

# **XV Krajowa Konferencja Automatyki**

## **Tom II**



**Redaktorzy:  
Zdzisław Bubnicki  
Roman Kulikowski  
Janusz Kacprzyk**

# **XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom II**



**Redaktorzy:**  
**Zdzisław BUBNICKI**  
**Roman KULIKOWSKI**  
**Janusz KACPRZYK**

**ORGANIZATOR**

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

**WSPÓLORGANIZATORZY**

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

## WSPÓLORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska  
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów  
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący	Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego	Roman KULIKOWSKI

## CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA	Michał BIAŁKO
Mikołaj BUSŁOWICZ	Władysław FINDEISEN
Ryszard GESSING	Henryk GÓRECKI
Jakub GUTENBAUM	Jerzy JÓZEFczyk
Stanisław KACZANOWSKI	Tadeusz KACZOREK
Janusz KACPRZYK	Jerzy KLAMKA
Józef KORBICZ	Zbigniew KOWALSKI
Krzysztof KOZŁOWSKI	Juliusz L. KULIKOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI	Kazimierz MALANOWSKI
Krzysztof MALINOWSKI	Wojciech MITKOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI	Władysław PEŁCZEWSKI
Tadeusz PUCHAŁKA	Leszek RUTKOWSKI
Stanisław SKOCZOWSKI	Roman SŁOWIŃSKI
Jerzy ŚWIĄTEK	Andrzej ŚWIERNIAK
Ryszard TADEUSIEWICZ	Piotr TATJEWSKI
Krzysztof TCHOŃ	Leszek TRYBUS
Jan WĘGLARZ	Andrzej P. WIERZBICKI

## KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący	Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego	Janusz KACPRZYK
	Stanisław KACZANOWSKI
	Tadeusz KACZOREK
	Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie	Roman OSTROWSKI
	Tadeusz PUCHAŁKA
	Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowci	Jan STUDZIŃSKI
	Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-01-4

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk  
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

# SYSTEMY STEROWANIA

# OPTYMALNE APROKSYMATORY OPÓŹNIENIA UKŁADÓW CIĄGŁYCH ORAZ ICH REALIZACJE CYFROWE I ANALOGOWE

Andrzej J. MARUSAK

Politechnika Warszawska, Wydział Elektryczny, ISEP  
ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa, e-mail: amar@isep.pw.edu.pl

**Streszczenie:** W pracy przedstawiono optymalizację aproksymatorów Padé bloku opóźnienia układów ciągłych. Autor pokazał, że dotychczas stosowane aproksymatory symetryczne Padé, tj. takie, w których wielomiany licznika i mianownika transmitancji aproksymatora są tego samego stopnia, okazały się być nieoptymalne w sensie chociażby całkowitych wskaźników jakości sterowania. Wykazano, że aproksymatory niesymetryczne są znacznie lepsze od aproksymatorów symetrycznych. Na podstawie badań określono optymalne stopnie wielomianów licznika transmitancji aproksymatorów różnego rzędu i sformułowano wskazówki doboru rzędu aproksymatora. Doświadczenie wykazało, że opracowane aproksymatory są łatwe w realizacji zarówno numerycznej jak i analogowej.

**Słowa kluczowe:** Modelowanie i symulacja układów ciągłych, układy z opóźnieniem, modele opóźnienia, aproksymatory opóźnienia.

## 1. WPROWADZENIE

W wielu ciągłych systemach sterowania występują elementy opóźnienia. Transmitancja takich elementów — jeśli są one liniowe — ma postać  $e^{-sT_0}$ , przy czym  $s$  — operator Laplace'a,  $T_0$  — czas opóźnienia (zwany opóźnieniem albo czasem martwym). Analiza i synteza takich systemów jest bardzo trudna i praktycznie wykonuje się ją metodami symulacyjnymi (analogowymi lub cyfrowymi). W obydwu przypadkach opóźnienie musi być symulowane za pomocą odpowiednich modeli analogowych lub cyfrowych (aproksymatorów opóźnienia).

