

# **XV Krajowa Konferencja Automatyki**

## **Tom II**



**Redaktorzy:  
Zdzisław Bubnicki  
Roman Kulikowski  
Janusz Kacprzyk**

# **XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom II**



**Redaktorzy:**  
**Zdzisław BUBNICKI**  
**Roman KULIKOWSKI**  
**Janusz KACPRZYK**

**ORGANIZATOR**

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

**WSPÓLORGANIZATORZY**

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

## WSPÓLORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska  
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów  
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący	Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego	Roman KULIKOWSKI

## CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA	Michał BIAŁKO
Mikołaj BUSŁOWICZ	Władysław FINDEISEN
Ryszard GESSING	Henryk GÓRECKI
Jakub GUTENBAUM	Jerzy JÓZEFczyk
Stanisław KACZANOWSKI	Tadeusz KACZOREK
Janusz KACPRZYK	Jerzy KLAMKA
Józef KORBICZ	Zbigniew KOWALSKI
Krzysztof KOZŁOWSKI	Juliusz L. KULIKOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI	Kazimierz MALANOWSKI
Krzysztof MALINOWSKI	Wojciech MITKOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI	Władysław PEŁCZEWSKI
Tadeusz PUCHAŁKA	Leszek RUTKOWSKI
Stanisław SKOCZOWSKI	Roman SŁOWIŃSKI
Jerzy ŚWIĄTEK	Andrzej ŚWIERNIAK
Ryszard TADEUSIEWICZ	Piotr TATJEWSKI
Krzysztof TCHOŃ	Leszek TRYBUS
Jan WĘGLARZ	Andrzej P. WIERZBICKI

## KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący	Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego	Janusz KACPRZYK
	Stanisław KACZANOWSKI
	Tadeusz KACZOREK
	Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie	Roman OSTROWSKI
	Tadeusz PUCHAŁKA
	Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowci	Jan STUDZIŃSKI
	Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-01-4

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk  
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

# TECHNIKA SYSTEMÓW – DIAGNOSTYKA

# OPTYMALNE ROZMIESZCZENIE CZUJNIKÓW POMIAROWYCH DLA LINIOWEGO UKŁADU O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH

Dariusz SZEWCZYK

Politechnika Śląska w Gliwicach, Wydział Automatyki Elektroniki i Informatyki  
e-mail: dariusz.szewczyk@interia.pl

**Streszczenie:** W niniejszej publikacji przedstawiony jest sposób wyznaczania optymalnego rozmieszczenia czujników pomiarowych dla liniowego układu o parametrach rozłożonych opisanego liniowym równaniem różniczkowym cząstkowym, z których pomiary posłużą do wyznaczenia stanu początkowego układu.

**Słowa kluczowe:** Obserwowalność, równanie różniczkowe cząstkowe, optymalne rozmieszczenie czujników, układ o parametrach rozłożonych.

## 1. WSTĘP

W ogólnym przypadku wyznaczenie początkowego stanu układu dysponując danymi z czujników pomiarowych jest trudne, ponieważ rozwiązanie parabolicznego równania różniczkowego cząstkowego jest przedstawione w postaci szeregu nieskończonego. Zaproponowany sposób wyznaczenia stanu początkowego układu polega na założeniu określonej postaci warunku początkowego:

$$w(0) = \sum_{k=1}^n \beta_k w_k(0)$$

gdzie  $w_k(0)$ -składowa warunku początkowego.

Postać składowych warunku początkowego  $w_k(0)$  powinna zapewnić rozwiązanie równania różniczkowego cząstkowego w postaci sumy skończonej. Wtedy na podstawie danych pomiarowych z odpowiednio rozmieszczonych czujników można dokonać estymacji parametrów  $\beta_k$ , wyznaczając jednocześnie aproksymacyjnie warunek początkowy  $w(0)$ .

