Instytut Badań Systemowych
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Barbara Mażbic-Kulma
Anna Pogorzelec
Ewa Komorowska

LOKALIZACJA OBIEKTÓW
Wybrane modele, algorytmy i zastosowania

LOKALIZACJA OBIEKTÓW

Wybrane modele, algorytmy i zastosowania

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH • POLSKA AKADEMIA NAUK

Seria: BADANIA SYSTEMOWE

tom 39

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2005

Barbara Mażbic-Kulma
Anna Pogorzelec
Ewa Komorowska

LOKALIZACJA OBIEKTÓW
Wybrane modele, algorytmy i zastosowania

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. Ireneusz Nykowski
Dr hab. Włodzimierz Ogryczak (prof. PW)

Wydawca: Instytut Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa

Sekcja Informacji Naukowej i Wydawnictw
tel. 837-68-22

ISBN 83-85847-98-7
ISSN 0208-8029

2. KLASYFIKACJE ZAGADNIEŃ LOKALIZACYJNYCH

2.1. Klasyfikacja według Webera

Zagadnienia uwzględniające pojęcie lokalizacji pojawiają się w literaturze światowej od kilkudziesięciu lat. Za twórcę pierwszej systematycznej teorii lokalizacji jest uznawany Alfred Weber [86]. Według jego teorii pierwszoplanowymi czynnikami lokalizacji są koszty transportowe, koszty siły roboczej oraz korzyści aglomeracji. Koncepcja Webera dotyczy indywidualnego przedsiębiorcy działającego w warunkach wolnej konkurencji. Jest to ujęcie mikroekonomiczne. Celem teorii Webera było poszukiwanie optymalnego miejsca lokalizacji prywatnego przedsiębiorstwa w punkcie zapewniającym maksymalną oszczędność. Mimo swojej niedoskonałości teoria ta stanowi w dalszym ciągu podstawę rozważań o rozmieszczaniu przemysłu. Klasyfikacja przeprowadzona przez Webera nie była dokonywana z punktu widzenia modeli lokalizacyjnych, ale z punktu widzenia geografii ekonomicznej tj. optymalnego rozmieszczenia produktów oraz własności tych produktów. W klasyfikacji tej Weber rozróżnia:

1. surowce występujące powszechnie np. glina - nie wywierające wpływu na lokalizację, chyba, że różnią się one parametrami jakościowymi, bądź łatwością pozyskiwania;
2. surowce tracące na wadze w procesie produkcji, np. niskoprocentowe rudy metali - lokalizacja surowcowa;
3. surowce uczestniczące w procesie produkcji, ale niknące w nim, np. surowce energetyczne - w zasadzie lokalizacja surowcowa chyba, że koszty transportowe i ubytki w czasie transportu przemawiają za lokalizacją rynkową;
4. surowce czyste tracące niewiele na wadze w procesie przetwarzania - lokalizacja rynkowa.

W świetle później przeprowadzanych klasyfikacji powyższe rozróżnienie jest ujęciem problemu w mikroskali.

Rozwój komputeryzacji postawił problemy lokalizacji w nowym świetle. W literaturze światowej pojawiła się duża liczba prac poświęconych różnym zagadnieniom lokalizacyjnym. Większość z tych prac powstała na konkretne zamówienia. Zakres instytucji zlecających wyznaczenie optymalnej lokalizacji zadanych obiektów jest bardzo szeroki: zarządy korporacji, rady miejskie, różne gałęzie przemysłu, sektor prywatny i publiczny, a także rządy państw. W każdej z tych prac opisano szczegółowo konkretny problem, sformułowano model matematyczny, zaproponowano algorytm rozwiązania oraz przedstawiono rezultaty obliczeń komputerowych, dokonując częstokroć analizy porównawczej z rozwiązaniami otrzymywanymi przy użyciu innych metod.

Wielość różnorakich modeli, które pojawiły się od czasu cytowanego wyżej, powszechnie znanego artykułu Webera [86] spowodowała potrzebę ich klasyfikacji. Dwie prace dokonujące klasyfikacji zagadnień lokalizacyjnych [1] i [15] zwracającą szczególną uwagę swoim podejściem.

2.2. Klasyfikacja lokalizacyjnych modeli matematycznych według Aikensa

Rodzina modeli matematycznych problemu lokalizacji rozciąga się od prostych jednoasortymentowych modeli po wersję nieliniową wieloasortymentową. Modele te można sklasyfikować w zależności od tego w jaki sposób uwzględniane są następujące zagadnienia:

* liczba magazynów pośrednich,
* liczba towarów (asortymentów),
* struktura kosztów (czy jest liniowa czy też nieliniowa),
* horyzont planowania (czy jest statyczny czy dynamiczny),
* zapotrzebowania (czy są deterministyczne czy stochastyczne),
* sieć dystrybucji (czy ma ograniczoną czy nieograniczoną pojemność).

W pracy [1] Aikens podał pewną klasyfikację różnych modeli lokalizacji najczęściej występujących w literaturze. Przedstawił osiem następujących modeli.

1. Najprostszy model lokalizacji.

W modelu tym zakłada się, że:

- dostawy są nieograniczone,
- nie ma magazynów pośrednich,
- rozpatrywane koszty są liniowe.

Model ten ma następujące sformułowanie matematyczne:

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i y_i \tag{2.2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j=1,\dots,n \tag{2.2.2}$$

$$y_i - x_{ij} \geq 0, \qquad i\in I,\ j\in J \tag{2.2.3}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i=1,\dots,m \quad j=1,\dots,n \tag{2.2.4}$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad i=1,...,m \qquad (2.2.5)$$

gdzie:

$i = 1,...,m$ - dostawcy; $j = 1,...,n$ - odbiorcy

gdzie

m - liczba potencjalnych dostawców,

n - liczba odbiorców,

x_{ij} – udział i-tego dostawcy w realizacji zapotrzebowania j-tego odbiorcy

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{– jeżeli lokalizacja } i\text{-tego dostawcy jest rozpatrywana} \\ 0 & \text{– w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

c_{ij} - jednostkowe koszty inwestycyjno-eksploatacyjne gdy ustalone zapotrzebowanie j-tego odbiorcy jest realizowane przez i-tego dostawcę

f_i - koszty stałe i-tego dostawcy

Model ten może być pomocnym narzędziem przy podejmowaniu decyzji w zastosowaniach, w których możemy założyć, że znane są zapotrzebowania poszczególnych odbiorców i mamy nieograniczone możliwości dostaw. Najwcześniejszą zaproponowaną metodą rozwiązania jest algorytm heurystyczny Kuehna i Hamburgera, [54] w którym przyjęto następujące założenia:

- najlepsze z proponowanych lokalizacji będą położone blisko miejsc koncentracji zapotrzebowań,
- wyniki bliskie optimum mogą być osiągnięte przez kolejne uwzględnianie tych magazynów, które dają największe oszczędności dla całego problemu,
- należy badać tylko mały podzbiór wszystkich proponowanych lokalizacji, który będzie determinował dołączanie najlepszych magazynów.

Algorytm ten lokalizuje nowe magazyny tak długo, aż żaden magazyn więcej nie może być otwarty bez wzrostu kosztów globalnych. Inne podejście do tego problemu prezentują Efroymson i Ray w pracy [19], w której został zamieszczony algorytm oparty o metodę podziału i oszacowań.

2. Prosty model lokalizacji z uwzględnieniem magazynów pośrednich.

Opisany w poprzednim rozdziale najprostszy model lokalizacji można rozszerzyć do problemu wymagającego dwóch rodzajów lokalizacji - lokalizacji dostawców (magazynów, zakładów przetwórczych lub produkcyjnych) i magazynów pośrednich z których dopiero towary przewożone są do odbiorców. Dla tak postawionego problemu Kaufman, Eede i Hansen [42] zaproponowali algorytm, który oparty jest na metodzie podziału i oszacowań.

Model matematyczny dla tego problemu przedstawia się następująco:

$$\min \sum_{i\in M} f_i z_i + \sum_{k\in K} g_k y_k + \sum_{i\in M} \sum_{k\in K} \sum_{j\in N} c_{ikj}\, x_{ikj} \tag{2.2.6}$$

$$\sum_{i\in M} \sum_{k\in K} x_{ikj} = 1 \qquad j\in N \tag{2.2.7}$$

$$\sum_{k\in K} x_{ikj} \le z_i \qquad i\in M,\ j\in N \tag{2.2.8}$$

$$\sum_{i\in M} x_{ikj} \le y_k \qquad k\in K,\ j\in N \tag{2.2.9}$$

$$x_{ikj} \ge 0$$

$$\begin{cases} x_{ikj} \ge 0 \\ z_i \le y_k \\ y_k, z_i \in \{0,1\} \qquad i\in M,\ k\in K,\ j\in N \end{cases} \tag{2.2.10}$$

gdzie:

i - numer dostawcy,

k - numer magazynu pośredniego,

j - numer odbiorcy,

f_i - koszty stałe i-tego dostawcy,

g_k - koszty stałe k-tego magazynu pośredniego,

c_{ikj} - całkowite koszty eksploatacji i dystrybucji związane z realizacją zapotrzebowań j-tego odbiorcy przez i-tego dostawcę i poprzez k-ty magazyn

x_{ikj} - udział i-tego dostawcy w realizacji zapotrzebowania j-tego odbiorcy poprzez k-ty magazyn pośredni

$$y_k = \begin{cases} 1 - \text{jeśli jest rozpatrywana lokalizacja } k \text{ - tego magazynu pośredniego} \\ 0 - \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$z_i = \begin{cases} 1 - \text{jeśli jest rozpatrywana lokalizacja } i \text{ - tego dostawcy} \\ 0 - \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

M, K, N - zbiory odpowiednio potencjalnych dostawców, magazynów pośrednich, odbiorców.