Na przestrzeni lat stosowano wiele różnych sposobów modelowania opóźnienia [2, 3, 4, 5, 6]. Obecnie, w rozwiązaniach numerycznych, stosuje się karuzelowe modele opóźnienia [4, 6]. Modele te są dobre, ale trudne do zaprogramowania zwłaszcza, jeśli mają współpracować ze zmiennie-krokovymi metodami całkowania numerycznego.

W rozwiązaniach analogowych natomiast, stosuje się analogowo-cyfrowe, mikroprocesorowe urządzenia do opóźniania sygnałów analogowych. Najpierw, analogowy sygnał wejściowy  $We(t)$  jest przetwarzany na cyfrowy  $We^*(k)$  (gdzie  $k=T_p$ ,  $T_p$  — czas próbkowania,  $k$  — numer próbki), ponieważ sygnał cyfrowy można z łatwością opóźnić odczytując go z pamięci po czasie opóźnienia  $T_0$  jako  $Wy^*(k-T_0/T_p)$ . Następnie, taki

opóźniony w czasie  $Wy^*(k)$  sygnał cyfrowy przetwarza się na analogowy i w rezultacie  $Wy(t) = We(t - T_0)$ . Urządzenia działające w opisany sposób znakomicie przybliżają bloki opóźniające ale są stosunkowo kosztowne.

W tej pracy zaproponowano zastosowanie wybranych (zoptymalizowanych) aproksymatorów Padé zarówno jako cyfrowych jak i analogowych modeli ciągłego elementu opóźniającego [5]. Aproksymatory takie są proste w użyciu, uniwersalne i pozbawione wad modeli karuzelowych. Można je łatwo zaprogramować, a także — w razie potrzeby — wykonać w postaci analogowej, ze standardowych wzmacniaczy operacyjnych i elementów RC.

## 2. APROKSYMATORY PADÉ OPÓŹNIENIA TRANSPORTOWEGO

Do modelowania transmitancji elementu opóźniającego  $\exp(-sT_0)$ , wybieramy aproksymację Padé [1]. Realizowalne aproksymatory Padé elementu opóźniającego są określone następująco [2, 3].

$$e^{-sT_0} = \lim_{(m,n) \rightarrow \infty} \left[ \frac{L_{mn}(s \cdot T_0)}{M_{nm}(s \cdot T_0)} \right], \quad m \leq n \quad (1)$$

gdzie:

$$L_{mn}(s \cdot T_0) = \sum_{k=0}^m b_k \cdot p^k \quad (2)$$

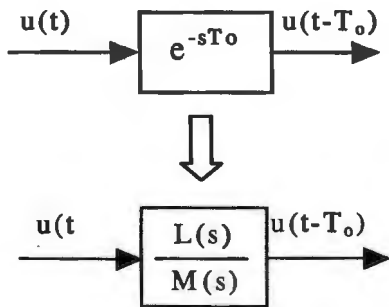
$$M_{nm}(s \cdot T_0) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot p^k, \quad p = s \cdot T_0$$

$$b_k = \frac{m!(m+n-k)!}{(m-k)!(m+k)!k!} \cdot (-1)^k \quad (3)$$

$$a_k = \frac{n!(m+n-k)!}{(n-k)!(m+k)!k!}$$

Równość (1) jest spełniona tylko przy  $(m, n) = \infty$ . Wtedy ma miejsce odpowiedniość przedstawiona na rys.1. W praktycznych modelach opóźnienia, nie stosuje się zbyt wysokich rzędów  $n$  transmitancji (1) z powodu

zbytniego wydłużania obliczeń (w numerycznych modelach opóźnienia występuje  $n$  integratorów), a w modelach analogowych, ze względu na trudności realizacyjne oraz w celu uniknięcia wchodzenia wzmacniaczy całkujących w nasycenie (wzmocnienia członów operacyjnych są tym większe im większe jest  $n$ ).



