<sub>1</sub>. Uwzględniając, że dla  $z = 0$  funkcja  $f$  (7.40) ma postać

$$f = \frac{1 - x^2}{2}, \tag{7.49}$$

funkcja  $u(x, 0)$  określona jest wzorem

$$u(x, 0) = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{1 - x^2}{2}\right)^2 + \frac{1 - x^2}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{|1 - x^2| + 1 - x^2}. \tag{7.50}$$

W rozpatrywanym przedziale  $x > 1$ ,  $x < -1$  funkcja  $u(x, 0)$  przyjmuje postać

$$u(x, 0) = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{-(1 - x^2) + 1 - x^2} = 0 \tag{7.51}$$