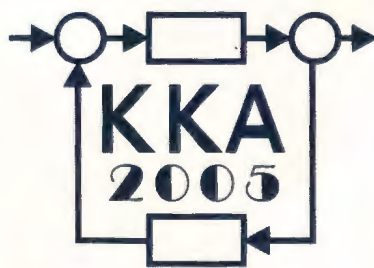


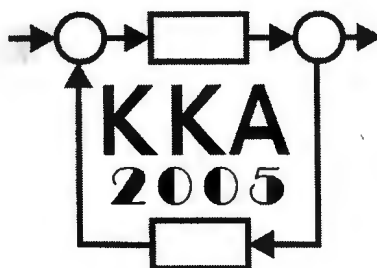
# **XV Krajowa Konferencja Automatyki**

## **Tom II**



**Redaktorzy:  
Zdzisław Bubnicki  
Roman Kulikowski  
Janusz Kacprzyk**

# XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom II



Redaktorzy:  
Zdzisław BUBNICKI  
Roman KULIKOWSKI  
Janusz KACPRZYK

**ORGANIZATOR**

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

**WSPÓLORGANIZATORZY**

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

## WSPÓLORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska  
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów  
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący	Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego	Roman KULIKOWSKI

## CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA	Michał BIAŁKO
Mikołaj BUSŁOWICZ	Władysław FINDEISEN
Ryszard GESSING	Henryk GÓRECKI
Jakub GUTENBAUM	Jerzy JÓZEFczyk
Stanisław KACZANOWSKI	Tadeusz KACZOREK
Janusz KACPRZYK	Jerzy KLAMKA
Józef KORBICZ	Zbigniew KOWALSKI
Krzysztof KOZŁOWSKI	Juliusz L. KULIKOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI	Kazimierz MALANOWSKI
Krzysztof MALINOWSKI	Wojciech MITKOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI	Władysław PEŁCZEWSKI
Tadeusz PUCHAŁKA	Leszek RUTKOWSKI
Stanisław SKOCZOWSKI	Roman SŁOWIŃSKI
Jerzy ŚWIĄTEK	Andrzej ŚWIERNIAK
Ryszard TADEUSIEWICZ	Piotr TATJEWSKI
Krzysztof TCHOŃ	Leszek TRYBUS
Jan WĘGLARZ	Andrzej P. WIERZBICKI

## KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący	Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego	Janusz KACPRZYK
	Stanisław KACZANOWSKI
	Tadeusz KACZOREK
	Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie	Roman OSTROWSKI
	Tadeusz PUCHAŁKA
	Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowci	Jan STUDZIŃSKI
	Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-01-4

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk  
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

OPTYMALIZACJA  
I PODEJMOWANIE DECYZJI

# PLANOWANIE STRATEGII POMIAROWYCH W NIELINIOWYCH ZAGADNIENIACH ODWROTNYCH Z ZASTOSOWANIEM NIEGŁADKICH KRYTERIÓW OPTYMALNOŚCI<sup>†</sup>

Dariusz UCIŃSKI

Uniwersytet Zielonogórski, Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych  
ul. Podgórna 50, 65-246 Zielona Góra, e-mail: d.ucinski@issi.uz.zgora.pl

**Streszczenie:** Praca dotyczy zagadnienia planowania trajektorii ruchomych czujników pomiarowych w kontekście estymacji nieznanymi parametrów dwuwymiarowych układów z czasoprzestrzenną dynamiką. Jako miarę dokładności estymacji przyjmuje się maksymalną wartość własną odwrotności Informacyjnej Macierzy Fishera, którą minimalizuje się ze względu na trajektorie czujników i ich położenia początkowe. Z uwagi na nieróżniczkowalność kryterium, dalej proponuje się jego zastąpienie gładkim przybliżeniem wypukłym. Zadanie formuluje się jako pewien problem optymalnego sterowania w postaci Mayera (w ogólnym przypadku z ograniczeniami na zmienne fazowe), który rozwiązuje się numerycznie w środowisku MATLAB zastosowaniem przybiornika RIOTS\_95. Przykład numeryczny zamieszczony w końcowej części pracy ilustruje proponowane podejście oraz potwierdza jego efektywność.

**Słowa kluczowe:** układy z czasoprzestrzenną dynamiką, estymacja parametrów, ruchome czujniki pomiarowe, planowanie trajektorii, sterowanie optymalne.

