POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

Mirosław KWIESIELEWICZ

ANALITYCZNY HIERARCHICZNY PROCES DECYZYJNY

Nierozmyte i rozmyte porównania parami

ANALITYCZNY HIERARCHICZNY PROCES DECYZYJNY
Nierozmyte i rozmyte porównania parami

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 29

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2002

Mirosław KWIESIELEWICZ

ANALITYCZNY HIERARCHICZNY PROCES DECYZYJNY

Nierozmyte i rozmyte porównania parami

wyd. nieure - 20n

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. inż. Janusz Kacprzyk
Prof. dr hab. inż. Franciszek Milkiewicz

ISBN 83-85847-69-3
ISSN 0208-8029

4. SZEREGOWANIE CZYNNIKÓW Z WYKORZYSTANIEM METODY PORÓWNYWANIA PARAMI DLA DANYCH ROZMYTYCH

4.1 Wprowadzenie

Niniejszy rozdział dotyczy rozmytego rozwinięcia metody szeregowania czynników. Zakłada się, że oceny mogą być postaci liczb rzeczywistych lub liczb rozmytych. Dokonuje się przeglądu podstawowych metod z tego zakresu oraz proponuje rozwiązanie rozważanego zagadnienia w oparciu o koncepcję rozwiązania jawnego układu równań liniowych z rozmytymi współczynnikami. Zaproponowane podejście pozwala również na uwzględnienie problemu brakujących danych.

W rozdziale drugim analizowano trzy podstawowe metody aproksymacji ocen w metodzie porównywania parami. Jak wynika z przeprowadzonej analizy, jedynie metoda logarytmicznych najmniejszych kwadratów może w sposób bezpośredni być zastosowana do zagadnień z brakującymi danymi. Biorąc jednak pod uwagę fakt istnienia pewnych metod uzupełniania brakujących danych (Carmone i inni 1997) oraz, że mimo wad metody maksymalnej wartości własnej, jest ona szeroko stosowana w praktyce, w niniejszym rozdziale dokonuje się analizy rozmytych rozwinięć obydwu metod.

Rozmyte rozwinięcie metody maksymalnej wartości własnej, jak i logarytmicznych najmniejszych kwadratów, sprowadza się do dokonania rozmycia układu równań liniowych.

W przypadku metody maksymalnej wartości własnej otrzymywany jest układ równań liniowych z macierzą lewych stron i wektorem prawych stron zawierających współczynniki o postaci liczb rozmytych. Poszukuje się natomiast rozmytego wektora rozwiązania. Zagadnienie to jest bardzo trudne do rozwiązania, gdyż układ często nie posiada rozwiązań, albo daje nieprawidłowe wyniki w sensie uporządkowania parametrów otrzymywanych liczb rozmytych. Tej problematyce poświęcone są głównie prace (Buckley 1985, 1990; 1992a, b; Buckley i Qu 1991b).

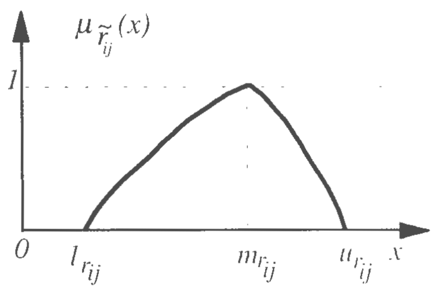
Przy podejściu z zastosowaniem metody logarytmicznych najmniejszych kwadratów mamy do czynienia z układem równań liniowych z ostrą macierzą lewych stron i rozmytym wektorem prawych stron. Z tego też powodu zagadnienie jest łatwiejsze do rozwiązania. Próba rozwiązania po raz pierwszy została podjęta przez van Laarhovena i Pedrycza (1982). Oparli oni swoją metodę na poszukiwaniu niejawnego rozmytego rozwiązania układu równań rozmytych i zasygnalizowali możliwość rozwiązania jawnego (van Laarhoven i Pedrycz 1983). Dalsze prace w tym kierunku były prowadzone przez zespół Lootsmy, a ich wyniki ukazały się m.in. w pracach (Boender i inni 1985, 1989; Lootsma 1985, 1987; Kwiesielewicz 1993a, 1998).

W niniejszym rozdziale dokonuje się jest przeglądu metod opartych na maksymalnej wartości własnej oraz analizy metody opartej o rozmyte rozwiązanie niejawne rozmytego rozwinięcia metody logarytmicznych najmniejszych kwadratów. Wprowadza się również podejście oparte o rozmyte rozwiązanie niejawne tego zagadnienia.

4.2 Rozmyte rozwinięcie metody porównywania parami

Biorąc pod uwagę fakt, że ekspert nie zawsze jest w stanie podać dokładną liczbę z przyjętej skali, w celu określenia zależności pomiędzy parami, metodę porównywania parami można rozwinąć do postaci rozmytej. Wówczas oceny ekspertów będą liczbami rozmytymi, a nie jak dotychczas liczbami rzeczywistymi. Załóżmy zatem, że ekspert nie jest w stanie podać konkretnej liczby ze skali *S*, dotyczącej oceny danej pary, ale może powiedzieć, że jego ocena dotycząca czynników i i j $(i, j = 1, \ldots n)$ należy do przedziału liczbowego $\left[l_{r_{ij}}, u_{r_{ij}}\right]$ oraz ponadto, że zgodnie z jego subiektywną oceną, najbardziej możliwa wartość oceny wynosi $m_{r_{ij}}$. Na tej podstawie można utworzyć rozmytą ocenę $\tilde{r}_{ij}$ z wartością modalną $m_{r_{ij}}$ i nośnikiem $\left[l_{r_{ij}}, u_{r_{ij}}\right]$ przy spełnionym założeniu, że $l_{r_{ij}}, m_{r_{ij}}, u_{r_{ij}} \in S$ (Rys. 4.1):

$$r_{r_{ij}} = \left(l_{r_{ij}}, m_{r_{ij}}, u_{r_{ij}}\right)$$



Rys. 4.1 Przykładowa funkcja przynależności oceny rozmytej

W rozważanym przypadku otrzymamy rozmytą macierz ocen postaci:

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \widetilde{r}_{11} & \widetilde{r}_{12} & \cdots & \widetilde{r}_{1n} \\ \widetilde{r}_{21} & \widetilde{r}_{22} & \cdots & \widetilde{r}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \widetilde{r}_{n1} & \widetilde{r}_{n2} & \cdots & \widetilde{r}_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Wartości modalne elementów macierzy $\widetilde{\mathbf{R}}$ posiadają własność:

$$r_{ij} > 0, \quad r_{ij} = 1/r_{ji} \forall i, j = 1,2,\ldots,n, \tag{4.2}$$

natomiast nośniki własność poniższą:

$$\left[l_{r_{ij}}, u_{r_{ij}}\right] = \left[\frac{1}{u_{r_{ji}}}, \frac{1}{l_{r_{ji}}}\right], \forall i, j = 1,2,\ldots,n. \tag{4.3}$$

Znalezienie uszeregowania rozmytego można sprowadzić do znalezienia macierzy rozmytych ilorazów ocen:

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \widetilde{p}_1/\widetilde{p}_1 & \widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 & \cdots & \widetilde{p}_1/\widetilde{p}_n \\ \widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 & \widetilde{p}_2/\widetilde{p}_2 & \cdots & \widetilde{p}_2/\widetilde{p}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \widetilde{p}_n/\widetilde{p}_1 & \widetilde{p}_n/\widetilde{p}_2 & \cdots & \widetilde{p}_n/\widetilde{p}_n \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

która jest najmniej odległa od macierzy $\widetilde{\mathbf{R}}$ w sensie założonej metryki. Rozmyty wektor uszeregowania rozważanego problemu można oznaczyć jako:

$$\widetilde{\mathbf{p}} = (\widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_n)^T. \tag{4.5}$$

Dokonując normalizacji wektora $\widetilde{\mathbf{p}}$ zgodnie z

$$\widetilde{p}_i^* = \widetilde{p}_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} \widetilde{p}_i, \; i = 1, \ldots, n \tag{4.6}$$

otrzymujemy wektor:

$$\tilde{\mathbf{p}}^* = \left(\tilde{p}^*_1, \ldots, \tilde{p}_n^*\right)^T. \tag{4.7}$$

Załóżmy, że ocen dokonuje grupa ekspertów, przy czym D jest liczbą ekspertów oraz że, w szczególnym przypadku ekspert może odmówić oceny pary lub par obiektów. W efekcie mamy następujące zależności: $k = 0,1,2,\ldots,d_{ij} \le D \ \ \forall i, j = 1,2,\ldots,n$, gdzie d_{ij} oznacza liczbę ocen pary (i,j). W szczególnym przypadku może zachodzić $d_{ij} = 0$.

W rozważanym przypadku wielu ekspertów otrzymujemy macierz ocen $\tilde{\mathbf{R}}_k$ dla k-tego eksperta:

$$\tilde{\mathbf{R}}_k = \begin{pmatrix} \tilde{r}_{11k} & \tilde{r}_{12k} & \cdots & \tilde{r}_{1nk} \\ \tilde{r}_{21k} & \tilde{r}_{22k} & \cdots & \tilde{r}_{2nk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{r}_{n1k} & \tilde{r}_{n2k} & \cdots & \tilde{r}_{nnk} \end{pmatrix}, \ \forall k = 1,2,\ldots,D. \tag{4.8}$$

Macierz $\tilde{\mathbf{R}}$ z ocenami rozmytymi, która w przypadku wielu ekspertów i w przypadku ogólnym, kiedy brakuje ocen dla pewnych par (w szczególności może wystąpić kompletny brak ocen dla pewnych par),

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \tilde{r}_{11,1} & \tilde{r}_{12,1} & \cdots & \tilde{r}_{1n,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{r}_{11,d_{11}} & \tilde{r}_{12,d_{12}} & \cdots & \tilde{r}_{1n,d_{1n}} \\ \\ \tilde{r}_{21,1} & \tilde{r}_{22,1} & \cdots & \tilde{r}_{2n,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{r}_{21,d_{21}} & \tilde{r}_{22,d_{22}} & \cdots & \tilde{r}_{2n,d_{2n}} \\ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \\ \tilde{r}_{n1,1} & \tilde{r}_{n2,1} & \cdots & \tilde{r}_{nn,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{r}_{n1,d_{n1}} & \tilde{r}_{n2,d_{n2}} & \cdots & \tilde{r}_{nn,d_{nn}} \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Przykładowo, macierz $\widetilde{\mathbf{R}}$ może posiadać następującą strukturę:

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} (1,1,1) & \begin{array}{c}\left(\frac{2}{3},1,\frac{3}{2}\right)\\ \left(\frac{2}{3},1,\frac{3}{2}\right)\end{array} & \begin{array}{c}\left(\frac{2}{3},1,\frac{3}{2}\right)\\ \left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\end{array} \\ \begin{array}{c}\left(\frac{2}{3},1,\frac{3}{2}\right)\\ \left(\frac{2}{3},1,\frac{3}{2}\right)\end{array} & (1,1,1) & \begin{array}{c}\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\\ -\end{array} \\ \begin{array}{c}\left(\frac{2}{3},1,\frac{3}{2}\right)\\ \left(\frac{3}{2},2,\frac{5}{2}\right)\end{array} & \begin{array}{c}\left(\frac{3}{2},2,\frac{5}{2}\right)\\ -\end{array} & (1,1,1) \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

W przypadku szczególnym $\widetilde{\mathbf{R}}$ może posiadać puste składowe:

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} (1,1,1) & \left(\frac{2}{3},1,\frac{3}{2}\right) & \begin{array}{c}\left(\frac{2}{3},1,\frac{3}{2}\right)\\ \left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\end{array} \\ \begin{array}{c}\left(\frac{2}{3},1,\frac{3}{2}\right)\\ -\end{array} & (1,1,1) & \begin{array}{c}-\\ -\end{array} \\ \begin{array}{c}\left(\frac{2}{3},1,\frac{3}{2}\right)\\ \left(\frac{3}{2},2,\frac{5}{2}\right)\end{array} & \begin{array}{c}-\\ -\end{array} & (1,1,1) \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

4.3 Rozmyte rozwinięcie metody maksymalnej wartości własnej

Rozmyte rozwinięcie metody maksymalnej wartości własnej po raz pierwszy zostało zaproponowane przez Buckley'a (1985) i stanowi rozmyte rozwinięcie równania (2.15):

$$\widetilde{\mathbf{R}}\widetilde{\mathbf{p}} = \widetilde{\lambda}_{\max}\widetilde{\mathbf{p}}, \tag{4.12}$$

gdzie $\widetilde{\mathbf{R}}$ jest rozmytą macierzą ocen, natomiast $\widetilde{\mathbf{p}}$ i $\widetilde{\lambda}_{\max}$ odpowiadającymi jej, odpowiednio: rozmytym wektorem uszeregowania oraz rozmytą wartością własną.

Przyjmując notację liczby rozmytej w sensie Laarhovena i Pedrycza (1983), układ równań (4.12) można zapisać w postaci trzech układów równań, odpowiednio dla wartości dolnych, modalnych oraz górnych liczby rozmytej:

$$\mathbf{R}_l\mathbf{p}_l = \lambda_{\max,l}\mathbf{p}_l, \tag{4.13}$$

$$\mathbf{R}_m\mathbf{p}_m = \lambda_{\max,m}\mathbf{p}_m, \tag{4.14}$$

$$\mathbf{R}_u\mathbf{p}_u = \lambda_{\max,u}\mathbf{p}_u. \tag{4.15}$$

gdzie macierze $\mathbf{R}_l$, $\mathbf{R}_m$ i $\mathbf{R}_u$ zawierają odpowiednio wartości dolne, modalne i górne ocen rozmytych, wektory $\mathbf{p}_l$, $\mathbf{p}_m$, $\mathbf{p}_u$ są odpowiednio wektorami wartości dolnych, modalnych i górnych rozmytego uszeregowania, natomiast liczby $\lambda_{\max,l}$, $\lambda_{\max,m}$, $\lambda_{\max,u}$ odpowiednio: wartościami dolnymi, modalnymi i górnymi rozmytej wartości własnej $\tilde{\lambda}_{\max}$.