Rys.1. Aproksymacja wymierna opóźnienia czasowego;  $L(s)$ ,  $M(s)$  – wielomiany Padé,  $T_0$  – opóźnienie,  $s$  – operator Laplace'a

Jeżeli stopień wielomianu licznika jest równy stopniowi wielomianu mianownika  $m=n$  transmitancji aproksymatora (1), to aproksymator Padé nazywamy symetrycznym, natomiast jeśli  $m \neq n$ , to aproksymator nazywamy niesymetrycznym. Warunkiem realizowalności fizycznej aproksymatora Padé jest ( $m \leq n < \infty$ ). Przy aproksymacji symetrycznej, współczynniki  $a_k$  i  $b_k$  wielomianów różnią się tylko znakami.

Z powodu ograniczonego  $m$  i  $n$ , mamy możliwość zrealizowania zależności (1) jedynie w przybliżeniu. Jeżeli przez  $G_a$  oznaczymy transmitancję aproksymatora rzeczywistego, to

$$G_a(p) = \frac{L_{mn}(p)}{M_{mn}(p)} = e^{-p} - G_e(p), \quad m \leq n \leq \infty \quad (4)$$

Transmitancja  $G_e(p)$  jest resztą rozwinięcia (1) nie uwzględnianą przy aproksymacji rzeczywistej. Reszta ta określa błąd  $e_m(t)$  modelu matematycznego aproksymacji.

$$e_m(t) = L^{-1}\{U(s) \cdot G_e(s \cdot T_0)\}, \quad s \cdot T_0 = p \quad (5)$$

Tabela 1. Współczynniki  $a_n$  transmitancji realnych symetrycznych aproksymatorów Padé, założono  $T_0=1$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$1/a_n$	2	12	120	1680	50240	665280	$1.73e+8$	$5.14e+8$	$1.74e+10$	$6.7044e+11$

Wybieramy następujące zmienne stanu:

$$x_i = K_i \cdot (x_{i-1} + R_i \cdot u - y), \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (6a)$$

Wyjście  $y$  aproksymatora:  $y = x_n + R_{n+1} \cdot u, x_0 = 0,$

współczynniki wzmocnienia:

Przy numerycznym realizowaniu aproksymatora, do błędu  $e_m(t)$  aproksymacji opóźnienia, dodają się błędy powodowane niedokładnością obliczeń numerycznych (np. niedokładnością całkowania numerycznego). Natomiast przy realizowaniu analogowym, do błędu  $e_m(t)$  dodają się błędy wynikające głównie z niedokładności zastosowanych elementów RC, a w mniejszym stopniu — z nieidealności zastosowanych wzmacniaczy operacyjnych.

Dotychczas panowało przekonanie, że najlepsze są aproksymatory symetryczne, ponieważ przy  $m=n$ , moduł ich transmitancji nie zależy od częstotliwości i jest równy 1 — tak jak moduł transmitancji opóźnienia, a faza jest tym bliższa fazie elementu opóźniającego  $\varphi_0 = -\omega \cdot T_0$  im większe jest  $n$ . Autor zauważył, że w dziedzinie czasu jednak, lepszymi aproksymatorami Padé opóźnienia są aproksymatory niesymetryczne. Praca niniejsza poświęcona jest optymalizacji aproksymatorów Padé opóźnienia, tj. wyborowi najlepszych z nich w dziedzinie czasu, oraz realizowaniu ich jako aproksymatorów numerycznych lub analogowych.

### 3. MODELOWANIE

Na podstawie transmitancji  $G_a$  otrzymanej ze wzorów (4) i (2), po przyjęciu określonych wartości  $m$  i  $n$ , możemy skonstruować układ równań różniczkowych w postaci Cauchy'ego. Równania te będą modelem matematycznym aproksymatora, służącym do opracowania modeli symulacyjnych analogowych lub cyfrowych.

Zauważmy, że współczynniki  $a_0=b_0=1$ ,  $b_n = a_n \cdot (-1)^n$ , a największą wartość (przy założonym  $n$ ) ma współczynnik  $a_n$  (tabl.1). Z tego względu, modelowanie bezpośrednie aproksymatorów symetrycznych nie jest tutaj użyteczne, ponieważ daje układy równań o bardzo dużej rozpiętości wartości współczynników. W użytecznym zakresie  $n > 3$  utrudniałoby to, a nawet uniemożliwiałoby zrealizowanie modelu analogowego, a w modelu cyfrowym zwiększałoby wpływ obcięć i zaokrążeń, na wyniki obliczeń.