## 2. OPIS SYSTEMU

Niech  $X$  oznacza ograniczoną dziedzinę 2-wymiarowej przestrzeni, a  $S$  jest brzegiem obszaru  $X$ . Wektor współrzędnych przestrzennych oznaczamy  $x=(x_1, x_2)$ . Rozważmy liniowe paraboliczne równanie różniczkowe cząstkowe

$$\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} = \Delta w(t, x) - q(x)w(t, x) \quad (1)$$

gdzie  $t$ -czas a  $\Delta$  oznacza Laplasian dany wzorem:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x_1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x_2)^2}$$

Założmy, że  $q(x)$  jest ciągłą funkcją określoną dla

$$x \in \overline{X} (\overline{X} = X \cup S)$$

### 2.1. Warunki początkowe i brzegowe

Warunki początkowe dane są wzorem:

$$\lim_{t \rightarrow 0} w(t, x) = w_0(x)$$

$$w_0(x) = w(0) \in L^2(X)$$

gdzie  $L^2(X)$  oznacza przestrzeń Hilberta funkcji całkowalnych z kwadratem w obszarze  $X$ . W ogólnym przypadku warunki brzegowe można opisać równaniem:

$$\alpha(\zeta)w(t, \zeta) + (1 - \alpha(\zeta))\frac{\partial w(t, \zeta)}{\partial \nu} = 0 \quad (2)$$

gdzie  $\zeta \in S$  a funkcja  $\alpha(\zeta)$  należy do klasy  $C^2$  oraz spełnia warunek:

$$0 \leq \alpha(\zeta) \leq 1$$

$\nu$ -wektor normalny do brzegu  $S$

### 2.2. Funkcje własne i wartości własne

Z równaniem (1) można związać nieograniczony liniowy operator różniczkowy  $A$  zdefiniowany następująco:

$$Aw(x) = \Delta w(x) - q(x)w(x)$$

Dziedzina  $D(A)$  operatora  $A$  spełniając warunki brzegowe jest postaci:

$$D(A) = \left\{ \begin{array}{l} w(x) \in L^2(X), \Delta w(x) - \\ - q(x)w(x) \in L^2(X), \end{array} \right\}$$

Dla operatora  $A$  definiuje się funkcje własne  $w_i(x)$   $i=1,2,3...$  oraz wartości własne  $s_i$   $i=1,2,3...$  dla których układ równań liniowych

$$Aw_i(x) = s_i w_i(x) \quad i=1,2,3...$$

ma niezerowe rozwiązania  $w_i(x) \neq 0$ .

Każdej wartości własnej  $s_i$   $i=1,2,3...$  odpowiada układ funkcji własnych:

$$\{w_{i1}(x), w_{i2}(x), \dots, w_{im_i}(x)\}$$

gdzie  $m_i < \infty$  jest krotnością wartości własnej  $s_i$ .

### 3. ROZWIĄZANIE RÓWNANIA I DOBÓR POSTACI WARUNKU POCZĄTKOWEGO

Rozwiązanie równania (1) z warunkami brzegowymi (2) przy założeniu krotności wartości własnych  $m_i=1$ , można przedstawić w postaci:

$$w(t, x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \exp(s_{ij}t) \langle w(0), w_{ij} \rangle_X w_{ij}$$

$$\langle w(0), w_{ij} \rangle_X = \alpha_{ij}$$

$\alpha_{ij}$  – współczynniki Fouriera

$$w(0) = w_0(x) = f(x_1, x_2); \quad w_{ij} = w_{i,j}(x) = f(x_1, x_2)$$

Przybliżając warunek początkowy  $w(0)$  sumą funkcji własnych  $w_{kl}(x)$  operatora  $A$  z odpowiednimi współczynnikami  $\beta_{kl}$  w następujący sposób:

$$w(0) = \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{l=1}^{n_l} \beta_{kl} w_{kl}(0) \quad (3)$$

gdzie:

$$w_{kl}(0) = w_{kl}(x)$$

$w_{kl}(0)$ -składowa warunku początkowego odpowiadająca funkcji własnej  $w_{kl}(x)$  operatora  $A$  otrzymujemy:

$$\alpha_{ij} = \int_X w_{ij} \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{l=1}^{n_l} \beta_{kl} w_{kl}(0) dx$$