## 1. WSTĘP

We współczesnej teorii sterowania złożonymi procesami i obiektami istotną rolę odgrywa opracowywanie nowych, bardziej efektywnych i niezawodnych metod estymacji parametrów ich modeli matematycznych przy uwzględnieniu czasoprzestrzennej dynamiki. Powszechnie wiadomo, że dokładność rozmaitych metod i algorytmów identyfikacji obiektów o parametrach rozłożonych zależy od sposobu prowadzenia obserwacji. Uwzględniając fakt, że pomiar rozłożony jest praktycznie niemożliwy, można zadać pytanie: w jaki sposób zorganizować obserwację takich obiektów, aby otrzymać możliwie najdokładniejsze oceny parametrów?

Problem optymalizacji rozmieszczenia czujników pomiarowych sformułowano już u schyłku lat sześćdziesiątych, jednak do dziś brak jest uniwersalnych i łatwych do zastosowania rozwiązań. Istotną trudność wynika z konieczności stosowania metod analizy nieliniowej, bowiem nawet w sytuacji gdy równanie różniczkowe częst-

kowe jest liniowe ze względu na estymowane parametry, jego rozwiązanie jest na ogół nieliniową funkcją tych parametrów.

Zdecydowana większość pozycji literaturowych dotyczących rozmieszczania zadanej liczby czujników stacjonarnych (zob. np. prace przeglądowe [1, 2, 3, 4]). W pewnych sytuacjach możliwe jest jednak stosowanie czujników mogących wykonywać pomiary również w trakcie ruchu. Przykładowo, stężenie zanieczyszczeń w atmosferze mierzy się często przy użyciu pojazdów monitorujących poruszających się po zadanym obszarze [5]. Taki sposób obserwacji wydaje się dość atrakcyjny zarówno z praktycznego punktu widzenia, gdyż czujniki nie są związane z ustalonymi punktami pomiarowymi i mogą przemieszczać się do obszarów, które dostarczają w danej chwili więcej informacji o obserwowanym obiekcie, jak również z punktu widzenia teorii sterowania, gdyż prowadzi do wielu interesujących problemów wymagających nieklasycznych rozwiązań.

Problemowi określenia optymalnych trajektorii czujników ruchomych poświęcono dotąd w literaturze stosunkowo mało miejsca. Podejście zaproponowane przez Rafajłowicza [6] polega na zastosowaniu wyznacznika Informacyjnej Macierzy Fishera (IMF) związanej z estymowanymi parametrami jako miary dokładności identyfikacji i jest bliskie klasycznym metodom planowania eksperymentu dla obiektów o parametrach skupionych [7, 8, 9]. Zamiast trajektorii poszukuje się raczej pewnej optymalnej miary zależnej od czasu. Podane konieczne i wystarczające warunki optymalności wydają się być jednak ograniczone do stosunkowo prostych obiektów. Z kolei w pracach [10, 11, 12, 2, 4], oprócz uogólnienia podejścia Rafajłowicza, zaproponowano efektywne algorytmy obliczeniowe oparte na IMF, formułując problem jako zadanie sterowania optymalnego z ograniczonymi na zmiennym stanie. Rozwiązania numeryczne wyznaczano stosując technikę kolejnych linearyzacji (jedną z wersji metody kierunków dopuszczalnych), która pozwala na nieskomplikowane włączenie do sformułowania wielu ograniczeń nałożonych na ruch czujników.

Oprócz kryteriów szacujących dokładność estymacji na podstawie IMF, niekiedy spotyka się również kryteria definiowane w oparciu o przesłanki czysto deterministycz-

<sup>†</sup>Pracę wykonano w ramach projektu badawczego KBN nr 3 T11C 035 27 pt. *Równoległe i rozproszone metody planowania eksperymentów optymalnych.*

ne, bez jakichkolwiek założeń o losowym charakterze zakłóceń [9]. Otrzymuje się w ten sposób różnego rodzaju miary uwarunkowania operatora odwzorowującego przestrzeń parametrów w przestrzeń wyjść. Jedną z najczęściej stosowanych miar tego typu została szczegółowo omówiona w pracy [13]. W monografii [4] wykazano, że to czysto deterministyczne podejście jest równoważne maksymalizacji najmniejszej wartości własnej IMF, czyli tzw. kryterium E-ptymalności. Celem niniejszej pracy jest pokazanie pewnego sposobu regularyzacji tego niegładkiego kryterium optymalności oraz sprawdzenia otrzymanego problemu sterowania optymalnego do zadania w postaci Mayera, dla którego rozwiązanie numerycznie wyznacza się z zastosowaniem przybownika RIOTS\_95 dostępnego w środowisku MATLAB.