W każdym z równań (4.13)-(4.15) wartości własne są maksymalnymi wartościami własnymi, a wektory własne wektorami znormalizowanymi. Zatem suma ich elementów jest równa zero. Stąd nie może być spełniony warunek uporządkowania parametrów rozmytego rozwiązania (3.43):

$$p_{il} \le p_{im} \le p_{iu}, i = 1,2,\ldots,n. \tag{4.16}$$

Z tego powodu Buckley (1985) zdecydował się na początku na wybór rozmytego rozwinięcia metody średniej geometrycznej (punkt 4.4).

Pierwsza próba rozwiązania zagadnienia (4.12) przedstawiona została w pracy (Buckley 1990) z wykorzystaniem dekompozycji na α-przekroje oraz uogólnionego twierdzenia Perrona-Frobeniusa dla nieujemnych macierzy rozmytych. Pokazano, że przy pewnych założeniach dotyczących macierzy $\tilde{\mathbf{R}} \ge \mathbf{0}$, istnieje rozwiązanie zagadnienia:

$$\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\lambda}\tilde{\mathbf{p}}, \tag{4.17}$$

dla liczby $\tilde{\lambda}$ z trójkątną funkcją przynależności oraz $\tilde{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$.

Kolejne podejście do rozważanego zagadnienia zaproponowano w pracy (Buckley 1992b). Załóżmy, że macierz $\tilde{\mathbf{R}}$ jest macierzą o elementach w postaci liczb rozmytych z trójkątną funkcją przynależności, $\tilde{\mathbf{p}}$ jest wektorem liczb rozmytych, natomiast $\tilde{\lambda}$ jest liczbą rozmytą. Należy rozwiązać zagadnienie (4.17) przy warunku $\tilde{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$.

Zdefiniujmy zbiór Ω za pomocą α-poziomu (Definicja 3.6):

$$\Omega(\alpha) = \{\lambda : \forall \mathbf{p} \neq 0; \mathbf{Rp} = \lambda \mathbf{p}, r_{ij} \in \tilde{r}_{ij}(\alpha)\}, \tag{4.18}$$

dla $0 \leq \alpha \leq 1$. Zbiór Φ stanowi podzbiór rozmyty zbioru liczb rzeczywistych zdefiniowany jako:

$$\mu(\mathbf{p} \mid \Phi) = \sup(\alpha : \mathbf{p} \in \Omega(\alpha)), \tag{4.19}$$

i stanowi wspólne rozwiązanie dla rozmytych wartości własnych.

Aby jednak znaleźć rozwiązania dla poszczególnych wartości własnych, należy przyjąć założenie, że macierz **R** nie jest macierzą osobliwą dla wszystkich $r_{ij} \in \tilde{r}_{ij}(\alpha), 0 \leq \alpha \leq 1$. Warunek ten w ogólnym przypadku jednak nie zachodzi. Rozwiązanie zagadnienia (4.19) w oparciu o koncepcję α-poziomu staje się zagadnieniem bardzo trudnym do rozwiązania (Buckley i Qu 1991).

Znaczne zwiększenie mocy obliczeniowej komputerów spowodowało, że bardzo atrakcyjne stało się wykonywanie obliczeń optymalizacyjnych opartych o algorytmy genetyczne. Buckley i inni (1999, 2001) zaproponowali wykorzystanie tej metodyki do rozwiązania zagadnienia (4.19). Wydaje się ona bardzo atrakcyjna, nie pozwala jednak na analityczne podejście do rozważanego zagadnienia. Poza tym, rozmyte rozwinięcie maksymalnej wartości własnej nie może być w sposób bezpośredni wykorzystane w przypadkach z brakującymi danymi.

4.4 Rozmyte rozwinięcie metody logarytmicznych najmniejszych kwadratów

Rozmyte rozwinięcie metody porównywania parami Saaty'ego zaproponowane przez van Laarhovena i Pedrycza (1983), rozwinięte przez Lootsmę (1985) oraz Boendera i innych (1989), opiera się na koncepcji rozmycia układu równań normalnych (2.61). Zakłada się, że macierz ocen zawiera oceny rozmyte w postaci liczb rozmytych z trójkątną funkcją przynależności, a nie w postaci liczb rzeczywistych. W notacji macierzowej rozmyte rozwinięcie układu (2.64) może być zapisane jako:

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}, \tag{4.20}$$

gdzie macierz **A** lewych stron układu jest postaci (2.66), tak jak dla przypadku ostrego, natomiast wektor prawych stron $\tilde{\mathbf{b}}$ układu jest wektorem o składowych w postaci liczb rozmytych (Rys. 4.1):

$$\tilde{b}_i = \sum_{i \neq j, j=1}^{n} \sum_{k=1}^{d_{ij}} \tilde{y}_{ijk}, \; i = 1,2,\ldots,n, \tag{4.21}$$

przy czym $\tilde{y}_{ijk} = ln(\tilde{r}_{ijk})$, gdzie $\tilde{r}_{ijk}$ są ocenami rozmytymi ($k = 0,1,2,\ldots,d_{ij} \le D$, $\forall i, j = 1,2,\ldots,n$), natomiast d_{ij} jest liczbą ekspertów, którzy dokonali oceny pary (i,j).

W przypadkach szczególnych możemy mieć oceny rozmyte i ostre. Znak równości w układzie równań (4.20) powinien być rozumiany w sensie równości funkcji przynależności liczb rozmytych. Logarytm rozmyty zdefiniowany jest zgodnie z zależnością (3.50). Logarytmując liczbę rozmytą traci się kształt funkcji przynależności. W celu uzyskania dokładniejszych wyników można wykonać dodatkowe obliczenia dla wybranych α-poziomów. Z drugiej jednak strony, biorąc pod uwagę założony sposób określania przez eksperta oceny rozmytej, niedokładność tą można pominąć.

W celu rozwiązania rozmytego układu równań (4.20) stosowane są dwie metody: jedna, oparta na niejawnym (van Laarhoven i Pedrycz 1983) i druga, oparta na jawnym rozmytym rozwiązaniu tego układu (Kwiesielewicz 1995). Rozwiązanie niejawne w przypadku ogólnym nie zawsze jest poprawne w sensie uporządkowania dolnej, modalnej i górnej wartości liczby rozmytej, które nie zawsze jest zachowane, czyli nie zawsze spełniony jest warunek (3.43). Podejście oparte o rozwiązanie jawne stanowi rozwinięcie podejścia zaproponowanego do rozwiązania układu równań z rozmytymi prawymi stronami dla macierzy lewych stron pełnego rzędu (Kwiesielewicz 1995).