Ponieważ układ funkcji własnych  $w_{ij}$  jest ortogonalny, więc  $\alpha_{ij} \neq 0$  tylko dla  $i=k, j=l$ , otrzymujemy współczynniki  $\alpha_{ij}$  różne od zera tylko dla składowych  $i, j$  odpowiadających indeksom  $k, l$  warunku początkowego  $\beta_{kl} w_{kl}(0)$  (pozbywamy się sumy nieskończonej dla indeksów  $i, j$ ). Oznaczając:

$$\alpha_{kl} = \beta_{kl} \int_X w_{kl} w_{kl}(0) dx$$

$$\alpha_{kl} = \beta_{kl} \alpha'_{kl}$$

W zależności od ilości przyjętych składowych  $n_k, n_l$ , w warunku początkowym  $w(0)$  odpowiedź układu (1) można przedstawić w postaci liniowej ze względu na parametry  $\beta_{kl}$

$$w(t, x) = \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{l=1}^{n_l} \beta_{kl} \alpha'_{kl} w_{kl}(x) \exp(s_{kl}t) \quad (4)$$

### 4. ESTYMACJA PARAMETRÓW $\beta$

Dla liniowego względem wektora parametrów  $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_m]^T$  modelu odpowiedzi układu (1) opisanego

równaniem (4), proces obserwacji można zapisać w postaci:

$$z(x, t) = F^T(x, t) \beta + \varepsilon(t), \quad t \in [0, t_f] \quad x = [x_1, x_2]$$

gdzie:

$z(x, t) = [z(x^1, t), \dots, z(x^N, t)]^T$  - wektor sygnału z  $N$  czujników

$\beta$ -wektor parametrów,  $\beta \in R^m$

$\varepsilon(x, t) = [\varepsilon(x^1, t), \dots, \varepsilon(x^N, t)]^T$  - biały szum o zerowej wartości średniej w czasie i kowariancji

$$E\{\varepsilon(t) \varepsilon^T(\tau)\} = C(t) \delta(t - \tau)$$

Gdzie  $\delta$  oznacza deltę Diraca, a macierz  $C(t) \in R^{N \times N}$  jest symetryczna i dodatnio określona dla każdego  $t \in [0, t_f]$

$$F(x, t) = [f(x^1, t), \dots, f(x^N, t)]$$

$$f(x^i, t) = [f_1(x^i, t), \dots, f_m(x^i, t)]^T, \quad i=1 \dots N$$

$f_j(x^i, t) = \alpha'_{kl} w_{kl}(x^i) \exp(s_{kl}t)$ ,  $j=1 \dots m$ , gdzie indeksy  $k=1 \dots n_k$ ,  $l=1 \dots n_l$  przy warunku  $n_k \cdot n_l = m$ , odpowiadają składowej odpowiadającej indeksom  $kl$  warunku początkowego (3).

Gdzie  $x^1, \dots, x^N$  oznaczają położenie poszczególnych czujników o wartościach należących do zbioru  $X \subset R^2$ , które przy estymacji parametrów  $\beta$  są znane i ustalone.

Problem estymacji parametrów jest następujący:

znając historię  $\{F(t)\}_{t \in [0, t_f]}$  oraz  $\{z(t)\}_{t \in [0, t_f]}$  należy znaleźć spośród wszystkich możliwych wektorów parametrów  $\beta$  taki, który minimalizuje ważone kryterium najmniejszych kwadratów [2][3] wtedy:

$$\hat{\beta} = \left( \int_0^{t_f} F(t) C^{-1}(t) F^T(t) dt \right)^{-1} \int_0^{t_f} F(t) C^{-1}(t) z(t) dt$$

$$E\{\hat{\beta}\} = \beta$$

oraz

$$\text{cov}\{\hat{\beta}\} = E\{(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^T\} =$$

$$= \left( \int_0^{t_f} F(t) C^{-1}(t) F^T(t) dt \right)^{-1} = M^{-1}$$

$m \times m$  wymiarowa macierz

$$M(x^1, \dots, x^N) = \int_0^{t_f} F(t) C^{-1}(t) F^T(t) dt$$

jest informacyjną macierzą Fishera [1][3] a jej elementy zależą od lokalizacji czujników.

