



POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

**ROZMYTOŚĆ I BIPOLARNOŚĆ
W INTELIGENTNYM WYSZUKIWANIU
INFORMACJI**

Sławomir Zadrozny

Warszawa 2013



iBS PAN

**POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH**

**Seria: BADANIA SYSTEMOWE
Tom 73**

**Redaktor naukowy:
Prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum**

Warszawa 2013

Rada redakcyjna serii: BADANIA SYSTEMOWE

Prof. Olgierd Hryniewicz - przewodniczący

Prof. Jakub Gutenbaum – redaktor naczelny

Prof. Janusz Kacprzyk

Prof. Tadeusz Kaczorek

Prof. Roman Kulikowski

Prof. Marek Libura

Prof. Krzysztof Malinowski

Prof. Zbigniew Nahorski

Prof. Marek Niezgódka

Prof. Roman Słowiński

Prof. Jan Studziński

Prof. Stanisław Walukiewicz

Prof. Andrzej Weryński

Prof. Antoni Żochowski

iBS PAN

**POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH**

Sławomir Zadrozny

**ROZMYTOŚĆ I BIPOLARNOŚĆ
W INTELIGENTNYM WYSZUKIWANIU
INFORMACJI**

Warszawa 2013

**Copyright © by Instytut Badań Systemowych PAN
Warszawa 2013**

Autorzy:

Dr hab. Sławomir Zadrozny

Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa

Slawomir.Zadrozny@ibspan.waw.pl

Recenzenci:

dr hab. inż. Maciej Krawczak

dr Marek Reformat

Skład: Aneta M. Pielak

Wydawca:

Instytut Badań Systemowych

Polskiej Akademii Nauk

Newelska 6, 01-447 Warszawa

www.ibspan.waw.pl

ISSN 0208-8029

ISBN 83-894-7551-0

Rozdział 2

Wprowadzenie do logiki rozmytej

Logika rozmyta to pojęcie bardzo szerokie. W pewnym uproszczeniu można stwierdzić, że jej celem jest przede wszystkim modelowanie *informacji niedoskonalej*, w szczególności związanej z użyciem języka naturalnego. Inaczej to ujmując, logika rozmyta zajmuje się sposobami percepcji, reprezentacji i przetwarzania informacji przez człowieka, dla którego język naturalny jest w tym względzie podstawowym narzędziem.

Termin *logika rozmyta* może być rozumiany na wiele różnych sposobów. Często utożsamia się go z *teorią zbiorów rozmytych*, zapoczątkowaną słynnym artykułem Lotfi Zadeha [236] wprowadzającym pojęcie *zbioru rozmytego*. Tematyka badań prowadzonych w tym obszarze jest bliska klasycznej teorii mnogości. Drugą możliwą interpretacją tego terminu utożsamia go z pewnym podejściem do formalizacji *języka naturalnego* i *sposobu myślenia człowieka*. Wykracza ono znacznie poza schematy logiki klasycznej wprowadzając nowy aparat pojęciowy w celu uwzględnienia właściwości języka naturalnego. Charakterystyczne pojęcia logiki rozmytej w tym obszarze to *zmienna lingwistyczna*, *rozumowanie przybliżone* czy *kwantyfikatory lingwistyczne*. W stosunku do tej interpretacji używa się określenia *logika rozmyta w szerszym sensie*. Inny, popularny ostatnio, termin alternatywny to *obliczenia na słowach* (ang. *computing with words*). Wreszcie, logika rozmyta rozumiana jest jako pewna *logika wielowartościowa*, z nieskończonym zbiorem *wartości logicznych*, najczęściej w postaci przedziału $[0,1]$. Rozważa się tu różne interpretacje spójników logicznych i uogólnienia innych pojęć logiki klasycznej na przypadek występowania wielu *stopni prawdziwości* zdania czy formuły.

Wyczerpujące omówienie zagadnień związanych z logiką rozmytą znaleźć można w książkach¹: Czogały i Pedrycza [73], Kacprzyka [127], Klira i Yuana [140], Rutkowskiej i in. [193], Słowińskiego [204], Novaka i in. [170], Piegata [180], Hajka [120] i Rutkowskiego [194, 195, 196].

2.1 Pojęcie zbioru rozmytego

Klasyczna teoria zbiorów nie pozwala bezpośrednio opisywać własności, które mają charakter *stopniowalny*. Typowym przykładem jest tu własność *młody*. Możemy ją reprezentować z użyciem klasycznego zbioru jako na przykład przedział liczb od 0 do 30, przyjmując że każda liczba z tego przedziału określa wiek człowieka. Uznajemy zatem, że osoba 30-letnia jest młoda, a osoba 31-letnia już nie. Niezależnie od tego, jaką liczbą x zastąpimy 30, zawsze będziemy musieli uznać $x + 1$ za wiek człowieka, który młodym już nie jest - co jest w oczywisty sposób niezgodne z intuicją. Zagadnienie to można rozwiązać zakładając, że element może należeć do zbioru do *pewnego stopnia* i, co się z tym wiąże, może posiadać własność reprezentowaną przez ten zbiór do *pewnego stopnia*. Takie własności nazywa się *rozmytymi* (ang. *fuzzy*) i modeluje się z użyciem pojęć teorii zbiorów rozmytych. Z kolei własności o charakterze *binarnym*, poddające się modelowaniu na gruncie klasycznej teorii mnogości, nazywa się *ostrymi* (ang. *crisp*).

Zbiór rozmyty A w przestrzeni U opisujemy podając *funkcję przynależności* jego elementów:

$$\mu_A : U \longrightarrow [0, 1] \quad (2.1)$$

określającą dla każdego elementu $u \in U$, stopień *przynależności* $\mu_A(u)$ do zbioru A , przy czym $\mu_A(u) = 0$ oznacza *całkowitą nieprzynależność*, $\mu_A(u) = 1$ *całkowitą przynależność*, zaś wartości pośrednie $0 < \mu_A(u) < 1$ oznaczają *przynależność częściową*.

Funkcja przynależności jest więc odpowiednikiem *funkcji charakterystycznej* zbioru $\varphi_A : U \longrightarrow \{0, 1\}$, stosowanej w klasycznej teorii mnogości.

W przykładzie dotyczącym własności *młody*, jako przestrzeń U można przyjąć zbiór liczb całkowitych z przedziału $[0, 150]$. *Zbiór rozmyty* reprezentujący własność *młody* można wtedy określić z użyciem następującej

¹Wymieniamy je w porządku chronologicznym.

funkcji przynależności:

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 1 & \text{dla } u \leq 30 \\ -0.1u + 4 & \text{dla } 30 < u \leq 40 \\ 0 & \text{dla } u > 40 \end{cases} \quad (2.2)$$

Konkretna postać funkcji przynależności ma zazwyczaj charakter *subiektywny*. Dla każdego człowieka *młody* wiek może oznaczać coś zupełnie innego. Należy to uwzględnić w praktycznych zastosowaniach teorii zbiorów rozmytych. Na przykład przy wyszukiwaniu czy przetwarzaniu informacji jest to oczywiste. Każdy z użytkowników ma własne *potrzeby informacyjne, preferencje, intencje* i można uznać, że odpowiednia interpretacja terminów, takich jak *młody*, stanowi element ich określenia.

Dotychczasowe rozważania, łącznie z przykładem funkcji przynależności (2.2), oddają intuicje związane z pojęciem zbioru rozmytego. Jako formalną definicję tego pojęcia możemy przyjąć następujące określenie.

Definicja 2.1. *Zbiór rozmyty* A w przestrzeni rozważań $U = \{u_i\}$ określa się jako zbiór par:

$$A = \{(\mu_A(u), u)\} \quad (2.3)$$

gdzie $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$ jest *funkcją przynależności* zbioru rozmytego A , a wartość $\mu_A(u) \in [0, 1]$ jest *stopniem przynależności* elementu $u \in U$ do zbioru rozmytego A .

Najczęściej będziemy jednak utożsamiali zbiór rozmyty A z jego funkcją przynależności μ_A .

Rodzinę wszystkich zbiorów rozmytych określonych w danej przestrzeni rozważań U oznaczać będziemy jako $\mathcal{F}(U)$.

Zastosowanie zbioru rozmytego $A \in \mathcal{F}(U)$ do modelowania pewnego terminu, takiego jak “młody”, pozwala na wyróżnienie elementów $x \in \Omega$, które:

- w pełni odpowiadają danemu terminowi ($\mu_A(x) = 1$),
- całkowicie nie odpowiadają danemu terminowi ($\mu_A(x) = 0$),
- do pewnego stopnia odpowiadają temu terminowi ($\mu_A(x) \in (0, 1)$).

Jeśli przestrzeń rozważań jest skończona, czyli $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, to często zbiór rozmyty A w U zapisuje się jako:

$$A = \mu_A(u_1)/u_1 + \dots + \mu_A(u_n)/u_n = \sum_{i=1}^n \mu_A(u_i)/u_i \quad (2.4)$$

przy czym symbole “+” i “ \sum ” mają tu charakter umowny, niezwiązany z ich interpretacją arytmetyczną. Zwykle pomija się w tym zapisie te pary “ $\mu_A(u)/u$ ”, w których $\mu_A(u) = 0$. W niniejszej pracy również będziemy używać tego zapisu, który – choć raczej nieformalny – pozwala na zwięzły zapis zbiorów rozmytych.

Pojęcie stopnia przynależności do zbioru rozmytego ma swój odpowiednik w pojęciu *wartości logicznej (stopnia prawdy)* stosowanym w logice wielowartościowej (por. p. 2.2). Niech termin “młody” będzie nadal reprezentowany przez zbiór rozmyty o funkcji przynależności (2.2). Stwierdzenie “Jan jest młody” będzie wtedy całkowicie prawdziwe, o ile wiek Jana należy do przedziału $[0,30]$. Stwierdzenie to będzie całkowicie fałszywe, jeśli wiek Jana jest większy od 40 lat i będzie prawdziwe *do pewnego stopnia*, jeśli wiek Jana należy do przedziału $[30,40]$.

Teoria zbiorów rozmytych obok samego pojęcia zbioru rozmytego obejmuje również wiele innych pojęć i operacji, najczęściej w sposób naturalny zaadaptowanych z klasycznej teorii mnogości. Przytoczymy niektóre z nich, przydatne dla naszych rozważań w dalszej części książki.

Definicja 2.2. *k-tą potęgą zbioru rozmytego* $A \in \mathcal{F}(U)$, oznaczaną jako $A^k \in \mathcal{F}(U)$, nazywamy zbiór rozmyty o następującej funkcji przynależności:

$$\mu_{A^k}(u) = [\mu_A(u)]^k, \quad \forall u \in U \quad (2.5)$$

przy czym k jest dowolną nieujemną liczbą rzeczywistą.

Definicja 2.3. Zbiór rozmyty $A \in \mathcal{F}(U)$ jest *zawarty* w zbiorze rozmytym $B \in \mathcal{F}(U)$, co zapisuje się $A \subseteq B$, wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\mu_A(u) \leq \mu_B(u), \quad \forall u \in U \quad (2.6)$$

Dla scharakteryzowania zbioru rozmytego można posłużyć się pewnymi, związanymi z nim, zbiorami *nierozmytymi* lub ich rodzinami.

Definicja 2.4. *Nośnikiem*² zbioru rozmytego $A \in \mathcal{F}(U)$, oznaczanym jako $\text{supp}(A)$, nazywamy następujący zbiór *nierozmyty*:

$$\text{supp}(A) = \{u \in U : \mu_A(u) > 0\} \quad (2.7)$$

²ang. *support*

Definicja 2.5. *Rdzeniem*³ zbioru rozmytego $A \in \mathcal{F}(U)$, oznaczanym jako $\text{core}(A)$, nazywamy następujący zbiór *nierozmyty*:

$$\text{core}(A) = \{u \in U : \mu_A(u) = 1\} \quad (2.8)$$

Bardzo ważnym jest pojęcie α -przekroju, który nazywany jest również *zbiorem α -poziomowym* lub α -cięciem (ang. α -cut) zbioru rozmytego.

Definicja 2.6. Dla ustalonej wartości α z przedziału $(0, 1]$ α -przekrojem zbioru rozmytego $A \in \mathcal{F}(U)$ nazywamy zbiór *nierozmyty* $A_\alpha \subseteq U$, który określa się następująco:

$$A_\alpha = \{u \in U : \mu_A(u) \geq \alpha\} \quad (2.9)$$

Łatwo zauważyć, że *rdzeń* $\text{core}(A)$ zbioru rozmytego A jest w istocie jego 1.0-przekrojem $A_{1.0}$.

Pojęcie to pozwala na utożsamienie zbioru rozmytego A z rodziną jego wszystkich α -przekroi A_α dla $\alpha \in [0, 1]$. Używa się tego utożsamienia do przeniesienia na zbiory rozmyte definicji wielu pojęć i operacji dotyczących zbiorów nierozmytych.

Dla zbiorów rozmytych określono *odpowiedniki* podstawowych *klasycznych operacji teoriomnogościowych*.

Definicja 2.7. Operacje *dopełnienia* “ \neg ”, *sumy* “ \cup ”, *przecięcia* “ \cap ” i *różnicy* “ \setminus ” na zbiorach rozmytych definiuje się w sposób następujący dla każdego elementu u przestrzeni rozważań U :

$$\mu_{\neg A}(u) = 1 - \mu_A(u) \quad (2.10)$$

$$\mu_{A \cup B}(u) = \max(\mu_A(u), \mu_B(u)) \quad (2.11)$$

$$\mu_{A \cap B}(u) = \min(\mu_A(u), \mu_B(u)) \quad (2.12)$$

$$\mu_{A \setminus B}(u) = \min(\mu_A(u), \mu_{\neg B}(u)) \quad (2.13)$$

Definicja 2.8. *Iloczyn kartezjański* zbiorów rozmytych $A_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $i = 1, \dots, n$, oznaczany jako $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ definiuje się jako operację, w której wyniku uzyskuje się zbiór rozmyty $B \in \mathcal{F}(U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n)$, taki że

$$\mu_B(u_1, u_2, \dots, u_n) = \min(\mu_{A_1}(u_1), \mu_{A_2}(u_2), \dots, \mu_{A_n}(u_n)) \quad \forall u_i \in U_i \quad (2.14)$$

³Nazywanym również *jądrem* (ang. *core*).

Istotną rolę w teorii zbiorów rozmytych odgrywa *zasada rozszerzania* [237]. Określa ona interpretację zależności zdefiniowanych dla wielkości *nierozmytych* w przypadku, gdy stosuje się je dla wielkości *rozmytych*. Przykładowo, stosując zasadę rozszerzania, bezpośrednio otrzymuje się definicje *podstawowych operacji na liczbach rozmytych*. W ogólnym przypadku zasadę rozszerzania można określić następująco.

