POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

KOMPUTEROWE WSPOMAGANIE ZARZĄDZANIA I PROCESÓW DECYZYJNYCH W GOSPODARCE

pod redakcją:
Jana Studzińskiego
Ludosława Drelichowskiego
Olgierda Hryniewicza

KOMPUTEROWE WSPOMAGANIE ZARZĄDZANIA
I PROCESÓW DECYZYJNYCH W GOSPODARCE

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 31

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2002

KOMPUTEROWE WSPOMAGANIE ZARZĄDZANIA I PROCESÓW DECYZYJNYCH W GOSPODARCE

pod redakcją
Jana Studzińskiego, Ludosława Drelichowskiego
i Olgierda Hryniewicza

Książka zawiera wybór artykułów poświęconych omówieniu aktualnego stanu badań w kraju w zakresie rozwoju i zastosowań technologii, modeli i systemów informatycznych w gospodarce narodowej.

Recenzenci artykułów:

Prof. dr hab. inż. Olgierd Hryniewicz
Prof. dr hab. inż. Janusz Kacprzyk
Dr inż. Lech Kruś
Dr inż. Edward Michalewski
Prof. dr hab. inż. Andrzej Straszak
Dr inż. Jan Studzinski
Dr inż. Sławomir Zadrożny

Wydawca: Instytut Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6 01-447 Warszawa

Redakcja: Dział Informacji Naukowej i Wydawnictw IBS PAN
tel. 837-68-22
Barbara Kotuszewska

Druk: Zakład Poligraficzny Urzędu Statystycznego w Bydgoszczy
Nakład 200 egz. ark. wyd. 23,5 ark. druk. 20,0

ISBN 83-85847-73-1
ISSN 0208-8028

Rozdział 3

Metody i algorytmy obliczeniowe w systemach wspomagania decyzji

ALGORYTM HEURYSTYCZNY WYZNACZANIA OCENY GRUPOWEJ WYKORZYSTUJĄCY MEDIANĘ KEMENY'EGO

Hanna Bury, Dariusz Wagner
Instytut Badań Systemowych PAN
<bury@ibspan.waw.pl>

HEURISTIC ALGORITHM FOR DETERMINING GROUP OPINION WITH THE USE OF KEMENY'S MEDIAN

Some problems of determining group opinion when experts' judgements are given in the form of preference orders are discussed. The topic of interest is Kemeny's rule because of its important properties; it is the unique preference function that is neutral, consistent and Condorcet and it does not exhibit pathological behaviour typical for other methods. Basic notions related to the method are given. Practical applications of Kemeny's median algorithm have been limited due to computing difficulties. Therefore heuristic algorithms for computing a median are of interest. One of them is presented in the paper. Numerical examples illustrating the application of the algorithm are given.

Key words: group decision support systems, experts' judgements, preference orders

1. Wstęp

Załóżmy, że jest dane n obiektów $O_1, \ldots, O_n$. Zadaniem K ekspertów jest uporządkowanie tych obiektów zgodnie z przyjętym kryterium lub zbiorem kryteriów. Uporządkowanie podane przez eksperta o numerze k oznaczymy jako $P^k = (O_{i_1}, \ldots, O_{i_n})$. Dla danego uporządkowania P^k możemy utworzyć macierz porównań parami A^k

$$A^k = \begin{bmatrix} a_{11}^k, & \ldots, & a_{1n}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^k, & \ldots, & a_{nn}^k \end{bmatrix}, \qquad \text{gdzie } a_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli} \quad O_i \succ O_j \\ 0 & \text{jeżeli} \quad O_i \approx O_j \\ -1 & \text{jeżeli} \quad O_i \prec O_j \end{cases} \tag{1}$$

$O_i \succ O_j$ oznacza, że w uporządkowaniu P^k obiekt O_i poprzedza obiekt O_j,

$O_i \approx O_j$ oznacza, że w uporządkowaniu P^k obiekty O_i oraz O_j traktowane są jako równoważne, $O_i \prec O_j$ oznacza, że w uporządkowaniu P^k obiekt O_j poprzedza obiekt O_i.