### 5. OPTYMALNE ROZMIESZCZENIE CZUJNIKÓW POMIAROWYCH

Problem optymalizacji polega na „najlepszym” rozmieszczeniu czujników (w sensie  $\text{cov}\{\beta\}$ ) maksymalizującym ilość informacji otrzymanych podczas eksperymentu.

Zadanie polega na takim doborze punktów  $x^1, \dots, x^N$  aby zminimalizować pewną założoną skalarną funkcję  $\Psi$  [3] bazującą na informacyjnej macierzy Fishera  $M$

$$\Psi[M(x^1, \dots, x^N)] \rightarrow \min$$

Stosując dodatkowe upraszczające założenia:

$$C = \sigma^2 I$$

gdzie  $I$  jest  $N \times N$  wymiarową macierzą jednostkową a  $\sigma$  odgrywa rolę stałego odchylenia standardowego błędów pomiarowych otrzymujemy następującą postać macierzy FIM:

$$M = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{t_f} F(t) F^T(t) dt$$

Aby zwiększanie ilości punktów pomiarowych  $x^j$  nie wpływało na macierz  $M$  wprowadzamy przy założeniu  $\sigma = 1$  uśrednioną (znormalizowaną) [2][3] postać macierzy FIM

$$M = \frac{1}{N t_f} \sum_{j=1}^N \int_0^{t_f} f(x^j, t) f^T(x^j, t) dt \quad (5)$$

Pozwoli to nam porównywać wskaźnik jakości  $\psi[M(x^1 \dots x^N)]$  dla różnych rozmieszczeń oraz różnych ilości punktów pomiarowych i zastosować algorytm optymalizujący rozmieszczenie czujników pomiarowych.

## 6. OPIS ALGORYTMU WYZNACZANIA OPTIMALNEGO ROZMIESZCZENIA CZUJNIKÓW POMIAROWYCH

Wprowadźmy zbiór zmiennych określających rozmieszczenie czujników  $\xi$  [3]

$$\xi = \begin{Bmatrix} x^1, \dots, x^N \\ p_1, \dots, p_N \end{Bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1; \quad x^N = (x_1^N, x_2^N)$$

$x^1, \dots, x^N$  – położenie poszczególnych czujników

$p_1 \dots p_N$  – współczynnik wagowy dla poszczególnych czujników

Wprowadzenie tak zdefiniowanego rozmieszczenia czujników  $\xi$  pozwala w prosty sposób zapisać znormalizowaną macierz FIM:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f(x^i, t) f^T(x^i, t) dt$$

### 6.1. Minimalizacja skalarnej funkcji bazującej na Informacyjnej Macierzy Fishera $M$ ( $\Psi[M(\xi)] \rightarrow \min$ )

Użyjemy symbolu  $\Xi(X)$  opisującego przestrzeń wszystkich prawdopodobnych pomiarów w zbiorze  $X$ .

Istnieje skończona rzeczywista liczba  $q$  taka, że [3]

$$\{\xi : \Psi[M(\xi)] \leq q < \infty\} = \Xi(q) \neq \emptyset$$

Dla każdego  $\xi \in \Xi(q)$  oraz  $\bar{\xi} \in \Xi(X)$  istnieje pochodna kierunkowa [3] zdefiniowana następująco:

$$\delta_+ \Psi[M(\xi), M(\bar{\xi}) - M(\xi)] = \int_X \left\{ \text{trace}[\dot{\Psi}(\xi) Y(x)] - \text{trace}[\dot{\Psi}(\xi) M(\xi)] \right\} \bar{\xi}^T(dx)$$

$$= \int_X \{c(\xi) - \phi(x, \xi)\} \bar{\xi}^T(dx)$$

gdzie:

$$\dot{\Psi}(\xi) = \frac{\partial \Psi(M)}{\partial M} \Big|_{M=M(\xi)}$$

$$Y(x) = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f(x, t) f^T(x, t) dt$$