Definicja 2.9. Oznaczmy jako f funkcję

$$f : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \longrightarrow V$$

Wtedy *zasada rozszerzania* określa jej rozmyty odpowiednik, funkcję g

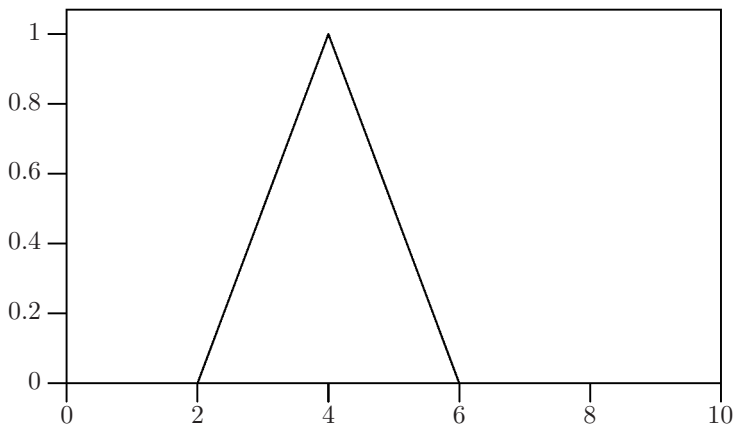
$$g : \mathcal{F}(U_1) \times \mathcal{F}(U_2) \times \dots \times \mathcal{F}(U_n) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$$

taką, że

$$g(A_1, A_2, \dots, A_n) = B$$

gdzie $A_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $B \in \mathcal{F}(V)$ oraz

$$\mu_B(v) = \max_{\substack{(u_1, \dots, u_n) \in U_1 \times \dots \times U_n: \\ v = f(u_1, \dots, u_n)}} \min(\mu_{A_1}(u_1), \mu_{A_2}(u_2), \dots, \mu_{A_n}(u_n)) \quad (2.15)$$



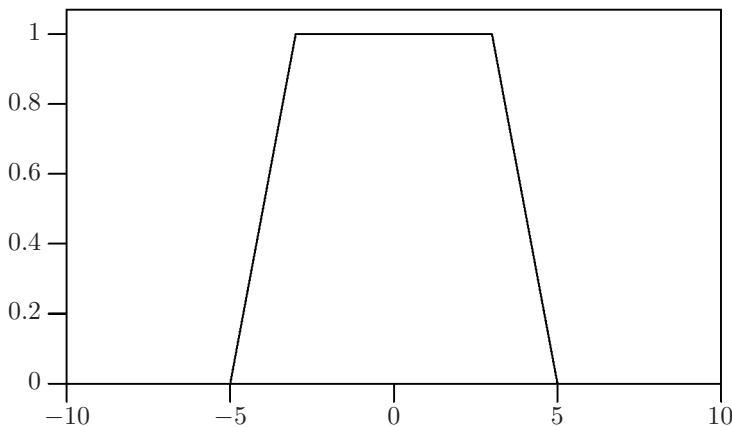
Rysunek 2.1: Funkcja przynależności trójkątnej liczby rozmytej

Szczególną rolę w zastosowaniach spełniają zbiory rozmyte określone na zbiorze liczb rzeczywistych \mathcal{R} . Wyróżnia się ich podklasę zwaną *liczbami rozmytymi*.

Definicja 2.10 ([140]). *Liczba rozmyta* to zbiór rozmyty $A \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ spełniający następujące warunki:

1. A jest zbiorem normalnym,
2. A_α jest przedziałem domkniętym, $\forall \alpha \in (0, 1]$,
3. nośnik $\text{supp}(A)$ zbioru A jest ograniczony.

Ze względów praktycznych często przyjmuje się funkcję przynależności liczby rozmytej w postaci odcinkami liniowej. Szczególnie popularne w zastosowaniach są funkcje przynależności, których wykres ma postać trójkąta bądź trapezu, zilustrowane na rys. 2.1 i rys. 2.2. Liczby rozmyte, określone z użyciem takich funkcji przynależności, nazywamy odpowiednio *trójkątnymi* i *trapezoidalnymi*. W takim przypadku dla określenia funkcji przynależności wystarczy podać tylko trzy bądź cztery punkty na osi odciętych.



Rysunek 2.2: Funkcja przynależności trapezoidalnej liczby rozmytej

Istotnym dla naszych dalszych rozważań jest określenie dla *zbiorów rozmytych* odpowiednika klasycznego pojęcia *liczności zbioru*. W niniejszej pracy interesować nas będzie wyłącznie licznosc zbiorów rozmytych o nośniku skończonym, określona następującą definicją.

Definicja 2.11. *Licznosc zbioru rozmytego* $A = \mu_A(u_1)/u_1 + \dots + \mu_A(u_n)/u_n$, zwaną *sigma-count* i oznaczaną $\sum \text{Count}(A)$, określa się jako

$$\sum \text{Count}(A) = \sum_{i=1}^n \mu_A(u_i) \quad (2.16)$$

Zgodnie z tą definicją licznosc zbioru rozmytego jest liczba rzeczywista równa sumie stopni przynależności wszystkich jego elementów.

Przykład 2.1. Dla $A = 1/u_1 + 1/u_2 + 0.8/u_3 + 0.4/u_4 + 0.2/u_5$ mamy

$$\sum \text{Count}(A) = 1 + 1 + 0.8 + 0.4 + 0.2 = 3.4$$

Tak zdefiniowana licznosc jest dogodna w zastosowaniach ze wzgledu na swoja prostote.

Stosuje sie rowniez pojecie *licznosci wzglednej zbioru rozmytego*. W niniejszej pracy przyjmiemy nastepujaca jej definicje.

Definicja 2.12. *Licznosc wzgledna* (ang. *relative sigma-count*) zbioru rozmytego $A = \mu_A(u_1)/u_1 + \dots + \mu_A(u_n)/u_n$ wzgledem zbioru rozmytego $B = \mu_B(u_1)/u_1 + \dots + \mu_B(u_n)/u_n$, oznaczana $\sum \text{Count}(A | B)$, określa sie jako

$$\sum \text{Count}(A | B) = \frac{\sum \text{Count}(A \cap B)}{\sum \text{Count}(B)} = \frac{\sum_{i=1}^n \min(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i))}{\sum_{i=1}^n \mu_B(u_i)} \quad (2.17)$$

Licznosc $\sum \text{Count}(A)$ jest najpopularniejszym przykladem *licznosci nierozmytej*, to jest takiej, ktora wyraża sie liczba rzeczywista. Stosuje sie rowniez inne okreslenia licznosci zbioru rozmytego. Wyczerpujace omowienie podejsc do pojecia licznosci zbioru rozmytego mozna znalezc w pracach [187, 220, 221, 222, 80].

W naszych dalszych rozważaniach wazna role odgrywa pojecie *relacji rozmytej*.

Definicja 2.13. *Relacje rozmyta n-argumentowa* R określa sie jako zbior rozmyty $R \in \mathcal{F}(V)$, okreslony w przestrzeni V , będucej iloczynem kartezjańskim n przestrzeni rozważań U_i ($i = 1, \dots, n$)

$$V = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \quad (2.18)$$

i utozsamia z funkcja przynależności $\mu_V(u_1, \dots, u_n)$.

Wazna role w zastosowaniach odgrywa rowniez rozmyty odpowiednik relacji rownowazności.

Definicja 2.14. *Rozmyta relacja równoważności* to 2-argumentowa (*binarna*) relacja rozmyta określona na $V = U \times U$ posiadająca następujące własności:

$$\begin{aligned} \forall u \in U \quad \mu_R(u, u) &= 1 && \text{zwrotność} \\ \forall u, v \in U \quad \mu_R(u, v) &= \mu_R(v, u) && \text{symetria} \\ \forall u, w \in U \quad \mu_R(u, w) &\geq \max_{v \in U} \min(\mu_R(u, v), \mu_R(v, w)) && \text{przechodność} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dla *relacji rozmytych* można zdefiniować *odpowiedniki działań klasycznej algebry relacji*. Postać działań klasycznych, takich jak *suma* czy *przecięcie*, wynika wprost z definicji tych operacji dla zbiorów rozmytych określonych wzorami (2.11)-(2.12). Szczegółowo opisuje się te i inne operacje na relacjach rozmytych przy omawianiu *algebry relacji rozmytych* jako języka *zapytań nieprecyzyjnych* (p. 4.1, s. 82).

2.1.1 Rozszerzenia pojęcia zbioru rozmytego

W literaturze zaproponowano różne rozszerzenia oryginalnego pojęcia zbioru rozmytego, wprowadzonego przez Zadeha [236]. Wiele z nich znalazło zastosowanie w obszarze wyszukiwania informacji. Wprowadzimy teraz definicje niektórych spośród nich.

Definicja 2.15. Podwójny zbiór rozmyty⁴ A w przestrzeni U utożsamiamy z dwiema funkcjami przynależności:

$$\pi_A : U \rightarrow [0, 1] \quad (2.20)$$

$$\eta_A : U \rightarrow [0, 1] \quad (2.21)$$

które spełniają następujący warunek spójności:

$$\eta_A(u) > 0 \Rightarrow \pi_A(u) = 1 \quad \forall u \in U \quad (2.22)$$

Semantykę podwójnego zbioru rozmytego i warunku (2.22) można opisać następująco. Wartość funkcji przynależności $\pi_A(u)$ określa stopień w jakim *możliwe jest*, że element u należy do zbioru A , zaś wartość funkcji przynależności $\eta_A(u)$ określa stopień w jakim *konieczne jest*, że element u należy do zbioru A . Wtedy warunek (2.22) wyraża naturalne wymaganie, że jeśli coś jest konieczne, to musi być najpierw całkowicie

⁴ang. *twofold fuzzy set*

możliwe. Posługujemy się tu intuicyjnym rozumieniem pojęć “możliwość” i “konieczność”. Ich formalizację w obrębie logiki rozmytej stanowi *teoria możliwości*, którą pokrótce omawiamy w p. 2.1.2. Semantyka obydwu funkcji przynależności jest silnie związana z pojęciami *miary możliwości* i *miary konieczności*, co znajduje swoje odzwierciedlenie w przyjętych w def. 2.15 oznaczeniach i użyciu symbolu π zamiast μ .

Można też podwójny zbiór rozmyty potraktować jako dwa zbiory rozmyte o podanych funkcjach przynależności reprezentujące posiadaną informację o pewnym zbiorze. Zbiór rozmyty reprezentowany przez funkcję π_A potraktujemy wtedy jako określający te elementy przestrzeni rozważań, których przynależności do tego zbioru posiadana przez nas informacja *nie wyklucza* (do pewnego stopnia). Z kolei zbiór rozmyty reprezentowany przez funkcję przynależności η_A określa te elementy, których przynależność do opisywanego zbioru jest *potwierdzona* (w pewnym stopniu). Wtedy warunek (2.22) należy rozumieć jako wyrażający założenie o niesprzeczności posiadanej informacji: jeśli przynależność elementu do zbioru jest potwierdzona w stopniu niezerowym, to musi być ona również całkowicie niewykluczona (w stopniu 1).

Technicznie, warunek (2.22) można też odczytać jako stwierdzenie, że nośnik drugiego ze zbiorów rozmytych musi być podzbiorem rdzenia drugiego ze zbiorów.

Podwójne zbiory rozmyte są dogodnym narzędziem do reprezentacji informacji bipolarnej (por. p. 5.1).

Inne rozszerzenie pojęcia zbioru rozmytego określa następująca definicja.

Definicja 2.16. *Intuicjonistyczny zbiór rozmyty w sensie Atanassova*⁵ (AIFS) A w przestrzeni rozważań U określa się przez podanie jego *funkcji przynależności*:

$$\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$$

i jego *funkcji nieprzynależności*:

$$\nu_A : U \rightarrow [0, 1]$$

które spełniają następujący warunek:

$$\mu_A(u) + \nu_A(u) \leq 1 \quad \forall u \in U \quad (2.23)$$

⁵ang. *Atanassov's intuitionistic fuzzy set*

W tym rozszerzeniu, zaproponowanym przez Atanassova [2, 3], przynależność i nieprzynależność elementu do zbioru może być określona do pewnego stopnia niezależnie. W przypadku klasycznych zbiorów rozmytych element u należy do zbioru rozmytego A w stopniu $\mu_A(u)$ i *automatycznie* nie należy do niego w stopniu $1 - \mu_A(u)$. AIFS pozwala bezpośrednio reprezentować sytuację kiedy istnieją przesłanki wskazujące na przynależność elementu do zbioru, istnieją też przesłanki za jego nieprzynależnością, ale istnieją też przesłanki, które sugerują niemożność sklasyfikowania elementu jako należącego bądź nienależącego do zbioru. Wspomniane przesłanki są wtedy dla danego elementu $u \in U$ i zbioru A kwantyfikowane przez wartości, odpowiednio, $\mu_A(u)$, $\pi_A(u)$ i $1 - \mu_A(u) - \pi_A(u)$.

Opisana semantyka intuicjonistycznych zbiorów rozmytych w sensie Atanassova znajduje zastosowanie do modelowania bipolarności w ramach wyszukiwania informacji (por. p. 5.1). Należy stwierdzić, że w literaturze znaleźć można różne interpretacje AIFSów. Własności operatorów definiujących odpowiedniki operacji teoriomnogościowych na tych zbiorach wydają się sugerować, że reprezentują one raczej niepewność co do faktycznej postaci funkcji przynależności. W takim ujęciu AIFSy utożsamiane są z jeszcze innym rozszerzeniem pojęcia zbiorów rozmytych, tak zwanymi *przedziałowymi zbiorami rozmytymi* (ang. *interval valued fuzzy sets*)

Definicja 2.17. *Przedziałowy zbiór rozmyty (IVFS) A w przestrzeni rozważań U określa się przez podanie dwóch funkcji przynależności:*

$$\begin{aligned}\mu_A^u &: U \rightarrow [0, 1] \\ \nu_A^l &: U \rightarrow [0, 1]\end{aligned}$$

które spełniają następujący warunek:

$$\mu_A^l(u) \leq \mu_A^u(u) \leq 1 \quad \forall u \in U$$

Zbiory przedziałowe służą reprezentacji informacji o przynależności elementu x do zbioru wtedy kiedy jest ona niepewna i podać można jedynie przedział $[\mu_A^l(u), \mu_A^u(u)]$, w którym stopień przynależności się mieści. Zbiory przedziałowe mogą znaleźć zastosowanie przy definiowaniu semantyki terminów lingwistycznych (por. p. 2.3.1). Uzasadnione mogą być wątpliwości czy użytkownik jest w stanie, na przykład, określić swoje preferencje co do danego elementu przestrzeni rozważań w postaci

podjedynczej liczby. Bardziej komfortowym rozwiązaniem może być dla niego możliwość podania w tym celu przedziału liczb. Jeszcze bardziej radykalnym rozszerzeniem pojęcia zbiorów rozmytych w tym kierunku jest propozycja stosowania zbioru rozmytego określonego na przedziale $[0,1]$ jako wartości funkcji przynależności. Celem jest jeszcze pełniejsze wyrażenie niedoskonałości informacji posiadanej co do wartości funkcji przynależności. Rozszerzenie to nosi nazwę *zbioru rozmytego typu 2*. Zainteresowanego czytelnika odsyłamy na przykład do [165].