Dokładniejsze modelowanie polega na odpowiednim dobraniu zmiennych stanu tak, aby rozpiętość wartości współczynników modelu matematycznego była możliwie mała lub umiarkowana.

$$R_i = \frac{b_{i-1}}{a_{i-1}}, \quad K_i = \frac{a_{i-1}}{T_0 \cdot a_i}, \quad R_{n+1} = \frac{b_n}{a_n}, \quad R_1 = 1 \quad (6b)$$

Model matematyczny (6) aproksymatora Padé ma znacznie mniejsze rozpiętości wartości współczynników  $K_i$  i  $R_i$  (tabl. 2) w porównaniu z modelami bezpośrednimi (tabl. 1).

Spośród współczynników  $K_i$  najmniejszy (dla danego  $n$ ) jest współczynnik  $K_1$ , a największy  $K_n$ . Wszystkie współczynniki  $K_i$  są dodatnie. Natomiast co drugi współczynnik  $R_i$  jest ujemny, a spośród współczynników  $R_i$ , największy co do modułu, jest  $R_1$ , a najmniejszy —  $R_{n+1}$ . Przy założonym rzędzie  $n$  aproksymacji Padé, rozpiętość współczynników  $K_n$  i  $K_1$  jest największa przy  $m=n$ , a więc przy aproksymacji symetrycznej. Przy aproksymacji niesymetrycznej  $R_i=0, \forall i > m+1$ .

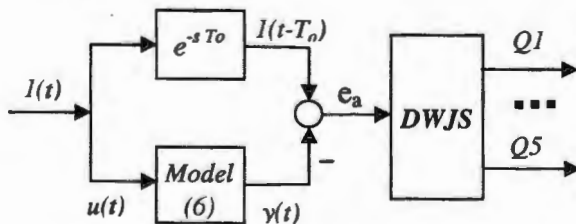
Tabela 2. Wartości najmniejszych i największych współczynników modelu (6), przy  $m=n, T_0=1$

<b>n</b>	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b><math>K_1</math></b>	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
<b><math>K_n</math></b>	6	12	20	50	42	72	72	90	110	132	156

Spośród współczynników  $K_i$  najmniejszy (dla danego  $n$ ) jest współczynnik  $K_1$ , a największy  $K_n$ . Wszystkie współczynniki  $K_i$  są dodatnie. Natomiast co drugi współczynnik  $R_i$  jest ujemny, a spośród współczynników  $R_i$ , największy co do modułu, jest  $R_1$ , a najmniejszy —  $R_{n+1}$ . Przy założonym rzędzie  $n$  aproksymacji Padé, rozpiętość współczynników  $K_n$  i  $K_1$  jest największa przy  $m=n$ , a więc przy aproksymacji symetrycznej. Przy aproksymacji niesymetrycznej  $R_i=0, \forall i > m+1$ .

#### 4. BADANIA SYMULACYJNE DOKŁADNOŚCI APROKSYMATORÓW PADÉ

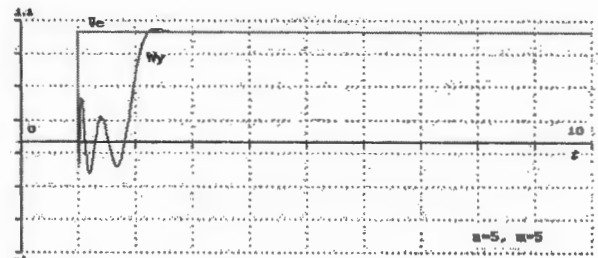
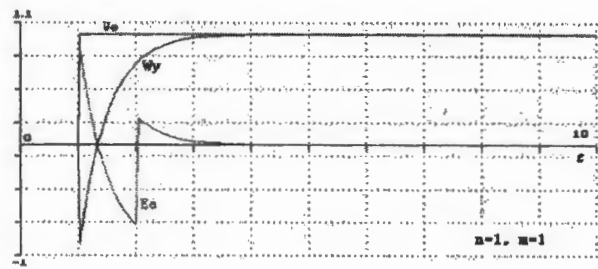
Badania symulacyjne dokładności aproksymacji opóźnienia przeprowadzono w układzie przedstawionym na rys.2 przy założeniu, że sygnał wejściowy  $u(t) = 1(t)$ . Założenie to pozwoliło w prosty sposób zaprogramować idealny blok opóźniający.