## 2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Procesy z czasoprzestrzenną dynamiką opisuje się w większości przypadków liniowymi lub nieliniowymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Przyjmijmy więc, że w przedziale czasu  $T = [0, t_f]$  rozważany proces opisuje równanie

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \mathcal{F} \left( x_1, x_2, t, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}, \theta \right),$$

$$x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad t \in T, \quad (1)$$

z warunkami początkowymi i brzegowymi

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$\mathcal{E}(x, t, y, \theta) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in T, \quad (3)$$

gdzie:  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  — spójny i ograniczony obszar o gładkim brzegu  $\partial\Omega$ ,  $\mathcal{F}$  oraz  $\mathcal{E}$  — pewne znane funkcje,  $t$  — czas,  $y(\cdot, \cdot)$  — zmienna stanu o wartościach rzeczywistych,  $y_0(\cdot)$  — początkowy rozkład zmiennej stanu.

W równaniach (1)–(3)  $\theta \in \Theta_{\text{dop}} \subset \mathbb{R}^m$  oznacza wektor nieznanych parametrów ( $\Theta_{\text{dop}}$  — zadany zbiór wartości dopuszczalnych), które należy oszacować na podstawie pomiarów wykonywanych przez  $N$  ruchomych czujników. Niech  $x^j : T \rightarrow \Omega_{\text{dop}}$  oznacza trajektorię  $j$ -ego czujnika, gdzie:  $\Omega_{\text{dop}} \subset \Omega$  — obszar, w którym wykonywanie pomiarów jest dopuszczalne. Przy założeniu, że pomiary stanu dokonywane są punktowo przez bezinercyjny układ pomiarowy, a ich niedokładność uwzględnia się jako zakłócenia addytywne, równania obserwacji przyjmują postać

$$z(t) = y_m(t) + \varepsilon_m(t), \quad t \in T, \quad (4)$$

gdzie:

$$y_m(t) = \text{col}[y(x^1(t), t), \dots, y(x^N(t), t)], \quad (5)$$

$$\varepsilon_m(t) = \text{col}[\varepsilon(x^1(t), t), \dots, \varepsilon(x^N(t), t)], \quad (6)$$

$z(t)$  —  $N$ -wymiarowy wektor obserwacji,  $\varepsilon(x, t)$  — niemierzalne zaburzenie reprezentujące wpływ zakłóceń pomiarowych i niedokładność modelu (1)–(3). W celu uproszczenia zapisu, wprowadźmy oznaczenia

$$s(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^N(t)), \quad \forall t \in T. \quad (7)$$

Przy powyższych założeniach, odpowiedni problem estymacji parametrycznej formułuje się następująco: w oparciu o model (1)–(3) i rezultaty pomiarów  $z(\cdot)$  wzdłuż trajektorii  $s(\cdot)$  należy określić estymatę  $\hat{\theta} \in \Theta_{\text{dop}}$  minimalizującą następujące kryterium najmniejszych kwadratów [14]:

$$\mathcal{J}(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \|z(t) - \hat{y}_m(t; \theta)\|_{\mathbb{R}^N}^2 dt, \quad (8)$$

gdzie:  $\hat{y}_m(t; \theta) = \text{col}[\hat{y}(x^1(t), t; \theta), \dots, \hat{y}(x^N(t), t; \theta)]$ ,  $\hat{y}(\cdot, \cdot; \theta)$  — rozwiązanie równań (1)–(3) odpowiadające danej wartości wektora parametrów  $\theta$ .

Powyższy problem można również sformułować nieco bardziej abstrakcyjnie. W tym celu oznaczymy przestrzenie Hilberta, do których należą  $\theta$ ,  $y(\cdot, \cdot)$  i  $z(\cdot)$ , odpowiednio przez  $\Theta = \mathbb{R}^m$ ,  $Y$  i  $Z = L^2(T; \mathbb{R}^N)$  (zapis  $L^2(T; \mathbb{R}^N)$  oznacza przestrzeń liniową funkcji całkowalnych z kwadratem, odwzorowujących  $T$  w  $\mathbb{R}^N$ , z iloczynem skalarnym  $\langle f, g \rangle_{L^2(T; \mathbb{R}^N)} = \int_T \langle f(t), g(t) \rangle_{\mathbb{R}^N} dt$  oraz normą zgodną z tym iloczynem). Konkretną postać przestrzeni  $Y$  determinuje charakter rozwiązań równania (1)–(3) i dlatego dalej zakłada się jedynie, że elementy  $Y$  są wystarczająco gładkie, żeby sensownym było rozważanie pomiarów punktowych. Wówczas rozwiązanie równania różniczkowego cząstkowego dla zadanej wartości  $\theta$  można przedstawić za pomocą operatora rozwiązania  $S : \Theta_{\text{dop}} \rightarrow Y$  określonego wyrażeniem