2.1.2 Teoria możliwości

Ważną dziedziną wyrosłą na gruncie teorii zbiorów rozmytych jest *teoria możliwości* (ang. *possibility theory*) [239, 88]. Jej podstawowe założenia można zilustrować na przykładzie. Rozważmy stwierdzenie “Jan jest *młody*”. Jest ono *nieprecyzyjne*, ponieważ nie przypisuje jednej określonej wartości wiekowi Jana (wiek Jana będziemy traktować jako atrybut i oznaczymy X). Powiemy, że stwierdzenie takie określa *rozkład możliwości*⁶ (ang. *possibility distribution*) π_X

$$\pi_X : U \longrightarrow [0, 1] \quad (2.24)$$

na zbiorze U dopuszczalnych wartości tego atrybutu - w tym przypadku jako zbiór dopuszczalnych wartości możemy przyjąć przedział $[0,150]$. Rozkład ten przypisuje każdej liczbie $u \in [0,150]$ liczbę z przedziału $[0,1]$ określającą na ile jest *możliwe*, iż u jest faktycznym wiekiem Jana. Przyjmuje się następującą interpretację: $\pi_X(u) = 1.0$ oznacza, że jest *całkowicie możliwe*, że u jest faktyczną wartością atrybutu X - wiekiem Jana; $\pi_X(u) = 0.0$ zaś oznacza, że *nie jest możliwe*, że u jest wartością atrybutu X . Pośrednie wartości oznaczają pośrednie *stopnie możliwości*. Zakładając, że określenie *młody* modeluje się z użyciem *zbioru rozmytego* o funkcji przynależności $\mu_{młody}$, w sposób naturalny przyjmuje się, że:

$$\pi_X(u) = \mu_{młody}(u)$$

Ogólniej, będziemy przyjmować że stwierdzenie:

$$X \text{ jest } A, \quad A \in \mathcal{F}(U) \quad (2.25)$$

generuje rozkład możliwości postaci:

$$\pi_X : U \rightarrow [0, 1]$$

⁶Można też użyć terminu *rozkład posybilistyczny*.

$$\pi_X(u) = \mu_A(u) \quad (2.26)$$

W rozważaniach dotyczących reprezentacji informacji z użyciem rozkładów możliwości ważną rolę odgrywa tak zwana *zasada minimalnej specyficzności*. Jeśli dla dwóch rozkładów możliwości π_X^1 i π_X^2 zachodzi: $\forall u \in U \quad \pi_X^1(u) \leq \pi_X^2(u)$, to powiemy, że rozkład π_1 jest bardziej *specyficzny*. Zasada minimalnej specyficzności głosi, że jeśli informacja, którą posiadamy jest wyrażona w postaci sekwencji wyrażen "X jest A_i " i daje się wyrazić za pomocą zbioru rozkładów możliwości $\pi_X^1, \pi_X^2, \dots, \pi_X^n$, to łączny rozkład możliwości π_X , który reprezentuje naszą całościową informację, jest *najmniej specyficznym* rozkładem spełniającym warunki:

$$\forall_{1 \leq i \leq n} \forall u \in U \quad \pi_X(u) \leq \pi_X^i(u)$$

czyli

$$\forall u \in U \quad \pi_X(u) = \min(\pi_X^1(u), \pi_X^2(u), \dots, \pi_X^n(u)) \quad (2.27)$$

Jeśli zinterpretujemy zapis (2.25) jako ograniczenie

$$\forall x \in U \quad \pi_X(u) \leq \mu_A(u) \quad (2.28)$$

to zasada minimalnej specyficzności stanowi uzasadnienie przyjęcia równości (2.26) $\pi_X(u) = \mu_A(u)$, gdyż taki rozkład π_X jest najmniej specyficznym rozkładem spełniającym warunek (2.28).

Znając rozkład możliwości π_X dla atrybutu X , można więc określić na ile jest *możliwe*, że przyjmuje on konkretną wartość u . Istotne może być jednak również określenie na ile jest *możliwe*, że wartość tego atrybutu należy do pewnego zbioru $A \subseteq U$. Prowadzi to do pojęcia *miary możliwości* (*miary posybilistycznej*) (ang. *possibility measure*).

Definicja 2.18. *Miarę możliwości* nazywamy funkcję $\Pi : 2^U \rightarrow [0, 1]$ o następujących własnościach:

$$\Pi(U) = 1 \quad (2.29)$$

$$\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B)) \quad (2.30)$$

gdzie 2^U oznacza zbiór wszystkich podzbiorów zbioru U .

Zazwyczaj⁷ *miarę możliwości* określa się na podstawie pewnego rozkładu możliwości π_X w następujący sposób

⁷W przypadku gdy przestrzeń U jest nieskończona, istnieją funkcje Π spełniające (2.29), dla których nie można określić rozkładu możliwości π tak, aby zachodziło (2.31).

$$\Pi_X(A) = \sup_{u \in A} \pi_X(u) \quad (2.31)$$

Przyjmuje się, że wartość $\Pi_X(A)$ określa *stopień możliwości* tego, że wartość zmiennej X należy do zbioru A , co można również zapisać jako

$$\text{Possibility}(X \in A) = \Pi_X(A) \quad (2.32)$$

Sama *miara możliwości* nie określa dostatecznie dobrze czy faktyczna wartość atrybutu X należy do zbioru A , czy nie. Istotne jest również na ile jest możliwe, że wartość ta *nie należy* do tego zbioru, a nie zachodzi tu zależność $\Pi(A) + \Pi(\bar{A}) = 1$. Jeśli jest to *niemożliwe* lub w *niewielkim stopniu możliwe*, to nasze *przekonanie* o tym, że wartość atrybutu należy do zbioru A staje się istotnie większe. Należy więc, łącznie z miarą możliwości zbioru A , wziąć pod uwagę miarę możliwości dopełnienia zbioru A . Wyraża to *miara konieczności* (ang. *necessity measure*) N określona wzorem

$$N(A) = 1 - \Pi(\bar{A}) = \inf_{u \notin A} (1 - \pi(u)) \quad (2.33)$$

W ogólności miarę konieczności definiuje się następująco.

Definicja 2.19. *Miarę konieczności* nazywamy funkcję $N : 2^U \rightarrow [0, 1]$ o następujących własnościach:

$$N(U) = 1 \quad (2.34)$$

$$N(A \cap B) = \min(N(A), N(B)) \quad (2.35)$$

Analogicznie do (2.32) przyjmuje się, że wartość $N_X(A)$ określa *stopień konieczności* tego, że wartość zmiennej X należy do zbioru A , co zapisuje się jako

$$\text{Necessity}(X \in A) = N_X(A) = 1 - \Pi_X(\bar{A}) \quad (2.36)$$

Pojęcia miary możliwości i konieczności rozszerza się na zbiory rozmyte z użyciem następujących wzorów dla $A \in \mathcal{F}(U)$

$$\Pi(A) = \sup_{u \in U} \min(\pi(u), \mu_A(u)) \quad (2.37)$$

$$N(A) = \inf_{u \in U} \max(1 - \pi(u), \mu_A(u)) \quad (2.38)$$

Wzory (2.32) i (2.36) w przypadku zbioru rozmytego A zapisuje się następująco:

$$\text{Possibility}(X \text{ jest } A) = \Pi_X(A) \quad (2.39)$$

$$\text{Necessity}(X \text{ jest } A) = N_X(A) \quad (2.40)$$

Wzór (2.38) ma sens jedynie jeśli rozkład możliwości π jest *znormalizowany*, czyli jeśli $\exists_{x \in U} \pi(x) = 1$.

Omówimy teraz pokrótce *wielowymiarowe* rozkłady możliwości określone na iloczynach kartezjańskich zbiorów. Rozważmy n zmiennych X_i , przy czym każda przyjmuje wartości z przestrzeni U_i , i wyrażenie:

$$(X_1 \text{ jest } A_1) \wedge \dots \wedge (X_n \text{ jest } A_n) \quad (2.41)$$

gdzie $A_i \in \mathcal{F}(U_i)$. Generuje ono łączny rozkład możliwości na iloczynie kartezjańskim $U_1 \times \dots \times U_n$ przestrzeni rozważań poszczególnych zmiennych X_i , π_X :

$$\pi_X : U_1 \times \dots \times U_n \longrightarrow [0, 1] \quad (2.42)$$

$$\pi_X(u_1, \dots, u_n) \leq \min(\pi_{X_1}(u_1), \dots, \pi_{X_n}(u_n)) \quad (2.43)$$

gdzie π_{X_i} jest rozkładem generowanym przez X_i jest A_i w (2.41).

Na podstawie własności (2.30) i (2.35) miar możliwości i konieczności, można pokazać, że dla takiego rozkładu zachodzi:

$$\Pi_X(B_1 + \dots + B_n) = \max_i \Pi_{X_i}(B_i) \quad (2.44)$$

$$N_X(B_1 \times \dots \times B_n) = \min_i N_{X_i}(B_i) \quad (2.45)$$

gdzie \times oznacza iloczyn kartezjański zbiorów rozmytych, określony wzorem (2.14), zaś $+$ jest skojarzoną z nim operacją zdefiniowaną jako:

$$A + B = \overline{\overline{A} \times \overline{B}}$$

Jeśli można przyjąć równość we wzorze (2.43), czyli że

$$\pi_X(u_1, \dots, u_n) = \min(\pi_{X_1}(u_1), \dots, \pi_{X_n}(u_n)) \quad (2.46)$$

to powiemy, że zmienne X_i są *nieinteraktywne* (ang. *non-interactive*). Wtedy zachodzi również [89]:

$$\Pi_X(B_1 \times \dots \times B_n) = \min_i \Pi_{X_i}(B_i) \quad (2.47)$$

$$N_X(B_1 + \dots + B_n) = \max_i N_{X_i}(B_i) \quad (2.48)$$

Można zauważyć, że wzory (2.47) i (2.45) mogą posłużyć do oceny prawdziwości⁸ wyrażenia

$$(X_1 \text{ jest } B_1) \wedge \dots \wedge (X_n \text{ jest } B_n) \quad (2.49)$$

zaś wzory (2.44) i (2.48) mogą posłużyć do oceny prawdziwości wyrażenia

$$(X_1 \text{ jest } B_1) \vee \dots \vee (X_n \text{ jest } B_n) \quad (2.50)$$

w obydwu przypadkach – przy założeniu prawdziwości (2.41) i nieinteraktywności zmiennych X_i .

Z jednej strony *teoria zbiorów rozmytych* i *teoria możliwości* znajdują zastosowanie do modelowania różnych aspektów *niedoskonałości* informacji: odpowiednio jej *nieprecyzyjności* i *niepewności*. Z drugiej strony teorie te łączy oczywiste pokrewieństwo. *Funkcję przynależności* zbioru rozmytego można interpretować jako *rozkład możliwości*. Warto przy tym zwrócić uwagę na różne możliwe interpretacje stopnia przynależności elementu u (wartości funkcji przynależności $\mu_A(u)$ dla tego elementu) do zbioru rozmytego A określonego w przestrzeni U . Za [91] można wyróżnić trzy takie podstawowe interpretacje:

- $\mu_A(u)$ oznacza *podobieństwo* elementu u do pewnego prototypu reprezentowanego przez zbiór A ; na przykład stopień przynależności Jana do zbioru *wysokich* osób może wyrażać jego podobieństwo do wyobrażenia o prototypie wysokiego człowieka;
- $\mu_A(u)$ określa stopień *preferencji* względem u , przy czym przyjmuje się, że A jest zbiorem mniej lub bardziej preferowanych elementów, a A postrzegany jest jako reprezentacja pewnego ograniczenia czy kryterium, które elementy przestrzeni rozważań U mogą spełniać w mniejszym lub większym stopniu;
- $\mu_A(u)$ wyraża stopień *niepewności*, przy czym przyjmuje się, że zbiór A reprezentuje posiadaną informację dotyczącą wartości pewnej zmiennej X – por. p. 2.3.1 i (2.39) – a stopień możliwości, że $X = u$ wyrażony jest właśnie przez $\mu_A(u)$.

W ostatniej z interpretacji pojęcie *zbioru* ma wyraźnie inny charakter niż w pozostałych. Nazwiemy taki zbiór A *rozmytym zbiorem dysjunktywnym* [99], jako że jego elementy łącznie nie tworzą pewnej całości,

⁸Czy dokładniej: przekonania o prawdziwości; por. (2.126).

a jedynie stanowią zestawienie elementów spośród, których tylko jeden jest faktyczną wartością pewnej zmiennej. Zbiór rozmyty pozbawiony takiej konotacji i faktycznie opisujący grupę elementów, które łącznie tworzą pewną całość nazywać będziemy *rozmytym zbiorem koniunktywnym*. Rozpatrzmy następujący przykład. Niech funkcja przynależności $\mu_{młody}$ definiuje zbiór rozmyty *młody* określony na przedziale $[0,150]$. Przy analizie stwierdzenia “Jan jest młody”, rozumianego jako przypisanie wartości atrybutu *wiek* obiektu o nazwie Jan, traktować będziemy zbiór rozmyty *młody* jako zbiór dysjunktywny – tylko jeden spośród elementów tego zbioru jest faktyczną wartością atrybutu *wiek*. Przy analizie zapytania “Znajdź w bazie danych pracowników, którzy są młodzi” będziemy z kolei traktować zbiór *młody* jako zbiór koniunktywny, gdyż jego poszczególne elementy łącznie tworzą zbiór wartości uznawanych za odpowiadające młodemu wiekowi.

To rozróżnienie jest niezwykle ważne. Stopnie przynależności do rozmytego zbioru koniunktywnego możemy traktować jako stopnie prawdziwości w logice i agregować je z użyciem operatorów ekstensjonalnych, takich jak rozmyte odpowiedniki klasycznych spójników logicznych. Stopnie przynależności do rozmytego zbioru dysjunktywnego opisują stan naszej wiedzy czy przekonania i jako takie muszą być agregowane z użyciem rachunku niepewności, takiego jak teoria możliwości, w której zasadniczo operatory ekstensjonalne nie znajdują zastosowania.

2.2 Elementy logiki klasycznej i rozmytej

Termin *logika* będziemy tu rozumieć jako określenie pewnego *języka* wraz z *systemem wnioskowania* w tym języku (systemem dedukcyjnym) i formalnie określoną *semantyką*. Język stanowi pewną mniej lub bardziej abstrakcyjną formę języka naturalnego, system wnioskowania określa sposób w jaki ze zbioru wyrażań danego języka można wywodzić inne poprawne wyrażenia, zaś semantyka opisuje ma znaczenie wyrażań danego języka. W dalszej części niniejszego punktu przedstawiamy syntetyczny opis najprostszyc wariantów logiki rozmytej. Bardziej szczegółowe omówienie samego pojęcia, jak i wielu zaproponowanych w literaturze logik czytelnik może znaleźć, np., w pracach [159, 118, 188, 177].

Rachunek zdań Istotę *rachunku zdań* można przedstawić następująco. Alfabetem języka rachunku zdań jest zbiór *zmiennych zdaniowych* $S = \{s_i\}_{i \in I}$ oraz zbiór spójników logicznych. Zbiór *formuł* języka, oznaczany dalej jako Φ , obejmuje zmienne zdaniowe oraz złożone formuły

zbudowane z użyciem zmiennych zdaniowych połączonych spójnikami logicznymi, zgodnie z pewnymi regułami poprawności ich konstrukcji.

Semantykę formuł określa się z pomocą *wartościowania*, pewnej funkcji $\omega \in \Omega$ przypisującej każdej zmiennej zdaniowej wartość 1 lub 0 (*prawda* bądź *fałsz*):

$$\omega : S \longrightarrow \{0, 1\} \quad (2.51)$$

gdzie Ω jest zbiorem wartościowań, zaś $\{0, 1\}$ jest zbiorem *wartości prawdy*, przy czym 1 oznacza *prawda* zaś 0 oznacza *fałsz*.

Stosując ustalone reguły, na podstawie wartościowania ω określa się również wartość prawdy dla dowolnie złożonej formuły $\phi \in \Phi$. Dla formuł zbudowanych z użyciem spójników koniunkcji (\wedge), alternatywy (\vee) i negacji (\neg) reguły te mają następującą postać:

$$\omega(\phi \wedge \psi) = \min(\omega(\phi), \omega(\psi)) \quad (2.52)$$

$$\omega(\phi \vee \psi) = \max(\omega(\phi), \omega(\psi)) \quad (2.53)$$

$$\omega(\neg\phi) = 1 - \omega(\phi) \quad (2.54)$$

gdzie $\phi, \psi \in \Phi$.

Wartościowanie $\omega \in \Omega$ przypisuje więc każdej formule $\phi \in \Phi$ wartość 1 bądź 0. W pierwszym przypadku powiemy, że wartościowanie to jest *modelem* tej formuły. Dla danej formuły $\phi \in \Phi$ zbiór jej modeli oznaczamy będziemy jako Ω^ϕ :

$$\Omega^\phi = \{\omega \in \Omega : \omega(\phi) = 1\} \quad (2.55)$$

Warto zauważyć, że formułę $\phi \in \Phi$ można utożsamić ze zbiorem Ω^ϕ lub, równoważnie, z jego funkcją charakterystyczną. To utożsamienie znajdzie zastosowanie w dalszej części książki.