Przy wykorzystaniu parametrycznej reprezentacji liczby rozmytej z trójkątną funkcją przynależności w notacji van Laarhovena i Pedrycza (1983) w postaci: wartość dolna, wartość modalna, wartość górna (punkt 3.3.5), rozmyty układ równań normalnych (4.20), po wykorzystaniu podstawowych operacji na liczbach rozmytych z trójkątną funkcją przynależności (3.44)-(3.47), da się sprowadzić do następującego układu równań ostrych (Laarhoven i Pedrycz 1982, 1983):

$$m_i \sum_{i\neq j, j=1}^{n} d_{ij} - \sum_{i\neq j, j=1}^{n} d_{ij} m_j = \sum_{i\neq j, j=1}^{n} \sum_{k=1}^{d_{ij}} m_{ijk}, \tag{4.22}$$

$$l_i \sum_{i\neq j, j=1}^{n} d_{ij} - \sum_{i\neq j, j=1}^{n} d_{ij} u_j = \sum_{i\neq j, j=1}^{n} \sum_{k=1}^{d_{ij}} l_{ijk}, \tag{4.23}$$

$$u_i \sum_{i\neq j, j=1}^{n} d_{ij} - \sum_{i\neq j, j=1}^{n} d_{ij} l_j = \sum_{i\neq j, j=1}^{n} \sum_{k=1}^{d_{ij}} u_{ijk}, \tag{4.24}$$

dla $i = 1,2,\ldots,n,$ gdzie $\tilde{x}_i = (l_i, m_i, u_i)$, $\tilde{y}_{ijk} = (l_{ijk}, m_{ijk}, u_{ijk}) = ln(\tilde{r}_{ijk})$, $i, j = 1,2,\ldots,n$.

Warto zwrócić uwagę, że układ równań (4.22)-(4.24) może zostać zdekomponowany na dwa oddzielne układy równań, a mianowicie na układ równań ostrych (4.22) dla wartości modalnych rozmytych ocen oraz układ równań przedziałowych (4.23)-(4.24) (Moore 1966) dla wartości dolnych i górnych.

Z następującej własności rozmytej macierzy ocen $\tilde{\mathbf{R}}$:

$$\tilde{r}_{ijk} > 0, \quad \tilde{r}_{ijk} = 1/\tilde{r}_{jik} \forall i, j, k \tag{4.25}$$

wynika, że prawe strony układu nierozmytego (4.22), jak i układu przedziałowego (4.23)-(4.24), sumują się do zera (Laarhoven i Pedrycz 1983). Należy podkreślić, że zależność (4.25) spełniona jest dokładnie tylko dla parametrów liczb rozmytych, natomiast nie dla ich kształtu. Oznacza to, że funkcje odniesienia L i R oceny rozmytej (zależności (3.28), (3.40)) będą inne od funkcji odniesienia jej odwrotności (Dubois i Prade 1980). Jak wcześniej przyjęto, biorąc pod uwagę założony sposób określania przez eksperta oceny rozmytej, niedokładność tą można pominąć.

Laarhoven i Pedrycz (1983) zauważają, że zarówno układ równań przedziałowy, jak i układ równań dla wartości modalnych, posiadają jeden lub dwa stopnie swobody. Postulują jednak rozwiązanie układu (4.22)-(4.24) w postaci:

$$\tilde{x}_i = (l_i + k_1, m_i + k_2, u_i + k_1), \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{4.26}$$

gdzie parametry k_1 oraz k_2 mogą być wybrane arbitralnie. Takie podejście powoduje, że po powrocie do funkcji wykładniczych i arytmetycznej normalizacji wyniku, parametry k_1 oraz k_2 ulegają uproszczeniu (Laarhoven i Pedrycz 1983).

Powracając do funkcji wykładniczych otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{p}_i = \exp(\tilde{x}_i) = \left(\exp(l_i + k_1), \exp(m_i + k_2), \exp(u_i + k_1)\right), \\
&i = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

oraz, po normalizacji, zgodnie z (4.6) oraz (3.44) i (3.49):

$$
\begin{aligned}
\tilde{p}_i^* &= \frac{\left(\exp(l_i + k_1), \exp(m_i + k_2), \exp(u_i + k_1)\right)}{\left(\sum_{j=1}^{n} \exp(l_j + k_1), \sum_{j=1}^{n} \exp(m_j + k_2), \sum_{j=1}^{n} \exp(u_j + k_1)\right)} = \\
&= \left(\frac{\exp(l_i + k_1)}{\sum_{j=1}^{n} \exp(u_j + k_1)}, \frac{\exp(m_i + k_2)}{\sum_{j=1}^{n} \exp(m_j + k_2)}, \frac{\exp(u_i + k_1)}{\sum_{j=1}^{n} \exp(l_j + k_1)} \right) = \\
&= \left(\frac{\exp(l_i)}{\sum_{j=1}^{n} \exp(u_j)}, \frac{\exp(m_i)}{\sum_{j=1}^{n} \exp(m_j)}, \frac{\exp(u_i)}{\sum_{j=1}^{n} \exp(l_j)} \right), \quad i = 1,2,\ldots,n,
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

Widać zatem, że założenie rozwiązania w postaci (4.26) oraz dokonanie normalizacji (4.28) powoduje otrzymanie rozwiązania jedynego. Jest to jednak błędne założenie, ponieważ rozważany układ równań przedziałowych posiada często dwa stopnie swobody (Boender i inni 1985; Kwiesielewicz 1998). Zagadnienie istnienia jednego i tylko jednego rozwiązania będzie ponownie podjęte w dalszej części rozprawy.

Układ równań (4.23)-(4.24) czasami daje rozwiązania nieprawidłowe w sensie (3.43), tzn. następujący porządek parametrów liczby rozmytej nie jest zachowany:

$$
l_i + k_1 \le m_i + k_2 \le u_i + k_1,\ i = 1,\ldots,n\,. \tag{4.29}
$$

Innymi słowy, zdarzają się przypadki, że nie da się tak dobrać parametrów k_1 oraz k_2, aby spełniony był warunek (4.29).

Warto podkreślić, że obliczenia praktyczne pokazują, iż po powrocie do funkcji wykładniczych (3.51) oraz dokonaniu normalizacji wyniku zgodnie z (4.6), rozwiązanie końcowe staje się poprawne w sensie warunku uporządkowania (4.29) (Laarhoven i Pedrycz 1983).

Rozmyte rozwinięcie metody porównywania parami, zaproponowane przez Laarhovena i Pedrycza (1983), polega na rozmyciu układu równań normalnych (2.64). Nie przyjmuje się natomiast żadnego kryterium minimalizującego wybraną normę, tak jak jest to w przypadku nierozmytym. Boender i inni (1989) proponują minimalizację funkcji:

$$
\begin{aligned}
I_{\min} = \min_{p_i,\, i=1,\ldots,n} \Big\{ & \sum_{i=1,\, j>i}^{n} \sum_{k=1}^{d_{ij}} \left(\ln\left(r_{ijkl}\right) - \ln\left(p_{il}\right) + \ln\left(p_{ju}\right)\right)^2 + \\
& + \sum_{i=1,\, j>i}^{n} \sum_{k=1}^{d_{ij}} \left(\ln\left(r_{ijkm}\right) - \ln\left(p_{im}\right) + \ln\left(p_{jm}\right)\right)^2 + \\
& + \sum_{i=1,\, j>i}^{n} \sum_{k=1}^{d_{ij}} \left(\ln\left(r_{ijku}\right) - \ln\left(p_{iu}\right) + \ln\left(p_{jl}\right)\right)^2 \Big\},
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

która po przyrównaniu jej gradientu do zera, daje układ równań normalnych (4.22)-(4.24). Rouning i Xiaoyan (1996) wprowadzili odległość liczb rozmytych opartą o sumę α-przekrojów liczb rozmytych, które są przedziałami liczbowymi oraz udowodnili, że w sensie tej metryki zagadnienie aproksymacji rozmytej macierzy ocen (4.9), poprzez rozmytą macierz ilorazów (4.4), sprowadza się do minimalizacji funkcji (4.30).