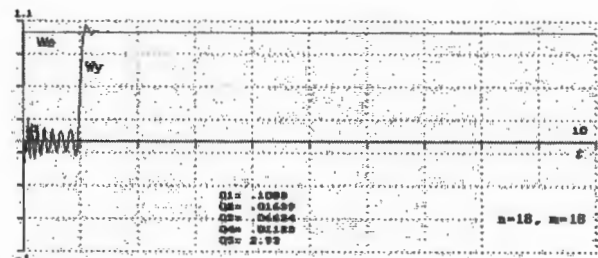
Rys.2. Model układu do badania dokładności symulowania aproksymatorów Padé elementu opóźniającego; DWJS - detektor wskaźników jakości modelowania,  $e_a$  - błąd aproksymatora symulacyjnego,  $e_a = e_m + e_s$ ,  $e_s$  - błąd symulacji,  $e_m$  - błąd modelu matematycznego — patrz (5)

Wyniki badań symulacyjnych kilku aproksymatorów, zarówno symetrycznych jak i niesymetrycznych, przedstawiono na rys.3a i rys.3b. Aproksymatory są tym dokładniejsze im wyższy jest rząd aproksymacji.

Jakość modelowania aproksymatora bloku opóźniającego będziemy oceniać na podstawie całkowych wskaźników jakości  $Q_i$ , przy  $i=1, 2, 3, 4, 5$  zdefiniowanych jako:  $Q_1=IAE, Q_2=ISE, Q_3=ITAE, Q_4=ITSE, Q_5=Q_3+ITA \bar{x}_n$  (rys.4).

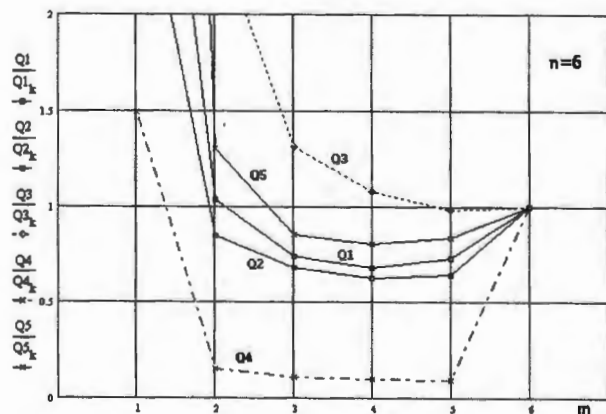


Rys. 3a



Rys. 3b

Zagadnienie jakości aproksymatorów zbadamy bliżej analizując wskaźniki jakości modu modelowania. Przy założonym rzędzie  $n$ , jakość aproksymacji zależy od wartości  $m$  (rys.4).



Rys. 4. Wykresy unormowane wskaźników jakości aproksymatora rzędu  $n=6$ ;  $Q_{1k}, Q_{2k}, \dots, Q_{5k}$  — wartości odniesienia wskaźników jakości przy  $m=6$

W tabl.3 przedstawiono zestawienie zbiorcze znalezionych optymalnych wartości  $m=m_o$  odpowiadających aproksymatorom rzędu  $n=1,2,\dots,18$ , otrzymane przy użyciu pięciu kryteriów jakości modelowania.

$$\min_{m \rightarrow m_{oi}} Q_i(m, n), \quad m \leq n, \quad n = n_a \quad (7)$$

Przy  $n > 6$  i małym  $m$  aproksymatory niesymetryczne okazują się być niestabilne (tabl.3).