Definicja 1 (Litvak N.G. (1982)). Załóżmy, że są dane dwa uporządkowania P^{l_1} oraz P^{l_2}. Odległość między tymi uporządkowaniami definiujemy, jak następuje

$$d(P^{l_1}, P^{l_2}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}^{l_1} - a_{ij}^{l_2}\right| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} \tag{2}$$

Można udowodnić (Litvak, 1982), że tak zdefiniowana odległość spełnia wszystkie aksjomaty określające w sposób jednoznaczny miarę "bliskości" uporządkowań.

Definicja 2 (Litvak N.G. (1982)). Załóżmy, że dany jest zbiór uporządkowań $\{P^{(k)}\}=\{P^1,...,P^K\}$. Odległość danego uporządkowania P od zbioru $\{P^{(k)}\}$ jest definiowana następująco:

$$d\left(P, P^{(k)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{K}\left|a_{ij}^{k} - a_{ij}^{P}\right| \tag{3}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\left|a_{ij}^{k} - a_{ij}^{P}\right| + \left|a_{ji}^{k} - a_{ji}^{P}\right| = 2\left|a_{ij}^{k} - a_{ij}^{P}\right| = 2\left|a_{ji}^{k} - a_{ji}^{P}\right| \qquad i, j = 1, ..., n \tag{4}$$

mamy (Litvak N.G. (1982))

$$d\left(P, P^{(k)}\right) = \sum_{\substack{i \\ (i,j)\in I_P^{(1)}}}\sum_{j}\sum_{k=1}^{K} d_{ij}^{k} \tag{5}$$

I_P^1 jest to zbiór indeksów (i, j), dla których w uporządkowaniu P zachodzi zależność $O_i \succ O_j$. Innymi słowy jest to zbiór indeksów (i, j), dla których $a_{ij}^{P} = 1$.

Załóżmy, że w danym uporządkowaniu P zachodzi $O_i \succ O_j$. Aby ułatwić określenie odległości uporządkowania P od zbioru $\{P^{(k)}\}$, wprowadzimy pojęcie współczynnika strat.

Definicja 3 (Litvak N.G. (1982)). Współczynnik strat jest określony, jak następuje

$$r_{ij} \underset{a_{ij}^{P}=1}{=} \sum_{k=1}^{K} d_{ij}\left(P, P^{(k)}\right) \underset{a_{ij}^{P}=1}{=} \sum_{k=1}^{K}\left|a_{ij}^{k} - a_{ij}^{P}\right| \underset{a_{ij}^{P}=1}{=} \sum_{k=1}^{K}\left|a_{ij}^{k} - 1\right| \qquad i, j = 1, ..., n \tag{6}$$

Łatwo udowodnić, że $r_{ij} + r_{ji} = 2K$. (7)

Zakłada się, że $r_{ij} = 0$ dla wszystkich i = j; jest oczywiste, że współczynniki strat zależą jedynie od postaci uporządkowań P^k, k = 1, ..., K. Macierz współczynników strat będziemy oznaczać symbolem R. Używając tych współczynników odległość uporządkowania P od zbioru $\{P^{(k)}\}$ można zapisać następująco

$$d\left(P,P^{(k)}\right)=\sum_{i}\sum_{\substack{j\\(i,j)\in I_P^{(1)}}} r_{ij} \tag{8}$$

J. Kemeny (Kemeny J. (1959)) wprowadził następującą definicję:
Definicja 4 (Kemeny J. (1959), Litvak N.G. (1982)). Uporządkowanie P^M takie, że

$$M(P^1,\ldots,P^K)=\arg\min_P d(P,P^{(k)}) \tag{9}$$

nosi nazwę mediany zbioru uporządkowań $\{P^{(k)}\}$.
Udowodniono (Kemeny J. (1959)), że kres dolny H odległości (8) jest równy

$$H=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(r_{ij},r_{ji}) \tag{10}$$

Biorąc pod uwagę zależność (7) łatwo udowodnić, że kres dolny H jest równy sumie współczynników strat mniejszych lub równych K znajdujących się powyżej lub poniżej przekątnej macierzy R. Jeżeli $r_{ij} = r_{ji}$, to w sumie (10) współczynnik ten występuje tylko raz. Oczywiście, jeżeli dla danego P odległość (8) jest równa H, to uporządkowanie P jest medianą. Słuszny jest zatem następujący wniosek:

Jeżeli uporządkujemy obiekty tak, że w odpowiadającej temu uporządkowaniu macierzy R powyżej przekątnej będą wyłącznie elementy mniejsze lub równe K, to uporządkowanie to jest medianą.
Ponadto, ze wzoru (8) bezpośrednio wynika, że odległość danego uporządkowania P od zbioru uporządkowań $\{P^{(k)}\}$ jest równa sumie elementów macierzy R odpowiadającej temu uporządkowaniu znajdujących się powyżej przekątnej.
Ze względu na swoje bardzo korzystne własności (Bury H. i in. (1999), Bury H., Wagner D. (2000a), (2000b), Kemeny J. (1959), Litvak N.G. (1982), Saari D.G., Merlin V.R. (2000), Young H.P., Levenglick A. (1978)) mediana Kemeny'ego jest chętnie i często stosowana do wyznaczania oceny grupowej. Jednakże jej zastosowanie ograniczają trudności obliczeniowe. Aby je pokonać, stosuje się algorytmy heurystyczne (Bury H., Wagner D. 2000b). Jeden z nich zostanie opisany poniżej.

1. Zagadnienia ogólne związane z wyznaczaniem mediany Kemeny'ego w przypadku ogólnym

Załóżmy, że mamy n obiektów $O_1,\ldots,O_n$ oraz ich uporządkowania podane przez K ekspertów. Macierz strat R wyznaczona dla tych uporządkowań ma postać

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{1n} & r_{2n} & \cdots & r_{nn}\end{bmatrix} \tag{11}$$

Tworzymy nową macierz $Q=[q_{ij}]$, i, j = 1, ..., n, będącą iloczynem trzech macierzy Q = E R E, (12)

$$\text{gdzie } E=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 0\end{bmatrix}}_{n}\left.\vphantom{\begin{bmatrix}0\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}}\right\}n$$

Elementy macierzy Q są, jak następuje

$$q_{ij}=\sum_{\substack{t=1\\t\neq j}}^{n}\sum_{\substack{s=1\\s\neq i}}^{n} r_{st} \quad i, j = 1, ..., n;\ i \neq j \tag{13}$$

Wyrażenie q_{ij} jest sumą wyrazów r_{st} macierzy R z pominięciem i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.

Przy wyznaczaniu wartości elementów q_{ij} należy uwzględnić zależność (7), bowiem w sumie (13) występują zarówno współczynniki r_{st}, jak i r_{ts}. Liczba takich par w macierzy R jest równa $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$. Wykreślenie kolumny zmniejsza liczbę par o (n-1) a wykreślenie wiersza po uprzednim wykreśleniu kolumny redukuje liczbę par o (n-2). Zatem liczba par (r_{st}, r_{ts}) występujących w wyrażeniu (13) jest równa

$$\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)-(n-2)=\frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$

W wyrażeniu tym oprócz par (r_{st}, r_{ts}) będą występować pojedyncze wyrazy związane z i-tym wierszem i j-tą kolumną. Mamy zatem

$$q_{ij}=\frac{(n-2)(n-3)}{2}\cdot 2K+\sum_{s=1}^{n} r_{js}+\sum_{\substack{t=1\\t\neq j}}^{n} r_{ti} \quad i, j = 1, ..., n \tag{14}$$

W przypadku i=j liczba par zwiększy się o (n-2) ($r_{ii} = r_{jj} = 0$) a zatem

$$q_{ij}=\left[\frac{(n-2)(n-3)}{2}+(n-2)\right]\cdot 2K=\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot 2K \tag{15}$$

Załóżmy, że mamy uporządkowanie $\mathscr{P}$ o postaci O_j, [....], O_i, (16) to znaczy uporządkowanie, w którym pierwszą pozycję zajmuje obiekt O_j a ostatnią O_i. Zapis [....] oznacza dowolne uporządkowanie pozostałych (n-2) obiektów różnych od O_i oraz O_j. Uporządkowań tych jest (n-2)!. Oznaczymy je przez P_{ji}^{α}, gdzie α = 1, ..., (n-2)!.

Uporządkowanie $\mathscr{P}$ można zatem przedstawić w postaci $O_j, P_{ji}^{\alpha}, O_i$ (17)

Przeanalizujemy wyrażenie określające odległość d_{ji}^{α} uporządkowania (17) od zbioru uporządkowań wyznaczających macierz R.