Znormalizowane rozwiązanie (4.28) układu (4.22)-(4.24) nie stanowi rozwiązanie optymalne problemu (4.30) (Boender i inni 1989). Przyjmując, że rozwiązanie minimalizujące funkcję celu (4.30) jest postaci:

$$
\tilde{p}_i^* = \exp(\tilde{x}_i) = \left(c\exp(l_i), d\exp(m_i), c\exp(u_i)\right), \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{4.31}
$$

gdzie normalizujące współczynniki c oraz d wyrażają się zależnością:

$$
c = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n}\exp(l_j)\sum_{j=1}^{n}\exp(u_j)\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad d = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n}\exp(m_j)\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.32}
$$

otrzymujemy następującą procedurę normalizacji rozwiązania (Boender i inni 1989; Lootsma 1987):

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} p_{il}^{*} \sum_{i=1}^{n} p_{iu}^{*} = \sum_{j=1}^{n} \exp(l_i) \sum_{i=1}^{n} \exp(u_i) = 1,\\&\sum_{i=1}^{n} p_{im}^{*} = \sum_{i=1}^{n} \exp(m_i) = 1\end{aligned} \qquad (4.33)$$

Modyfikacja metody normalizacyjnej wprowadzona w pracy (Boender i inni 1989), może czasami powodować nie spełnienie warunku uporządkowania parametrów liczby rozmytej wyniku (4.29).

Buckley (1985) i Lootsma (1985) proponują dokonanie rozmycia równań stosowanych do obliczeń dla przypadku z danymi ostrymi. Jest to pierwsza próba wprowadzenia tzw. rozwiązania jawnego. Proponowane przez Buckley'a podejście można jedynie zastosować do zagadnień bez brakujących danych, co w rozważanym przypadku sprowadza się do rozmycia formuł obliczeniowych dla jednego lub wielu ekspertów, które dla przypadku ostrego polegają na obliczeniu średniej geometrycznej:

$$\tilde{p}_i = \left(\prod_{j=1}^{n} \tilde{r}_{ij} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad i = 1, \ldots, n \qquad (4.34)$$

dla jednego eksperta oraz

$$\tilde{p}_i = \left(\prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{D} \tilde{r}_{ijk} \right)^{\frac{1}{nD}}, \quad i = 1, \ldots, n \qquad (4.35)$$

dla D ekspertów. Obliczone uszeregowanie normalizowane jest zgodnie z (4.6).

4.5 Rozwiązanie rozmytego rozwinięcia układu równań normalnych z wykorzystaniem uogólnionej pseudoodwrotności

W celu dokonania analizy rozwiązania niejawnego rozmytego rozwinięcia układu równań normalnych (4.20) proponuje się zastosować taką samą metodykę, jak dla odpowiedniego przypadku z danymi ostrymi, a mianowicie opartą o pojęcie uogólnionej pseudoodwrotności.

Przypomnijmy rozmyte rozwinięcie układu równań normalnych:

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}, \tag{4.36}$$

gdzie:

$$\tilde{b}_i = \sum_{j \neq i, j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \tilde{y}_{ijk}, \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{4.37}$$

Macierz **A** posiada taką samą strukturę jak dla przypadku z danymi ostrymi:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1, j\neq 1}^{n} d_{1j} & -d_{12} & \ldots & -d_{1n} \\ -d_{21} & \sum\limits_{j=1, j\neq 2}^{n} d_{2j} & \ldots & -d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -d_{n1} & -d_{n2} & \ldots & \sum\limits_{j=1, j\neq n}^{n} d_{nj} \end{pmatrix}, \tag{4.38}$$

gdzie:

$$d_{ij} \geq 0, \forall i, j, \tag{4.39}$$

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} d_{ij} > 0, \ \forall i. \tag{4.40}$$

Stosując arytmetykę liczb rozmytych w notacji Laarhovena i Pedrycza (1983), otrzymujemy dwa niezależne od siebie liniowe układy równań z rzeczywistymi parametrami, a mianowicie układ równań dla wartości modalnych:

$$\mathbf{Am} = \mathbf{b} \tag{4.41}$$

oraz układ równań przedziałowych

$$\mathbf{Fs} = \mathbf{h}, \tag{4.42}$$

gdzie

$$s = (l_1, l_2, \ldots, l_n, u_1, u_2, \ldots u_n),$$

$$\mathbf{b} = \left(\sum_{j \neq i, j=1}^{n} \sum_{k=1}^{d_{1j}} m_{1jk}, \sum_{j \neq i, j=1}^{n} \sum_{k=1}^{d_{2j}} m_{2jk}, \ldots, \sum_{j \neq i, j=1}^{n} \sum_{k=1}^{d_{nj}} m_{njk} \right),$$

$$\mathbf{h} = \left(\sum_{j \neq i, j=1}^{n} \sum_{k=1}^{d_{1j}} l_{1jk}, \ldots, \sum_{j \neq i, j=1}^{n} \sum_{k=1}^{d_{nj}} l_{njk}, \sum_{j \neq i, j=1}^{n} \sum_{k=1}^{d_{1j}} u_{1jk}, \ldots, \sum_{j \neq i, j=1}^{n} \sum_{k=1}^{d_{nj}} u_{njk} \right)$$

oraz

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N} & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

gdzie **D** jest macierzą utworzoną z elementów diagonalnych macierzy **A**, natomiast macierz **N** jest macierzą utworzoną z elementów pozadiagonalnych macierzy **A**. Wówczas rozwiązania ogólne obydwu układów można, zgodnie z Twierdzeniem 2.5, wyrazić dla wartości modalnych jako:

$$\mathbf{m} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{+}\mathbf{A})\mathbf{y}, \tag{4.43}$$

natomiast dla zagadnienia przedziałowego jako:

$$\mathbf{s} = \mathbf{F}^{+}\mathbf{h} + (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{+}\mathbf{F})\mathbf{z}. \tag{4.44}$$

Rozwiązania układu (4.43) oraz (4.44) istnieją, jeśli spełnione są odpowiednio następujące warunki:

$$\mathbf{AA}^{+}\mathbf{b} = \mathbf{b} \tag{4.45}$$

oraz

$$\mathbf{FF}^{+}\mathbf{h} = \mathbf{h}. \tag{4.46}$$

Wówczas rozmyte rozwiązanie układu (4.36) przyjmie postać:

$$\tilde{x}_i = (l_i, m_i, u_i), \; i = 1,2,\ldots,n. \qquad (4.47)$$

$\mathbf{A}^+$ oraz $\mathbf{F}^+$ są uogólnionymi pseudoodwrotnościami odpowiednio macierzy **A** i **F**. Jeśli macierze **A** oraz **F** są rzędu n-1, to na mocy Twierdzenia 2.7 ogólne rozwiązania układów (4.41), (4.42) istnieją i wyrażają się następującymi zależnościami:

$$\mathbf{m} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} + \mathbf{y}_1 \qquad (4.48)$$

oraz

$$\mathbf{s} = \mathbf{F}^+\mathbf{h} + \mathbf{z}_1, \qquad (4.49)$$

gdzie:

$$\mathbf{y}_1 = (k_2, k_2, \ldots, k_2), \qquad \mathbf{z}_1 = (k_1, k_1, \ldots, k_1),$$

co uzasadnia postać rozwiązania (4.26) intuicyjnie przyjętego przez Laarhovena i Pedrycza (1983). Należy tutaj podkreślić, że nie zachodzi to dla przypadku ogólnego, ponieważ zdarza się, że macierz **F** posiada często więcej niż jeden stopień swobody.