Funkcja celu wyraża całkowite, sumaryczne koszty składające się ze stałych kosztów f_i dla dostawców, g_k dla magazynów pośrednich oraz kosztów c_{ikj} produkcji i transportu od dostawcy, magazynowania i transportu między dostawcą a magazynem pośrednim oraz transportu z magazynu do odbiorcy. Jeśli koszty u dostawców są nieliniowe, można je aproksymować liniowo przez wprowadzenie fikcyjnych dostawców lub magazynów pośrednich [10].

Ograniczenia (2.2.7) zapewniają zaspokojenie zapotrzebowań poszczególnych odbiorców, a (2.2.8) i (2.2.9), że zapotrzebowania te będą zaspokojone tylko przez rozpatrywanych dostawców i magazyny pośrednie. Ograniczenia (2.2.10) mówią, że magazyn pośredni związany z i-tym dostawcą musi być uwzględniony, jeśli jest rozpatrywany i-ty dostawca. Przepustowość magazynów pośrednich jest nieograniczona.

3. Wieloasortymentowy model lokalizacji.

Model ten jest pewnym praktycznym uogólnieniem najprostszego modelu lokalizacji i ma następujące sformułowania matematyczne:

$$\min \sum_{i\in M}\sum_{j\in N}\sum_{p\in P} c_{ijp}x_{ijp} + \sum_{i\in M}\sum_{p\in P} f_{ip}z_{ip} \tag{2.2.11}$$

$$\sum_{i\in M} x_{ijp} = 1 \qquad \text{jeżeli} \quad b_{jp} \geq 0 \qquad j\in N, p\in P \tag{2.2.12}$$

$$\sum_{p\in P} z_{ip} \leq 1 \qquad i\in M \tag{2.2.13}$$

$$\sum_{j\in N} x_{ijp} \leq z_{ip} \qquad i\in M, p\in P \tag{2.2.14}$$

$$x_{ijp} \geq 0 \qquad i\in M,\ i\in M, p\in P \tag{2.2.15}$$

$$z_{ip} \in \{0,1\} \qquad i\in M,\ p\in P \tag{2.2.16}$$

gdzie:

x_{ijp} - udział i-tego dostawcy w realizacji zapotrzebowania j-tego odbiorcy na p-ty produkt

$$z_{ip} = \begin{cases} 1 - \text{jeśli } i\text{ - ty dostawca może dostarczać } p - \text{ty produkt} \\ 0 \text{ w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

c_{ijp} - całkowite koszty produkcji i dystrybucji ponoszone przy zaspokajaniu zapotrzebowań j-tego odbiorcy na p-ty produkt przez i-tego dostawcę

f_{ip} - stałe koszty i-tego dostawcy związane z dostawą p-tego produktu

b_{jp} - całkowite zapotrzebowanie j-tego odbiorcy na p-ty produkt

M, N, P - zbiory numerów dostawców, odbiorców i produktów

Ograniczenia (2.2.12) zapewniają zaspokojenie potrzeb, a ograniczenia (2.2.14) zapewniają, że dostawy będą odbywać się tylko od rozpatrywanych dostawców. W modelu przyjęto ograniczenia (2.2.13) mówiące o tym, że każdy dostawca może dostarczać tylko jeden rodzaj produktów. Wynika to stąd, że model został sformułowany dla potrzeb rozwiązania problemu rzeczywistego, w którym należało znaleźć lokalizację fabryk produkujących trzy rodzaje towarów. Każda z fabryk mogła produkować tylko jeden z nich i należało wszystkich dostawców tak zlokalizować aby każdemu z odbiorców zapewnić zaspokojenie zapotrzebowań. Model ten może być zaadaptowany w przypadku wieloasortymentowej produkcji w każdym zakładzie, poprzez opuszczenie ograniczeń (2.2.13).

4. Dynamiczny model lokalizacji.

Podobnie jak w przypadku wieloasortymentowego modelu lokalizacji inspiracją do sformułowania modelu dynamicznego była próba opisania spotykanego w gospodarce problemu rzeczywistego. W modelu dynamicznym zakłada się, że decyzje o lokalizacji są funkcją czasu. Model matematyczny ma następującą postać:

$$\min \sum_{i\in M}\sum_{j\in N}\sum_{s\in S} c_{ijs}x_{ijs} + \sum_{i\in M}\sum_{s\in S}\alpha_{is}z_{is} + \sum_{i\in M}\beta_{i1}z_{i1} + \sum_{i\in M}\sum_{s\in S'}\beta_{is}z_{is}(1-z_{i,s-1}) \quad (2.2.17)$$

$$\sum_{i\in M} x_{ijs} = 1 \qquad \text{jeśli} \quad b_{js} > 0 \quad j\in N,\ s\in S \quad (2.2.18)$$

$$\sum_{j\in N} x_{ijs} \le z_{is} \qquad i\in M,\ s\in S \quad (2.2.19)$$

$$x_{ijs} \ge 0 \qquad j\in N,\ i\in M,\ s\in S \quad (2.2.20)$$

$$z_{is} \in \{0,1\} \quad (2.2.21)$$

gdzie:

x_{ijs} - udział i-tego dostawcy w realizacji zapotrzebowania j-tego odbiorcy w czasie s

$$z_{is} = \begin{cases} 1 - \text{jeżeli dostawca } i - \text{ty jest rozpatrywany w czasie } s \\ 0 - \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

c_{ijs} - całkowite koszty eksploatacji i dystrybucji związane z realizacją zapotrzebowania j-tego odbiorcy przez i-tego dostawcę w czasie s

b_{js} - całkowite zapotrzebowanie j-tego odbiorcy w czasie s

α_{is} - koszty stałe dostawcy i-tego w czasie s

β_{is} - koszty ponoszone przy ustalaniu i-tej lokalizacji w czasie s

M, N, S - zbiory dostawców, odbiorców i momentów czasowych

$S' = S - \{1\}$

Minimalizowana funkcja celu składa się z czterech następujących składników:

1. globalne koszty transportowe w każdym momencie czasowym,
2. stałe koszty eksploatacyjne tych dostawców, którzy są rozpatrywani w poszczególnych momentach czasowych, zsumowane we wszystkich momentach,
3. suma kosztów ponoszonych przez wszystkich dostawców związanych z podjęciem decyzji czy dany dostawca będzie uwzględniony,
4. suma kosztów związanych ze zmianą lokalizacji dostawców między momentem s-1 a momentem s.

Jak łatwo zauważyć, dla ustalonego momentu czasowego ograniczenia (2.2.18) - (2.2.21) są prawie identyczne z analogicznymi ograniczeniami dla najprostszego modelu lokalizacji.

5. Model lokalizacji z ograniczoną dostawą.

Często spotykanym ograniczeniem przy rozpatrywaniu problemów rzeczywistych jest ograniczenie dotyczące wielkości dostaw np. przez maksymalne możliwości produkcyjne fabryki lub maksymalną pojemność magazynu itp. Uwzględnienie tego założenia przekształca najprostszy model lokalizacji w model z ograniczoną dostawą:

$$\min \sum_{i\in M}\sum_{j\in N} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in M} f_i z_i \tag{2.2.22}$$

$$\sum_{i\in M} b_j x_{ij} \le a_i z_i \qquad i\in M \tag{2.2.23}$$

$$\sum_{i\in M} x_{ij} = 1 \qquad j\in N \tag{2.2.24}$$

$$x_{ij} \in [0,1] \qquad i\in M,\quad j\in N$$

$$z_i \in \{0,1\} \qquad i\in M$$

gdzie:

f_i - stałe koszty i-tego dostawcy

b_j - zapotrzebowanie j-tego odbiorcy

a_i - możliwość dostaw i-tego dostawcy

N, M - zbiory odbiorców *i* dostawców

f_i - koszty stałe i-tego dostawcy

x_{ij} - udział i-tego dostawcy w realizacji zapotrzebowań j-tego odbiorcy

$$z_i = \begin{cases} 1 - \text{jeżeli } i \text{ - ty dostawca jest rozpatrywany} \\ 0 - \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

c_{ij} - całkowite koszty eksploatacji i dystrybucji związane z realizacją zapotrzebowania j-tego odbiorcy przez i-tego dostawcę