Wielowartościowy rachunek zdań Podstawowym założeniem teorii zbiorów rozmytych i logiki rozmytej jest *stopniowalność*, odpowiednio, przynależności elementu do zbioru i stopnia prawdziwości formuły. Przyjęcie tego założenia w kontekście klasycznego rachunku zdań prowadzi do jego wielowartościowej wersji. Składnia wielowartościowego rachunku zdań pozostaje bez zmian, natomiast semantyka wyraża się zmodyfikowaną postacią wartościowania, które przyjmuje następującą postać:

$$\omega : S \longrightarrow [0, 1] \quad (2.56)$$

Ogólniej semantykę logiki określa się z pomocą pewnej *struktury*, czyli krotki na którą składa się zbiór wartości prawdy L oraz zestaw operacji stanowiących model poszczególnych spójników logicznych. Zbiór L wraz

z tymi operacjami stanowi pewną strukturę algebraiczną o określonych własnościach, różnych dla różnych logik wielowartościowych. Semantyka prostego wariantu wielowartościowego rachunku zdań, opisanego wyżej i odpowiadającego najprostszej interpretacji logiki rozmytej w węższym sensie wyraża się następującą strukturą:

$$\mathcal{L} = ([0, 1], \max, \min, \neg, \rightarrow) \quad (2.57)$$

gdzie $L = [0, 1]$ (w przypadku klasycznego rachunku zdań $L = \{0, 1\}$), a poszczególne operacje odpowiadają spójnikom logicznym alternatywy, koniunkcji, negacji i implikacji.

Logiki wielowartościowe są obecnie przedmiotem aktywnych badań. Wśród ich pionierów należy wymienić polskiego uczonego Jana Łukasiewicza [158]. Powstanie i bujny rozwój szeroko rozumianej logiki rozmytej spowodował intensyfikację badań w tej dziedzinie. Wśród prac należących do nurtu inspirowanego logiką rozmytą należy wymienić w szczególności prace Pavelki [175] czy Hájka [120, 119]. Prosta wielowartościowa wersja klasycznego rachunku zdań (2.57) wymaga dalszych rozszerzeń dla celów różnorodnych zastosowań praktycznych, w tym dla wyszukiwania informacji tekstowej. Interesujące z tego względu możliwości wnosi rozszerzenie oparte na koncepcji Pavelki, tzw. Rational Pavelka Logic [119].

Semantyka reprezentowana jest teraz przez następującą strukturę, *zupelną kratę resztową* (ang. *complete residuated lattice*):

$$\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \otimes, \rightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1}) \quad (2.58)$$

Składa się na nią zbiór wartości prawdy L (najczęściej rolę tę pełni przedział $[0, 1]$), cztery operacje binarne: dwie operacje kraty \wedge i \vee , mnożenie (\otimes) i operacja implikacji oparta na operatorze reszty (\rightarrow) (por. p. 2.2.2, s. 37).

Składnia języka omawianej logiki również jest rozszerzona. Alfabet, obok standardowego zbioru zmiennych zdaniowych S , zawiera spójnik logiczny implikacji \rightarrow ⁹ jako jedyny spójnik (pozostałe są definiowalne z jego pomocą) oraz *zbiór stałych logicznych* $\mathbf{R} = \{\tau \mid r \in L\}$, zawierający między innymi symbole \perp i \top odpowiadające wyróżnionym wartościom $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$ w strukturze \mathcal{L} . Opis zbioru \mathbf{R} należy rozumieć w ten sposób, że każdej wartości prawdy $r \in L$ odpowiada w alfabecie języka stała logiczna τ .

⁹Używamy tego samego symbolu \rightarrow dla oznaczenia spójnika implikacji należącego do alfabetu języka i dla oznaczenia operacji implikacji należącej do struktury \mathcal{L} . Będziemy to zawsze jawnie komentować, gdyby istniała możliwość niejednoznacznej interpretacji tego symbolu.

Istotnym novum są stałe logiczne, które traktowane są na równi ze zmiennymi zdaniowymi jako elementy konstrukcji formuł języka tej logiki. Jednocześnie zakłada się, że każde wartościowanie przypisuje stałej logicznej \bar{r} odpowiadającą jej wartość prawdy $r \in L$:

$$\omega(\bar{r}) = r \quad \forall r \in L \quad (2.59)$$

W związku z tym, dla danej formuły ϕ możliwe jest skonstruowanie formuły ψ , która będzie wymagała, żeby formuła ϕ była spełniona przynajmniej w stopniu r . Formuła ψ przyjmuje następującą postać:

$$\psi : \bar{r} \rightarrow \phi \quad (2.60)$$

Rachunek predykatów Rachunek zdań pozwala wypowiadać pewne stwierdzenia o prawdziwości poszczególnych wyrażeń logicznych. W *rachunku predykatów pierwszego rzędu* wprowadza się *zmienne*, które odnoszą się nie do wyrażeń logicznych, ale do opisywanych obiektów świata rzeczywistego. Język rachunku predykatów J obejmuje:

- zbiór zmiennych x_1, x_2, \dots
- zbiór stałych u_1, u_2, \dots
- zbiór symboli funkcyjnych f, g, \dots
- zbiór symboli predykatów P, Q, \dots
- spójniki logiczne i kwantyfikatory: ogólny \forall i szczegółowy \exists ,
- nawiasy jako symbole pomocnicze.

Określa się zbiór F_J formuł poprawnie skonstruowanych w języku J . Semantyka rachunku predykatów zdefiniowana jest z użyciem pojęcia *struktury relacyjnej (interpretacji)* \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = (D, P^D, \dots, f^D, \dots, u_1^D, \dots)$$

gdzie D jest pewnym zbiorem, P^D i f^D zbiorami relacji i funkcji na nim określonych, zaś u_i^D jest zbiorem wyróżnionych elementów D , które stanowiąc będą interpretację stałych języka J . *Interpretacja* v nad strukturą \mathbf{D} przypisuje wartości logiczne formułom języka J . Na przykład:

$$v(P(x_1, \dots, x_n)) = P^D(v(x_1), \dots, v(x_n))$$

Powyższy krótki opis stanowi jedynie przypomnienie wybranych podstawowych pojęć z zakresu rachunku predykatów.

2.2.1 Logika posybilistyczna

Logika rozmyta “w węższym sensie” może być utożsamiona z logiką wielowartościową. Nie obejmuje ona wielu elementów wypracowanych w ramach logiki rozmytej “w szerszym sensie”, które nie poddają się formalizacji w ramach zbliżonych do logiki klasycznej. Jednym z ważnych podejść, które próbuje łączyć te dwa nurty logiki rozmytej jest *logika posybilistyczna*, zaproponowana przez Dubois, Langa i Prade’a [85].

Punktem wyjścia jest język klasycznego rachunku zdań¹⁰. Oznaczmy zbiór zmiennych zdaniowych jako $S = \{p, q, r, s, \dots\}$ ¹¹, a przez Ω , jak poprzednio dla logiki wielowartościowej, zbiór wszystkich wartościowań tych zmiennych:

$$\omega : S \rightarrow \{0, 1\} \quad (2.61)$$

Dla zadanej formuły ϕ nad alfabetem Ω niech Ω^ϕ oznacza zbiór wszystkich modeli ϕ .

Założenie, że ϕ jest prawdziwe sprawia, że wartościowania należące do Ω^ϕ są możliwe, zaś pozostałe są niemożliwe. Używając języka *teorii możliwości* można stwierdzić, że ϕ generuje następujący rozkład możliwości π_ϕ na zbiorze Ω :

$$\pi_\phi(\omega) = 1 \quad \forall \omega \in \Omega^\phi \quad (2.62)$$

$$\pi_\phi(\omega) = 0 \quad \forall \omega \notin \Omega^\phi \quad (2.63)$$

Wtedy, dla dowolnej formuły ψ nad alfabetem S niepewność co do jej prawdziwości można określić z użyciem pary liczb:

$$(\Pi_\phi(s), N_\phi(s)) = (\Pi_\phi(\Omega^s), N_\phi(\Omega^s)) \quad (2.64)$$

gdzie Π_ϕ i N_ϕ oznaczają odpowiednio miarę możliwości i konieczności określoną na podstawie rozkładu możliwości π_ϕ . Para liczb (1,1) oznacza całkowitą pewność, że formuła ψ jest prawdziwa (czyli $\neg\psi$ jest fałszywa), para (0,0) całkowitą pewność, że ψ jest fałszywa (czyli $\neg\psi$ jest prawdziwa), zaś para (1,0) oznacza, że zarówno ψ , jak i $\neg\psi$ może być prawdziwa lub fałszywa. Warto zauważyć, że ze względu na binarny charakter rozkładu π_ϕ (por. (2.62) i (2.63)) również miary możliwości i konieczności, Π_ϕ i N_ϕ przyjmują wartości wyłącznie ze zbioru $\{0, 1\}$.

W logice posybilistycznej dopuszcza się wyrażenie stopniowalnej niepewności co do prawdziwości ϕ . Jeśli nie jesteśmy całkowicie pewni, że ϕ

¹⁰Istnieje też wersja tej logiki oparta na rachunku predykatów.

¹¹Przyjęcie takich oznaczeń zmiennych zdaniowych jest tu dogodniejsze.

jest prawdziwa, to należy zmodyfikować wzór (2.63) i dopuścić, że również wartościowania niespełniające ϕ są możliwe do pewnego stopnia. Prowadzi to do przyjęcia, że Ω^ϕ jest zbiorem rozmytym, który generuje następujący rozkład możliwości na Ω :

$$\pi_\phi(\omega) = \mu_{\Omega^\phi}(\omega) \quad (2.65)$$

przy czym dla ω takich, że $\omega(\phi) = 1$, zachodzi $\mu_{\Omega^\phi}(\omega) = 1$.

W celu uwzględnienia stopnia przekonania o prawdziwości formuły ϕ rozszerza się odpowiednio składnię języka zdań. Stosuje się tak zwane *formuły ważone*, które przyjmują następującą postać:

$$(\phi, \alpha) \quad (2.66)$$

gdzie waga $\alpha \in [0, 1]$ oznacza dolną granicę przekonania w prawdziwość ϕ . Warto zauważyć, że nadal używa się tu klasycznych stopni prawdziwości: ϕ może być tylko prawdziwa (1) bądź fałszywa (0). Współczynnik α jest natomiast liczbą z przedziału $[0, 1]$ oznaczającą stopień przekonania co do tego, że ϕ jest prawdziwa.

Formuła postaci (2.66) generuje następujący rozkład możliwości na zbiorze Ω (jest to uściślenie rozkładu opisanego z użyciem (2.65)):

$$\pi_{\phi, \alpha}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega \in \Omega^\phi \\ 1 - \alpha & \text{dla } \omega \notin \Omega^\phi \end{cases} \quad (2.67)$$

Zatem przy założeniu prawdziwości formuły ϕ z przekonaniem α pewność co do prawdziwości dowolnej formuły ψ wyraża się parą liczb określonych wzorem (2.64). W szczególności dla formuły ϕ uzyskuje się

$$\Pi_{\phi, \alpha}(\phi) = \Pi_{\phi, \alpha}(\Omega^\phi) = 1 \quad (2.68)$$

$$N_{\phi, \alpha}(\phi) = N_{\phi, \alpha}(\Omega^\phi) = \alpha \quad (2.69)$$

czyli rzeczywiście stopień pewności w prawdziwość ϕ wynosi α , zgodnie z przyjętym rozumieniem formuły (2.66).

W ogólności zamiast (ϕ, α) rozważa się zbiór formuł $B = (\phi_i, \alpha_i)$, zwany *bazą przekonań* (ang. *belief base*). Baza taka określa łącznie następujący rozkład możliwości na Ω :

$$\pi(\omega) = \min_i \pi_{\phi_i, \alpha_i}(\omega) \quad (2.70)$$

gdzie π_{ϕ_i, α_i} oznacza rozkład możliwości generowany przez formułę (ϕ_i, α_i) .

Powiemy, że rozkład π *spełnia* formułę (ϕ, α) , co oznaczymy jako $\pi \models (\phi, \alpha)$, jeśli $N(\phi) \geq \alpha$, gdzie N jest miarą konieczności określoną

na podstawie rozkładu π . Relację logicznego wynikania \models pomiędzy formułami definiuje się w logice posybilistycznej w następujący sposób:

$$(\phi, \alpha) \models (\psi, \beta) \Leftrightarrow \forall \pi \pi \models (\phi, \alpha) \rightarrow \pi \models (\psi, \beta) \quad (2.71)$$

Łatwo zauważyć, że:

$$\forall \alpha \geq \beta \quad (\phi, \alpha) \models (\phi, \beta) \quad (2.72)$$

2.2.2 Spójniki logiczne w logice rozmytej

Jednym z istotnych aspektów semantyki logiki wielowartościowej jest interpretacja spójników logicznych. W niniejszym punkcie przedstawimy pokrótce propozycję całej klasy operacji, które mogą stanowić taką interpretację i które znajdują się w centrum zainteresowania logiki rozmytej. Szczegółowe omówienie tych operacji Czytelnik może znaleźć w pracy Klementa, Mesiara i Papa [139].

W dwuwartościowej logice klasycznej spójniki logiczne stanowią formalną reprezentację taki wyrażen języka naturalnego jak “i” czy “lub”. Ta reprezentacja zachowuje intuicyjną semantykę takich wyrażen. W przypadku dopuszczenia wielu wartości prawdy (wartości logicznych) te intuicje nie są już tak oczywiste. Wymaga się, żeby taka formalizacja zachowywała własności klasycznych spójników logicznych w przypadku gdy operuje się wyłącznie na klasycznych stopniach prawdy 1 (*prawda*) i 0 (*fałsz*). Okazuje się jednak, że można zdefiniować całe klasy operatorów, które te podstawowe wymagania spełniają.

Takie powszechnie przyjęte klasy operacji dla koniunkcji i alternatywy to odpowiednio *t-normy* i *t-konormy*.

Definicja 2.20. *Operator t-normy* \mathfrak{t} definiuje się następująco:

$$\mathfrak{t} : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \quad (2.73)$$

przy czym:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{t}(x, 1) = x & \forall x & \textit{element wyróżniony} \\ x \leq y \Rightarrow \mathfrak{t}(x, z) \leq \mathfrak{t}(y, z) & \forall x, y, z & \textit{monotoniczność} \\ \mathfrak{t}(x, y) = \mathfrak{t}(y, x) & \forall x, y & \textit{przemienność} \\ \mathfrak{t}(x, \mathfrak{t}(y, z)) = \mathfrak{t}(\mathfrak{t}(x, y), z) & \forall x, y, z & \textit{łączność} \end{array}$$

Najważniejszymi przedstawicielami tej klasy operatorów są:

$$\textit{minimum} \quad \mathfrak{t}(x, y) = x \wedge y = \min(x, y) \quad (2.74)$$

$$\textit{iloczyn} \quad \mathfrak{t}(x, y) = x \cdot y \quad (2.75)$$

$$\textit{t-norma Łukasiewicza} \quad \mathfrak{t}(x, y) = \max(0, x + y - 1) \quad (2.76)$$

Można określić wiele dodatkowych własności operacji t -normy, które mają praktyczne znaczenie dla ich zastosowań.