Po powrocie do funkcji wykładniczych otrzymamy następujące rozwiązanie:

$$\tilde{p}_i = (c_1 \exp(l_i), c_2 \exp(l_i), c_1 \exp(u_i)), \quad i = 1,2,\ldots,n, \qquad (4.50)$$

gdzie:

$$c_1 = \exp(k_1), \quad c_2 = \exp(k_2).$$

Następnie normalizując rozwiązanie (4.50) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_i^* &= \left(\frac{c_1 \exp(l_i)}{\sum_{i=1}^n c_1 \exp(u_i)}, \frac{c_2 \exp(m_i)}{\sum_{i=1}^n c_1 \exp(m_i)}, \frac{c_1 \exp(u_i)}{\sum_{i=1}^n c_1 \exp(l_i)} \right) = \\ &= \left(\frac{\exp(l_i)}{\sum_{i=1}^n c_1 \exp(u_i)}, \frac{\exp(m_i)}{\sum_{i=1}^n c_1 \exp(m_i)}, \frac{\exp(u_i)}{\sum_{i=1}^n c_1 \exp(l_i)} \right). \end{aligned} \qquad (4.51)$$

W trakcie normalizacji stałe p_1 oraz p_2 uległy redukcji i w konsekwencji, zamiast rozwiązań ogólnych (4.43) i (4.44), można stosować rozwiązania:

$$\mathbf{m} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b} \tag{4.52}$$

oraz

$$\mathbf{s} = \mathbf{F}^{+}\mathbf{h}. \tag{4.53}$$

Zgodnie z (2.91) parametry liczb rozmytych rozwiązania spełniają wówczas warunki:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = 0, \tag{4.54}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (l_i + u_i) = 0, \tag{4.55}$$

co dla parametrów rozmytego uszeregowania daje:

$$\prod_{i=1}^{n} p_{mi} = 1 \tag{4.56}$$

oraz

$$\prod_{i=1}^{n} p_{li} p_{ui} = 1, \tag{4.57}$$

przy założeniu, że rozmyte uszeregowanie jest postaci:

$$\widetilde{p}_i = (p_{li}, p_{mi}, p_{ui}), \quad i = 1,2,\dots,n. \tag{4.58}$$

Przykład 1

Znajdźmy ogólne rozwiązanie zagadnienia zdefiniowanego za pomocą macierzy porównań (4.10). Otrzymamy układy równań normalnych o następujących parametrach:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -0.6931 \\ -0.6931 \\ 1.3862 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{h} = \begin{pmatrix} -2.1327 \\ -1.7272 \\ 0.4055 \\ 0.8109 \\ 0.4055 \\ 2.2380 \end{pmatrix},$$

przy czym:

rank($\mathbf{A}$)=2, rank ($\mathbf{F}$)=5.

Wówczas:

$$\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{+} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{I} - \mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{F}^{+}\mathbf{F}=\mathbf{F}\mathbf{F}^{+}=\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{I}-\mathbf{F}^{+}\mathbf{F}=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Rozwiązania, z wykorzystaniem zależności (4.52) oraz (4.53) przyjmą postać:

$$\mathbf{A}^{+}\mathbf{b}=\begin{pmatrix} -0.1155 \\ -0.2022 \\ 0.3177 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^{+}\mathbf{h}=\begin{pmatrix} -0.3838 \\ -0.5265 \\ -0.0225 \\ 0.1635 \\ 0.1410 \\ 0.6283 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązania ogólne odpowiednio wyniosą:

$$\mathbf{m}=\begin{pmatrix} -0.1155+k_2 \\ -0.2022+k_2 \\ 0.3177+k_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}=\begin{pmatrix} -0.3838+k_1 \\ -0.5265+k_1 \\ -0.0225+k_1 \\ 0.1635+k_1 \\ 0.1410+k_1 \\ 0.6283+k_1 \end{pmatrix}.$$

gdzie: $k_1 = \sum_{i=1}^{6} z_i, \qquad k_2 = \sum_{i=1}^{3} y_i,.$

Rozmyte rozwiązanie układu równań normalnych przyjmie postać:

$$\tilde{x}_1 = (-0.3838 + k_1, -0.1155 + k_2, 0.1635 + k_1),$$

$$\tilde{x}_2 = (-0.5265 + k_1, -0.2022 + k_2, 0.1410 + k_1),$$

$$\tilde{x}_3 = (-0.0255 + k_1, 0.3177 + k_2, 0.6283 + k_1).$$

Po powrocie do funkcji wykładniczych otrzymamy:

$$\tilde{p}_1 = (0.6812c_1, 0.8009c_2, 1.1777c_1),$$

$$\tilde{p}_2 = (0.9777c_1, 1.3740c_2, 1.8745c_1),$$

$$\tilde{p}_3 = (0.5907c_1, 0.8170c_2, 1.1514c_1).$$

Po normalizacji ostatecznie otrzymamy:

$$p_1^* = (0.1621, 0.2891, 0.5253),$$

$$p_2^* = (0.1405, 0.2651, 0.5118),$$

$$p_3^* = (0.2326, 0.4458, 0.8332).$$

Przykład 2

Znajdźmy ogólne rozwiązanie zagadnienia zdefiniowanego za pomocą macierzy porównań (4.11). Otrzymamy układy równań normalnych o następujących parametrach:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -0.6931 \\ 0.0000 \\ 0.6931 \end{pmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} -1.7272 \\ -0.4055 \\ 0.0000 \\ 0.4055 \\ 0.4055 \\ 1.3218 \end{pmatrix},$$

gdzie:

$$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 2, \quad \operatorname{rank}(\mathbf{F}) = 4.$$

Wówczas:

$$\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{+} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} - \mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}^{+}\mathbf{F} = \mathbf{F}\mathbf{F}^{+} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$
\mathbf{I}-\mathbf{F}^{+}\mathbf{F}=\begin{pmatrix}
\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\
0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0\\
0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0\\
0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0\\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}
\end{pmatrix}.
$$

