POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

Mirosław KWIESIELEWICZ

ANALITYCZNY HIERARCHICZNY PROCES DECYZYJNY

Nierozmyte i rozmyte porównania parami

ANALITYCZNY HIERARCHICZNY PROCES DECYZYJNY
Nierozmyte i rozmyte porównania parami

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 29

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2002

Mirosław KWIESIELEWICZ

ANALITYCZNY HIERARCHICZNY PROCES DECYZYJNY

Nierozmyte i rozmyte porównania parami

wyd. własne - 20zł

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. inż. Janusz Kacprzyk
Prof. dr hab. inż. Franciszek Milkiewicz

ISBN 83-85847-69-3
ISSN 0208-8029

1. WSTĘP

Podejmowanie decyzji jest stare jak ludzkość. Już w starożytnych cywilizacjach ludzie próbowali rozwiązać ryzykowne i skomplikowane problemy. Słowo decyzja (*łac. decidere* – ustalać, postanawiać) występuje w wielu sytuacjach codziennego życia. Bardzo wiele zachowań ludzi jest wynikiem poprzednio podjętej decyzji. Ludzie nigdy nie obywali się bez *doradców* w procesie podejmowania decyzji. W starych cywilizacjach oczekiwali pomocy od duchownych, czy też mędrców. Wyrocznie w starożytnej Grecji pełniły podobną rolę. Obecnie w życiu codziennym doradcą może być ksiądz, domowy lekarz, czy też prawnik. Zagadnienia podejmowania decyzji pojawiają się w życiu jednostki, grup społecznych i różnego rodzaju systemów, w tym systemów technicznych, społecznych i ekonomicznych. Wraz z rozwojem cywilizacyjnym i zjawiskiem wąskiej specjalizacji pojawiło się pojęcie *eksperta*, który pełni rolę doradcy w wybranej dziedzinie.

Podejmowanie decyzji stanowi proces wyboru z pewnej liczby *wariantów*, przy czym sprowadza się do wyboru wariantu *najlepszego* z możliwych z punktu widzenia podejmującego decyzję. Proces ten jest *racjonalnym procesem wyboru*, a jego wynikiem ma być osiągnięcie pewnego *celu*, który można utożsamiać z *uporządkowaniem preferencyjnym* na zbiorze wariantów (Kacprzyk 1983). Wybór wariantu najlepszego sprowadza się w takim przypadku do wariantu o największej *preferencji*. Możemy tutaj mieć do czynienia z uporządkowaniem *jakościowym* lub *ilościowym*. W przypadku uporządkowania jakościowego wymaga się zwykle od eksperta opinii dotyczącej jedynie porządku wariantów, czyli stwierdzenia, czy dany wariant poprzedza inne w sensie wybranego *kryterium*. Uporządkowanie ilościowe wymaga natomiast podania dodatkowej informacji o ile dany obiekt jest lepszy od drugiego (Wagner 1994). Generalnie zadanie uporządkowania jest zadaniem bardzo trudnym do rozwiązania, szczególnie w przypadku dużej liczby wariantów.

W celu określenia preferencji można wprowadzić relacje binarne (Roy 1990) dotyczące dwóch wariantów decyzyjnych. Roy (1990) proponuje wyróżnienie czterech sytuacji podstawowych:

- sytuacja *równoważności*, kiedy obydwa warianty są równoważne,
- sytuacja *silnej preferencji*, kiedy pierwszy wariant jest silnie preferowany od drugiego, albo odwrotnie,
- sytuacja *słabej preferencji*, kiedy pierwszy wariant jest słabo preferowany od drugiego, albo odwrotnie,

- sytuacja *nieporównywalności*, kiedy warianty są nie porównywalne.

Więcej szczegółów dotyczących modelowania preferencji można znaleźć w pracach (Roy 1990; Słowiński 1998).

Wiedza eksperta dotycząca wariantów nie zawsze ma charakter *deterministyczny*: Można wyróżnić następujące podstawowe przypadki (Kacprzyk 1983):

- podejmowanie decyzji w warunkach *pewności*,
- podejmowanie decyzji w warunkach *ryzyka*,
- podejmowanie decyzji w warunkach *niepewności*,
- podejmowanie decyzji w warunkach *niedokładności* (nieokreśloności, niejednoznaczności, rozmytości, itd.).

W przypadku podejmowania decyzji w warunkach pewności (przypadek deterministyczny) ekspert zna możliwe warianty oraz model sytuacji decyzyjnej.

Jeśli decyzja podejmowana jest w warunkach ryzyka, to wynik wyboru danego wariantu nie jest znany, ale znane są prawdopodobieństwa możliwych wartości tego wyniku.

Podejmowanie decyzji w warunkach niepewności charakteryzuje się przypadkowością, ale nie są znane prawdopodobieństwa wyniku wyboru danego wariantu. Zwykle znane są natomiast wartości wyników w najbardziej korzystnym i najmniej korzystnym przypadku.

Przypadek podejmowania decyzji w warunkach niedokładności wiąże się z niedokładną, wieloznaczną wiedzą o wynikach, wariantach i uporządkowaniu preferencyjnym modelu sytuacji decyzyjnej.

W procesie podejmowania decyzji mogą wystąpić przypadki:

- pojedynczego eksperta,
- kilku ekspertów.