Definicja 2.21. Powiemy, że operacja t -normy nie posiada dzielników zerowych jeśli:

$$\forall x, y > 0 \quad \mathfrak{t}(x, y) \neq 0 \quad (2.77)$$

Definicja 2.22. Operator t -konormy \mathfrak{s} definiuje się następująco:

$$\mathfrak{s} : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \quad (2.78)$$

przy czym:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{s}(x, 0) = x & \forall x \quad \textit{element wyróżniony} \\ x \leq y \Rightarrow \mathfrak{s}(x, z) \leq \mathfrak{s}(y, z) & \forall x, y, z \quad \textit{monotoniczność} \\ \mathfrak{s}(x, y) = \mathfrak{s}(y, x) & \forall x, y \quad \textit{przemienność} \\ \mathfrak{s}(x, \mathfrak{s}(y, z)) = \mathfrak{s}(\mathfrak{s}(x, y), z) & \forall x, y, z \quad \textit{łączność} \end{array}$$

Do najważniejszych operatorów mających własności t -konormy zaliczyć należy:

$$\begin{array}{ll} \textit{maksimum} & \mathfrak{s}(x, y) = x \vee y = \max(x, y) \\ \textit{suma probabilistyczna} & \mathfrak{s}(x, y) = x + y - x \cdot y \\ \textit{t-konorma Łukasiewicza} & \mathfrak{s}(x, y) = \min(1, x + y) \end{array}$$

Operatory t -normy i operatory t -konormy są operatorami łącznymi. Można więc je uogólnić do postaci operatorów m argumentowych, czyli wyrażenia postaci $x \wedge y \wedge z \wedge \dots$ są $x \vee y \vee z \vee \dots$ są dobrze określone. Dzięki temu możliwe jest również *uogólnienie klasycznych kwantyfikatorów* \forall i \exists . Zasadniczo w przypadku skończonej przestrzeni rozważań kwantyfikatory klasyczne traktuje się w logice rozmytej właśnie jako wielokrotne użycie operatora minimum (dla kwantyfikatora ogólnego) lub operatora maksimum (dla kwantyfikatora egzystencjalnego) obejmujące wszystkie elementy przestrzeni rozważań. To podejście można uogólnić poprzez użycie innych operatorów t -normy i t -konormy, co prowadzi do pojęcia *t -kwantyfikatora* i *s -kwantyfikatora*¹² (por. np. [166]). Wartość

¹²Operatory t -konormy nazywane są również s -normami.

prawdy wyrażenia zawierającego taki kwantyfikator jest obliczana następująco ($\{a_1, \dots, a_m\}$ stanowi skończoną przestrzeń rozważań)¹³:

$$\text{truth}(\forall x A(x)) = \mu_A(a_1) \wedge \mu_A(a_2) \wedge \dots \wedge \mu_A(a_m) \quad (2.79)$$

$$\text{truth}(\exists x A(x)) = \mu_A(a_1) \vee \mu_A(a_2) \vee \dots \vee \mu_A(a_m) \quad (2.80)$$

Dla pozostałych spójników, stosowanych w logice klasycznej, również określono zestawy warunków, które powinny spełniać operatory reprezentujące ich odpowiedniki w logice rozmytej¹⁴.

Definicja 2.23. *Operator negacji* ndefiniuje się następująco:

$$\mathbf{n} : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \quad (2.81)$$

przy czym:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{n}(0) = 1 \text{ i } \mathbf{n}(1) = 0 & \textit{elementy wyróżnione} \\ x \leq y \Rightarrow \mathbf{n}(x) \geq \mathbf{n}(y) \quad \forall x, y & \textit{monotoniczność} \end{array}$$

Wyróżnia się *negację ścisłą* (ang. *strict negation*), która jest ściśle monotoniczna i ciągła, oraz *negację silną* (ang. *strong negation*), która jest negacją ścisłą i dodatkowo spełnia warunek

$$\mathbf{n}(\mathbf{n}(x)) = 1 \quad \forall x \quad (\text{ang. } \textit{involution law})$$

Najpowszechniej stosowany jest operator negacji postaci:

$$\mathbf{n}(x) = 1 - x \quad \forall x \quad (2.82)$$

Operatory *negacji*, *t-normy* i *t-konormy* są ze sobą związane. W zastosowaniach praktycznych rozważa się zwykle trójki takich operatorów, zachowujących pewne pożądane reguły, przykładowo reguły de Morgana (np. [107]). Nazywać je będziemy *trójkami De Morgana* (ang. *De Morgan Triples*) i oznaczać następująco:

$$(\mathbf{t}, \mathbf{s}, \mathbf{n}) \quad (2.83)$$

¹³Dla oznaczenia wartości logicznej wyrażenia V używać będziemy zapisu $\text{truth}(V)$.

¹⁴Warto zauważyć, że w rozważaniach dotyczących logiki rozmytej w węższym sensie (logiki wielowartościowej) [119] przyjmuje się często za punkt wyjścia *t-normę* jako reprezentację koniunkcji oraz zakłada się rozszerzenie składni języka rachunku zdań o stałą $\bar{0}$ odpowiadającą wartości logicznej *fałsz*. Wtedy, spójnik implikacji \rightarrow zdefiniowany jest z użyciem operacji reszty (residuum) (por. s. 37), zaś negacja \neg zdefiniowana jest następująco: $\neg\phi \stackrel{\text{def}}{=} \phi \rightarrow \bar{0}$.

Następujące trzy trójki De Morgana odgrywają najważniejszą rolę w logice rozmytej¹⁵ $(\mathbf{t}_{min}, \mathbf{s}_{max}, \mathbf{n})$, $(\mathbf{t}_{\Pi}, \mathbf{s}_{\Pi}, \mathbf{n})$, $(\mathbf{t}_W, \mathbf{s}_W, \mathbf{n})$, gdzie poszczególne operatory t -normy i t -konormy są określone następująco¹⁶:

$$\begin{array}{l}
 \hline
 M \\
 \mathbf{t}_M(x, y) = \min(x, y) \\
 \mathbf{s}_M(x, y) = \max(x, y) \\
 \hline
 \\
 \hline
 \Pi \\
 \mathbf{t}_{\Pi}(x, y) = x \cdot y \\
 \mathbf{s}_{\Pi}(x, y) = x + y - x \cdot y \\
 \hline
 \\
 \hline
 W \\
 \mathbf{t}_W(x, y) = \max(0, x + y - 1) \\
 \mathbf{s}_W(x, y) = \min(1, x + y) \\
 \hline
 \end{array} \tag{2.84}$$

Będziemy te trójki oznaczać symbolami, odpowiednio, M , Π i W . We wszystkich trójkach przyjmujemy operator negacji (2.82).

Klasyczny spójnik *implikacji* “ \rightarrow ” ma wiele rozmytych odpowiedników¹⁷. W różnych podejściach przyjmuje się różne zestawy własności, które powinien mieć operator $\mathbf{i}(\cdot, \cdot)$, reprezentujący spójnik *implikacji rozmytej* [107].

Definicja 2.24. *Operator implikacji* \mathbf{i} , reprezentujący rozmyty spójnik logiczny implikacji “ \rightarrow ”, definiuje się następująco

$$\mathbf{i} : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \tag{2.85}$$

przy czym:

$$\begin{array}{ll}
 x \leq u \Rightarrow \mathbf{i}(x, y) \geq \mathbf{i}(u, y) & \forall x, y, u \quad \text{monotoniczność} \\
 y \leq z \Rightarrow \mathbf{i}(x, y) \leq \mathbf{i}(x, z) & \forall x, y, z \quad \text{monotoniczność} \\
 \mathbf{i}(0, y) = 1 & \forall y \\
 \mathbf{i}(x, 1) = 1 & \forall x \\
 \mathbf{i}(1, 0) = 0 &
 \end{array}$$

¹⁵Uzasadnienie ich wiodącej roli można znaleźć np. w [107].

¹⁶Stosujemy tu notację infiksową operatorów, która będzie dogodniejsza do dalszych rozważań.

¹⁷Przyjmujemy w tej pracy następującą konwencję zapisu. Nerozmyte i rozmyte spójniki logiczne *implikacji*, *równoważności* itp. w formułach *opisywanego* języka logiki oznaczać będziemy jako \rightarrow , \leftrightarrow itd. Natomiast dla formalnego zapisu wynikania i równoważności pewnych warunków, czyli implikacji i równoważności w *metajęzyku*, stosować będziemy notację \Rightarrow , \Leftrightarrow .

Praca Fodora i Roubensa [107] zawiera zwięzłą prezentację wielu innych własności operatora implikacji, postulowanych przez innych autorów, oraz dyskusję związków tych operatorów z operatorami koniunkcji, alternatywy i negacji. W książce Rutkowskiego [195] można znaleźć interesujący przegląd operatorów implikacji, włączając w to pojęcie tak zwanych “implikacji inżynierskich”, stosowanych w sterowaniu rozmytym. Książka Baczyńskiego i Jayarama [4] stanowi obecnie bodaj najbardziej kompletne kompendium wiedzy na temat teorii i zastosowań implikacji rozmytych.

Najpopularniejsze w literaturze są dwie klasy operatorów implikacji, tak zwane S -implikacje i R -implikacje. Dla danej trójki De Morgana $(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}, \mathfrak{n})$ operator S -implikacji definiuje się następująco:

$$\mathfrak{i}_{S-\vee}(x, y) = \mathfrak{s}(\mathfrak{n}(x), y) \quad (2.86)$$

natomiast operator R -implikacji, z użyciem *operatora reszty*, w sposób następujący:

$$\mathfrak{i}_{R-\wedge}(x, y) = \sup\{z : \mathfrak{t}(x, z) \leq y\} \quad (2.87)$$

Dla trójek De Morgana M , Π i W (2.84) otrzymuje się następujące postacie operatorów S -implikacji:

$$\mathfrak{i}_{S-M}(x, y) = \max(1 - x, y) \quad (2.88)$$

$$\mathfrak{i}_{S-\Pi}(x, y) = 1 - x + x \cdot y \quad (2.89)$$

$$\mathfrak{i}_{S-W}(x, y) = \min(1 - x + y, 1) \quad (2.90)$$

i R -implikacji:

$$\mathfrak{i}_{R-M}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \leq y \\ y & \text{dla } x > y \end{cases} \quad (2.91)$$

$$\mathfrak{i}_{R-\Pi}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0 \\ \min\{1, \frac{y}{x}\} & \text{dla } x \neq 0 \end{cases} \quad (2.92)$$

$$\mathfrak{i}_{R-W}(x, y) = \min(1 - x + y, 1) \quad (2.93)$$

Kolejnym spójnikiem logicznym przydatnym w interesujących nas zastosowaniach jest *koimplikacja* “ \rightarrow_c ” [107]. Za [107] przyjmuje się następującą definicję.

Definicja 2.25. *Operator koimplikacji* \mathfrak{i}_c , reprezentujący rozmyty spójnik logiczny *koimplikacji* “ \rightarrow_c ”, definiuje się następująco:

$$\mathfrak{i}_c : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \quad (2.94)$$

przy czym:

$$\begin{aligned}
 x \leq u &\Rightarrow i_c(x, y) \geq i_c(u, y) && \forall x, y, u && \text{monotoniczność} \\
 y \leq z &\Rightarrow i_c(x, y) \leq i_c(x, z) && \forall x, y, z && \text{monotoniczność} \\
 i_c(x, 0) &= 0 && \forall x && \\
 i_c(1, y) &= 0 && \forall y && \\
 i_c(0, 1) &= 1 && &&
 \end{aligned}$$

Własności operatora koimplikacji są w pewnym sensie *dualne* do określonych dla *implikacji*. Zauważyć tu można analogię do zależności pomiędzy operatorami *t*-normy i *t*-konormy.

Związek między operatorami implikacji i koimplikacji wyraża następujące stwierdzenie [107]: operator $i_c(\cdot, \cdot)$ jest operatorem *koimplikacji* wtedy i tylko wtedy, gdy operator $i(\cdot, \cdot)$ określony wzorem

$$i(x, y) = n(i_c(n(x), n(y))) \quad (2.95)$$

jest operatorem *implikacji*, przy czym $n(\cdot)$ jest dowolnym operatorem *negacji silnej*.

Stosując związek, wyrażony wzorem (2.95), można określić postacie operatorów koimplikacji odpowiadających operatorom *S*-implikacji i *R*-implikacji skojarzonym z trzema trójkami De Morgana:

$$i_{c,S-M}(x, y) = \min(1 - x, y) \quad (2.96)$$

$$i_{c,S-\Pi}(x, y) = y - x \cdot y \quad (2.97)$$

$$i_{c,S-W}(x, y) = i_{c,R-W}(x, y) = \max(y - x, 0) \quad (2.98)$$

$$i_{c,R-M}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \geq y \\ y & \text{dla } x < 0 \end{cases} \quad (2.99)$$

$$i_{c,R-W}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 1 \\ \max\{0, \frac{y-x}{1-x}\} & \text{dla } x \neq 1 \end{cases} \quad (2.100)$$

Ostatnim z rozważanych tu rozmytych spójników logicznych jest *równoważność rozmyta* “ \leftrightarrow ”.

Definicja 2.26. Operator *równoważności* e , reprezentujący rozmyty spójnik logiczny *równoważności* “ \leftrightarrow ”, definiuje się następująco

$$e : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \quad (2.101)$$

przy czym:

$$\begin{aligned}
 e(x, y) &= e(y, x) && \forall x, y \\
 e(x, x) &= 1 && \forall x \\
 x \leq u \leq z \leq y &\Rightarrow e(x, y) \leq e(u, z) && \forall x, u, y, z \\
 e(0, 1) &= e(1, 0) = 0 &&
 \end{aligned} \quad (2.102)$$

Podobnie jak w przypadku klasycznego spójnika równoważności *równoważność rozmyta* jest ściśle związana z *implikacją rozmytą*. Związek ten wyraża następujące stwierdzenie [107]: operator $e(\cdot, \cdot)$ jest operatorem równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje operator implikacji $i(\cdot, \cdot)$ ¹⁸, taki że

$$e(x, y) = \min(i(x, y), i(y, x)) \quad (2.103)$$

Stosując związek wyrażony wzorem (2.103) można określić listę operatorów reprezentujących równoważności odpowiadające najpopularniejszym operatorom implikacji:

$$e_{S-M}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = y \\ \min(x, y) & \text{dla } x \neq y \end{cases} \quad (2.104)$$

$$e_{S-\Pi}(x, y) = \frac{\min(x, y)}{\max(x, y)} \quad (2.105)$$

$$e_{S-W}(x, y) = 1 - |x - y| \quad (2.106)$$

przy czym dla równoważności (2.105) przyjmuje się $e(0, 0) = 1$.

2.3 Zmienne lingwistyczne i kwantyfikatory lingwistyczne

2.3.1 Zmienna lingwistyczna

Zmienna lingwistyczna to zmienna, której wartościami są wyrażenia w określonym języku naturalnym (terminy lingwistyczne). Semantykę tych wyrażeń modeluje się z użyciem zbiorów rozmytych. Definicję zmiennej lingwistycznej można sformułować następująco.

Definicja 2.27 ([238]). *Zmienną lingwistyczną* nazywamy uporządkowaną piątkę

$$(H, T(H), U, G, M)$$

gdzie poszczególne symbole oznaczają:

- H – nazwę zmiennej,
- $T(H) = \{l_i\}$ – zbiór jej wartości (zbiór terminów lingwistycznych),

¹⁸Taki operator implikacji musi mieć dodatkowo własność: $i(x, x) = 1$

- $U = \{u_i\}$ – przestrzeń rozważań, do której odnosi się zmienna lingwistyczna. Zbiory rozmyte, należące do $\mathcal{F}(U)$, stanowią znaczenie poszczególnych terminów lingwistycznych.
- G – regułę syntaktyczną generowania terminów lingwistycznych. Jeśli $T(H)$ jest zbiorem skończonym, to regułę G można zastąpić wyliczeniem terminów lingwistycznych, do niego należących.
- M – regułę semantyczną przypisywania każdemu terminowi lingwistycznemu $l_i \in T(H)$ jego znaczenia $M(l_i) \in \mathcal{F}(U)$.