$$y = S(\theta). \quad (9)$$

Typ realizowanych pomiarów charakteryzuje się operatorem obserwacji  $\mathcal{O} : Y \rightarrow Z$  zdefiniowanym przez

$$y_m = \mathcal{O}(y). \quad (10)$$

Z zastosowaniem (9) oraz (10),  $y_m$  jest dane wyrażeniem

$$y_m = \Phi_s(\theta), \quad (11)$$

gdzie:  $\Phi_s = \mathcal{O} \circ S$  — złożenie operatorów  $S$  i  $\mathcal{O}$ . Indeks  $s$  wprowadzono w celu podkreślenia, że postać rozwiązanego operatora zależy w istotny sposób od trajektorii czujników.

Mając dany rezultat pomiarów  $z \in Z$ , rozważane zagadnienie odwrotne polega na znalezieniu wektora parametrów modelu  $\hat{\theta}$ , który minimalizuje w zbiorze  $\Theta_{\text{dop}}$  kryterium

$$\mathfrak{J}(\theta) = \frac{1}{2} \|\Phi_s(\theta) - z\|_Z^2 \quad (12)$$

będące miarą niedopasowania pomiędzy wynikami obserwacji rzeczywistego procesu i analitycznie wyznaczoną odpowiedzią modelu.

Chcąc otrzymać możliwie najdokładniejszą ocenę prawdziwego wektora parametrów  $\theta^*$ , należy zagwarantować możliwie największą wrażliwość wyjść na zmiany  $\theta$  poprzez właściwy dobór trajektorii czujników. W rozważanym przypadku można ten cel osiągnąć maksymalizując poniższe kryterium zaproponowane w pracy [13] w przypadku ogólnego nieliniowego zagadnienia odwrotnego:

$$\mathcal{J}(s) = \min_{\substack{\delta\theta \in \Theta \\ \delta\theta \neq 0}} \frac{\|\Phi'_s(\bar{\theta})\delta\theta\|_Z^2}{\|\delta\theta\|_{\Theta}^2}, \quad (13)$$

gdzie:  $\Phi'_s(\bar{\theta})$  — pochodna w sensie Frecheta operatora  $\Phi_s, \bar{\theta}$  — wartość odniesienia wektora parametrów (tę rolę może pełnić np. wartość znamionowa lub wstępna ocena wektora  $\theta^*$ ).

Można pokazać [4], że kryterium (13) przekształca się do postaci

$$\mathcal{J}(s) = \lambda_{\min}[M(s; \bar{\theta})], \quad (14)$$

gdzie:

$$M(s; \bar{\theta}) = \sum_{j=1}^N \int_0^{t_j} g(x^j(t), t) g^T(x^j(t), t) dt, \quad (15)$$

$$g(x, t) = \left( \frac{\partial \hat{y}(x, t; \bar{\theta})}{\partial \theta} \right)^T \quad (16)$$

oznacza wektor tzw. *współczynników wrażliwości*,  $\lambda_{\min}[M(s; \bar{\theta})]$  — najmniejsza wartość własna macierzy  $M(s; \bar{\theta})$ . Okazuje się, że wyrażenie (15) pokrywa się z definicją tzw. Informacyjnej Macierzy Fishera (IMF) [15, 6, 16], używanej do planowania trajektorii czujników z zastosowaniem podejścia wykorzystującego metody klasycznego planowania eksperymentu [10, 11, 12, 2], w którym zakłada się, że zakłócenia pomiarowe  $\varepsilon$  są w postaci gaussowskiego szumu białego. Jak wiadomo [9], odwrotność IMF stanowi przybliżenie macierzy kowariancji estymowanych parametrów. Wskaźnik jakości (14) jest znany w klasycznej teorii planowania eksperymentu jako kryterium E-ptymalności.

### 3. PLANOWANIE TRAJEKTORII JAKO PROBLEM STEROWANIA OPTYMALNEGO

#### 3.1. Regularyzacja kryterium jakości

Zauważmy, że kryterium (14) nie jest różniczkowalne w sytuacji gdy najmniejsza wartość własna jest wielokrotna (istnieją wówczas tylko pochodne kierunkowe, które są na dodatek silnie nieliniowe [17]). Ta niedogodność wyklucza bezpośrednią maksymalizację z zastosowaniem metod gradientowych. Aby ją usunąć, można wykorzystać następujące podejście [4]: Maksymalizacja  $\lambda_{\min}[M(s)]$  jest równoważna minimalizacji  $\lambda_{\max}[-M(s)]$ , a to ostatnie kryterium można przybliżyć globalnie zadaną dokładnością gładkim przybliżeniem wypukłym [18, s. 248]

$$\Psi_E^\varepsilon[M(s)] = \varepsilon \ln \left( \sum_{i=1}^m e^{-\lambda_i[M(s)]/\varepsilon} \right), \quad (17)$$

gdzie:  $\lambda_i[\cdot]$  —  $i$ -ta wartość własna swego argumentu macierzowego, a  $0 < \varepsilon \ll 1$  — ustalony parametr sterujący dokładnością aproksymacji.