Zgodnie z (8) mamy

$$d_{ji}^{\alpha} = \sum_{s=1}^{n} r_{js} + \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq j}}^{n} r_{ti} + \tilde{d}_{ji}^{\alpha} = \tilde{d}_{ji} + \tilde{d}_{ji}^{\alpha} \quad \alpha = 1, \ldots, (n-2)! \tag{18}$$

gdzie $\tilde{d}_{ji} = \sum_{s=1}^{n} r_{js} + \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq j}}^{n} r_{ti}$ a $\tilde{d}_{ji}^{\alpha}$ - składnik odległości d_{ji}^{α} określony przez uporządkowanie P_{ji}^{α}. Należy zwrócić uwagę, że tylko jeden składnik odległości (18) jest zależny od α.

Mamy zatem

$$\sum_{\alpha=1}^{(n-2)!} d_{ji}^{\alpha} = (n-2)!\tilde{d}_{ji} + \sum_{\alpha=1}^{(n-2)!} \tilde{d}_{ji}^{\alpha} \tag{19}$$

Aby określić $\sum_{\alpha=1}^{(n-2)!} \tilde{d}_{ji}^{\alpha}$ należy zauważyć, że każdemu uporządkowaniu P_{ji}^{α} można przyporządkować uporządkowanie przeciwstawne[1] $\overline{P}_{ji}^{\alpha}$.

We wzorach definiujących odległości d_{ji}^{α} odpowiadające uporządkowaniom przeciwstawnym będą występowały pary (r_{st}, r_{ts}) i liczba tych par wynosi $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$.

Mamy zatem

$$\sum_{\alpha=1}^{(n-2)!} \tilde{d}_{ji}^{\alpha} = \frac{(n-2)!}{2} \cdot \frac{(n-3)(n-2)}{2} \cdot 2K \tag{20}$$

Ze wzorów (19) i (20) wynika, że

$$\tilde{d}_{ji} = \frac{1}{(n-2)!} \sum_{\alpha=1}^{(n-2)!} d_{ji}^{\alpha} - \frac{1}{(n-2)!} \sum_{\alpha=1}^{(n-2)!} \tilde{d}_{ji}^{\alpha} = \frac{1}{(n-2)!} \sum_{\alpha=1}^{(n-2)!} d_{ji}^{\alpha} - \frac{(n-2)(n-3)}{4} \cdot 2K \tag{21}$$

Odległość $\tilde{d}_{ji}$ można więc traktować jako uśrednioną i znormalizowaną (o składnik $\frac{(n-2)(n-3)}{4} \cdot 2K$) odległość charakteryzującą całą klasę uporządkowań $\mathscr{P}$.

Mając wyznaczoną wartość elementu q_{ij}, odległość $\tilde{d}_{ji}^{\alpha}$ wyznaczamy korzystając ze wzoru (14)

[1] Uporządkowaniem przeciwstawnym do uporządkowania $P = (O_1, \ldots, O_n)$ nazywamy uporządkowanie $\overline{P} = (O_n, \ldots, O_1)$. Łatwo wykazać, że

$$d(P, P^{(k)}) + d(\overline{P}, P^{(k)}) = \left[\frac{(n-1)+1}{2} \cdot (n-1)\right] \cdot 2K = \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2K$$

$$q_{ij} - \frac{(n-2)(n-3)}{2} \cdot 2K = \sum_{s=1}^{n} r_{js} + \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq j}}^{n} r_{ti} = \tilde{d}_{ji} \tag{22}$$

A zatem element $q_{i_n i_1} = \min_{i,j} q_{ij}$ (i, j = 1, ..., n) wyznacza minimalną wartość odległości $\tilde{d}_{ji}$. Można oczekiwać, że pierwszy i ostatni element mediany będą stanowić odpowiednio O_{i_1} i O_{i_n}. W ten sposób otrzymujemy uporządkowanie $O_{i_1}, [....], O_{i_n}$. Wyznaczając w podobny sposób kolejne elementy uporządkowania możemy oczekiwać, że będą one elementami mediany.

2. Algorytm wyznaczania mediany Kemeny'ego

Dana jest macierz strat R oraz liczba ekspertów K.

Krok 1°

Wyznaczamy macierz

$$Q^{(n)} = E^{(n)} R^{(n)} E^{(n)}, \tag{23}$$

gdzie $E^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, dim E=n×n

$R^{(n)} = R$, dim R=n×n.