Często dodatkowo przyjmuje się [89], że zbiór terminów lingwistycznych należących do $T(H)$ w sposób wyczerpujący i jednoznaczny opisuje przestrzeń rozważań U w tym sensie, że:

$$\forall u \in U \quad \max_i \mu_i(u) > 0 \quad (2.107)$$

$$\forall u \in U \quad \forall i \neq j \quad \min(\mu_i(u), \mu_j(u)) < 1 \quad (2.108)$$

Przykład 2.2. Wiek człowieka może być dogodnie potraktowany, na użytek pewnych rozważań, jako zmienna lingwistyczna, określona formalnie jako pięćka: $(wiek, T(wiek), U, G, M)$ gdzie:

- $T(wiek)$ = $\{\text{bardzo młody, młody, średni, stary, bardzo stary, nie młody i nie bardzo stary}\}$,
- U = $[1, 100]$,
- G - polega na wyliczeniu wszystkich terminów lingwistycznych jak powyżej,
- M - polega na przypisaniu poszczególnym terminom lingwistycznym ze zbioru $T(wiek)$ odpowiednich zbiorów rozmytych określonych w $[0, 100]$; przykładowo można przyjąć zbiór rozmyty o funkcji przynależności (2.2) jako reprezentację znaczenia terminu *młody*.

Powyższy przykład zmiennej lingwistycznej ilustruje typową sytuację: zbiór $T(wiek)$ zawiera *terminy proste* takie, jak: *młody, średni* czy *stary* oraz *terminy złożone* takie, jak *bardzo młody* czy *bardzo stary*, które

są *zmodyfikowanymi* wersjami terminów prostych. Modyfikacja polega na dodaniu terminu *bardzo* lub podobnych terminów o charakterze określeń stopniujących takich jak: *mniej więcej*, *średnio* czy *lekko*. Terminy tego typu znajdują zastosowanie w takich wyrażeniach jak: *bardzo młody*, *średnio zamożny* czy *lekko podniesiona* (o temperaturze ciała). Tak więc definiując zmienną lingwistyczną *wiek*, można określić regułę generowania terminów lingwistycznych G w następujący sposób. Wprost wylicza się terminy proste oraz podaje się terminy służące ich modyfikacji takie jak *bardzo*, *mniej więcej* i tym podobne, które służą konstruowaniu terminów złożonych. Regułę G utożsamia się więc z pewną *gramatyką*. Gramatyka taka może również określać konstruowanie terminów złożonych z użyciem spójników logicznych, jak w przykładzie *nie młody i nie bardzo stary*. Przykładową uproszczoną gramatykę możemy formalnie zapisać następująco.

Przykład 2.3. Przykład gramatyki terminów lingwistycznych.

$$\begin{aligned} \langle \textit{termin} \rangle &::= \\ &\langle \textit{termin} - \textit{zlozony} \rangle \mid \langle \textit{termin} - \textit{prosty} \rangle \\ \langle \textit{termin} - \textit{zlozony} \rangle &::= \\ &\langle \textit{termin} - \textit{prosty} \rangle \mid \\ &\langle \textit{modyfikator} \rangle \langle \textit{termin} - \textit{zlozony} \rangle \mid \\ &\langle \textit{termin} - \textit{zlozony} \rangle \langle \textit{spojnik} \rangle \langle \textit{termin} - \textit{zlozony} \rangle \\ \langle \textit{termin} - \textit{prosty} \rangle &::= \\ &\text{“młody”} \mid \text{“średni”} \mid \text{“stary”} \\ \langle \textit{modyfikator} \rangle &::= \\ &\text{“bardzo”} \mid \text{“mniej więcej”} \\ \langle \textit{spojnik} \rangle &::= \text{“i”} \mid \text{“lub”} \end{aligned}$$

W ogólności zbiór terminów lingwistycznych, opisany gramatyką, może być nieskończony. Przypadek taki ilustruje gramatyka z przykładu 2.3. Z użyciem tej gramatyki można skonstruować takie terminy lingwistyczne jak *bardzo bardzo...bardzo młody*, w których termin *bardzo* może wystąpić dowolną liczbę razy¹⁹. W takim przypadku niemożliwe jest bez-

¹⁹Nawet jeśli można poddać w wątpliwość praktyczną przydatność terminów tego

pośrednie przypisanie każdemu terminowi lingwistycznemu zbioru rozmytego, należącego do $\mathcal{F}(U)$. Reguła semantyczna M przyjmuje wtedy następującą postać. Bezpośrednio przypisuje się zbiory rozmyte tylko terminom prostym. Terminom złożonym, skonstruowanym z użyciem spójników logicznych, przypisuje się odpowiednie kombinacje zbiorów rozmytych, odpowiadających składowym terminom prostym. Przykładowo terminowi *średni lub stary* przypisuje się sumę zbiorów rozmytych, reprezentujących terminy *średni* i *stary*. W ogólności

$$M("l_1 \text{ lub } l_2") = M(l_1) \cup M(l_2) \quad (2.109)$$

$$M("l_1 \text{ i } l_2") = M(l_1) \cap M(l_2) \quad (2.110)$$

$$M("nie l") = \neg M(l) \quad (2.111)$$

W przypadku terminów złożonych, skonstruowanych z użyciem terminów takich jak *bardzo*, nazywanych *modyfikatorami* (ang. *modifiers*; *linguistic hedges*), postępuje się podobnie jak w przypadku spójnika *nie*. Ich interpretacja nie jest jednak tak jednoznaczna i w związku z tym poświęćmy im nieco więcej uwagi.

Użycie modyfikatorów pozwala na znaczne rozszerzenie repertuaru terminów lingwistycznych, traktowanych jako wartości zmiennej lingwistycznej takiej, jak *wiek*. Ich stosowanie jest bardzo dogodne, gdyż można przyjąć, że mają one bardziej uniwersalną interpretację niż terminy, do których się odnoszą. Na przykład o ile pojmowanie terminów *młody* czy *stary* jest bardzo subiektywne, o tyle łatwiejsze wydaje się zaproponowanie pewnej uniwersalnej reguły, określającej znaczenie terminu złożonego *bardzo młody* na podstawie ustalonego znaczenia terminu *młody*.

Zadeh [238] proponuje modelowanie modyfikatorów z użyciem specjalnych operacji na zbiorach rozmytych, nazywanych *koncentracją* (ang. *concentrator*) i *splaszczaniem*²⁰ (ang. *dilator*). Formalnie można je określić jako operacje na wartościach funkcji przynależności zbioru rozmytego

$$\eta_{mod} : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \quad (2.112)$$

Niech *mod* oznacza modyfikator modelowany z użyciem η_{mod} , zaś μ_l funkcję przynależności zbioru rozmytego, określającego znaczenie terminu lingwistycznego l . Wtedy znaczenie terminu lingwistycznego *mod l*

typu zawierających wielokrotne powtórzenie terminu *bardzo*, to jednak należy wziąć je pod uwagę przy określaniu semantyki terminów lingwistycznych.

²⁰Używa się również określenia *rozcieńczenie*.

określa zbiór rozmyty o funkcji przynależności $\mu_{mod\ l}$ następującej postaci

$$\mu_{mod\ l}(u) = \eta_{mod}(\mu_l(u)) \quad \forall u \in U \quad (2.113)$$

Na przykład poniższa funkcja, dla różnych wartości parametru k , może reprezentować koncentrację lub spłaszczenie

$$\eta_{mod}(x) = x^k \quad \forall x \in [0, 1] \quad (2.114)$$

Operacja koncentracji służy modelowaniu terminów typu *bardzo* i we wzorze (2.114) należy dla niej przyjąć $k > 1$. Operacja spłaszczania używana jest do modelowania terminów typu *mniej więcej* i we wzorze (2.114) należy dla niej przyjąć $k < 1$. Na przykład do modelowania terminu *bardzo* można więc przyjąć operację koncentracji, wyrażoną wzorem (2.114) dla $k = 2$. Wtedy

$$\mu^{\text{"bardzo młody"}}(u) = \eta^{\text{"bardzo"}}(\mu^{\text{"młody"}}(u)) = (\mu^{\text{"młody"}}(u))^2$$

Niektórzy autorzy rozróżniają dwa modele reprezentacji modyfikatorów: tak zwane *postmodyfikatory* i *premodyfikatory*. Wzory (2.112)-(2.114) stanowią ilustrację tego pierwszego podejścia. Zasadniczo w podejściu tym uzyskuje się zmianę kształtu funkcji przynależności przy zachowaniu *nośnika* zbioru rozmytego. Może to być w pewnych sytuacjach nieodpowiednie. Przykładowo może być pożądane takie określenie zbiorów rozmytych reprezentujących terminy *młody* i *bardzo młody*, że liczba 30 należy do nich w stopniu odpowiednio 0.4 i 0. Oznaczałoby to, że zastosowanie funkcji $\eta^{\text{"bardzo"}}$ powinno zredukować wartość funkcji przynależności do zera dla $x = 30$. Przy zastosowaniu wzoru typu (2.113) może to być trudne do osiągnięcia. W związku tym stosuje się premodyfikatory, które zachowują zasadniczo kształt funkcji przynależności, *przesuwając* jednak nośnik zbioru rozmytego (por. np. [48]). W ogólności premodyfikatory ϑ_{mod} można opisać następującymi wzorami:

$$\vartheta_{mod} : U \longrightarrow U \quad (2.115)$$

$$\mu_{mod\ l}(u) = \mu_l(\vartheta_{mod}(u)) \quad (2.116)$$

Przykładowo termin *bardzo* w kontekście *bardzo młody* można modelować z użyciem następującego premodyfikatora:

$$\vartheta(u) = u + G$$

i stąd

$$\mu^{\text{"bardzo młody"}}(u) = \mu^{\text{"młody"}}(\vartheta^{\text{"bardzo"}}(u)) = \mu^{\text{"młody"}}(u + G)$$

gdzie G oznacza przesunięcie nośnika zbioru rozmytego.

Obydwa wyżej omówione podejścia do modelowania modyfikatorów mają pewne zalety. W literaturze ([168, 89]) zaproponowano ich łączne zastosowanie, prowadzące do następującego wzoru

$$\mu_{mod\ l}(u) = \eta_{mod}(\mu_l(\vartheta_{mod}(u))) \quad (2.117)$$

Uzyskuje się w ten sposób uogólnienie wzorów (2.113) i (2.116). Przyjmując bowiem w (2.117), odpowiednio, ϑ_{mod} bądź η_{mod} w postaci funkcji identyfikacyjnej otrzymuje się wzory (2.113) i (2.116).

Powracając do określenia reguły semantycznej M dla wyrażeń skonstruowanych z użyciem modyfikatorów, należy więc listę wzorów (2.109)-(2.111) rozszerzyć o

$$M(\text{"mod } l") = \{(\eta_{mod}(\mu_{M(l)}(\vartheta_{mod}(u))), u)\} \quad (2.118)$$

gdzie para $(\eta_{mod}, \vartheta_{mod})$ reprezentuje modyfikator mod i przyjmuje się zapis zbioru rozmytego jak w (2.3) w def. 2.1.

Przy opisie różnych podejść do wyszukiwania i modelowania informacji z użyciem logiki rozmytej często będziemy posługiwać się zmiennymi lingwistycznymi w ramach *zadehowskich wyrażeń lingwistycznych*.

Definicja 2.28. Wyrażeniem lingwistycznym nazywamy wyrażenie postaci:

$$X \text{ jest } A \quad (2.119)$$

gdzie X oznacza zmienną lingwistyczną, zaś A oznacza termin lingwistyczny modelowany z użyciem zbioru rozmytego określonego w przestrzeni rozważań, do której odnosi się zmienna lingwistyczna X .

Przykładem wyrażenia lingwistycznego, którego już wcześniej używaliśmy, jest wyrażenie " X jest *młody*", gdzie X jest zmienną lingwistyczną odnoszącą się do wieku pewnej osoby. Jeśli traktujemy wyrażenia typu (2.119) jako reprezentację posiadanej informacji, to generują one rozkłady możliwości w przestrzeni wartości zmiennej, tak jak to przedstawiamy w p. 2.1.2.

W literaturze dodatkowo rozważa się ich rozszerzone formy, tak zwane *wyrażenia z kwalifikatorami* (ang. *qualified statements*). Zadeh zaproponował wiele różnych typów takich kwalifikatorów (por. np. [89]). Nas będą interesowały szczególnie dwa spośród nich, które szerzej omawiamy poniżej.

Wyrażenia z kwalifikatorem prawdziwości (ang. *truth qualified statements*). Wyrażenia tego typu zawierają kwalifikator określający stopień prawdziwości stwierdzenia X jest A . Zapisuje się je jako:

$$X \text{ jest } A \text{ jest } \tau\text{-prawdziwe} \quad (2.120)$$

gdzie τ jest tak zwaną *rozmytą wartością prawdy* (ang. *fuzzy truth-value*) typu *prawie prawda, trochę prawda* itp., którą utożsamia się ze zbiorem rozmytym na przedziale $[0,1]$ o funkcji przynależności μ_τ .

Wyrażenie (2.120) traktuje się (por. np. [89]) jako równoważne pewnemu wyrażeniu – bez kwalifikatora – postaci (2.119):

$$X \text{ jest } A \text{ jest } \tau\text{-prawdziwe} \mapsto X \text{ jest } B \text{ jest prawdziwe} \quad (2.121)$$

przy czym $\mu_B = f(\mu_\tau, \mu_A)$ dla pewnej funkcji f . Zagadnienie właściwego określenia postaci funkcji przynależności μ_B można “odwrócić” i zapytać na ile prawdziwe jest wyrażenie X jest A (czyli jaką postać ma μ_τ) przy założeniu, że X jest B jest prawdziwe. W odpowiedzi na to pytanie przyjmuje się określać τ w sposób następujący:

$$\mu_\tau(t) = \begin{cases} \sup_x \{ \mu_B(x) \mid \mu_A(x) = t \} & \text{jeśli } \{x \mid \mu_A(x) = t\} \neq \emptyset \\ 0 & \text{wpp} \end{cases} \quad (2.122)$$

Wyrażenia z kwalifikatorem pewności (ang. *certainty qualified statements*). Wyrażenia tego typu zawierają kwalifikator określający minimalny stopień przekonania (pewności) $\alpha \in [0, 1]$ co do prawdziwości stwierdzenia X jest A . Zapisuje się je jako:

$$X \text{ jest } A \text{ jest pewne w stopniu co najmniej } \alpha \quad (2.123)$$

lub krócej jako:

$$X \text{ jest } A, \alpha \quad (2.124)$$

Podobnie jak w przypadku wyrażen z kwalifikatorem prawdziwości (2.120), tu również przyjmuje się, że wyrażenie (2.123) można zreinterpretować jako proste, pozbawione kwalifikatora, wyrażenie postaci X jest B . Postać funkcji przynależności μ_B w takim równoważnym wyrażeniu zależy od postaci μ_A i wartości α .

$$X \text{ jest } A, \alpha \mapsto X \text{ jest } B \quad (\mu_B = f(\alpha, \mu_A)) \quad (2.125)$$

Znów jak poprzednio, zagadnienie właściwego określenia postaci funkcji przynależności μ_B można “odwrócić” i zapytać jakie można mieć przekonanie co do prawdziwości X jest A jeśli zakłada się, że zachodzi X jest B . Odpowiedź na to pytanie wynika wprost z definicji miary konieczności def. 2.19:

$$X \text{ jest } B \quad \mapsto \quad X \text{ jest } A, N_X(A) \quad (\pi_X = \mu_B) \quad (2.126)$$

Postać funkcji przynależności B w (2.125) określa się następująco:

$$\mu_B(x) = \max(\mu_F(x), 1 - \alpha) \quad (2.127)$$

2.3.2 Kwantyfikatory lingwistyczne i operatory agregacji

Kwantyfikatory lingwistyczne są ważnym przykładem konstrukcji stosowanej w logice rozmytej, która wykracza poza klasyczne schematy logiczne. Kwantyfikatory te stanowią z jednej strony istotne rozszerzenie repertuaru logiki klasycznej. Z drugiej strony są one często stosowane w roli *operatorów agregacji*. Na przykład pozwalają lepiej wyrazić użytkownikowi jego preferencje w ramach zapytania, co opisujemy w dalszej części książki. W związku z tym w niniejszym punkcie przedstawimy zadehowskie ujęcie reprezentacji kwantyfikatorów lingwistycznych oraz inne wybrane operatory agregacji opracowane na gruncie logiki rozmytej i przydatne w zadaniach wyszukiwania informacji.