Zachodzi mianowicie zależność

$$0 \leq \Psi_E^\varepsilon[M(s)] - \lambda_{\max}[-M(s)] \leq \varepsilon \ln(m). \quad (18)$$

#### 3.2. Model i ograniczenia ruchu czujników

Dalej przyjmuje się, że ruch czujników opisuje równanie

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = f(s(t), u(t)) & \text{p. w. w } T, \\ s(0) = s_0, \end{cases} \quad (19)$$

gdzie:  $f: \mathbb{R}^{n+r} \rightarrow \mathbb{R}^n$  — zadana funkcja klasy  $C^1$  ( $n = \dim s(t) = 2N$ ),  $s_0 \in \mathbb{R}^n$  — konfiguracja początkowa położen czujników,  $u: T \rightarrow \mathbb{R}^r$  — mierzalne sterowanie spełniające ograniczenia

$$u_l \leq u(t) \leq u_u \quad \text{p.w. w } T \quad (20)$$

dla ustalonych  $u_l, u_u \in \mathbb{R}^r$ . Dla zadanych  $s_0$  oraz  $u(\cdot)$ , istnieje jednoznaczna absolutnie ciągła trajektoria  $s: T \rightarrow \mathbb{R}^n$  spełniająca (19) p.w. w  $T$ .

Do sformułowania zagadnienia planowania trajektorii należy dodatkowo włączyć nierównościowe ograniczenia na stan, wyrażające np. wymaganie zachowania odległości między czujnikami, które będą gwarantowały niezależność pomiarów, oraz konieczność pozostawania w obszarze  $\Omega_{\text{dop}}$ , w którym wykonywanie pomiarów jest dozwolone. Z tego powodu wprowadźmy odpowiednie ograniczenia postaci

$$\gamma_\ell(s(t)) \leq 0, \quad \forall t \in T \quad (21)$$

dla  $\ell \in \bar{\nu} = \{1, \dots, \nu\}$ , przy czym funkcje  $\gamma_\ell(\cdot)$  są klasy  $C^1$ , a  $\nu$  jest zadaną liczbą naturalną.

#### 3.3. Problem sterowania optymalnego

Rozważany problem określania optymalnych trajektorii czujników można sformułować następująco: znaleźć

$$\min_{(s_0, u) \in \mathcal{P}} J(s_0, u) \quad (22)$$

przy spełnieniu (19) oraz ograniczenia nierównościowego

$$h(s_0, u) \leq 0, \quad (23)$$

gdzie:

$$J(s_0, u) = \Psi_E^\varepsilon[M(s)], \quad (24)$$

$$\mathcal{P} = \{(s_0, u) \mid s_0 \in \bar{\Omega}^N, \\ u: T \rightarrow \mathbb{R}^r \text{ jest mierzalna,} \quad (25)$$

$$u_l \leq u(t) \leq u_u \text{ p.w. w } T\},$$

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega, \quad h(s_0, u) = \max_{(\ell, t) \in \bar{\nu} \times T} \{\gamma_\ell(s(t))\}. \quad (26)$$

#### 4. SFORMUŁOWANIE ORYGINALNEGO ZADANIA W POSTACI MAYERA

Sformułowany problem sterowania optymalnego jest silnie nieliniowy i, w ogólności, nie jest możliwym określenie jego rozwiązania analitycznie. W konsekwencji, jedyną alternatywą jest poszukiwanie rozwiązań numerycznych. Poniżej pokazuje się jak rozważany problem sformułować w postaci kanonicznej, która jest akceptowalna przez dostępne pakiety obliczeniowe przeznaczone do rozwiązywania zadań optymalnego sterowania.