6. Uogólniony model lokalizacji z ograniczoną dostawą.

Opisany w poprzednim rozdziale model lokalizacji z ograniczonymi możliwościami dostaw został uogólniony przez Geoffriona i McBridea [29]. W modelu tym rozpatrywane są możliwe nowe lokalizacje w poszczególnych regionach. Ma on następujące sformowanie matematyczne:

$$\min \sum_{i\in M}\sum_{j\in N} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in M} f_i z_i \qquad (2.2.25)$$

$$\underline{V}_i z_i \le \sum_{j\in N} b_j x_{ij} < \overline{V}_i z_i \qquad i\in M \qquad (2.2.26)$$

$$\sum_{i\in M} \beta_{ik} z_i \ge r_q \qquad q\in Q \qquad (2.2.27)$$

$$\sum_{i\in M} x_{ij} = 1 \qquad j\in N \qquad (2.2.28)$$

$$x_{ij} \in [0,1] \qquad i\in M\ ,\quad j\in N \qquad (2.2.29)$$

$$z_i \in \{0,1\} \qquad i\in M$$

gdzie:

f_i - koszty stałe i-tego dostawcy

x_{ij} - udział i-tego dostawcy w realizacji zapotrzebowań j-tego odbiorcy

$$z_i = \begin{cases} 1 - \text{jeżeli } i \text{ - ty dostawca jest rozpatrywany} \\ 0 - \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

c_{ij} - całkowite koszty eksploatacji i dystrybucji związane z realizacją zapotrzebowania j-tego odbiorcy przez i-tego dostawcę

b_j - wielkość zapotrzebowania j-tego odbiorcy

$\underline{V}_i\ (\overline{V}_i)$ - dolne (górne) ograniczenie na możliwości dostaw od i-tego dostawcy

r_q - zadana ilość lokalizacji w danym regionie

$$\beta_{iq} = \begin{cases} 1 - \text{jeżeli } i \text{ - ta lokalizacja należa do } q \text{ - tego regionu} \\ 0 - \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Zauważmy, że ograniczenia (2.2.26) uwzględniają maksymalne i minimalne możliwości dostaw i-tego dostawcy, zaś ograniczenia (2.2.27) w postaci zapisanej powyżej mówi o tym, że co najmniej r_q lokalizacji musi być uwzględnionych w regionie q. Zmiana znaku nierówności spowoduje, że ograniczenia te mogą być interpretowane jako uwzględnienie co najwyżej r_q lokalizacji. Pozostałe ograniczenia mają taką samą interpretację jak w modelu lokalizacji z ograniczoną dostawą

7. Stochastyczny model lokalizacji z ograniczoną dostawą

W modelu tym rozpatrywane są dostawy jednego rodzaju towaru, ale wielkości zapotrzebowań są zmiennymi losowymi.

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j\in J}\left[h_j \int_0^{y_j} (y_j - v)\,\phi_j(v)dv + p_j \int_{y_j}^{\infty} (v - y_j)\,\phi_j(v)dv \right] + \sum_{i\in I} f_i z_i\,, \qquad (2.2.30)$$

$$y_j = \sum_{i \in M} x_{ij} \qquad j \in N \qquad (2.2.31)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} \le a_i z_i \qquad i \in M \cup M' \qquad (2.2.32)$$

$$y_j \ge 0, \quad z_i \in \{0,1\} \qquad j \in N, i \in M' \qquad (2.2.33)$$

$$z_i = 1 \qquad i \in M \qquad (2.2.34)$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad i \in M \cup M', \quad j \in N$$

gdzie:

x_{ij} - wielkość dostaw i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy

$$z_i = \begin{cases} 1 - \text{jeżeli } i \text{ - ty dostawca jest rozpatrywany} \\ 0 - \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$\phi_j(v)$ - funkcje gęstości odpowiadające zapotrzebowaniu j-tego odbiorcy

h_i - jednostkowe koszty przechowywania zapasów u j-tego odbiorcy wynikające z nadmiaru dostaw

p_j - jednostkowe koszty ponoszone przez j-tego odbiorcę wynikające z niewystarczających dostaw w stosunku do zapotrzebowań

y_j - suma dostaw do j-tego odbiorcy od wszystkich dostawców

M - zbiór istniejących dostawców

M' - zbiór proponowanych dostawców

N - zbiór odbiorców

Jak łatwo zauważyć w modelu założono, że nowe punkty dostawców będą lokalizowane dopiero wtedy gdy zostaną uwzględnieni istniejący dostawcy - zapewniają to ograniczenia (2.2.34). Jednakże w przypadku gdy chcemy lokalizować nowe punkty dostaw, podczas gdy niektórzy istniejący dostawcy są pominięci można opuścić ograniczenia (2.2.34) a w ograniczeniach (2.2.33) zmienna i będzie należała do zbioru $M \cup M'$. Ponadto zakłada się, że suma dostaw od i-tego dostawcy do wszystkich odbiorców jest nie większa od jego możliwości dostaw (ograniczenia (2.2.32)).

Funkcja celu minimalizuje wszystkie rodzaje ponoszonych kosztów - zarówno koszty produkcji i dystrybucji jak i koszty ponoszone w wyniku założenia losowości wielkości zapotrzebowań i składa się z trzech części:

- suma kosztów produkcji i dystrybucji towarów dla wszystkich par odbiorców i dostawców,
- suma kosztów związanych z magazynowaniem zapasów w przypadku gdy wielkości dostaw do j-tego odbiorcy są większe niż wartość oczekiwana tych dostaw, bądź

kosztów związanych z niewystarczającymi wielkościami dostaw do j-tego odbiorcy w porównaniu do wielkości oczekiwanych dostaw,

– suma kosztów stałych (inwestycyjnych) dla wszystkich dostawców.

8. Wieloasortymentowy model lokalizacji z magazynami pośrednimi i z ograniczoną dostawą.

Rozwiązanie wieloasortymentowego problemu lokalizacji z magazynami pośrednimi i ograniczoną dostawą po raz pierwszy zaprezentował w literaturze Elson [20]. Następnie Geoffrion, Groves i Lee [28] rozpatrują model, gdzie lokalizowane są magazyny pośrednie przy założeniu, że każdy odbiorca jest przypisany do wybranych magazynów pośrednich i minimalizowane są koszty produkcji i dystrybucji towarów na całej drodze od dostawcy poprzez magazyn pośredni.

$$\min \sum_{i\in M}\sum_{k\in K}\sum_{j\in N}\sum_{p\in P} c_{ikjp}x_{ikjp} + \sum_{k\in K}\left[f_j z_j + v_j \sum_{j\in N}\sum_{p\in P} b_{kp} y_{kj}\right] \tag{2.2.35}$$

$$\sum_{j\in N}\sum_{k\in K} x_{ikjp} \le S_{ip} \qquad i\in M,\ p\in P \tag{2.2.36}$$

$$\sum_{i\in M} x_{ikjp} = b_{jp} y_{kj} \qquad p\in P,\ j\in N,\ k\in K \tag{2.2.37}$$

$$\underline{V_k} z_k \le \sum_{k\in K}\sum_{p\in P} b_{jp} y_{kj} \le \overline{V_k} z_k \tag{2.2.38}$$

$$x_{ikjp} \ge 0 \tag{2.2.39}$$

$$y_{kj}, z_j \in \{0,1\} \tag{2.2.40}$$

gdzie:

x_{ikjp} - ilość p-tego towaru przewożona od i-tego dostawcy do k-tego odbiorcy przez j-ty magazyn pośredni

$$z_k = \begin{cases} 1 - \text{jeżeli } k \text{ - ty magazyn pośredni jest rozpatrywany} \\ 0 - \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$y_{kj} = \begin{cases} 1 - \text{jeżeli } j \text{ - ty odbiorca jest przypisany do } k \text{ - tego magazynu pośredniego} \\ 0 - \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

c_{ikjp} - jednostkowe koszty produkcji i dystrybucji związane z przewożeniem p-tego towaru od i-tego dostawcy do k-tego odbiorcy przez j-ty magazyn pośredni

f_k - stałe koszty inwestycyjne k-tego magazynu pośredniego

v_k - jednostkowe koszty związane z przesyłaniem towaru przez k-ty magazyn pośredni

b_{jp} - zapotrzebowanie j-tego odbiorcy na p-ty towar

s_{ip} - możliwości dostaw p-tego produktu przez i-tego dostawcę

$\underline{V}_k (\overline{V}_k)$ - minimalna (maksymalna) ilość towarów przesyłana przez k-ty magazyn pośredni

Ograniczenia (2.2.36) zapewniają, że dostawy nie będą większe niż maksymalne możliwości dostaw poszczególnych towarów od dostawców. Ograniczenia (2.2.37) zapewniają nie tylko, że zapotrzebowania będą zaspokajane, ale również, że towary będą przesyłane do odbiorców przez odpowiednie (przypisane do odbiorcy) magazyny pośrednie. Ograniczenia (2.2.38) uwzględniają maksymalne i minimalne możliwości przesyłkowe magazynów pośrednich. Ponadto oba ostatnie ograniczenia gwarantują, że zapotrzebowania będą zaspokajane tylko przez dostawy przesyłane przez otwarte (rozpatrywane) magazyny pośrednie.