Funkcję  $Y(x)$  można interpretować jako macierz FIM określoną dla pojedynczego czujnika zlokalizowanego w punkcie  $x \in X$

Oznaczając

$$\psi(x, \xi) = c(\xi) - \phi(x, \xi)$$

gdzie

$$c(\xi) = -\text{trace}[\dot{\Psi}(\xi) M(\xi)]$$

- zależy od aktualnego rozmieszczenia  $\xi$

$$\phi(x, \xi) = -\text{trace}[\dot{\Psi}(\xi) Y(x)] = -\frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f^T(x, t) \dot{\Psi}(\xi) f(x, t) dt$$

- zależy od aktualnego rozmieszczenia czujników  $\xi$  oraz od zmiennej  $x \in X$ , którą można również interpretować jako rozmieszczenie skoncentrowane w pojedynczym punkcie  $x \in X$ . Dla optymalnego rozmieszczenia czujników  $\xi^*$  [3] uzyskujemy

$$\min_{x \in X} \psi(x, \xi^*) = 0$$

W dalszych rozważaniach przyjmujemy następująco zdefiniowaną funkcję  $\Psi[M(\xi)]$  (kryterium D-optymalne [3]):

$$\Psi[M(\xi)] = -\ln \det M(\xi)$$

Kryterium D-optymalne jest niezmiennicze względem zmiany skali parametrów oraz liniowej transformacji wyjścia czujników, wtedy zachodzą następujące równości:

$$\phi(x, \xi) = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f^T(x, t) M^{-1}(\xi) f(x, t) dt$$

$$c(\xi) = m$$

$m$ -wymiar wektora parametrów  $\beta$

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f(x^i, t) f^T(x^i, t) dt$$

Algorytm wyznaczania optymalnego rozmieszczenia czujników pomiarowych [3] polega na dodawaniu w  $k$ -tej iteracji nowego punktu pomiarowego zlokalizowanego w punkcie  $x_k^0 \in X$ , dla którego  $\Psi[M(x_k^0)]$  (oparte na macierzy FIM dla pojedynczego punktu pomiarowego  $x_k^0 = \arg \max_{x \in X} \phi(x, \xi_k)$ ) jest optymalne przy uwzględnieniu dotychczasowego rozmieszczenia  $\xi$ . Należy zauważyć, że wprowadzenie tego punktu zmniejszy wskaźnik jakości  $\Psi[M(\xi_{k+1})]$ .

Wprowadzenie nowego punktu pomiarowego wymusza konieczność zmniejszenia wag  $p$  dla dotychczasowych punktów pomiarowych zawartych w rozmieszczeniu wyznaczonym w poprzedniej iteracji oraz dodanie nowego punktu pomiarowego z odpowiednią wagą  $p$  tak, aby zachować normalizację macierzy  $M$ .

## 6.2. Opis algorytmu

### Krok 1.

Wybieramy startowe rozmieszczenie czujników  $\xi_0$  ( $\det M(\xi_0) \neq 0$ ) ustalamy  $0 < \lambda_0 < 1$ ,  $\gamma > 1$  oraz dodatnią liczbę  $\eta < 1$ , i ustawiamy  $k=1$

### Krok 2.

Wyznaczamy  $x_k^0 = \arg \max_{x \in X} \phi(x, \xi_k)$

Jeżeli  $\phi(x_k^0, \xi_k) < c(\xi_k) + \eta$  wtedy STOP

W dalszych obliczeniach przyjmujemy:

$\psi[M(\xi)] = -\ln \det M(\xi)$  - minimalizowana funkcja oparta na FIM

### Krok 3.

Jeżeli warunek stopu w kroku 2 nie jest spełniony to wówczas dla  $\lambda_k = \lambda_{k-1} / \gamma$  wyznaczamy nowe rozmieszczenie czujników  $\xi_{k+1} = (1 - \lambda_k) \xi_k + \lambda_k \xi_k^0$

gdzie:

$\xi_k^0$  - rozmieszczenie czujników skoncentrowane w punkcie  $x_k^0$

podstawiamy  $k=k+1$  i powracamy do kroku 2.