W celu uproszczenia notacji, rozważmy funkcję  $\text{svec}: \text{Sym}(m) \rightarrow \mathbb{R}^{m(m+1)/2}$ , gdzie:  $\text{Sym}(m)$  — zbiór macierzy symetrycznych w  $\mathbb{R}^{m \times m}$ , która przedstawia elementy dolnego trójkąta (elementy na diagonalu i poniżej

diagonali) macierzy symetrycznej  $A$  w postaci wektora kolumnowego  $a$ :

$$\begin{aligned} a &= \text{svec}(A) \\ &= \text{col}[A_{11}, A_{21}, \dots, A_{m1}, A_{22}, A_{32}, \dots, \\ &\quad A_{m2}, \dots, A_{mm}]. \end{aligned} \quad (27)$$

Podobnie, niech  $A = \text{Smat}(a)$  oznacza macierz symetryczną spełniającą  $\text{svec}(\text{Smat}(a)) = a$  dla dowolnego  $a \in \mathbb{R}^{m(m+1)/2}$ .

Wprowadźmy funkcję macierzową

$$\Pi(s(t), t) = \sum_{j=1}^N g(x^j(t), t)g^T(x^j(t), t). \quad (28)$$

Definiując  $r : T \rightarrow \mathbb{R}^{m(m+1)/2}$  jako rozwiązanie układu równań różniczkowych

$$\frac{dr}{dt}(t) = \text{svec}(\Pi(s(t), t)), \quad r(0) = 0, \quad (29)$$

otrzymujemy

$$M(s) = \text{Smat}(r(t_f)), \quad (30)$$

tzn. minimalizacja  $\Psi_E^e[M(s)]$  sprowadza się w ten sposób do minimalizacji funkcji określonej na końcowej wartości rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego (29).

Definiując rozszerzony wektor stanu

$$q(t) = \begin{bmatrix} s(t) \\ r(t) \end{bmatrix}, \quad (31)$$

otrzymujemy

$$q_0 = q(0) = \begin{bmatrix} s_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Rozważany problem sterowania optymalnego (22), (23) można wówczas równoważnie sformułować jako zadanie określenia pary  $(q_0, u) \in \bar{\mathcal{P}}$ , która minimalizuje kryterium

$$\bar{\mathcal{J}}(q_0, u) = \phi(q(t_f)) \quad (33)$$

przy ograniczeniach

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt}(t) = \varphi(q(t), u(t)), \\ q(0) = q_0, \\ \bar{\gamma}_\ell(q(t)) \leq 0, \quad \forall t \in T, \end{cases} \quad (34)$$

gdzie:

$$\bar{\mathcal{P}} = \{(q_0, u) \mid (q_{0,1}, \dots, q_{0,n}, u) \in \mathcal{P}, \\ (q_{0,n+1}, \dots, q_{0,n+m(m+1)/2}) = 0\}, \quad (35)$$

oraz

$$\varphi(q, u) = \begin{bmatrix} f(s(t), u(t)) \\ \text{svec}(\Pi(s(t), t)) \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$\phi(q(t)) = \Psi_E^e[\text{Smat}(r(t))], \quad (37)$$

$$\bar{\gamma}_\ell(q(t)) = \gamma_\ell(s(t)). \quad (38)$$

Problem przeformułowany w opisany sposób może być rozwiązywany z zastosowaniem istniejących pakietów numerycznych specjalizowanych dla zadań optymalizacji dynamicznej, np. RIOTS\_95[19], DIRCOL [20] lub MISER [21]. W niniejszej pracy wykorzystano pierwszy z nich, tzn. RIOTS\_95, który jest zaprojektowany jako przyborek programu MATLAB, napisany w przeważającej części w języku C i dostępny w wersjach dla systemów Windows 98/2000/XP oraz Linux.

RIOTS\_95 oferuje interaktywne środowisko do rozwiązywania szerokiej klasy problemów optymalnego sterowania. Co więcej, dzięki jednej z opcji, zadania można definiować w postaci M-plików, co zwalnia użytkowników z konieczności programowania w języku C (kodowanie problemów w postaci procedur tego języka zazwyczaj istotnie jednak przyspiesza obliczenia). Zaimplementowane algorytmy numeryczne opierają się na teorii przedstawionej w monografii [18], wykorzystującej podejście spójnych aproksymacji. Równania dynamiki mogą być całkowane metodami ze stałym lub zmiennym krokiem. Oprogramowanie automatycznie wyznacza wymagane gradienty ze względu na sterowania i swobodne warunki początkowe. Sterowania reprezentuje się w postaci funkcji sklepanych, co pozwala na dużą dokładność aproksymacji bez konieczności stosowania dużej liczby współczynników parametryzacji. Środowisko udostępnia trzy główne procedury optymalizacyjne, każda specjalizowana dla innego poziomu ogólności, a najbardziej ogólna z nich opiera się na metodzie sekwencyjnego programowania kwadratowego (tę właśnie metodę wykorzystano w badaniach symulacyjnych opisanych dalej).