2.3. Klasyfikacja zadań lokalizacyjnych według Currenta, Mina i Schillinga

Current, Min oraz Schilling [15] również dokonują przeglądu szerokiej i wielodyscyplinarnej literatury dotyczącej zadań lokalizacyjnych. Celem ich analizy jest przedstawienie zakresu badań prowadzonych do 1990 roku oraz zobrazowanie w jak wielu różnorodnych dyscyplinach zagadnienie lokalizacji znajduje zastosowanie. W swojej pracy autorzy przedstawili klasyfikację wielokryterialnych modeli w zadaniach lokalizacyjnych. Autorzy przytoczyli 45 artykułów, na podstawie których wyodrębnili 4 kategorie problemów. Najobszerniejsza okazała się, kategoria w której minimalizowany jest koszt. W klasie tej umieszczone są m.in. modele z minimalizacją odległości. Drugą istotną kategorią jest klasa problemów zorientowanych na pokrycie i przydział zapotrzebowań. Zaledwie 10% prac obejmuje dwie ostatnie kategorie, tj. maksymalizację zysków oraz spełnienie wymogów ekologicznych.

2.3.1. Charakterystyki funkcji celu

Generalnie autorzy wyszczególniają następujące obiektowe zorientowania funkcji celu rozróżniające zagadnienia lokalizacyjne:

1. **Kryterium kosztów.**

Jest to kryterium standardowe dla zadań lokalizacji. Minimalizacja miary kosztów może obejmować m.in.:

- minimalizację kosztu transportu,
- minimalizację kosztów inwestycji,
- minimalizację ogólnej liczby potencjalnych propozycji lokalizacji,
- minimalizację odległości realizacji zapotrzebowań dla odbiorców,

- minimalizację liczy punktów użyteczności publicznej,
- minimalizację pustych przebiegów dla zlokalizowanych obiektów transportowych,
- minimalizację odległości z wagą przy maksymalizacji spełnienia zapotrzebowań pomiędzy parami nowych i istniejących obiektów,
- minimalizację kosztów przy jednoczesnym uwarunkowaniu, że dana lokalizacja ma ustaloną liczbę odbiorców.

2. Spełnienie zapotrzebowań.

Wyróżnione są tu trzy kategorie:

- lokalizacja z pełnym pokryciem zapotrzebowań,
- lokalizacja z przydziałem częściowym,
- włączenie nietypowych np. okresowo zależnych zapotrzebowań.

3. Kryterium zyskowności.

Zyskowność jest charakterystyczną funkcją tych modeli, które obsługują sektory prywatne. Niemniej autorzy są zaskoczeni małą liczbą modeli, zaledwie 6 z tym właśnie kryterium w rozważanej grupie 45 problemów. Fakt ten wynika między innymi z tego iż zapewnienie zapotrzebowań i minimalizacja kosztów lokalizacyjnych może być właśnie strategią identyfikującą maksymalizację zysku zadania lokalizacji. Problem zyskowności może być traktowany indywidualnie i niezależnie od wspomnianej strategii. I tak, zyskowność jest mierzona m.in.:

- tempem zwrotu funduszy inwestycyjnych,
- poziomem przyszłej produkcji,
- wielkością dywidend udziałowców,
- miarą ważoną względem poszczególnych, zależnych od regionalnych możliwości zysków.

4. Ochrona środowiska.

Pomimo wieloletniego zainteresowania zarówno rządów jak i społeczeństw ochroną środowiska, bardzo niewiele prac jest ukierunkowanych na ten cel. Dotyczą one:

- czystości powietrza,
- zagrożeń populacji,
- jakości życia,
- zbiorników wodnych.

Czystość powietrza i jakość życia dotyczy zagadnień lokalizacji upraw roślin. Minimalizowana jest ilość zanieczyszczeń z urządzeń przemysłowych i maksymalizowany standard życia, np. warunki mieszkalne, ośrodki rekreacyjne, służba zdrowia, planowanie komunalne, transport, ogólna infrastruktura. Przy rozważaniu zagrożenia populacji zwierząt i człowieka, rozważany jest wpływ, a więc typ i lokalizacja obiektów wykorzystujących technologię nuklearną. Usytuowanie szkół i biur rozważane jest z punktu widzenia zagrożenia hałasem, wilgotnością, oddziaływaniem promieniowania słonecznego czy kosmicznego, jakością wód.

Ochrona środowiska jest najczęściej zawarta w ograniczeniach a nie bezpośrednio w funkcji celu. Uzasadnienie jest stosunkowo oczywiste. Ochrona środowiska jest najczęściej wymuszona nakazowo przez rządy poszczególnych państw i dlatego wyrażana jest jako spełnienie minimalnych niezbędnych wymogów jakości.

2.3.2. Charakterystyki strukturalne

Strukturalnie, przestudiowane modele obejmują populację modeli lokalizacji jednoasortymentowych. Chociaż również umiejscawiane są obiekty z nieograniczonymi wieloasortymentowymi pojemnościami w dyskretnym zbiorze dla deterministycznych parametrów dla pojedynczego okresu planowania. Autorzy wyodrębniają jako istotne następujących pięć charakterystyk strukturalnych:

1. Lokalizacja jednego lub wielu obiektów.
2. Ograniczoność lub nieograniczoność pojemności.
3. Ciągłość lub dyskretność zbioru potencjalnych lokalizacji.
4. Deterministyczna lub stochastyczna natura parametrów zagadnienia (np. zapotrzebowań, zysku).
5. Statyczna lub dynamiczna natura modelu.

Ogromna większość modeli może być uznana jako wieloobiektowe z nieograniczonymi pojemnościami, dyskretne, deterministyczne i statyczne. Nie jest to zaskakujące gdy weźmie się pod uwagę wysiłek związany z uzyskaniem komputerowej realizacji algorytmów dających optymalne rozwiązania większości zagadnień lokalizacyjnych. Komputerowe trudności pojawiają się przy wyznaczaniu optymalnego rozwiązania gdy funkcja celu jest funkcją ciągłą. Praktyczne wyznaczenie rozwiązania zagadnień ciągłych jest szczególnie utrudnione i dlatego często stosuje się metodę rozwiązywania kolejnych podproblemów z jednoczesną anumeracją. Z drugiej strony zagadnienia dyskretne i tak rozważają pewną aproksymację umiejscowienia obiektu. Stąd dyskretyzacja przestrzeni decyzyjnej jest aproksymacją przestrzeni ciągłej.

Dokonanie analizy wieloprzedmiotowości i złożoności charakteru wybranego zadania lokalizacji jest szczególnie istotne w sytuacji gdy cele są względem siebie konfliktowe. W takiej sytuacji nie można zdefiniować wspólnej miary umożliwiającej uproszczenie opisu modelu w naturalny sposób.

Autorzy zamieścili przegląd przedmiotowości i charakterystyk strukturalnych 45 wybranych prac z dziedziny lokalizacji obiektów.

2.4. Klasyfikacja zagadnień lokalizacyjnych z uwzględnieniem parametru czasu

Przegląd światowej literatury ostatniego dziesięciolecia wykazuje, że nieustająco wzrasta zapotrzebowanie na algorytmy rozwiązujące problemy optymalnego lokalizowania obiektów, w następujących po sobie przedziałach czasu. Aktualnie, gdy wiele procesów jest już sterowanych komputerowo, przy jednoczesnej ich ciągłej elektronicznej obserwacji, posługiwanie się szybkim narzędziem dającym zadowalająco dobre rozwiązania lokalizacyjne, staje się wyzwaniem naszych czasów.

W ogólnym, intuicyjnym rozumieniu o dynamice procesów mówimy, gdy w wieloetapowym procesie decyzyjnym na każdym etapie należy podejmować optymalne decyzje. W szczególności problem lokalizacji jest dynamiczny wówczas, gdy zapotrzebowania lub koszty zmieniają się w czasie, bądź gdy koszty powiększenia dostaw lub ich relokacji w horyzoncie czasowym są znaczące.

Kolejną, przedstawioną poniżej klasyfikacją, jest klasyfikacja zaproponowana przez autorki tej książki. Klasyfikacja ta została dokonana z punktu widzenia traktowania w modelach parametru czasu.