## 7. PRZYKŁAD

Układ dynamiczny opisany jest równaniem

$$\frac{\partial w(t, x_1, x_2)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \quad t > 0 \quad (6)$$

gdzie obszar  $X$ , w którym określone jest równanie (6):

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq a \\ 0 \leq x_2 \leq b \end{cases}$$

z zerowymi warunkami brzegowymi Dirichleta

$$\begin{cases} w(t, 0, x_2) = w(t, a, x_2) = 0 \\ w(t, x_1, 0) = w(t, x_1, b) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

zakładamy że:

$$\begin{aligned} a &\neq b \\ \left(\frac{a}{b}\right)^2 &\text{ - liczba niewymierna} \\ a, b &> 0 \end{aligned}$$

Z równaniem różniczkowym cząstkowym (6) możemy związać nieograniczony operator różniczkowy  $A$  zdefiniowany następująco:

$$Aw(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}$$

Wartości i funkcje własne operatora  $A$  są postaci:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= -\pi^2 \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right) \\ w_{ij} &= \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{i\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{j\pi}{b} x_2\right) \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Wiączając współczynnik  $\frac{2}{\sqrt{ab}}$  normalizujący wartości własne  $w_{ij}$  do parametrów  $\beta$  uzyskujemy warunek początkowy w postaci:

$$w(0) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \beta_{kl} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b} x_2\right)$$

wtedy rozwiązanie równania różniczkowego (6) jest postaci:

$$w(t, x) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \beta_{kl} \alpha'_{kl} w_{kl}(x) \exp(s_{kl} t) \quad (8)$$

Można zmodyfikować postać warunku początkowego  $w(0)$  pomijając niektóre składniki sumy określonej przez równanie (3). Powoduje to analogiczną zmianę postaci rozwiązania równania (6) określonego wzorem (8). Postępując w ten sposób zmniejszamy wymiar wektora  $\beta \in R^m$ .

Wtedy obserwację dla pojedynczego punktu pomiarowego można zapisać następująco:

$$z^i(t) = f(x^i, t)^T \beta + \varrho(t), \quad i = 1, \dots, N$$

gdzie:

$$\begin{aligned} f(x^i, t) &= [\alpha'_{kl} w_{kl}(x^i) \exp(s_{kl} t), \dots]^T = \\ &= [f_{kl}(x^i, t), \dots]^T \quad x = [x_1, x_2] \end{aligned}$$

$$\alpha_{kl} = \beta_{kl} \int_0^a \int_0^b w_{kl} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b} x_2\right) dx_2 dx_1$$

$$\alpha_{kl} = \beta_{kl} \alpha'_{kl}$$



Elementy  $m$  wymiarowego wektora  $f(x^i, t)$  z indeksami  $kl$  odpowiadają wybranym indeksom rozwiązania równania (6) określonego wzorem (8) oraz warunku początkowego zapisanego w ogólnej postaci następująco:

$$w(0) = \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{l=1}^{n_l} \beta_{kl} w_{kl}(0)$$

Obliczenia przeprowadzono dla parametrów:

$$a=\pi, b=1; t_f=0.1$$

Bardzo ważną rolę w algorytmie optymalizacji rozmieszczenia czujników pomiarowych odgrywa odpowiedni dobór punktu startowego  $\xi_0$ . W dalszych obliczeniach wstępnie dobrano punkt startowy  $\xi_0$  metodą prób i błędów, wizualizując funkcję  $\phi(x, \xi_0)$  dla kilku różnych rozmieszczeń  $\xi_0$ .