Rozwiązania z wykorzystaniem zależności (4.52) oraz (4.53), przyjmą odpowiednio postać:

$$
\mathbf{A}^{+}\mathbf{b}=\begin{pmatrix}-0.1155\\-0.1155\\0.2310\end{pmatrix},\quad \mathbf{F}^{+}\mathbf{h}=\begin{pmatrix}-0.3554\\-07109\\-01352\\-0.1352\\0.4906\\0.5757\end{pmatrix}.
$$

Rozwiązania ogólne odpowiednio wyniosą:

$$
\mathbf{m}=\begin{pmatrix}-0.1155+k_2\\-0.1155+k_2\\0.2310+k_2\end{pmatrix},\quad \mathbf{s}=\begin{pmatrix}-0.3554+k_1\\-07109+k_3\\-01352+k_3\\-0.1352+k_3\\0.4906+k_1\\0.5757+k_1\end{pmatrix},
$$

gdzie

$$
k_1=z_1+z_5+z_6,\quad k_2=\sum_{i=1}^{3}y_i,\quad k_3=z_2+z_3+z_4\,.
$$

Rozmyte rozwiązanie układu równań normalnych przyjmie postać:

$$\tilde{x}_1 = (-0.3554 + k_1, -0.1155 + k_2, 0.1352 + k_3),$$

$$\tilde{x}_2 = (-0.7109 + k_3, -0.1155 + k_2, 0.4906 + k_1),$$

$$\tilde{x}_3 = (-0.1352 + k_3, 0.2310 + k_2, 0.5757 + k_1).$$

Po powrocie do funkcji wykładniczych otrzymamy:

$$\tilde{p}_1 = (0.7009c_1, 0.8009c_2, 1.4447c_3),$$

$$\tilde{p}_2 = (0.8736c_3, 1.2599c_2, 1.7784c_1),$$

$$\tilde{p}_3 = (0.4912c_3, 0.8909c_2, 1.6333c_1).$$

Ostatecznie, po normalizacji, rozmyty wektor uszeregowania ma składowe:

$$p_1^* = \left(\frac{0.79009c_1}{1.4447c_3 + 3.4117c_1}, 0.2929, \frac{1.4447c_3}{0.79009c_1 + 1.3648c_3} \right),$$

$$p_2^* = \left(\frac{0.4913c_3}{1.4447c_3 + 3.4117c_1}, 0.2929, \frac{1.6333c_1}{0.79009c_1 + 1.3648c_3} \right),$$

$$p_3^* = \left(\frac{0.8736c_3}{1.4447c_3 + 3.4117c_1}, 0.4142, \frac{1.7784c_1}{0.79009c_1 + 1.3648c_3} \right).$$

Widać, że dla tego przykładu rozwiązanie nie jest jedyne, ponieważ zależy od parametrów c_1 i c_3.

4.6 Rozwiązanie jawne rozmytego rozwinięcia układu równań normalnych

W celu uniknięcia problemu nieprawidłowego uporządkowania parametrów wynikowych liczb rozmytych uszeregowania, wprowadzono jawne podejście do rozwiązania rozważanego zagadnienia. Opiera się ono na jawnym rozmytym rozwiązaniu układu równań (4.20) w postaci:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{+}\tilde{\mathbf{b}}, \tag{4.59}$$

co stanowi rozmyte rozwinięcie układu równań (2.90).

Koncepcję rozmytego rozwiązania jawnego zaadoptowano z pracy (Kwiesielewicz 1995b), gdzie zostało ono zdefiniowane dla układów równań z rozmytymi prawymi stronami ograniczeń oraz macierzą lewych stron ograniczeń pełnego rzędu. Dokonano również porównania rozmytego rozwiązania jawnego i niejawnego. W rozważanym przypadku macierz **A** posiada rząd mniejszy niż n, w większości przypadków jej rząd wynosi n-1, co utrudnia znacznie porównanie rozmytego rozwiązania jawnego z rozmytym rozwiązaniem niejawnym.

W przypadku rozmytego rozwiązania jawnego, obliczenie rozmytego wektora rozwiązania $\tilde{\mathbf{x}}$ sprowadza się do operacji mnożenia liczb rozmytych przez liczby rzeczywiste (3.46) i (3.47) oraz do dodawania liczb rozmytych (3.44):

$$\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+}\tilde{b}_j, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{4.60}$$

gdzie a_{ij}^{+} są elementami macierzy pseudoodwrotnej $\mathbf{A}^{+}$.

Stąd rozwiązanie układu równań (4.60) jest zawsze poprawne w sensie zachowania uporządkowania (3.43). Należy podkreślić, że macierz pseudoodwrotna $\mathbf{A}^{+}$ jest macierzą ostrą. Ponadto układ (4.60) daje rozwiązanie o minimalnej normie dla wartości modalnych liczb rozmytych rozmytego wektora rozwiązania, ponieważ dla wartości modalnych obydwa rozwiązania są jednakowe i równe rozwiązaniu dla zagadnienia nierozmytego.

W celu uzyskania uszeregowania, należy powrócić do funkcji wykładniczych zgodnie z (3.51) oraz dokonać normalizacji.

Przykład obliczeniowy

Odwołajmy się do rozmytej macierzy ocen z pracy (Laarhoven i Pedrycz 1983) oraz obliczmy rozmyte jawne i niejawne rozwiązania rozmytego rozwinięcia układu równań normalnych (4.20). Oznaczmy czynniki odpowiednio jako F_1, F_2, F_3.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} (1,1,1) & \begin{matrix} \left(\frac{5}{2},3,\frac{7}{2}\right) \\ \left(\frac{5}{2},3,\frac{7}{2}\right) \\ \left(\frac{3}{2},2,\frac{5}{2}\right) \end{matrix} & \begin{matrix} \left(\frac{5}{2},3,\frac{7}{2}\right) \\ - \\ - \end{matrix} \\ \begin{matrix} \left(\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right) \\ \left(\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right) \\ \left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right) \end{matrix} & (1,1,1) & \begin{matrix} \left(\frac{2}{3},1,\frac{3}{2}\right) \\ - \\ - \end{matrix} \\ \begin{matrix} \left(\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right) \\ - \\ - \end{matrix} & \begin{matrix} \left(\frac{2}{3},1,\frac{3}{2}\right) \\ - \\ - \end{matrix} & (1,1,1) \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie niejawne

Rozwiązując układy równań (4.22)-(4.24) oraz powracając do funkcji wykładniczych otrzymamy:

$$\widetilde{p}_1 = (1.9787, 1.9630, 1.9013),$$

$$\widetilde{p}_2 = (0.5956, 0.7347, 0.9197).$$

$\tilde{p}_3 = (0.5771, 0.6934, 0.8409)$.

Pierwsza z liczb ma nieprawidłowe uporządkowanie parametrów. Po normalizacji otrzymujemy:

$$\tilde{p}_1^* = (0.5404, 0.5789, 0.6033),$$

$$\tilde{p}_2^* = (0.1626, 0.2167, 0.2918),$$

$$p_3^* = (0.1576, 0.2045, 0.2668).$$

Po normalizacji arytmetycznej porządek parametrów jest prawidłowy.