W odniesieniu do definicji zadania lokalizacji (1.5) – (1.10) Grabowskiego [31] oraz zgodnie z trzema klasyfikacjami [1], [15], [50] omówionymi w Rozdziałach 2.1, 2.2 i 2.3 o zagadnieniu lokalizacyjnym mówimy, że jest ***dynamiczne***, gdy jedną z charakterystyk opisujących go jest czas. Biorąc pod uwagę możliwość różnorodnego podejścia do problemu, bądź ze względu na specyfikę konkretnych rozwiązywanych zadań, bądź ze względu na różne podejścia do matematycznego sformułowania modelu (różne traktowanie parametrów czasu lub wprowadzenie różnych ograniczeń), autorki wyodrębniły w klasie zadań lokalizacyjnych trzy podstawowe grupy zagadnień.

Dla każdej z tych grup zostanie podana poniżej definicja, a także przedstawiony odpowiedni model matematyczny. Każda z tych grup jest w dalszym ciągu ogólnym opisem zadania, zatem również sformułowane modele są ogólne. Dają one możliwość opisu szerokiej gamy problemów praktycznych, dla których uwzględnienie specyfiki konkretnych zagadnień dokonuje się dopiero poprzez dodanie odpowiednich ograniczeń.

Z praktycznego punktu widzenia problem lokalizacji jest dynamiczny wówczas, gdy spełnione są następujące dwa warunki:

1. zapotrzebowania lub koszty zmieniają się w czasie,
2. koszty powiększenia dostaw lub ich relokacji w horyzoncie czasowym są znaczące.

Jeżeli nie jest spełniony warunek pierwszy mamy do czynienia ze statycznym modelem lokalizacji. W przypadku gdy nie jest spełniony warunek drugi wystarczy rozważyć serię nie powiązanych ze sobą statycznych modeli.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

i - numer dostawcy, $i \in I$,

j - numer odbiorcy, $j \in J$,

s - numer przedziału czasowego,

C - macierz kosztów transportowych, $C = [c_{ij}]$

A - macierz współczynników przy zmiennych x, $A = [a_{ij}]$,

T - macierz współczynników czasowych, $T = [t_{ij}]$,

X - macierz dostaw, $X = [x_{ij}]$,

$f(.)$ - funkcja kosztów lokalizacji.

DEFINICJA 1.

Zagadnienie lokalizacyjne nazywamy statycznym, gdy nie uwzględnia ono horyzontu czasowego.

Ogólny model matematyczny przedstawia się następująco:

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I} f_i(y_i)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1,$$

$$y_j - x_{ij} \geq 0,$$

$$y_j \in \{0,1\}, \qquad x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,\ldots,I, \qquad j = 1,\ldots,J,$$

Zadania statyczne charakteryzują się swoją niezależnością od horyzontu czasowego w postaci zbioru przedziałów czasowych.

DEFINICJA 2.

Zagadnienie lokalizacyjne nazywamy semi-dynamicznymi, gdy nie uwzględnia ono horyzontu czasowego, a parametr czasu występuje tylko w ograniczeniach.

Ogólny model matematyczny:

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{min} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I} f_i(y_i) \\
& \sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \\
& y_j - x_{ij} \geq 0, \\
& y_j = \{0,1\}, \qquad x_{ij} \geq 0, \\
& AX \leq TY, \qquad A = [a_{ij}], X = [x_{ij}], T = [T_{ij}], Y = [y_{ij}], \\
& i = 1,\ldots,I, \qquad j = 1,\ldots,J,
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że semi-dynamiczny problem lokalizacji traktuje występowanie w nim czasu jako pewnego dodatkowo narzuconego ograniczenia. Jest to jedna z wielu charakterystyk modelu, dla którego sam proces lokalizacji, przydziału i przepływu dotyczy pojedynczego ustalonego przedziału czasowego. Przypadek ten został ujęty powyżej jako ten, w którym koszty i zapotrzebowania nie zmieniają się w czasie i jest on sprowadzany de facto do pojedynczego modelu statycznego. Dla niektórych zadań praktycznych współczynniki funkcji celu są niestacjonarne w badanym horyzoncie czasowym. Można jednak wykazać niezależność zmiennych decyzyjnych w kolejnym przedziale czasu od wartości tych zmiennych ze wszystkich okresów poprzedzających. Przypadek taki sprowadza się do rozwiązywania serii statycznych zadań lokalizacyjnych, dla których dane, dotyczące współczynników funkcji celu, otrzymywane na wyjściu z okresu poprzedzającego mogą determinować dane wejściowe okresu następnego.

DEFINICJA 3.

Zagadnienie lokalizacyjne nazywamy dynamicznym, gdy parametr czasu występuje jako indeks w zmiennych decyzyjnych.

Ogólny model matematyczny:

$$
\begin{aligned}
& \min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{s \in S} c_{ijs} x_{ijs} + \sum_{j \in J} f_{js}(y_{js}, y_{js-1}) \\
& \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} x_{ijs} = 1, \\
& y_{js} - \sum_{i \in I} x_{ijs} \geq 0, \qquad \sum_{s \in S} y_{js} \leq 1, \\
& A_s X_s \leq T_s Y_s, \quad A = [a_{ijs}], \; X = [x_{ijs}], \; T = [T_{ijs}], \; Y = [y_{js}], \\
& i = 1,\ldots,I, \qquad j = 1,\ldots,J, \qquad s = 1,\ldots S,
\end{aligned}
$$

Powyższe trzy definicje grupują zagadnienia lokalizacyjne w sposób zagnieżdżony:

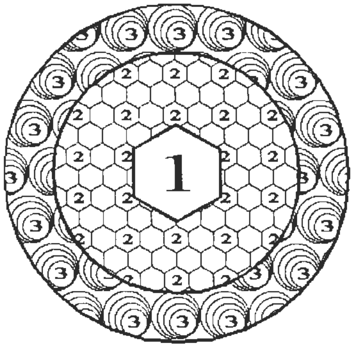

Tabela 2.4.1

Klasyfikacja modeli lokalizacyjnych z uwzględnieniem parametru czasu

Wybrane pozycje bibliograficzne		statyczne	semidynamiczne	dynamiczne
[3]	Barros A.I., Labbe M.	*		
[5]	Bastian M.,Volkmer M.			*
[6]	Baumol W.J., Wolfe P.	*		
[7]	Benito Alonso M.A., Devaux P.	*		
[9]	Berman O., Drezner Z.	*		
[10]	Broin M.W., Lowe T.J.	*		
[12]	Chand S.			*
[21]	Eynan A.		*	
[13]	Chand S., Morton T.E.			*
[22]	Erlenkotter D.			*
[23]	Fleischmann B., Paraschis J.N.	*		
[25]	Galvao R.D., Santibanez-Gonzales E.			*
[30]	Gosh D., Murthy I.		*	
[32]	Hakimi S.L., Kuo Ch-Ch.	*		
[33]	Hansen P., Luna Pedrosa Filho E. de, Ribeiro C.C.	*		
[34]	Hodgson M.J.	*		
[34]	Jacobsen S.K.	*		
[37]	Jacobsen S.K., Madsen O.B.G.		*	
[39]	Jasińska E., Wojtych E.	*		*

[40]	Juel H., Love R.F.			
[42]	Kaufman L., Eede M.V., Hansen P.	*		
[43]	Klastorin T.D.			
[44]	Klincewicz J.G., Luss H., Yu Ch.-S.			*
[47]	Kochman G.A., McCallum Jr. C.J.			*
[48]	Kolen A.	*		
[49]	Komorowska E., Mażbic-Kulma B., Piela Cz., Rydel J.	*		
[51]	Komorowska E., Mażbic-Kulma B., Stępień J.	*		
[55]	Laporte G., Nobert Y.	*		
[57]	Marianov V., Serra D., ReVelle Ch.	*		
[64]	Mażbic-Kulma B., Pogorzelec A., Piela Cz., Rydel J.	*		
[65]	Mażbic-Kulma B., Pogorzelec A., Rydel J.	*		
[68]	Nambiar J.M., Gelders F., Wassenhove Van L.N.		*	
[70]	Ogryczak W.	*		
[72]	Ogryczak W., Zawadzki M.	*		
[74]	Osleeb J.P., Ratick S.J.	*		
[76]	Pogorzelec A., Mażbic-Kulma B., Komorowska E.	*		
[79]	Schreuder J.A.M.		*	
[81]	Srivastava R., Benton W.C.		*	
[83]	Van Roy T.J., Erlenkotter D.			*
[85]	Warszawski A.	*		*
[88]	Wesolowsky G.O.	*		*
[89]	Wesolowsky G.O., Truscott W.G.	*		*
[90]	Xu N., Lowe T.J.	*		

2.5. Przykłady zastosowań

W rozdziale przedstawimy kilkanaście wybranych przykładów zastosowań. Dla pięciu z nich przytoczono sformułowania matematyczne.