Funkcja  $\phi(x, \xi_0)$  posiada  $l_{max}$  lokalnych maksimów. Wstępnie jako punkt startowy przyjęto ten, dla którego wartość bezwzględna różnicy wartości lokalnych  $\max_{x \in X} \phi(x, \xi_0)$  o największej oraz najmniejszej wartości

była najmniejsza. Następnie dla tak dobrego  $\xi_0$  wyznaczono lokalne maksima względem  $x$  funkcji  $\phi(x, \xi_0)$ . Ostatecznie wyznaczono punkt startowy  $\xi_0$  jako zbiór punktów odpowiadający maksimum funkcji  $\phi(x, \xi_0)$  z wagami  $1/l_{max}$ , gdzie  $l_{max}$  – liczba lokalnych maksimów funkcji  $\phi(x, \xi_0)$ .

W ten sposób wyznaczony punkt startowy  $\xi_0$  przyjęto w dalszych obliczeniach zgodnie z algorytmem.

### 7.1. Obliczenia

$$(k, l) = \{(1, 1); (1, 2)\}$$

wtedy

$$w(0) = \beta_{11} \sin\left(\frac{\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} x_2\right) + \beta_{12} \sin\left(\frac{\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{2\pi}{b} x_2\right)$$

$$\beta = [\beta_{11}, \beta_{12}]^T$$

$$f(x^i, t) = [f_{11}(x^i, t), f_{12}(x^i, t)]^T \quad x^i = [x_1^i, x_2^i]$$

Przyjmując punkt startowy:

$$\xi_0 = \left\{ \begin{array}{cc} (1.8, 0.4) & (1.7, 0.8) \\ 1/2 & 1/2 \end{array} \right\}$$

oraz:

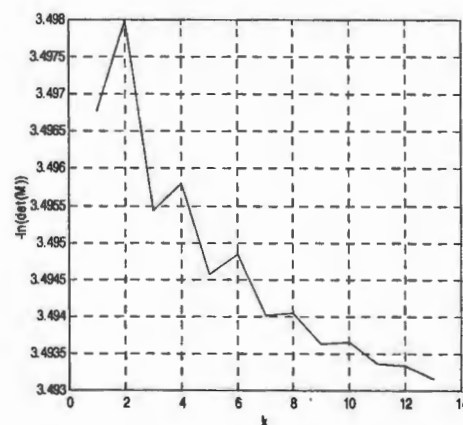
$$\lambda_0 = 0.06, \lambda_k = \lambda_{k-1} / \gamma \quad \gamma = 1.16$$

$$\eta = 0.009 \text{ lub } k=60 - \text{warunek zatrzymania}$$

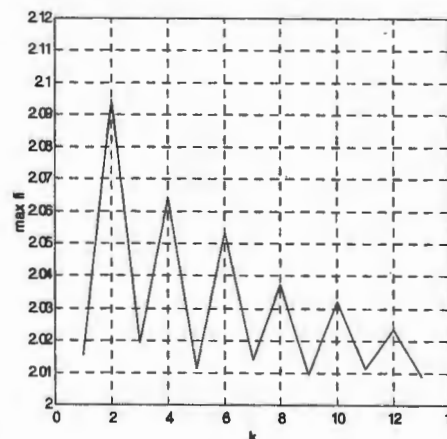
Sposób wyznaczania nowego wektora wag  $p$  w  $k$ -tej iteracji polega na przemnożeniu każdego elementu wektora  $p$  przez współczynnik  $(1 - \lambda_k)$  a następnie wprowadzeniu nowego elementu tak, aby suma elementów wektora wag  $p$  wynosiła jeden.

Z każdą iteracją zwiększa się ilość punktów pomiarowych zawartych w  $\xi$  dlatego dokonano uśrednienia wartości  $x^i$  dla lokalizacji znajdujących się „blisko siebie” w celu zmniejszenia ilości czujników oraz dokonano porównania wyników (Tabela 1). Położenie czujników zostało uśrednione a odpowiadające im wagi  $p^i$  zsumowane.

Rysunki 1 i 2 przedstawiają wykresy zmian wartości minimalizowanej funkcji  $\psi[M(\xi_k)] = -\ln \det M(\xi_k)$  (Rys. 1) oraz wartości maksimum w obszarze  $X$  funkcji czułości  $\phi(x, \xi_k)$  (Rys. 2) w kolejnych iteracjach  $k$  algorytmu wyznaczania optymalnego rozmieszczenia czujników pomiarowych. Na wykresach przedstawione wartości dla iteracji  $k=1$  odpowiadają rozmieszczeniu startowemu  $\xi_0$ .