## 5. WYNIKI SYMULACJI

W celu zilustrowania proponowanego podejścia rozważmy dwuwymiarowy proces przewodnictwa ciepła opisany równaniem

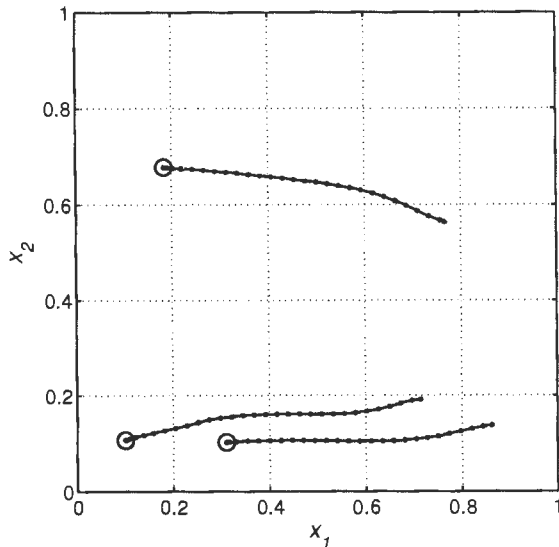
$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \kappa(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x_1} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \kappa(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x_2} \right) \\ &+ 20 \exp(-50(x_1 - t)^2) \end{aligned} \quad (39)$$

określonym w  $\bar{\Omega} \times T = [0, 1]^3$ , z zerowymi warunkami początkowymi i brzegowymi, przy czym

$$\begin{aligned} \kappa(x) &= \theta_1 + \theta_2 x_1 + \theta_3 x_2, \\ \bar{\theta}_1 &= 0.1, \quad \bar{\theta}_2 = -0.05, \quad \bar{\theta}_3 = 0.2, \end{aligned}$$

Wartości  $\bar{\theta}_1$ ,  $\bar{\theta}_2$  and  $\bar{\theta}_3$  traktuje się jako nominalne i znane eksperymentatorowi przed wykonaniem eksperymentu. Zauważmy, że wymuszenie w (39) imituje źródło ciepła o nośniku w postaci odcinka jednostkowego równoległego do osi  $x_2$  i przesuwającego się ze stałą prędkością w kierunku rosnących wartości  $x_1$ . Celem jest zaplanowanie trajektorii trzech czujników w taki sposób, aby możliwie najdokładniej odtworzyć rzeczywiste wartości parametrów  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  i  $\theta_3$ .





Rys. 1. Optymalne trajektorie czujników.

Ponieważ dynamika ruchu czujników nie odgrywa w tym przypadku większej roli, przyjęto jej najprostsz model postaci

$$\dot{s}(t) = u(t), \quad s(0) = s_0,$$

tnz. steruje się bezpośrednio prędkościami, na które narzuca się ograniczenia

$$|u_i(t)| \leq 0.7, \quad \forall t \in T, \quad i = 1, \dots, 6$$

Rysunek 1 przedstawia optymalne trajektorie otrzymane po przyjęciu  $\varepsilon = 0.01$  w kryterium (17) i wykonaniu serii prób dla różnych przybliżeń początkowych rozwiązania (w celu uniknięcia otrzymania jedynie minimum lokalnego). Kropki oznaczają kolejne położenia czujników, odpowiadające jednakowo oddalonym chwilom czasu (zobrazowano w ten sposób dynamikę ruchu czujników). Dodatkowo, położenia początkowe oznaczono okręgami. Jak można się było spodziewać, czujniki śledzą przemieszczające się źródło ciepła.

## 6. UWAGI KOŃCOWE

W pracy pokazano, że trudności napotymane podczas planowania E-optymalnego mogą być w dużej mierze ominięte poprzez przybliżenie oryginalnego kryterium nieróżniczkowalnego pewną gładką funkcją wypukłą. Dokładność aproksymacji ustala się poprzez dobór wartości parametru skalarnego. Wykorzystanie tego podejścia przedstawiono na bazie problemu planowania optymalnych trajektorii ruchomych czujników pomiarowych, który sformułowano jako pewien problem optymalnego sterowania w postaci Mayera (w ogólnym przypadku z ograniczeniami na zmienne fazowe). Otrzymany problem rozwiązano numerycznie w środowisku MATLAB zastosowaniem przybownika RIOTS\_95.