Krok 2°

Wyznaczamy najmniejszy element macierzy $Q^{(n)}$ (oznaczymy go jako $q^n_{ji\,min}$) leżący poza przekątną tej macierzy. Następnie wyznaczamy współczynnik

$$v^n = 2K \frac{(n-2)(n-3)}{2} \tag{24}$$

oraz wartość

$$\tilde{d}^n_{ji\,min} = q^n_{ji\,min} - v^n. \tag{25}$$

Obiekty, które wyznaczają wiersz i kolumnę odpowiadającą elementowi $q^n_{ji\,min}$ oznaczymy odpowiednio przez O_{i_n} oraz O_{i_1}.

Krok 3°

Wykreślamy z macierzy $R^{(n)}$ wiersze i kolumny odpowiadające obiektom O_{i_1} oraz O_{i_n}. W wyniku otrzymujemy macierz $R^{(n-2)}$.

Krok 4°

Wyznaczamy macierz $Q^{(n-2)}$

$$Q^{(n-2)} = E^{(n-2)} R^{(n-2)} E^{(n-2)}$$

Krok 5°

Wyznaczamy najmniejszy element macierzy $Q^{(n-2)}$ (oznaczymy go jako $q^{n-2}_{ji\,min}$) leżący poza przekątną tej macierzy. Następnie wyznaczamy współczynnik

$$v^{n-2} = 2K\frac{(n-4)(n-5)}{2}$$

oraz wartość

$$\tilde{d}^{n-2}_{ji\,min} = q^{n-2}_{ji\,min} - v^{n-2}.$$

Obiekty, które wyznaczają wiersz i kolumnę odpowiadającą elementowi $q^{n-2}_{ji\,min}$ oznaczymy odpowiednio przez $O_{i_{n-1}}$ oraz O_{i_2}.

Krok 6°

Wykreślamy z macierzy $R^{(n-2)}$ wiersze i kolumny odpowiadające obiektom O_{i_2} oraz $O_{i_{n-1}}$.

Krok 2 ÷ 4 powtarzamy do momentu, gdy liczba pozostałych obiektów do uporządkowania jest równa 4 – w przypadku, gdy n jest parzyste
3 – w przypadku, gdy n jest nieparzyste.

Jeżeli w którymkolwiek z kroków powstaje niejednoznaczność, to znaczy liczba elementów $q^{n}_{ji\,min}$ jest większa od jedności, wszystkie następne kroki algorytmu należy powtórzyć dla każdego z tych elementów.

Przykład

Załóżmy, że dana jest macierz R (n=6, K=10)

$$R^{(6)} = \begin{bmatrix} 0 & 14 & 18 & 18 & 18 & 16 \\ 6 & 0 & 20 & 18 & 20 & 8 \\ 2 & 0 & 0 & 6 & 10 & 0 \\ 2 & 2 & 14 & 0 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 20 & 20 & 20 & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\text{Mamy } Q^{(6)} = E^{(6)}R^{(6)}E^{(6)} = \begin{bmatrix} 200 & 202 & 152 & 170 & \mathbf{148} & 208 \\ 218 & 200 & 166 & 182 & 162 & 212 \\ 268 & 254 & 200 & 224 & 206 & 258 \\ 250 & 238 & 196 & 200 & 196 & 240 \\ 272 & 258 & 214 & 224 & 200 & 262 \\ 212 & 208 & 162 & 180 & 158 & 200 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Mamy $\min_{i,j} q_{ij}^6 = q_{15}^6 = 148$.

Biorąc pod uwagę , że $v^6 = 20 \cdot \frac{(6-2)(6-3)}{2} = 120$ otrzymujemy

$\min \tilde{d}_{ji}^6 = \tilde{d}_{51}^6 = 28$.

Odległość ta odpowiada uporządkowaniu

$O_5, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, O_1$ (28)

Wykreślamy z macierzy R wiersze i kolumny 1 i 5 odpowiadające obiektom O_1 oraz O_5. Otrzymujemy macierz $R^{(4)}$

$$R^{(4)} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 20 & 18 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 14 & 0 & 0 \\ 12 & 20 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} O_2 \\ O_3 \\ O_4 \\ O_6 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} O_2 & O_3 & O_4 & O_6 \end{array} \end{array} \quad (29$$

$$\text{Mamy teraz } Q^{(4)} = E^{(4)}R^{(4)}E^{(4)} = \begin{bmatrix} 60 & 40 & 48 & 74 \\ 100 & 60 & 76 & 106 \\ 92 & 64 & 60 & 96 \\ 66 & \mathbf{34} & 44 & 60 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Mamy $\min_{i,j} q_{ij}^4 = q_{63}^4 = 34$.