Warszawski w artykule [85] prezentuje dwa modele lokalizacji: statyczny i dynamiczny. Pierwszy z nich opisuje wieloasortymentowy, statyczny problem lokalizacji. Lokalizowane są tu różnego rodzaju funkcjonalne (infrastrukturalne) centra w satelitarnych osiedlach mieszkaniowych. W rozpatrywanym zadaniu osiedle satelitarne składa się ze 152 mieszkań zawartych w 7 czteropiętrowych budynkach. Podstawowymi 3 materiałami budowlanymi są beton, bloki budowlane oraz wzmacniające konstrukcje stalowe. Dla celów analizy problem podzielono na 38 odbiorców z określonymi zapotrzebowaniami na powyższe materiały. Ustalono również 9 potencjalnych lokalizacji dostawców tych trzech typów towarów. Problem posiada 204603 dopuszczalnych rozwiązań. Optymalnym rozwiązaniem będzie to, które spełni zapotrzebowania, zminimalizuje koszty własne dostawców i koszty przesyłki. Model matematyczny przedstawia się następująco:

$$min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}c_{ij}Q_j + \sum_{1=1}^{n} g_i y_i$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1,\dots,m,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le m y_i, \qquad i = 1,\dots,n,$$

$$y_i = 1 \quad \text{lub} \quad 0, \qquad x_{ij} \ge 0,$$

gdzie:

n - liczba odbiorców,
m - liczba dostawców,
Q_j - wielkość zapotrzebowań j-tego odbiorcy,
g_i - koszty stałe związane z lokalizacją i,
c_{ij} - koszty transportowe z lokalizacji i do j,
x_{ij} - udział zapotrzebowania w j dostarczanego z i,
$y_i \in \{0,1\}$ 1 - gdy jest lokalizacja w punkcie i.

Hodgson [34] rozważa problem optymalnej lokalizacji obiektów infrastruktury społecznej, takich jak: przedszkola, żłobki, sklepy, punkty usługowe. Społeczna analiza problemu wykazuje, iż powinny znajdować się one na drodze pomiędzy miejscami zamieszkania, a miejscami pracy. Minimalizowany jest sumaryczny czas podróży. Znamiennym jest fakt, że czas odgrywa tu rolę współczynnika w funkcji celu i ze względu na brak horyzontu planowania jest to klasyczne zadanie statyczne.

W ostatnich czasach problemy optymalnej lokalizacji obiektów w czasie objęły m.in. tak istotną dziedzinę naszego życia jaką jest telekomunikacja. W swoim artykule Ghosh i Murthy [30] rozpatrują zagadnienie optymalnej lokalizacji zbiorów baz danych składowanych na dyskach komputerów połączonych za pomocą sieci telekomunikacyjnych. Przekazywanie tą drogą danych zgromadzonych w zintegrowanych systemach informacyjnych stało się koniecznością dla geograficznie rozproszonych organizacji. W systemach zintegrowanych procesy takie, jak komputerowe przetwarzanie czy składowanie baz danych, są zdecentralizowane i ich lokalizacja jest zwielokrotniona (tzn. tworzone są kopie zapasowe). W prawidłowym funkcjonowaniu tych systemów bierze się pod uwagę takie cele jak:

- obniżenie kosztów operacyjnych (tj. składowania zbiorów oraz komunikacyjne koszty realizacji zapotrzebowań a także uaktualniania danych),
- obniżenie czasów realizacji zapotrzebowań on-line,
- poprawianie ogólnej dostępności do zbiorów (tj. zwiększenie prawdopodobieństwa, że kopia zbioru będzie osiągalna w chwili wystąpienia zapotrzebowania u użytkownika).

Wymienione tu funkcje celu są we wzajemnym konflikcie. Zwielokrotnienie składowania kopii zbiorów powiększa koszty składowania i aktualizacji. Jednakże przy większej liczbie składowań odbiorcy mogą docierać do zbiorów lokalnie, stąd koszty komunikacyjne i czasy realizacji są pomniejszane. Komputery i kanały komunikacyjne mogą ulegać awariom. W wyniku takich awarii wierzchołki zostają odłączane od sieci, a więc wszystkie magazynowane w nich zbiory stają się niedostępne. Polepszenie dostępności do danych może być osiągnięte poprzez utrzymanie wysokiego poziomu nadmiarowych zbiorów, co w rezultacie powiększa koszty operacyjne systemu. Model matematyczny przedstawia się następująco:

$$min \sum_{j=1}^{N}\sum_{d=1}^{F} C_j^d y_j^d + \sum_{i=1}^{N}\sum_{d=1}^{F}\sum_{j=1}^{N} Q_i^d k_{ij} x_{ij}^d + \sum_{i=1}^{N}\sum_{d=1}^{F} U_i^d \left(\sum_{j=1}^{N} y_j^d k_{ij} \right)$$

jeżeli przyjmiemy, że:

$$Cy_j^d = C_j^d + \sum_{i=1}^{N} U_i^d t_{ij}, \qquad \forall j, d$$

oraz

$$Cx_{ij}^d = Q_i^d t_{ij}, \qquad \forall i, j, d$$

postać funkcji celu będzie następująca:

$$min \sum_{j=1}^{N}\sum_{d=1}^{F} Cy_j^d + \sum_{i=1}^{N}\sum_{d=1}^{F}\sum_{j=1}^{N} Cx_{ij}^d + x_{ij}^d$$

przy następujących ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^d = 1, \qquad \forall i, d$$

$$y_j^d - x_{ij}^d \geq 0, \qquad \forall i, d, j$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^d w_{ij} = T_j^d, \qquad \forall i, d$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^{d} a_{ij} \leq A_{i}^{d}, \qquad \forall i,d$$

$$\sum_{ij \in p^{l}} x_{ij}^{d} + \breve{Q}_{i}^{d} \leq c^{l}, \qquad \forall l$$

$$y_{j}^{d}, \qquad x_{ij}^{d} \in \{0,1\},$$

gdzie:

i,j - geograficzne lokalizacje w sieci, i,j=1,2,...,N,
d - identyfikator zbioru z danymi, d=1,2,...,F,
l - identyfikator łącza komunikacyjnego, l=1,2,...,L,
Q_{i}^{d} - wielkość zapotrzebowania z wierzchołka i dla zbioru d (w KB),
$\breve{Q}_{i}^{d}$ - max wielkość zapotrzebowania z wierzchołka i dla zbioru d (w KB),
U_{i}^{d} - wielkość aktualizacji z wierzchołka i dla zbioru d (w KB),
C_{j}^{d} - koszty składowania/utrzymania zbioru d w wierzchołku j (w $),
k_{ij} - koszty komunikacji pomiędzy wierzchołkami i oraz j,
w_{ij} - najgorszy czas realizacji pomiędzy wierzchołkami i oraz j,
a_{ij} - prawdopodobieństwo udanej komunikacji pomiędzy wierzchołkami i oraz j,
T_{i}^{d} - maksymalny akceptowalny czas realizacji dla zapotrzebowań z wierzchołka i dla zbioru d (w sek.),
A_{i}^{d} - minimum akceptowalnej dostępności dla zapotrzebowania z wierzchołka i dla zbioru d,
c^{l} - pojemność łącza l (w KB/sek.),
p^{l} - zbiór par źródłowo-docelowych i-j wymagających połączenia l,
N - liczba wierzchołków w sieci,
F - liczba lokalizowanych zbiorów z danymi,
L - liczba połączeń w sieci.

Srivastava i Benton rozważają w swej pracy [81] problem lokalizacji z położeniem szczególnego nacisku na problem doboru marszruty dla zadanej liczby pojazdów rozwożących towary. Zakłada się spełnienie wszystkich zapotrzebowań odbiorców. Zdaniem autorów poprawa systemu dystrybucji może dać ponad 20% zysku i jest równie ważna jak poprawa produktywności. Podstawową charakterystyką rzeczywistego problemu jest stosunek kosztów transportowych do kosztów lokalizacji magazynów. Autorzy wykazują, że każda gałąź przemysłu ma swoją strukturę tych stosunków kosztów i odzwierciedlają one charakterystykę własnego środowiska.

Zagadnienie zaprezentowane przez Kochmana i McCalluma w artykule [47] bez wątpienia może być uznane za reprezentanta rzeczywistych problemów lokalizacyjnych końca dwudziestego wieku. Autorzy podali dwa modele lokalizacyjne dla zagadnień wyznaczania optymalnej obsługi zapotrzebowań na komunikacyjne obiegi informacji pomiędzy USA oraz krajami Europy i Bliskiego Wschodu. Prognozując wielkości przyszłych zapotrzebowań, zadaniem do rozwiązania jest ekonomiczny wzrost sieci komunikacyjnych dla spełnienia tych zapotrzebowań. Obiektem lokalizacji są zarówno obiekty satelitarne jak i kable podmorskie. Wybór marszruty wszystkich indywidualnych obiegów pomiędzy dwoma punktami zapotrzebowań powinien minimalizować całkowity ponoszony koszt w zadanym horyzoncie czasowym. Model ten nie uwzględnia problemu relokalizacji.