Tabela 3. Optymalne wartości  $m_{oi}(n_a)$ ;  $n_a$  – rząd aproksymacji,  $i$  – numer kryterium jakości

$n_a$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	18
$Q_1$	1	1	2	3	3	4	5	5 lub 6	6 lub 7	7	9	14
$Q_2$	0	1	2	3	3	4	5	5 lub 7	6	8	10	14 lub 16
$Q_3$	1	2	3	4	5	5	6	7	7	8	10	14
$Q_4$	1	2	3	3	4	5	6	7	8	8	10	16 lub 17
$Q_5$	1	1	2	2	3	4	5	6	7	7	10	14
<b>N-Stab</b>	—	—	—	—	—	$\leq 1$	$\leq 1$	$\leq 2$	$\leq 3$	$\leq 3$	$\leq 5$	$\leq 10$

Tabela 4. Optymalne wartości  $Q_{io}(n_a)$ ;  $n_a$  – rząd aproksymacji,  $i$  – numer kryterium jakości

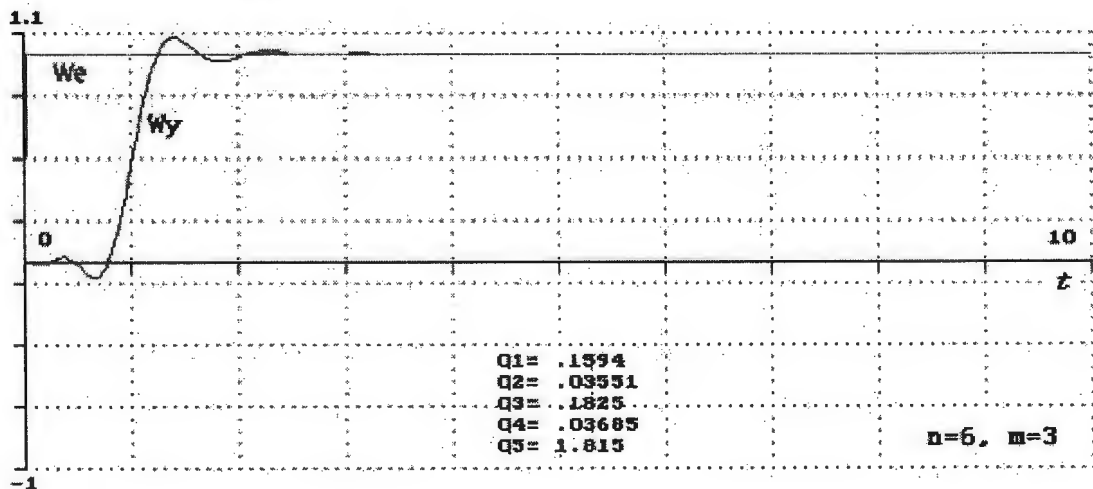
$n_a$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	18
$Q_{1o}$	.602	.367	.265	.209	.171	.146	.127	.115	.1034	.0936	.0796	.0542
$Q_{2o}$	.240	.1065	.071	.0498	.0397	.0327	.027	.0244	.0212	.0184	.0145	.0097
$Q_{3o}$	.484	.292	.220	.185	.158	.137	.118	.108	.098	.095	.083	.0590
$Q_{4o}$	.181	.097	.0641	.0462	.0383	.0313	.0288	.0228	.0211	.0183	.015	.0093
$Q_{5o}$	1.57	1.53	1.56	1.615	1.63	1.71	1.75	1.80	1.755	1.88	2.01	2.04

Wartości wskaźników jakości  $Q_{io}(n_a)$  odpowiadające znalezionym wartościom  $m_{oi}(n_a)$  przy założonych  $n_a$  zamieszczono w tabl. 4.

Tabela 3 może służyć do poszukiwania optymalnego aproksymatora, tj. ustalenia jakie ma on mieć  $n$  i  $m$ . Działanie optymalizacyjne wskaźników jakości  $Q_1, Q_2, \dots, Q_4$  jest ogólnie znane. Wskaźnik  $Q_5$  natomiast, jako uzależniony od pochodnej  $n$ -tej zmiennej stanu (6a), może być użyteczny przy konstruowaniu aproksymato-

rów analogowych zbudowanych na wzmacniaczach operacyjnych, gdzie są istotne ograniczenia sygnałów wewnątrz aproksymatora. Wskaźnik  $Q_5$  ma wartość tym większą im większe wartości ma uchyb  $e_a(t)$  i pochodna sygnału  $\dot{x}_n(t)$  przy dużych  $t$ .