Kwantyfikatory lingwistyczne

Ważnym pojęciem logiki klasycznej są *kwantyfikatory*. W logice klasycznej używa się dwu kwantyfikatorów: kwantyfikatora ogólnego “ \forall ” oraz kwantyfikatora szczegółowego “ \exists ”. Kwantyfikator ogólny pozwala wyrazić stwierdzenie, że *wszystkie* elementy należące do rozważanego zbioru mają pewną własność. Kwantyfikator szczegółowy pozwala wyrazić stwierdzenie, że *istnieje przynajmniej jeden* element w rozważanym zbiorze mający pewną własność. Język naturalny jest znacznie bogatszy w tym względzie. W mowie potocznej powszechnie używane są wyrażenia takie jak: *większość*, *kilka*, *około połowy* i tym podobne, które mają niewątpliwie charakter kwantyfikatorów. Będziemy je nazywać *kwantyfikatorami lingwistycznymi*. Nie poddają się one łatwo formalizacji na gruncie logiki klasycznej (por. np. [189] i [6]).

W logice rozmytej w szerszym sensie wyróżnia się dwie klasy kwantyfikatorów lingwistycznych. Kwantyfikatory takie jak *większość*, *prawie wszystkie*, *niewiele* i tym podobne zaliczymy do klasy *kwantyfikatorów*

względnych, gdyż określają one stosunek liczności zbiorów elementów mających pewne własności. Drugą klasę stanowią *kwantyfikatory bezwzględne (absolutne)*, których przykładami są *około 7, mniej więcej 5* i tym podobne. Określają one wprost licznosc zbioru elementów mających pewną własność.

Kwantyfikatory lingwistyczne stały się przedmiotem intensywnych badań w ramach logiki rozmytej. Wyczerpujący i aktualny ich przegląd oraz oryginalne nowe wyniki można znaleźć w książkach Gloecknera [113, 114] i pracach wielu innych autorów (por. np. [155, 80]).

Pierwszą i nadal bardzo popularną formalizację kwantyfikatorów lingwistycznych wprowadził Zadeh w postaci *rachunku kwantyfikatorów lingwistycznych* (ang. *calculus of linguistically quantified propositions*) [242]. Rozważa się w nim dwa typy zdań z kwantyfikatorami lingwistycznymi. *Zdanie typu I*, na przykład:

$$\text{Większość Szwedów jest wysokiego wzrostu} \quad (2.128)$$

zapisuje się formalnie jako²¹:

$$Qx P(x) \quad (2.129)$$

gdzie Q oznacza kwantyfikator lingwistyczny (tu: *większość*), $X = \{x\}$ jest przestrzenią rozważań (tu: odpowiadającą *zbiorowi Szwedów*), zaś $P(x)$ jest *predykatem* odpowiadającym pewnej własności (tu: *wysoki*). Zapis w postaci (2.129) nawiązuje do tradycyjnej notacji przyjętej w logice klasycznej.

W zdaniu (2.128) kwantyfikator odnosi się do całego rozważanego zbioru, w tym przypadku zbioru *wszystkich Szwedów*. W praktyce przydatna jest możliwość formalizacji wyrażeń, w których kwantyfikator odnosi się jedynie do pewnego rozmytego podzbioru przestrzeni rozważań $B \in \mathcal{F}(X)$, a nie do całej przestrzeni X . W tym celu w rachunku kwantyfikatorów lingwistycznych Zadeha rozważa się *zдания typu II*, na przykład:

$$\text{Większość młodych Szwedów jest wysokiego wzrostu} \quad (2.130)$$

które zapisuje się formalnie jako²²:

$$Qx (B(x), P(x)) \quad (2.131)$$

²¹W literaturze często stosuje się zapis QX 's are P 's.

²²W literaturze często stosuje się zapis QB 's are P 's lub QXB 's are P 's.

gdzie $B(x)$ oznacza dodatkowy predykat reprezentujący pewną wymaganą własność elementów (tu: *młody*) ograniczającą zbiór, do którego odnosi się kwantyfikator.

Zdania zawierające kwantyfikatory lingwistyczne można rozpatrywać, podobnie jak w przypadku klasycznych kwantyfikatorów, zarówno w ujęciu *syntaktycznym*, jak i *semantycznym*. To pierwsze ujęcie prowadzi, na gruncie logiki rozmytej, do określenia specjalnych reguł wnioskowania obejmujących kwantyfikatory lingwistyczne. Rozważa się również pewne szablony wyrażen z kwantyfikatorami lingwistycznymi, tak zwane *protoformy*, i proponuje się schematy wnioskowania odnoszące się do nich [243, 244]. Drugie ujęcie określa sposoby obliczania *stopnia spełnienia* zdań typu (2.129) i (2.131).

Wcześniej stwierdziliśmy, że *względny kwantyfikator lingwistyczny* wyraża stosunek liczości dwóch podzbiorów przestrzeni rozważań. Podzbiory te mogą być *nierozmyte* lub *rozmyte*. W dalszym ciągu interesować nas będzie ten drugi, bardziej ogólny przypadek. Innymi słowy, interesować nas będą zdania typu (2.129) i (2.131), w których występują *predykaty rozmyte* odpowiadające takim własnościom, jak *młody* czy *wysoki* w (2.128) i (2.130). Ujmując to bardziej formalnie przyjmiemy, że interpretuje się zdania typu (2.129) i (2.131) względem następującej *struktury*²³:

$$\mathcal{D} = (X_{\mathcal{D}}, P_{\mathcal{D}}, B_{\mathcal{D}}) \quad (2.132)$$

gdzie $X_{\mathcal{D}}$ jest zbiorem obiektów stanowiącym interpretację przestrzeni X , zaś $P_{\mathcal{D}}, B_{\mathcal{D}} \in \mathcal{F}(X_{\mathcal{D}})$ są zbiorami rozmytymi obiektów - *jednoargumentowymi relacjami rozmytymi* - stanowiącymi interpretację predykatów, odpowiednio P i B . W interesujących nas zastosowaniach zbiór $X_{\mathcal{D}}$ będzie zawsze skończony. W przypadku zdań postaci (2.128) i (2.130) przyjmuje się strukturę (2.132) taką, że $X_{\mathcal{D}}$ jest zbiorem Szwedów, zaś $P_{\mathcal{D}}$ i $B_{\mathcal{D}}$ są zbiorami rozmytymi Szwedów takimi, że $\mu_{P_{\mathcal{D}}}(x)$ i $\mu_{B_{\mathcal{D}}}(x)$ określają stopień w jakim x jest odpowiednio *wysoki* i *młody*.

Rachunek kwantyfikatorów lingwistycznych Zadeha przewiduje następujący sposób obliczania wartości prawdy wyrażen (2.129) i (2.131). Kwantyfikator lingwistyczny Q jest utożsamiany ze zbiorem rozmytym²⁴, określonym na przedziale $[0,1]$, o funkcji przynależności μ_Q .

²³Zadeh [240, 241] używa, w ramach tak zwanej *test-score semantics*, pojęcia *explanatory database*, *EDF*, któremu odpowiada tu pojęcie *struktury* stosowane tradycyjnie w logice.

²⁴Dla uproszczenia notacji będziemy oznaczać tą samą literą Q zarówno kwantyfikator lingwistyczny, jak i reprezentujący go zbiór rozmyty.

Przykład 2.4. *Przyjmijmy, że kwantyfikator $Q =$ większość jest reprezentowany przez zbiór rozmyty $Q \in \mathcal{F}([0, 1])$, o następującej funkcji przynależności:*

$$\mu_Q(\beta) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \beta < 0.3 \\ 2\beta - 0.6 & \text{dla } 0.3 \leq \beta \leq 0.8 \\ 1 & \text{dla } \beta > 0.8 \end{cases} \quad \beta \in [0, 1] \quad (2.133)$$

Wzór ten, w rozważanym tu przykładzie, należy interpretować następująco: jeśli liczność względna²⁵ zbioru pracowników, mających określoną własność (młodych, mających niskie wynagrodzenie itp.), przekracza 80%, to stopień spełnienia zdania jest równy 1; jeśli ta liczność względna jest mniejsza niż 30%, to stopień spełnienia zdania wynosi 0; w pozostałych przypadkach stopień spełnienia zdania należy do przedziału $[0, 1]$, przy czym im większa liczność, tym stopień spełnienia rozważanego zdania bliższy jest wartości 1.

Stopień spełnienia $\mathcal{T}_D(Qx P(x))$ zdania typu I (2.129) względem struktury \mathcal{D} (2.132) określa się następująco²⁶:

$$\mathcal{T}_D(Qx P(x)) = \mu_Q(\beta_1) \quad (2.134)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \Sigma\text{Count}(P_D | X_D) = \frac{\Sigma\text{Count}(P_D \cap X_D)}{\Sigma\text{Count}(X_D)} = \\ &= \frac{\Sigma\text{Count}(P_D)}{\Sigma\text{Count}(X_D)} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_{P_D}(x_i)}{n} \end{aligned} \quad (2.135)$$

przy czym n jest licznością zbioru X_D zaś ΣCount oznacza sigma-count, liczność (względna) zbioru rozmytego - por. def. 2.11.

Stopień spełnienia $\mathcal{T}_D(Qx (B(x), P(x)))$ zdania typu II (2.131) względem struktury \mathcal{D} określa się następująco:

$$\mathcal{T}_D(Qx (B(x), P(x))) = \mu_Q(\beta_2) \quad (2.136)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \Sigma\text{Count}(P_D | B_D) = \frac{\Sigma\text{Count}(B_D \cap P_D)}{\Sigma\text{Count}(B_D)} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \min(\mu_{B_D}(x_i), \mu_{P_D}(x_i))}{\sum_{i=1}^n \mu_{B_D}(x_i)} \end{aligned} \quad (2.137)$$

²⁵Względem jakiego zbioru ta liczność jest określona zależy od konkretnej postaci i typu zdania z kwantyfikatorem lingwistycznym.

²⁶W dalszym ciągu, jeśli postać struktury \mathcal{D} nie będzie istotna, to będziemy używać oznaczenia \mathcal{T} zamiast \mathcal{T}_D .

W ogólności funkcja przynależności zbioru rozmytego, reprezentującego kwantyfikator lingwistyczny, może przyjąć praktycznie dowolną postać, zgodną z intuicją użytkownika co do znaczenia danego kwantyfikatora. W zastosowaniach najbardziej przydatne są tak zwane kwantyfikatory *regularne niemalejące monotoniczne* [232], oznaczane z angielskiego skrótem RIM, takie że:

$$\begin{aligned}\mu_Q(0) &= 0 \\ \mu_Q(1) &= 1 \\ \beta_1 > \beta_2 &\Rightarrow \mu_Q(\beta_1) \geq \mu_Q(\beta_2) \quad \forall \beta_1, \beta_2 \in [0, 1]\end{aligned}\tag{2.138}$$

Przykładem kwantyfikatora RIM jest kwantyfikator o funkcji przynależności zdefiniowanej w (2.133).

Znaczący wkład w badania nad teorią i zastosowaniami kwantyfikatorów lingwistycznych wnieśli Yager [223, 224] i Kacprzyk [128, 129, 125, 126]. W dalszej części niniejszego punktu omawiamy między innymi zastosowanie operatorów OWA [233] do modelowania kwantyfikatorów lingwistycznych.

Operatory agregacji

W rozważanych zadaniach wyszukiwania informacji istotną rolę odgrywają *warunki*, które wyrażają preferencje użytkownika. W szczególności rozpatrujemy *złożone* warunki, które tradycyjnie konstruuje się za pomocą klasycznych *spójników logicznych*. Spójniki te można traktować jako *operatory agregacji* stopni spełnienia warunków cząstkowych. Przypisany im tryb agregacji nie zawsze może adekwatnie reprezentować intencje użytkownika, nawet jeśli używamy do ich reprezentacji operacji opisanych w p. 2.2.2. Na przykład przy agregacji z użyciem t -normy uzyskuje się w wyniku zawsze wartość *nie większą niż* najmniejsza z wartości agregowanych (minimum jest *największą* spośród wszystkich t -norm). Z kolei przy agregacji z użyciem t -konormy uzyskuje się w wyniku zawsze wartość *nie mniejszą niż* największa z wartości agregowanych (maksimum jest *najmniejszą* spośród wszystkich t -konorm). W związku z tym zasadne jest zastosowanie jednego z wielu zaproponowanych w ramach szeroko rozumianej logiki rozmytej operatorów umożliwiających bardziej *elastyczną* agregację.

Zadanie agregacji określimy jako przypisanie dla uporządkowanego zbioru elementów (a_1, \dots, a_n) z przedziału $[0, 1]$ pojedynczej wartości M ze zbioru $[0, 1]$

$$M : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$$

Postuluje się pewne warunki, które operator M ma spełniać. Obejmują one zwykle [107]:

ciągłość: małe zmiany wartości agregowanych elementów nie powodują skokowej zmiany wartości operatora M ,

neutralność: wynik agregacji nie zależy od kolejności agregowanych elementów a_i : $M(a_1, \dots, a_n) = M(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)})$, gdzie σ określa dowolną permutację zbioru indeksów elementów $\{1, \dots, n\}$,

monotoniczność: zwiększenie wartości jednego z elementów daje wynik agregacji nie mniejszy niż wyjściowy,

idempotentność: $M(a, a, \dots, a) = a$.

Istotną konsekwencją *idempotentności* i *monotoniczności* operatora M jest następująca własność *kompensacyjności*

$$\min(a_1, \dots, a_n) \leq M(a_1, \dots, a_n) \leq \max(a_1, \dots, a_n) \quad (2.139)$$

Tak określone operatory agregacji rzeczywiście uzupełniają więc sposoby agregacji możliwe do uzyskania z użyciem spójników logicznych, reprezentowanych za pomocą operatorów t -normy i s -normy. W dalszej części tego punktu omawia się wybrane operatory agregacji. Źródłem kompleksowej informacji na temat operatorów agregacji jest książka pod redakcją Calvo, Mayora i Mesiara [57].

Średnia arytmetyczna i uogólniona. *Średnia arytmetyczna* to najlepiej znana metoda agregacji danych cząstkowych, wyrażająca się wzorem

$$M(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

Podobnymi wzorami wyrażają się też inne, znane średnie, takie jak *średnia geometryczna* ($M(a_1, \dots, a_n) = (\prod_{i=1}^n a_i)^{\frac{1}{n}}$), czy *średnia harmoniczna* ($M(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$). Średnie te są szczególnymi przypadkami [115] tak zwanej *średniej uogólnionej*

$$M(a_1, \dots, a_n) = f^{-1}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i)\right) \quad (2.140)$$

gdzie f jest dowolną funkcją ciągłą i ściśle monotoniczną.