Model matematyczny przedstawia się następująco:

$$\sum_{j=1}^{N} C_j x_j + \sum_{t=1}^{T}\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K} a_{kmt} y_{kmt}$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{m=1}^{M} y_{mt} = d_{kt}, \qquad 1 \le k \le K, \qquad 1 \le t \le T,$$

$$\sum_{k=1}^{K} y_{kmt} \le \sum_{j\in O_{mt}} Q_j x_j, \qquad 1 \le m \le M-1, \qquad 1 \le t \le T,$$

$$\sum_{k=1}^{K} y_{kMt} \ge \sum_{k=1}^{K} y_{kM,t-1}, \qquad 1 \le t \le T,$$

$$\sum_{j\in I_t} x_j \le 1, \qquad 1 \le t \le T,$$

$$f_{kt}^1 d_{kt} \le y_{kMt} \le f_{kt}^2 d_{kt}, \qquad 1 \le k \le K, \qquad 1 \le t \le T,$$

$$y_{kmt} \ge 0, \qquad 1 \le k \le K, \qquad 1 \le m \le M-1, \qquad 1 \le t \le T,$$

$$x_j = 0,1, \qquad 1 \le j \le N,$$

gdzie:

$x_j \in \{0,1\}$ 1 - jeżeli kabel jest instalowany, 0 – w przeciwnym przypadku,
y_{kmt} - wielkość przepływu,
T - liczba przedziałów czasowych,
K - liczba rozpatrywanych krajów (odbiorców w Europie i na Bliskim Wschodzie),
M - liczba marszrut,
N - liczba kabli podmorskich,
Q_j - pojemność "obiegowa" kabli,
C_j - stałe koszty konstrukcji i instalacji kabla j ($1 \le j \le N$),
a_{kmt} - jednostkowe koszty marszruty,
d_{kt} - zapotrzebowanie na "obiegi" dla kraju k w przedziale czasowym t.

Interesującym zadaniem lokalizacji dynamicznej jest problem opisany przez Bastiana oraz Volkmera [5]. Rozpatrywana jest sieć z odbiorcami umiejscowionymi w węzłach. Zapotrzebowania są niestacjonarne w czasie i zadane dla pewnej liczby okresów na przód. Zakłada się, że pojedynczy dostawca jest w stanie zaspokoić wszystkie z tych zapotrzebowań. Dostawca może być relokowany na początku każdego z przedziałów, co pociąga za sobą dodatkowe koszty. W problemie uwzględnia się koszty transportowe. Celem jest minimalizacja kosztów całkowitych systemu funkcjonującego w zadanym skończonym horyzoncie czasu. Podobny problem rozważa w swym artykule Chand i Morton [13].

Przykładem dynamicznego zadania lokalizacyjnego ze znaczącymi kosztami relokalizacji obiektów jest drugi model zaprezentowany przez Warszawskiego [85]. Prezentowany problem lokalizacji rozciąga się na kilka przedziałów czasowych, z zapotrzebowaniami zmieniającymi się z przedziału na przedział. Celem jest wyznaczenie optymalnych lokalizacji i ewentualnego relokowania zakładów produkujących beton, przy zadanych wielkościach na porcje betonu dla każdego odbiorcy na odpowiednim etapie budowy, kosztach własnych zakładów produkujących beton i technicznej specyfikacji transportu tego materiału. W tym przypadku model matematyczny przedstawia się następująco:

$$min \sum_{t=1}^{v}\sum_{i=1Á}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{tij}Q_{tj}x_{tij} + \sum_{t=1}^{v}\sum_{i=1}^{n} b_{ti}y_{ti} + \sum_{i=1}^{n} a_{1i}y_{1i} + \sum_{t=2}^{v}\sum_{i=1}^{n} a_{ti}y_{ti}\left(1-y_{(t-1)i}\right)$$

przy ograniczeniach:

$$my_{ti} \geq \sum_{j=1}^{m} x_{tij}, \qquad i=1,\dots,n, \qquad t=1,\dots,v,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{tij} = 1 \text{ jeżeli } Q_{tj} \geq 0, \qquad j=1,\dots,m, \qquad t=1,\dots,v,$$

$$y_{ti} = 1 \text{ lub } 0, \qquad t=1,\dots,v, \qquad i=1,\dots,n,$$

$$x_{tij} \geq 0 \qquad t=1,\dots,v, \qquad i=1,\dots,n, \qquad j=1,\dots,m,$$

gdzie:

n - miejsca lokalizacji,

m - odbiorcy,

v - przedziały czasu,

Q_{tj} - zapotrzebowanie w punkcie j w przedziale czasu t,

c_{tij} - jednostkowe koszty transportowe z lokalizacji i do odbiorcy j w przedziale czasu t,

g_{ti} - stałe koszty związane z decyzją o lokalizacji w punkcie i w przedziale czau t,

b_{ti} - stałe koszty dostawcy i w przedziale czasu t,

a_{ti} - koszty inwestycyjne związane z uruchomieniem dostawcy i w przedziale czasu t,

x_{tij} - udział zapotrzebowania Q_{tj} zaspokajanego z i,
$y_{ti} = 1$ - oznacza, że dostawca jest lokalizowany w i w przedziale czasu t.

Van Roy i Erlenkoter [83] przedstawiają zagadnienie optymalnej lokalizacji obiektów w zadanych stanach czasowych, tak aby zminimalizować całkowite koszty zaspokojenia zapotrzebowań rozmaicie zlokalizowanych w czasie. Obiekty mogą być zamykane lub otwierane w badanym horyzoncie czasu, przy czym zakłada się, że obiekt raz zamknięty nie jest już więcej otwierany. Autorzy rozważają model, dla którego wszystkie zapotrzebowania są spełniane. Jednocześnie omawiają kwestię zastosowania swojej metody do problemów dynamicznej lokalizacji o ograniczonych pojemnościach.

$$min \sum_t \sum_i \sum_j \sum_\tau c_{ij}^{t\tau} x_{ij}^{t\tau} + \sum_\tau \sum_i F_i^\tau z_i^\tau,$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_i \sum_\tau x_{ij}^{t\tau} = 1, \qquad \forall j,t$$

$$x_{ij}^{t\tau} \le z_i^\tau, \qquad \forall i,j,t,\tau$$

$$x_{ij}^{t\tau} \ge 0, \qquad \forall i,j,t,\tau$$

$$z_i^\tau \in \{0,1\} \qquad \forall i,\tau$$

gdzie:

i - wskaźnik lokalizacji obiektu,
I - zbiór wszystkich lokalizacji odbiorców,
j - wskaźnik lokalizacji odbiorcy,
J - zbiór "pseudo" odbiorców, t.j. wszystkich kombinacji (j,t) odbiorców j oraz przedziałów czasowych,
t - wskaźnik przedziału czasu dla zapotrzebowania odbiorcy,
τ - wskaźnik przedziału czasu dla decyzji o otwarciu (zamknięciu),
I_0 - zbiór lokalizacji, gdzie obiekty mogłyby być otwarte,
I_c - zbiór lokalizacji, gdzie istniejące obiekty mogłyby być otwarte, $I = I_0 \cup I_c$
$c_{ij}^{t\tau}$ - koszt produkcji oraz przesłania całkowitego zapotrzebowania odbiorcy j, w przedziale czasu t przez obiekt i otwarty w przedziale czasu τ,
$x_{ij}^{t\tau}$ - część zapotrzebowania odbiorcy j realizowana w przedziale czasu t przez obiekt i otwarty w przedziale czasu τ,
$z_i^\tau = 1$, $i \in I_0$ oznacza, że istniejący obiekt i jest otwarty w przedziale czasu τ,
$z_i^\tau = 1$, $i \in I_c$ oznacza, że istniejący obiekt i jest otwarty tylko do końca przedziału czasu τ,

$F_i^\tau \geq 0,\ i \in I_0$ określa wszystkie przyszłe koszty stałe dla otwieranego obiektu i w przedziale czasu τ,

$F_i^\tau \geq 0,\ i \in I_c$ określa wszystkie poniesione w przeszłości koszty stale dla obiektu i otwartego tylko do końca przedziału czasu τ.

Klincewicz, Luss i Yu [44] opisują wielolokalizacyjny model o ograniczonej pojemności sformułowany dla zagadnień o dużych rozmiarach i długich horyzontach planowania. Centra dystrybucyjne mogą być otwierane, rozbudowywane lub zamykane w rozpatrywanym horyzoncie czasowym. Wielkości zapotrzebowań oraz ich umiejscowienie są zmienne w czasie. Minimalizowane są wszystkie koszty przy zaspokajaniu zapotrzebowań w odpowiednich przedziałach czasu. Prezentowany model jest nieliniowym sformułowaniem mieszanego zadania programowania całkowito-liczbowego.