Biorąc pod uwagę , że $v^4 = 20 \cdot \frac{(4-2)(4-3)}{2} = 20$ otrzymujemy

$\min \tilde{d}_{ji}^4 = \tilde{d}_{36}^4 = 14$.

Odległość ta odpowiada uporządkowaniu ..., O_3, ..., ..., O_6, ...

Między obiektami O_3 i O_6 mogą być umieszczone tylko obiekty O_2 i O_4.

Mamy

$r_{24}=18$,

$r_{42}=2$.

Ostateczny porządek obiektów jest więc następujący: O_5, O_3, O_4, O_2, O_6, O_1.

$$R = \begin{array}{c} \\ O_5 \\ O_3 \\ O_4 \\ O_2 \\ O_6 \\ O_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} O_5 & O_3 & O_4 & O_2 & O_6 & O_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 10 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 10 & 0 & 6 & 0 & 0 & 2 \\ 18 & 14 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 20 & 20 & 18 & 0 & 8 & 6 \\ 20 & 20 & 20 & 12 & 0 & 4 \\ 18 & 18 & 18 & 14 & 16 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 14 \\ 8 \\ 4 \\ 14 \\ 4 \\ 0 \end{array} \quad (31)$$

Odległość jest więc równa d = 28+14+2 = 48, co łatwo sprawdzić obliczając odległość na podstawie macierzy R, w której porządek obiektów jest taki, jak wyznaczono.

Uzyskane rozwiązanie stanowi medianę, ponieważ powyżej przekątnej głównej znajdują się tylko $r_{ij} \leq K$, $i, j = 1,..., n$, $i \neq j$. Z macierzy tej wynika również, że elementy O_5, O_3 mogą być zamienione miejscami bez zmiany odległości.

Literatura

Bury H., Petriczek G., Wagner D. (1999) Wyznaczanie oceny grupowej metodą mediany Kemeny'ego. W: *Modelowanie preferencji a ryzyko'99*, T. Trzaskalik (red.). Wydawnictwo Uczelniane AE w Katowicach.

Bury H., Wagner D. (2000a) The use of Kemeny median for group decision making. Integer programming approach. In: *Methods and Models in Automation and Robotics*. Wydawnictwo Uczelniane PS, Szczecin.

Bury H., Wagner D. (2000b) Algorytmy heurystyczne wyznaczania mediany Kemeny'ego. Opracowanie wewnętrzne IBS PAN, Warszawa.

Kemeny J. (1959) Mathematics without numbers, *Daedalus* 88.

Litvak N.G. (1982) *Ekspertnaja informacija. Mietody poluczenija i analiza.* Radio i Swjaz, Moskva.

Saari D.G., Merlin V.R. (2000) A geometric examination of Kemeny's rule. *Social Welfare and Choice*, vol. 17.

Young H.P., Levenglick A. (1978) A consistent extension of Condorcet's election principle. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol.35, No 2.

Załącznik

Algorytm wyznaczania elementów macierzy $\tilde{Q}^{(b)} = R^{(b)}E^{(b)}$ oraz $Q^{(b)} = E^{(b)}R^{(b)}E^{(b)}$ (b=4, ..., n)

Macierz $\tilde{Q}^{(b)} = R^{(b)}E^{(b)}$ jest jak następuje

$$\tilde{Q}^{b}=\begin{bmatrix} 0 & r_{i_1i_2} & \cdots & r_{i_1i_b} \\ \vdots & & & \vdots \\ r_{i_bi_1} & r_{i_bi_2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{z=1}^{b} r_{i_1i_z} & \cdots & \sum_{z=1}^{b} r_{i_1i_z} - r_{i_1i_b} \\ \vdots & & \\ \sum_{z=1}^{b} r_{i_bi_z} - r_{i_bi_1} & \cdots & \sum_{z=1}^{b} r_{i_bi_z} \end{bmatrix} \tag{32}$$