## MEASUREMENT STRATEGY DESIGN IN NONLINEAR INVERSE PROBLEMS USING NONSMOOTH OPTIMALITY CRITERIA

**Abstract:** The problem of optimal sensor trajectory planning to estimate unknown parameters of distributed systems is discussed from a deterministic point of view. The lowest eigenvalue of the linearized nonlinear mapping from the parameter space to the output space is maximized. This approach is equivalent to minimization of the E-optimality criterion which is commonly used when planning optimal experiments based on the concept of the Fisher Information Matrix. The criterion is regularized and minimized with respect to both sensor velocities and their initial states. The problem is formulated as a state-constrained optimal control one and its solution is obtained using RIOTS\_95, a MATLAB toolbox for solving optimal-control problems. A numerical example illustrates the effectiveness of the proposed approach.

## Literatura

- [1] C. S. Kubrusly and H. Malebranche, "Sensors and controllers location in distributed systems — A survey," *Automatica*, vol. 21, no. 2, pp. 117–128, 1985.
- [2] D. Uciński, *Measurement Optimization for Parameter Estimation in Distributed Systems*. Zielona Góra: Technical University Press, 1999.
- [3] —, "Optimal selection of measurement locations for parameter estimation in distributed processes," *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 10, no. 2, pp. 357–379, 2000.
- [4] —, *Optimal Measurement Methods for Distributed-Parameter System Identification*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2005.
- [5] N. de Nevers, *Air Pollution Control Engineering*, 2nd ed. Boston: McGraw Hill, 2000.
- [6] E. Rafajłowicz, "Optimum choice of moving sensor trajectories for distributed parameter system identification," *International Journal of Control*, vol. 43, no. 5, pp. 1441–1451, 1986.
- [7] A. C. Atkinson and A. N. Donev, *Optimum Experimental Designs*. Oxford: Clarendon Press, 1992.
- [8] V. V. Fedorov and P. Hackl, *Model-Oriented Design of Experiments*, ser. Lecture Notes in Statistics. New York: Springer-Verlag, 1997.
- [9] É. Walter and L. Pronzato, *Identification of Parametric Models from Experimental Data*, ser. Communications and Control Engineering. Berlin: Springer-Verlag, 1997.
- [10] D. Uciński, "Optimization of sensors' allocation strategies for parameter estimation in distributed systems," *Systems Analysis — Modelling — Simulation*, vol. 37, pp. 243–260, 2000.

- [11] —, “Optimal sensor location for parameter estimation of distributed processes,” *International Journal of Control*, vol. 73, no. 13, pp. 1235–1248, 2000.
- [12] —, “Sensor motion planning with design criteria in output space,” in mODa 6, *Proc. 6th Int. Workshop on Model-Oriented Data Analysis*, Puchberg/Schneeberg, Austria, 2001, A. C. Atkinson, P. Hackl, and W. Müller, Eds. Heidelberg: Physica-Verlag, 2001, pp. 235–242.
- [13] K. Ito and K. Kunisch, “Maximizing robustness in nonlinear illposed inverse problems,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 33, no. 2, pp. 643–666, 1995.
- [14] H. T. Banks and K. Kunisch, *Estimation Techniques for Distributed Parameter Systems*, ser. Systems & Control: Foundations & Applications. Boston: Birkhäuser, 1989.
- [15] Z. H. Quereshi, T. S. Ng, and G. C. Goodwin, “Optimum experimental design for identification of distributed parameter systems,” *International Journal of Control*, vol. 31, no. 1, pp. 21–29, 1980.
- [16] N.-Z. Sun, *Inverse Problems in Groundwater Modeling*, ser. Theory and Applications of Transport in Porous Media. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [17] E. J. Haug, K. K. Choi, and V. Komkov, *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, ser. Mathematics in Science and Engineering. Orlando, FL: Academic Press, 1986.
- [18] E. Polak, *Optimization. Algorithms and Consistent Approximations*, ser. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer-Verlag, 1997.
- [19] A. L. Schwartz, E. Polak, and Y. Chen, *A Matlab Toolbox for Solving Optimal Control Problems. Version 1.0 for Windows*, May 1997. [Online]. Available: <http://www.schwartz-home.com/~adam/RIOTS/>
- [20] O. von Stryk, *User’s Guide for DIRCOL, a Direct Collocation Method for the Numerical Solution of Optimal Control Problems. Version 2.1*, Fachgebiet Simulation und Systemoptimierung, Technische Universität Darmstadt, Nov. 1999. [Online]. Available: <http://www.sim.informatik.tu-darmstadt.de/index/leftnav.html.en>
- [21] L. S. Jennings, M. E. Fisher, K. L. Teo, and C. J. Goh, *MISER 3: Optimal Control Software, Version 2.0. Theory and User Manual*, Department of Mathematics, University of Western Australia, Nedlands, 2002. [Online]. Available: <http://www.cado.uwa.edu.au/miser/>



Instytut Badań Systemowych  
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-01-4