Przyjmując różne postacie funkcji f , uzyskuje się poszczególne typy średnich: $f(x) = x$ dla *średniej arytmetycznej*, $f(x) = \log x$ dla *średniej geometrycznej* i $f(x) = \frac{1}{x}$ dla *średniej harmonicznej*.

Pojęcie średniej uogólnionej i wzór (2.140) można rozszerzyć na przypadek, w którym poszczególne kryteria k_i opatrzone są *stopniami ważności* w_i takimi, że $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Wtedy

$$M_{w_1, \dots, w_n}(a_1, \dots, a_n) = f^{-1}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i f(a_i)\right) \quad (2.141)$$

Minimum i maksimum ważone. Operatory te stanowią rozszerzenie standardowych operatorów \min i \max na przypadek, gdy podane są *stopnie ważności* kryteriów w_i , przy czym zakłada się, że te stopnie ważności spełniają warunek: $\max_{i=1, \dots, n} w_i = 1$. Operatory *minimum ważonego* $W\min$ i *maksimum ważonego* $W\max$ określone są następującymi wzorami [86]:

$$W\min_{w_1, \dots, w_n}(a_1, \dots, a_n) = \min_{i=1, \dots, n} \max(1 - w_i, a_i) \quad (2.142)$$

$$W\max_{w_1, \dots, w_n}(a_1, \dots, a_n) = \max_{i=1, \dots, n} \min(w_i, a_i) \quad (2.143)$$

Powyższe wzory uogólnia się, używając operatorów t -normy, t -konormy, implikacji rozmytej i koimplikacji (por. p. 2.2.2). Prowadzi to do następujących wzorów

$$W\min_{w_1, \dots, w_n}^{\wedge, i}(a_1, \dots, a_n) = \bigwedge_{i=1, \dots, n} i(w_i, a_i) \quad (2.144)$$

$$W\max_{w_1, \dots, w_n}^{\vee, ic}(a_1, \dots, a_n) = \bigvee_{i=1, \dots, n} i_c(1 - w_i, a_i) \quad (2.145)$$

gdzie \bigwedge i \bigvee oznaczają operatory t -normy i t -konormy zastosowane do wielu argumentów. Wzór (2.142) otrzymuje się przez użycie operatora t -normy minimum oraz operatora implikacji i_{S-M} (2.88) we wzorze (2.144). Wzór (2.143) otrzymuje się przez użycie we wzorze (2.145) operatora t -konormy maksimum oraz operatora koimplikacji $i_{c, S-M}$ (2.96).

Operatory, opisane powyższymi wzorami, mają własność *idempotentności* [107]. Przy założeniu pewnych własności, występujących w nich implikacji i koimplikacji, uzyskane operatory są dodatkowo *monotoniczne*.

Uporządkowana średnia ważona (OWA) Operatory OWA²⁷ wprowadził Yager [226]. Operatory te zdobyły sobie znaczną popularność. Znajdują one liczne zastosowania oraz podlegają dalszej ewolucji od strony teoretycznej [233, 235].

Definicja 2.29. Niech $V \in [0, 1]^n$, $V = [v_1, \dots, v_n]$, $\sum_{i=1}^n v_i = 1$ będzie wektorem wag. Operatorem *uporządkowanej średniej ważonej* (OWA) o wymiarze n względem wektora wag V nazywa się funkcję

$$M_V^{OWA} : [0, 1]^n \longrightarrow [0, 1]$$

taką, że

$$M_V^{OWA}(A) = M_V^{OWA}(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n v_i b_i \quad (2.146)$$

gdzie b_i jest i -tym największym elementem spośród wszystkich elementów a_i i $B = [b_1, \dots, b_n]$.

Przykład 2.5. Rozważmy operator OWA, zdefiniowany z użyciem wektora wag $V = [0.3, 0.4, 0.2, 0.1]$. Wtedy, dla $A = [0.6, 1.0, 0.5, 1.0]$, po posortowaniu A nierosnąco, uzyskuje się $B = [1.0, 1.0, 0.6, 0.5]$ i:

$$\begin{aligned} M_V^{OWA}(0.6, 1.0, 0.5, 1.0) &= V \circ B = \\ &[0.3, 0.4, 0.2, 0.1] \circ [1.0, 1.0, 0.6, 0.5] = 0.87 \end{aligned}$$

Operatory OWA mają wiele pożądanych własności, wymaganych od operatorów agregacji [226, 233]. W zależności od przyjętego wektora wag otrzymuje się takie operatory, jak:

1. *minimum* dla wektora wag $V = [0, 0, \dots, 0, 1]$
2. *maksimum* dla wektora wag $V = [1, 0, \dots, 0, 0]$
3. *średnia arytmetyczna* dla wektora wag $V = [\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$

Operatory OWA o powyższych wektorach wag będziemy oznaczać jako, odpowiednio, M_{\min}^{OWA} , M_{\max}^{OWA} i M_{avg}^{OWA} .

Powyższa lista nie wyczerpuje operatorów agregacji, które można wyrazić z użyciem operatora OWA o odpowiednim wektorze wag. Operatory OWA mogą być użyte w szczególności do reprezentacji *kwantyfikatorów lingwistycznych* (por. p. 2.3.2). W tym celu określa się wektor wag

²⁷ ang. *ordered weighted averaging*

V tak, że uzyskany operator OWA zachowuje się w sposób zbliżony do wybranego *kwantyfikatora lingwistycznego* w sensie Zadeha (por. s. 48). Niech Q oznacza kwantyfikator lingwistyczny typu RIM w sensie Zadeha (2.138). Wektor wag V operatora OWA o wymiarze n , odpowiadającego kwantyfikatorowi Q , określa się w następujący sposób [226]:

$$v_i = \mu_Q\left(\frac{i}{n}\right) - \mu_Q\left(\frac{i-1}{n}\right), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.147)$$

Łatwo zauważyć, że zgodnie z definicją kwantyfikatora RIM (por. (2.138))

$$\mu_Q(0) = 0 \quad \text{i} \quad \mu_Q(1) = 1$$

oraz

$$\mu_Q(i/n) \geq \mu_Q((i-1)/n)$$

więc

$$v_i \geq 0 \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^n v_i = 1$$

i w związku z tym wzór (2.147) poprawnie określa wektor wag operatora OWA.

Przykład 2.6. Załóżmy, że kwantyfikator $Q = \text{większość}$ określony jest wzorem

$$\mu_Q(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \geq 0.8 \\ 2x - 0.6 & \text{dla } 0.3 < x < 0.8 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0.3 \end{cases}$$

Wtedy, dla $n = 5$, wektor wag $V = [v_1, \dots, v_5]$ operatora OWA o wymiarze n , określa się następująco:

$$\begin{aligned} v_1 &= \mu_Q(0.2) - \mu_Q(0) = 0 - 0 = 0 \\ v_2 &= \mu_Q(0.4) - \mu_Q(0.2) = 0.2 - 0 = 0.2 \\ v_3 &= \mu_Q(0.6) - \mu_Q(0.4) = 0.6 - 0.2 = 0.4 \\ v_4 &= \mu_Q(0.8) - \mu_Q(0.6) = 1 - 0.6 = 0.4 \\ v_5 &= \mu_Q(1) - \mu_Q(0.8) = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Należy zauważyć, że operator OWA, o tak określonym wektorze wag, daje dla danych binarnych takie same wyniki agregacji jak kwantyfikator Q , na którego podstawie został skonstruowany. Dla pozostałych danych, w ogólności, wyniki są jedynie podobne. Poza tym, określony przy zastosowaniu (2.147) operator OWA może zastąpić kwantyfikator Q jedynie

w zdaniach typu I (por. (2.129)). Procedurę opisaną wzorem (2.147) można rozszerzyć na zdania typu II (2.131), czyli gdy przy agregowaniu danych wejściowych trzeba uwzględnić wektor ich stopni ważności W .

Założmy zatem, że mamy wektor $A = [a_1, \dots, a_n]$ elementów agregowanych oraz wektor przypisanych im stopni ważności $W = [w_1, \dots, w_n]$: $w_i \in [0, 1]$ jest stopniem ważności elementu a_i , $i = 1, \dots, n$. Założmy też, że mamy zdefiniowany rozmyty kwantyfikator lingwistyczny Q w sensie Zadeha. Określamy wtedy postać wektora wag V operatora OWA w następujący sposób:

$$v_i = \mu_Q \left(\frac{\sum_{k=1}^i u_k}{\sum_{k=1}^n u_k} \right) - \mu_Q \left(\frac{\sum_{k=1}^{i-1} u_k}{\sum_{k=1}^n u_k} \right) \quad (2.148)$$

gdzie u_i jest stopniem ważności i -tego największego co do wartości argumentu spośród wszystkich a_j .

Zauważmy, że $\sum_{i=1}^n v_i = 1$ oraz $\forall i \ v_i \geq 0$, tak więc wymagania, dotyczące postaci wektora wag operatora OWA, są spełnione.

Powyższy sposób określenia wektora wag operatora OWA, na podstawie kwantyfikatora Q , wynika z dążenia do zachowania identyczności wyników agregowania w przypadku danych binarych. Porównując wzór (2.147) ze wzorem (2.148) należy zauważyć, że w pierwszym przypadku wektor wag V określa się niezależnie od postaci agregowanych danych (wektora A), natomiast w drugim przypadku wektor wag należy obliczyć każdorazowo zależnie od postaci wektora A .

Przykład 2.7. Założmy, że liczba agregowane są 4 elementy i agregowanym elementom wektora $A = [a_1, a_2, a_3, a_4] = [0.7, 1, 0.5, 0.6]$ przypisano stopnie ważności $W = [w_1, w_2, w_3, w_4] = [1, 0.6, 0.5, 0.9]$, czyli stopień ważności a_i wynosi w_i .

Przyjmijmy, że kwantyfikator lingwistyczny Q ma następującą prostą postać:

$$\mu_Q(x) = x, \quad \text{dla wszystkich } x \in [0, 1] \quad (2.149)$$

czyli jest to tak zwany *jednostkowy kwantyfikator lingwistyczny*,

Porządkując elementy a_i w porządku nierosnącym, otrzymuje się: $B = [b_1, b_2, b_3, b_4]$, tak że $b_1 = a_2 = 1$, $b_2 = a_1 = 0.7$, $b_3 = a_4 = 0.6$, a $b_4 = a_3 = 0.5$, czyli:

$$B = [a_4, a_3, a_1, a_2]$$

Stopnie ważności $U = [u_1, u_2, u_3, u_4]$, występujące we wzorze (2.148), skojarzone z elementami $B = [b_1, b_2, b_3, b_4]$ są zatem następujące: $u_1 =$

0.6, $u_2 = 1$, $u_3 = 0.9$, i $u_4 = 0.5$, czyli $u_1 + \dots + u_4 = 3$ i:

$$U = [0.6, 1, 0.9, 0.5]$$

Teraz, zgodnie ze wzorem (2.148), oblicza się wektor wag V operatora OWA, którym chcemy się posłużyć przy agregacji:

$$\begin{aligned} v_1 &= \mu_Q\left(\frac{0.6}{3}\right) - \mu_Q\left(\frac{0}{3}\right) = 0.2 - 0 = 0.2 \\ v_2 &= \mu_Q\left(\frac{1.6}{3}\right) - \mu_Q\left(\frac{0.6}{3}\right) = 0.53 - 0.2 = 0.33 \\ v_3 &= \mu_Q\left(\frac{2.5}{3}\right) - \mu_Q\left(\frac{1.6}{3}\right) = 0.83 - 0.53 = 0.3 \\ v_4 &= \mu_Q\left(\frac{3}{3}\right) - \mu_Q\left(\frac{2.5}{3}\right) = 1 - 0.83 = 0.17 \end{aligned}$$

Yager [226] wprowadził dwie miary charakteryzujące operatory OWA: ORnessi *rozproszenie* (ang. *dispersion*).

Definicja 2.30 ([226]). *Miarę ORness operatora OWA M_V^{OWA} o wymiarze n i wektorze wag $V = [v_1, \dots, v_n]$ określa się następującym wzorem:*

$$\text{ORness}(M_V^{OWA}) = \frac{\sum_{i=1}^n (n-i)v_i}{n-1} \quad (2.150)$$

Wartości miary ORness należą do przedziału $[0,1]$. Łatwo zauważyć, że:

$$\text{ORness}(M_{\min}^{OWA}) = 0, \quad \text{ORness}(M_{\max}^{OWA}) = 1, \quad \text{ORness}(M_{\text{avg}}^{OWA}) = 0.5$$

Tak więc miara ORness może być interpretowana jako stopień podobieństwa operatora OWA do operatora maksimum, używanego standardowo do modelowania *alternatywy* w logice rozmytej. Wyższa wartość miary ORness (bliższa 1) wskazuje większe podobieństwo. Można się tym kierować przy określaniu lub modyfikowaniu wektora wag V .

Definicja 2.31 ([226]). *Miarę rozproszenia operatora OWA M_V^{OWA} o wymiarze n i wektorze wag $V = [v_1, \dots, v_n]$ określa się następująco:*

$$\text{disp}(M_V^{OWA}) = - \sum_{\substack{i=1 \\ v_i \neq 0}}^n v_i \ln(v_i) \quad (2.151)$$

Miara rozproszenia nazywa się również *entropią* operatora OWA. Im bardziej zbliżone są do siebie (i co za tym idzie, do wartości $1/n$) poszczególne współrzędne wektora wag V , tym wyższa wartość tej miary. Operator OWA o wielkiej wartości miary dyspersji uwzględnia podczas

agregacji więcej argumentów. Skrajnymi przykładami są tu znów operatory M_{\min}^{OWA} i M_{\max}^{OWA} , które uwzględniają przy agregacji tylko jeden element – odpowiednio: najmniejszy i największy – i mają najmniejszą wartość miary rozproszenia, równą 0. Operator M_{avg}^{OWA} uwzględnia w równorzędny sposób wszystkie elementy wejściowe i ma największą możliwą wartość miary rozproszenia, równą $\ln(n)$.

W zastosowaniach istotne jest właściwe określenie *wektora wag* V dla używanego operatora OWA. W literaturze proponuje się wiele podejść, między innymi określanie wag na podstawie danych eksperymentalnych (por. np. [105]), na podstawie kwantyfikatora lingwistycznego (omówione powyżej) oraz na podstawie zadania optymalizacji charakterystyk takich jak ORness czy rozproszenie. Przegląd różnych podejść można znaleźć na przykład w [246].

Uporządkowane minimum i maksimum ważone. Operatory te [102, 83] stanowią przeniesienie pomysłu porządkowania danych wejściowych przed zastosowaniem operatora agregacji – tak jak ma to miejsce w przypadku operatorów OWA – na *ważone* wersje operatorów minimum i maksimum. Operatory te wyrażają się tymi samymi wzorami, co *minimum ważne* (2.142) i *maksimum ważne* (2.143), z tym że dane wejściowe A są wstępnie sortowane. Formalnie otrzymuje się więc

$$\text{OWmin}_{w_1, \dots, w_n}(a_1, \dots, a_n) = \min_{i=1, \dots, n} \max(1 - w_i, b_i) \quad (2.152)$$

$$\text{OWmax}_{w_1, \dots, w_n}(a_1, \dots, a_n) = \max_{i=1, \dots, n} \min(w_i, b_i) \quad (2.153)$$

przy czym b_i jest i -tym największym elementem spośród wszystkich a_i .

Uzyskuje się w ten sposób “delokalizację” *stopni ważności* kryteriów, co podobnie jak w przypadku operatorów OWA czyni te operatory skutecznym narzędziem dla reprezentacji kwantyfikatorów lingwistycznych – por. p. 2.3.2.

ISSN 0208-8029
ISBN 83-894-7551-0

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK
tel.: (+48) 22 3810246 / 22 3810277 / 22 3810241 / 22 3810273
e-mail: biblioteka@ibspan.waw.pl