Na przykład, przy rzędzie  $n=6$  najlepszy wydaje się być aproksymator niesymetryczny o stopniu licznika transmitancji  $m$  w zakresie 4 lub 5 (rys.5).



Rys. 5a. Charakterystyka aproksymatora Padé rzędu  $n=6$ , przy  $m=3$





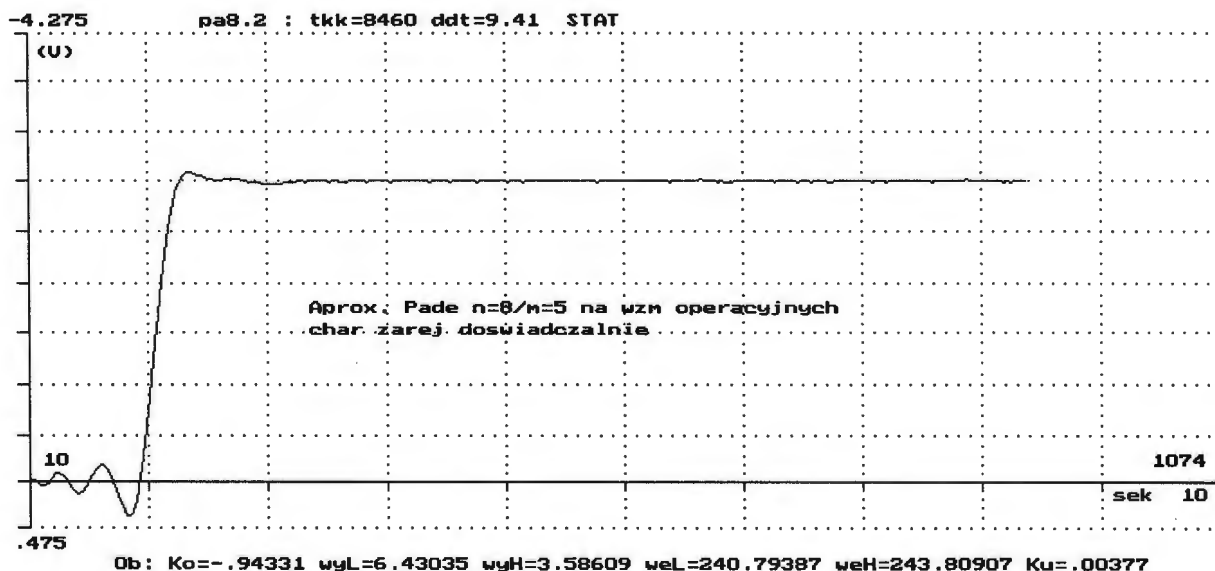
Rys. 5b. Charakterystyki aproksymatorów Padé rzędu  $n=6$ , przy  $m=4, 5, 6$

## 5. UWAGI PRAKTYCZNE NA TEMAT WYBORU APROKSYMATORA PADÉ

Na podstawie tabl.3 możemy wybrać rząd aproksymacji  $n=n_a$  i optymalny stopień  $m=m_o(n_a)$  licznika transmittancji aproksymatora. Po dokonaniu tego wyboru wyznaczamy współczynniki modelu (6).

Autor zbudował i przebadał analogowe aproksymatory Padé rzędu  $n=5$  i  $8$ . Konstruowanie i uruchamianie tych aproksymatorów nie nastęrczało większych trudności. Zastosowano wysokiej klasy elementy RC. Ponadto

zmierzone pojemności kondensatorów wchodzących w skład integratorów, następnie obliczono potrzebne wartości  $R$  i dobrano je bardzo dokładnie przy użyciu mostka do mierzenia  $R$ . Zerowanie wzmacniaczy nie jest krytyczne, ponieważ poszczególne stopnie modelu (6) są samokorygujące. Aproksymator rzędu  $n=5$ ,  $m=3$  był mniej dokładny od aproksymatora rzędu  $n=8$ ,  $m=5$  (rys.6) ale dla potrzeb syntezy układów regulacji jego dokładność była również wystarczająca. Aproksymator rzędu  $n=8$ ,  $m=5$  działał bardzo dobrze ale przy dużych wymuszeniach, niektóre jego wzmacniacze wchodziły w nasycenie, w związku z czym sygnał wyjściowy  $y(t)$  ulegał pewnym zniekształceniom.