Marianov, Serra, ReVelle w pracy [57] rozpatrują problem lokalizacji nowych usługodawców w warunkach konkurencji rynkowej. W wielu transportowych i telekomunikacyjnych sieciach koszty przesyłu czy przemieszczania się pomiędzy poszczególnymi wierzchołkami zmniejszają się wraz z nasileniem ruchu na tych połączeniach. Tak więc niekiedy opłaca się projektowanie sieci o znacznym natężeniu ruchu pomimo większych odległości. Autorzy podają następujące przykłady zastosowań: lotniczy ruch pasażerski, transport cargo, lokalne sieci komputerowe, duże sieci komputerowe z różnorodnymi urządzeniami łączącymi. Formułują oni ten problem jako dwupoziomowe zadanie lokalizacji z nieograniczonymi pojemnościami, gdzie wprowadzenie wierzchołków pośrednich prowadzi do obniżenia kosztów globalnych pomiędzy wierzchołkami początkowym i końcowym. W wyniku zaproponowanej redukcji zmiennych oraz ograniczeń, sformułowany model lokalizacji zostaje przekształcony do modelu pokryć. Autorzy opracowali 3-fazowy heurystyczny algorytm oparty na prezentowanych wcześniej w literaturze algorytmach [73], [2], [46]. Autorzy przedstawili rozwiązanie problemu dla sieci o 20 wierzchołkach uzyskując zadanie z 820 zmiennymi i 120 ograniczeniami.

Eynan w artykule [21] przedstawia problem wielopoziomowej lokalizacji z uwzględnieniem parametru czasu dla budowy scentralizowanych magazynów. Każda lokalizacja charakteryzowana jest jej rynkową strukturą, na którą składają się koszty sprzedaży oraz koszty składowania. Według autora zadania takie mają obecnie zastosowanie w warunkach globalizacji działań ekonomicznych, gdy wiele państw jest związanych różnymi uniami gospodarczymi. Celem tego zadania lokalizacji jest wyznaczenie początkowych pojemności magazynów, tak aby maksymalizować zyski przy ewentualnej relokacji tych magazynów. Zakłada się, że alokacja następuje natychmiast po wystąpieniu zapotrzebowania. W rozpatrywanym zadaniu lokalizacyjnym rozpatrywany jest problem czasu, ale jedynie w odniesieniu do ograniczeń pojemnościowych, które są wyznaczane na początek każdego okresu realizacji zapotrzebowań. Same zapotrzebowania są dla każdego okresu prognozowane. A. Eyanan dowodzi, że rozpatrywana przez nich klasa wielopoziomowych zadań lokalizacyjnych sprowadza się zawsze do zadania jednopoziomowego. Natomiast wielookresowość może być rozpatrywana jako ciąg jednookresowych zadań.

Bermana i Drezner w pracy [9] rozważają zadanie wyznaczenia lokalizacji nowych obiektów w sieci, tak aby maksymalizować sumę ważonych odległości od ustalonych punktów tej sieci. Funkcja celu jest wklęslą kawałkami liniową funkcją. Autorzy sprowadzają zadanie do zagadnienia programowania liniowego, dla którego wyznaczają optimum. Wydaje się, że dobrym zastosowaniem opracowanego przez Bermana i Dreznera algorytmu byłoby zadanie lokalizacji wysypisk śmieci.

W pracy [67] Munoz-Perez i Saameno-Rodriguez dążą do stworzenie uniwersalnej teorii rozwiązania zadania lokalizacyjnego, gdy lokalizowany jest niepożądany obiekt. Problem lokalizacji formułują w następujący sposób:
Wyznaczyć:

$$\max_{x \in S} K_i \left\| x - P_{\delta(i)} \right\|$$

przyjmując następujące założenia:

- Niepożądany obiekt jest lokalizowany na obszarze S⊂R Autorzy zakładają , że obszar ten jest domknięty i ograniczony.
- Istnieje m punktów reprezentujących odbiorców. (centra skupiające odbiorców)
- Odległość pomiędzy niepożądanym obiektem zlokalizowanym w punkcie „x" a centrami jest zdefiniowana poprzez Euklidesową normę:

$$\left\| x - P_i \right\|, \quad \text{gdzie} \quad i = 1,2, \ldots, m$$

Autorzy udowodnili, że tak zdefiniowana funkcja celu jest funkcją ciągłą a rozwiązanie należy do obszaru S. Model został rozszerzony także o przypadek w którym region lokalizacji zawiera jedną lub więcej wielowierzcholkowych stref zakazanych.

Tą samą tematyką lokalizacji niepożądanego obiektu zajmowali się również Plastria i Carrizosa w pracy [75]. Rozpatrują oni problem umieszczenia niepożądanego obiektu na obszarze o dowolnym kształcie i populacji ludności skupionej w skończonej liczbie n-punktów. Cel zadania wymaga spełnienia dwóch kryteriów – zasięg oddziaływania ma być maksymalizowany, wskazując w jakiej odległości od obiektu zakłócenia populacji są brane pod uwagę oraz wielkość populacji znajdująca się wewnątrz okręgu wpływu ma być minimalizowana. Przedstawione przez autorów wielomianowe algorytmy pozwalają na określenie wszystkich niedominujących rozwiązań. To z kolei pozwala na natychmiastową odpowiedź (poprzez analizę wrażliwości oferowanych rozwiązań) na pytania takie jak: minimalizacja populacji w zadanym okręgu (zadanie minimalnego pokrycia) lub znalezienie największego okręgu nie pokrywającego więcej niż całkowitą populację.

Do statystycznych modeli zaliczają się zagadnienia poruszone przez Ogryczaka w artykule [70]. Autor rozważa zagadnienia jednopoziomowej lokalizacji z wielokryterialną funkcją celu. Przedstawiony przez autora model został sformułowany następująco:

$$\min\{f(x):\ x \in Q\}$$

gdzie $f(x) = (f_1(x),\dots,f_m(x))$ jest wektorową funkcją celu o składowych postaci:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x'_{ij} \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\dots,m$$

gdzie współczynnik d_{ij} ($i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n$) wyraża odległość i-tego klienta od lokalizacji j, Q stanowi zbiór rozwiązań dopuszczalnych. Ponadto dana jest liczba p ($p \le n$) obiektów do lokalizacji. Zmienne decyzyjne x_j muszą spełniać ograniczenia

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = p, \quad x_j \in \{0,1\} \ \text{dla} \ j = 1,2,\dots,n$$

Zmienne x'_{ij} są traktowane przez autora jako decyzje przydziału i muszą spełniać następujące ograniczenia:

$$\sum_{j=1}^{n} x'_{ij} = 1 \qquad \text{dla} \quad i = 1,2,\dots,m$$

$$x'_{ij} \le x_j \qquad \text{dla} \quad i = 1,2,\dots,m \quad \text{i} \quad j = 1,2,\dots,n$$

$$x'_{ij} \in \{0,1\} \qquad \text{dla} \quad i = 1,2,\dots,m \quad \text{i} \quad j = 1,2,\dots,n$$

Zdefiniowana funkcja f_i oceniająca rozlokowanie obiektów jest miarą satysfakcji i-tego klienta z danego rozlokowania obiektów.

Problemy lokalizacyjne mogą dodatkowo zawierać wagi $w_i > 0$ reprezentujące zapotrzebowania poszczególnych klientów na daną usługę. Na przykład, w pracy [72] Ogryczaka i Zawadzkiego całkowite wagi mogą być interpretowane jako liczby jednostkowych klientów w tym samym punkcie systemu. Ponieważ wagi opisują faktycznie odpowiednie rozkłady odległości autor stosuje je w znormalizowanej postaci

$$\overline{w}_i = w_i / \sum_{i=1}^{m} w_i \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\dots,m$$

W problemie bez wag przyjmuje, że wszystkie $\overline{w}_i = 1$, czyli znormalizowane wagi $\overline{w}_i = 1/m$.

Klasyczne modele koncentrują się na minimalizacji średniej odległości lub minimalizacji maksymalnej odległości. Oba te kryteria są bezpośrednio określone dla zagadnień lokalizacyjnych z wagami reprezentującymi wielkości zapotrzebowań poszczególnych klientów. Dokładnie, średnia odległość wyraża się wzorem

$$\mu(y) = \sum_{i=1}^{m} \overline{w}_i y_i$$

Dla tego problemu funkcja celu przyjmuje postać

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m} \overline{v}_i f_i(x) : x \in Q\right\}.$$

W pracy [71] autor rozważa również lokalizację obiektów niepożądanych.

Książka dotyczy zagadnień lokalizacyjno-transportowych. Zadania te należą do klasy zadań optymalizacji dyskretnej. W pierwszej części książki przedstawiono różne klasyfikacje takich zadań poczynając od prac twórcy tej teorii – Alfreda Webera, a kończąc na najbardziej skomplikowanych modelach. Zadania lokalizacji mają wiele praktycznych zastosowań. I tak w drugiej części książki przedstawiono kilka przykładów konkretnych zagadnień wraz z metodami ich rozwiązania.

ISSN 0208-8029
ISBN 83-85847-98-7

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: biblioteka@ibspan.waw.pl