Rozwiązanie jawne

Obliczając rozwiązanie jawne, przy wykorzystaniu zależności (4.60) oraz arytmetyki liczb rozmytych (3.44)-(3.47), otrzymujemy:

$$\tilde{p}_1 = (1.6264,\ 1.9630,\ 2.3131),$$

$$\tilde{p}_2 = (0.6044,\ 0.7347,\ 0.9062),$$

$$\tilde{p}_3 = (0.5045,\ 0.6934,\ 0.9620).$$

W tym przypadku parametry liczb rozmytych rozwiązania są uporządkowane prawidłowo.

Po normalizacji otrzymujemy:

$$\tilde{p}_1^* = (0.3890, 0.5789, 0.8456),$$

$$\tilde{p}_2^* = (0.1446, 0.2167, 0.3313),$$

$$\tilde{p}_3^* = (0.1206, 0.2045, 0.3517).$$

Oczywiście, uporządkowanie parametrów pozostaje prawidłowe.

4.7 Porównanie rozwiązania niejawnego z jawnym

W rozdziale 3 wykazano, że dla układów równań z rozmytym wektorem prawych stron, jeśli rozwiązanie niejawne istnieje i jest prawidłowe, to zawiera się ono w rozwiązaniu jawnym. Jeśli zatem założymy, że biorąc pod uwagę modyfikację algorytmu (punkt 2.5.7), rozmyte rozwinięcie układu równań (2.105) będzie postaci:

$$\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{d}}, \tag{4.61}$$

to dla pierwszego wiersza układu (4.61) mamy:

$$\sum_{i=1}^{n} c_{1i}\tilde{x}_i = 0 = (0,0,0). \tag{4.62}$$

Warunek (4.62) może być spełniony tylko dla wszystkich $\tilde{x}_i$ rzeczywistych, zatem układ (4.61) nie posiada poprawnego rozwiązania w sensie (3.43). Wynika stąd, że jeśli chcemy stosować rozmytą wersję układu równań normalnych, to zmuszeni jesteśmy do wykorzystania podejścia z oryginalną macierzą **A**, zdefiniowaną przez (4.38). Porównanie rozwiązań jawnych i niejawnych, ze względu na niepełny wymiar macierzy **A**, wymaga dalszych badań.

Można tutaj wyciągnąć bardziej ogólny wniosek, że wszelkie próby modyfikacji równania, które podlega rozmywaniu, mogą doprowadzić do zmiany rozwiązań rozmytych. Najlepszym przykładem może być Twierdzenie 3.6. Z tego powodu dokonując rozmywania zagadnienia ostrego należy być bardzo ostrożnym i bardziej uzasadnione byłoby formułowanie zagadnienia jako rozmytego już na samym początku, niż dokonywania rozmycia na pewnym etapie rozwiązywania zagadnienia ostrego.

4.8 Podsumowanie

Dokonano analizy rozmytych rozwinięć zagadnienia porównywania parami z uwzględnieniem rozmytego rozwinięcia metody maksymalnej wartości własnej i metody logarytmicznych najmniejszych kwadratów. Pierwsze z nich nie daje się stosować w sposób bezpośredni do zagadnień z brakującymi danymi. Charakteryzuje się również dużymi trudnościami obliczeniowymi i nie zawsze daje prawidłowe rozwiązanie w sensie uporządkowania parametrów liczb rozmytych wyniku. Zaproponowane podejście do rozwiązania rozmytego rozwinięcia metody maksymalnej wartości własnej, oparte o algorytmy genetyczne, mimo efektywności obliczeniowej, nie pozwala na analityczną ocenę rozwiązania. W trakcie redakcji rozprawy ukazała się kolejna praca dotycząca rozmytego rozwinięcia maksymalnej wartości własnej (Csutora i Buckley 2001). Zdaniem autora metoda ta daje wyniki, które w sposób bardzo istotny zależą od przyjętego stopnia dyskretyzacji obliczeń. Należy sądzić, że przede wszystkim wady metody maksymalnej wartości własnej dla danych ostrych, eliminują ją z użycia, a w tym jej rozmyte rozwinięcie.

Metoda logarytmicznej regresji w postaci rozmytej może być stosowana do zagadnień z brakującymi danymi, ale również nie zawsze daje prawidłowe wyniki w sensie uporządkowania parametrów liczb rozmytych (Laarhoven i Pedrycz 1983; Kwiesielewicz 1998). Sytuację ratuje zastosowana procedura normalizacyjna. Zważywszy na fakt, że dla wartości modalnych otrzymane rozwiązanie jest multiplikatywne, bardziej celowe wydawałoby się zastosowanie metody agregacji z wykorzystaniem średniej geometrycznej. Zatem niezbyt sensowne jest dokonywanie normalizacji arytmetycznej. Drugą wadą tej metody jest brak jedynego rozwiązania dla przypadków z macierzą lewych stron układu równań normalnych z dwoma stopniami swobody (Kwiesielewicz 1998). Aby uniknąć przedstawionych problemów, wprowadza się koncepcję rozwiązania jawnego (Kwiesielewicz 1993b, 1995ab, 1999, 2000), opartego na wykorzystaniu uogólnionej pseudoodwrotności. Rozmyte rozwiązanie jawne jest rozwiązaniem o minimalnej normie dla wartości modalnych. Stąd wartości modalne rozwiązania są znormalizowane geometrycznie (Kwiesielewicz 1993a, 1996, 1998). Wartości górne i dolne rozwiązania wynikają z obliczeń arytmetyki rozmytej. W tym przypadku można dokonać agregacji za pomocą ważonej średniej geometrycznej.

Wykazano, że w przypadku ogólnym rozmyte rozwiązanie niejawne nie będzie prawidłowe przy wykorzystaniu rozmycia układu równań normalnych. Zauważone zjawisko potwierdza fakt, że rozmyty wektor wynikowy zależy od tego, na jakim etapie dokona się rozmycia zagadnienia ostrego. Z uwagi na to, za bardziej celowe uważa się raczej sformułowanie danego zagadnienia już na początku jako rozmytego. Do rozważanego zagadnienia porównywania parami z ocenami rozmytymi można np. zastosować rozmytą analizę regresyjną (Kacprzyk i Fedrizzi 1992).

Mirosław KWIESIELEWICZ

ANALITYCZNY HIERARCHICZNY PROCES DECYZYJNY
Nierozmyte i rozmyte porównania parami

Analityczny hierarchiczny proces decyzyjny (ang. Analytic Hierarchy Proces - AHP) należy do klasy metod wielokryterialnych podejmowania decyzji. Polega na wyborze najlepszego wariantu, ze skończonej, niezbyt dużej ich liczby, z uwzględnieniem wielu kryteriów. Metoda oparta jest na porównaniach parami wariantów, dokonywanych przez ekspertów, w oparciu o subiektywną preferencję jednego wariantu nad drugim. Wynikiem porównania może być ocena nierozmyta i rozmyta. Może również zaistnieć sytuacja braku ocen. Na podstawie uzyskanych ocen otrzymywane są wagi, wyrażające ważność poszczególnych wariantów.

Praca koncentruje się na analizie i ocenie głównych metod obliczania wag. Autor proponuje również własne podejście dla przypadku z brakującymi danymi oraz danymi nierozmytymi i rozmytymi.

ISSN 0208-8029
ISBN 83-85847-69-3