Rys. 1.  $\psi[M(\xi_k)] = -\ln \det M(\xi_k)$  w kolejnych iteracjach.



Rys. 2.  $\max_{x \in X} \phi(x, \xi_k)$  w kolejnych iteracjach.

Tabela 1. Zestawienie wyników dla różnych wartości parametrów algorytmu.

Postać warunku początkowego (k,l)	Warunek zatrzymania $\eta_k$	Punkt startowy $\xi_0^*$		$\lambda_0$	$\gamma$	Ilość iteracji k	$\Psi[M(\xi^*)]$ przed uśred.	$\Psi[M(\xi^*)]$ po uśred.	Rozmieszczenie optymalne $\xi^*$ po uśrednieniu		
		$x^i$	$p^i$						$x^i$	$p^i$	
(1,1) (1,2)	0,009 $k < 60$	1,8	0,5	0,06	1,16	13	3,4931	3,4868	1,5708	0,4999	
		0,4							0,3064		
		1,7	0,5						1,5708	0,5001	
		0,8							0,6936		
					0,078	1,16	9	3,4929	3,4866	1,5708	0,5002
										0,3053	
										1,5708	0,4998
										0,6946	
										1,5708	0,4999
										0,3081	
										1,5708	0,5001
										0,6918	
								1,5708	0,5011		
								0,3052			
								1,5708	0,4989		
								0,6942			
								1,5708	0,4999		
								0,3069			
								1,5708	0,5001		
								0,6929			

## 8. WNIOSKI

Można zauważyć istotny wpływ wartości parametrów algorytmu  $\lambda_0, \gamma$  na zbieżność algorytmu. (Tabela 1) Ponieważ zastosowany sposób zmniejszania parametru  $\lambda_k = \lambda_{k-1}/\gamma$  nie spełnia warunku algorytmu Wynn'a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty, \text{ po pewnej liczbie iteracji algorytm prze-}$$

stanie „poprawiać” wskaźnik jakości ale jednocześnie zmniejszy amplitudę oscylacji  $\max_{x \in X} \phi(x, \xi_k)$  w kolej-

nych iteracjach. Dlatego zasadne jest zastosowanie dodatkowego kryterium zatrzymania algorytmu po założonej liczbie iteracji. W takim przypadku należy powtórzyć procedurę algorytmu z takimi samymi parametrami  $\lambda_0, \gamma$ , przyjmując za punkt startowy otrzymane po zatrzymaniu algorytmu uśrednione rozmieszczenie. Uśrednienie rozmieszczenia czujników pomiarowych powoduje nie tylko poprawę wskaźnika jakości, ale również zmniejsza liczbę czujników pomiarowych w  $\xi$ .

### THE OPTIMUM EXPERIMENTAL DESIGN PROBLEM FOR LINEAR DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS

In general case, have at one's disposal data from the outcomes of the measurements, the calculation the initial state of system is difficult, because the solution of differential parabolical partial equation be introduced as infinite series.

The proposed method of calculate of initial state of system consist in assumption of definite form of initial condition:

$$w(0) = \sum_{k=1}^n \beta_k w_k(0) \quad \text{where } w_k(0) \text{ - component of initial condition}$$

Form of initial condition  $w_k(0)$  should assure solution differential partial equation in form finite series. Then on the basis of results of measurements from suitably disposed sensors is possible execute the estimation of parameters  $\beta_k$ , simultaneously calculate approximate initial condition  $w(0)$ .

### Literatura

- [1] Mańczak K. (1976) *Technika planowania eksperymentu*. WNT, Warszawa.
- [2] Piotrowski J. (1994) *Procedury pomiarowe i estymacja sygnałów*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.
- [3] Uciński D. (1999) *Measurement optimization for parameter estimation in distributed systems*. Technical University Press, Zielona Góra.



Instytut Badań Systemowych  
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-01-4