Wprowadzimy oznaczenie

$$w_{i_a}^{b} = \sum_{z=1}^{b} r_{i_ai_z} \qquad a = 1, ..., b. \tag{33}$$

Zatem $w_{i_a}^{b}$ jest sumą elementów w wierszu macierzy $R^{(b)}$ odpowiadającym obiektowi O_{i_a}. Elementy macierzy $\tilde{Q}^{(b)}$ wyznaczamy następująco

$$\tilde{q}_{i_ai_a}^{b} = w_{i_a}^{b} \tag{34}$$

$$\tilde{q}_{i_ai_c}^{b} = w_{i_a}^{b} - r_{i_ai_c}. \tag{35}$$

Macierz $Q^{(b)} = E^{(b)}R^{(b)}E^{(b)}$ jest więc równa

$$Q^{(b)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_{i_1}^{b} & \cdots & w_{i_1}^{b} - r_{i_1i_b} \\ \vdots & & \\ w_{i_b}^{b} - r_{i_bi_1} & \cdots & w_{i_b}^{b} \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Elementy tej macierzy mają postać

$$q_{i_ai_a}^{b} = \sum_{z=1}^{b} \tilde{q}_{i_zi_a}^{b} - \tilde{q}_{i_ai_a}^{b} = \sum_{z=1}^{b}\left(w_{i_z}^{b} - r_{i_zi_a}\right) - w_{i_a}^{b} = \sum_{z=1}^{b} w_{i_z}^{b} - \left(k_{i_a}^{b} + w_{i_a}^{b}\right) \tag{37}$$

gdzie $k_{i_a}^{b} = \sum_{z=1}^{b} r_{i_zi_a}$.

Zatem $k_{i_a}^{b}$ jest sumą elementów w kolumnie macierzy $R^{(b)}$ odpowiadającej obiektowi O_{i_a}.

Biorąc pod uwagę wzór (33) oraz fakt, że $r_{i_ai_a} = 0$ mamy

$$k_{i_a}^b + w_{i_a}^b = \sum_{z=1}^{b} r_{i_z i_a} + \sum_{z=1}^{b} r_{i_a i_z} = \sum_{z=1}^{b} \left(r_{i_z i_a} + r_{i_a i_z}\right) = (b-1)\cdot 2K \tag{38}$$

Z kolei wiadomo, że $\sum_{z=1}^{b} w_{i_z}^b = 2K\frac{b(b-1)}{2}$ (39)

czyli

$$q_{i_a i_a}^b = 2K\frac{b(b-1)}{2} - (b-1)\cdot 2K = 2K\frac{(b-1)(b-2)}{2} \qquad i_a = 1, \ldots, b. \tag{40}$$

Mamy również

$$q_{i_a i_c}^b = \sum_{z=1}^{b} \tilde{q}_{i_z i_c}^b - \tilde{q}_{i_a i_c}^b = \sum_{z=1}^{b} w_{i_z}^b - \left(k_{i_c}^b + w_{i_a}^b\right) + r_{i_a i_c} = 2K\frac{b(b-1)}{2} - \left(k_{i_c}^b + w_{i_a}^b\right) + r_{i_a i_c} \tag{41}$$

Załóżmy teraz, że z macierzy $R^{(b)}$ wykreślamy wiersze i kolumny odpowiadające dwóm obiektom O_{i_g} i O_{i_f}. Nowopowstałą macierz oznaczymy jako $R^{(b-2)}$, ponadto wprowadzimy oznaczenia $\tilde{Q}^{(b-2)} = R^{(b-2)}E^{(b-2)}$ oraz $Q^{(b-2)} = E R^{(b-2)} E$.

Mamy

$$q_{i_a i_a}^{(b-2)} = \sum_{y=1}^{b-2} w_{i_y}^{(b-2)} - \left(k_{i_a}^{(b-2)} + w_{i_a}^{(b-2)}\right) \tag{42}$$