Rys.6. Analogowy aproksymator opóźnienia  $n=8$ ,  $m=5$ ; charakterystyki zarejestrowane cyfrowo

Przeprowadzone badania wykazały, że:

- Im większy jest rząd aproksymacji  $n$ , tym wyższa jest dokładność aproksymacji zwłaszcza jeśli wybierzemy najlepsze  $m$  (tabl.3). Dla  $n>1$  niesymetryczne aproksymatory Padé są dokładniejsze od symetrycznych, np. w sensie całkowych wskaźników jakości  $Q_i$ ,  $\forall i$ .
- Przy modelowaniu numerycznym możemy wybrać dużą wartość  $n$  ale należy pamiętać o tym, że nakłady obliczeń rosną ze wzrostem rzędu aproksymacji szybciej niż liniowo [5]. W związku z tym, konstruując numeryczny aproksymator Padé należy wybrać optymalne  $n$  w zależności od mocy obliczeniowej posiadanego komputera, a następnie z tablicy 3 wybrać odpowiednią wartość  $m$ .
- Przy konstruowaniu aproksymatora analogowego, sytuacja jest bardziej skomplikowana, ponieważ wzmacniacze operacyjne mają nasycenie charakterystyk. Przy dużych wartościach  $n$  wzmocnienia poszczególnych stopni aproksymatora są większe (tabl.2) i wzmacniacze aproksymatora będą wchodzić w nasycenie nawet przy przeciętnych wymuszeniach. Optymalizacja analogowego aproksymatora Padé polega więc na wybraniu wartości  $n$  spełniającej wymaganie zapewnienia dostatecznej dokładności modelowania.

## 6. WNIOSKI

Przedstawione modele elementu opóźniającego umożliwiają efektywne symulowanie cyfrowe systemów z opóźnieniem, przy zastosowaniu zmiennie-krokowych metod całkowania. Aproksymacja niesymetryczna Padé jest dokładniejsza w sensie całkowych wskaźników jakości od aproksymacji symetrycznej. Wybór rzędu aproksymacji jest wynikiem kompromisu pomiędzy

wymaganą dokładnością aproksymacji a złożonością modelu, ze wzrostem  $n$  rośnie np. czas obliczeń numerycznych.

Autor proponuje wybierać  $n$  w granicach od 5 do 8 — zarówno w odniesieniu do modeli analogowych jak i numerycznych, a wartości  $m$  — według tabl.3.

## Literatura

- [1] Padé B.E. (1892) Sur la representation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles. *Annales de l'Ecole Normale*, 9, 1-93.
- [2] Holst P.A. (1969) *Padé Approximations and Analog Computer Simulations of time Delays*. Simulation, June, 277-290.
- [3] Davies W.D.T. (1972) *On the Analog Simulation of a Pure Time Delay*. Simulation, May, 161-170.
- [4] Rothstein M. B. (1974) *The carousel advances*. Simulation, May.
- [5] Marusak A.J. (1986) *Model bloku opóźniającego do symulacji systemów z opóźnieniem przy użyciu zmiennie-krokowych metod całkowania*. Prace SPD-3, PTETiS, 43-52.
- [6] Marusak A., Marusak P. (1996) *Wydajny model bloku opóźniającego do symulacji systemów z opóźnieniem przy użyciu zmiennie-krokowych metod całkowania*. Prace SPD-9, PTETiS, 161-166.

## AN OPTIMAL APROXIMATORS OF TIME DELAY ELEMENTS OF CONTINUOUS SYSTEMS — ANALOG AND DIGITAL

**Abstract:** An optimal Padé time delay approximators of continuous systems are presented. These are an asymmetric approximators. These are by far better than symmetric Padé time delay approximators.



Instytut Badań Systemowych  
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-01-4