Zachodzą następujące zależności

$$w_{i_y}^{(b-2)} = w_{i_y}^b - r_{i_y i_g} - r_{i_y i_f} \tag{43}$$

$$k_{i_a}^{(b-2)} = k_{i_a}^b - r_{i_g i_a} - r_{i_f i_a} \tag{44}$$

Zatem

$$\begin{aligned} q_{i_a i_a}^{(b-2)} &= \sum_{y=1}^{b-2} w_{i_y}^{(b-2)} - \left(k_{i_a}^{(b-2)} + w_{i_a}^{(b-2)}\right) = \\ &\sum_{z=1}^{b} w_{i_z}^b - w_{i_g}^b - w_{i_f}^b - (k_{i_g}^b + k_{i_f}^b) + r_{i_g i_g} + r_{i_f i_g} + r_{i_g i_f} + r_{i_f i_f} + \\ &-(k_{i_a}^b - r_{i_g i_a} + r_{i_f i_a} + w_{i_a}^b - r_{i_a i_g} + r_{i_a i_f}) = \\ &\sum_{z=1}^{b} w_{i_z}^b - (w_{i_g}^b + k_{i_g}^b) - (k_{i_f}^b + w_{i_f}^b) - (w_{i_a}^b + k_{i_a}^b) + \\ &(r_{i_f i_g} + r_{i_g i_f} + r_{i_g i_a} + r_{i_f i_a} + r_{i_a i_g} + r_{i_a i_f}) = \\ &\sum_{z=1}^{b} w_{i_z}^b - (w_{i_g}^b + k_{i_g}^b) - (k_{i_f}^b + w_{i_f}^b) - (w_{i_a}^b + k_{i_a}^b) + 2K\cdot 3 \end{aligned} \tag{45}$$

Można wykazać, że

$$
\begin{aligned}
q_{i_a i_a}^{(b-2)} &= 2K\left[\frac{b(b-1)}{2} - 3(b-1) + 3\right] = \\
&2K\frac{(b-3)(b-4)}{2} = 2K\frac{[(b-2)-1][(b-2)-2]}{2}
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Podobnie

$$
\begin{aligned}
q_{i_a i_c}^{(b-2)} &= \sum_{y=1}^{b-2} w_{i_y}^{(b-2)} - (k_{i_c}^{(b-2)} + w_{i_a}^{(b-2)}) + r_{i_a i_c} = \\
&\sum_{z=1}^{b} w_{i_z}^{b} - (k_{i_c}^{b} + w_{i_a}^{b}) + r_{i_a i_c} - (w_{i_g}^{b} + k_{i_g}^{b}) - (w_{i_f}^{b} + k_{i_f}^{b}) + \\
&(r_{i_f i_g} + r_{i_g i_f} + r_{i_g i_c} + r_{i_f i_c} + r_{i_a i_g} + r_{i_a i_f}) = \\
&q_{i_a i_c}^{b} - 2K(2b-3) + (r_{i_g i_c} + r_{i_f i_c} + r_{i_a i_g} + r_{i_a i_f})
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Stąd

$$
q_{i_a i_c}^{b} - q_{i_a i_c}^{(b-2)} = 2K(2b-3) - (r_{i_g i_c} + r_{i_f i_c} + r_{i_a i_g} + r_{i_a i_f}). \tag{48}
$$

Łatwo wykazać, że z b^2 elementów macierzy $Q^{(b)} = E^{(b)} R^{(b)} E^{(b)}$ należy wyznaczyć tylko $\frac{b(b-1)}{2}$.

Elementy na przekątnej są równe $2K\frac{(b-1)(b-2)}{2}$ a ponadto

$$
\begin{aligned}
q_{i_a i_c}^{b} + q_{i_c i_a}^{b} &= 2\sum_{z=1}^{b} w_{i_z}^{b} - (k_{i_c}^{b} + w_{i_a}^{b}) - (k_{i_a}^{b} + w_{i_c}^{b}) + r_{i_a i_c} + r_{i_c i_a} = \\
&2\sum_{z=1}^{b} w_{i_z}^{b} - 2K(b-1) - 2K(b-1) + 2K = 2\sum_{z=1}^{b} w_{i_z}^{b} - 2K(2b-3)
\end{aligned}
\tag{49}
$$

Zatem, aby określić elementy macierzy $Q^b = ER^bE$ należy wyznaczyć jedynie elementy powyżej lub poniżej przekątnej głównej.
Uwzględniając zależność (49) mamy

$$
q_{i_a i_c}^{b} + q_{i_a i_c}^{b} = 2K \cdot 2\frac{b(b-1)}{2} - 2K(2b-3) = 2K[(b-1)(b-2)+1]. \tag{50}
$$

A zatem mając wyznaczoną macierz $Q^{(n)}$ można wyznaczyć kolejne macierze $Q^{(n-2)}$, ..., Q^4 stosując wzory (41), (47).

ISSN 0208-8028
ISBN 83-85847-73-1

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy
prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: bibliote@ibspan.waw.pl