Z punktu widzenia liczby kryteriów zagadnienia podejmowania decyzji można podzielić na:

- zagadnienia *jednokryterialne*,
- zagadnienia *wielokryterialne*.

W praktyce mamy coraz częściej do czynienia z problemami *wielokryterialnymi*, w tym z problemami ze sprzecznymi kryteriami, co znacznie utrudnia uzyskanie satysfakcjonującego rozwiązania. Przykładowo, zagadnienie wyboru miejsca i rodzaju pracy może być uzależnione od jej prestiżu społecznego, wynagrodzenia, warunków, bezpieczeństwa, możliwości korzystania z samochodu służbowego, telefonu komórkowego i innych dóbr materialnych. Warto zauważyć, że np. praca o wysokim prest iżu społecznym wcale nie musi wiązać się z wysokim wynagrodzeniem, natomiast wyższe wynagrodzenie może wynikać z niższego poziomu bezpieczeństwa na danym stanowisku pracy. W podanych przykładach występuje konflikt pomiędzy kryteriami.

Wielokryterialne zagadnienia decyzyjne mają bardzo różnorodny charakter. Można znaleźć między nimi jednak pewne cechy wspólne (Hwang and Yoon 1981):

- występowanie wielu *celów* (*ang. goals*) lub *atrybutów* (*ang. attributes*); decydent musi zdefiniować odpowiedni dla rozważanego zagadnienia decyzyjnego zbiór celów lub atrybutów;
- występowanie konfliktu pomiędzy celami i atrybutami;
- brak jednolitej miary dla kryteriów; każdy z celów lub atrybutów może mieć odmienną jednostkę miary;
- występowanie zagadnienia poszukiwania najlepszego rozwiązania, lub wyboru najlepszego wariantu z wcześniej określonej niewielkiej liczby wariantów.

Biorąc pod uwagę liczbę wariantów możemy mieć do czynienia z zagadnieniami o ich skończonej lub nieskończonej liczbie. Z tego punktu widzenia zagadnienie wielokryterialne może być zaliczone odpowiednio do jednej z dwóch kategorii, a mianowicie do *wieloatrybutowego* lub *wielocelowego* zagadnienia podejmowania decyzji (Hwang i Yoon 1981; Chen i Hwang 1992; Lai i Hwang 1996). Należy podkreślić, że ważną cechą wieloatrybutowego podejmowania decyzji jest zwykle dość mała liczba zdefiniowanych wariantów. Ponadto z wariantami związane są poziomy realizacji atrybutów, które nie zawsze określone są w postaci ilościowej.

Niniejsza praca koncentruje się na zagadnieniach wieloatrybutowych, które mogą być traktowane jako zagadnienia wyboru ze skończonej, niezbyt dużej liczby wariantów, w przeciwieństwie do zagadnień wielocelowych, które formułuje się w postaci zagadnienia programowania matematycznego (Cohon 1978; Hwang i inni 1979; MacCrimmon 1968; Marschak 1976).

Załóżmy, że podstawę procesu podejmowania decyzji stanowi *macierz uszeregowań* **D**, w której wiersze odpowiadają małej liczbie wariantów A_i (i=1,...,m), natomiast kolumny małej liczbie atrybutów X_j (j=1,...,n). (Hwang i Yoon 1981):

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} \\ U_{21} & U_{22} & \dots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{m1} & U_{m2} & \dots & U_{mn} \end{bmatrix} \end{array},$$

Kolumny macierzy **D** są *wektorami uszeregowania* (*ang. ranking*) wariantów względem poszczególnych atrybutów, przy czym mogą być one wyrażone za pomocą różnych miar. Elementami wektora uszeregowania są *ważności* poszczególnych wariantów. Ważności określają uporządkowanie preferencyjne. Składowe wektora uszeregowania mogą być wyrażone w postaci liczbowej (dane ilościowe) lub lingwistycznej (dane jakościowe). Warto również podkreślić, że poszczególne uszeregowania mogą mieć niejednolite *porządki* (w sensie relacji uporządkowania w zbiorze liczb rzeczywistych), tzn. w jednym z uszeregowań wartość wyższa w uszeregowaniu może odpowiadać wariantowi lepszemu z punktu widzenia decydenta, natomiast drugiemu wartość niższa. Poszczególnym atrybutom mogą być przyporządkowane *wagi*, wyrażające ważność poszczególnych atrybutów. Wagi są składowymi *wektora wag* **w**:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{array} \\ \mathbf{w} = & \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix} \end{array}.$$

Przykładową tablicę uszeregowań oraz wektor wag dla czterech atrybutów i czterech wariantów przedstawiono poniżej:

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.0 & \text{niski} & 5.5 & \text{mała} \\ 2.5 & \text{średni} & 6.5 & \text{średnia} \\ 1.8 & \text{średni} & 4.5 & \text{mała} \\ 2.2 & \text{bardzo wysoki} & 2.0 & \text{duża} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{array} \\ \mathbf{w} = & \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Element macierzy **D** określa, jaka jest ocena (ważność) danego wariantu z punktu widzenia określonej cechy. Na przykład przy zakupie samochodu cechami samochodu X_j mogą być: cena, kolor, wygoda, maksymalne przyspieszenie, a wariantami A_i typy samochodów. Mogą tutaj wystąpić oceny w postaci nierozmytej lub rozmytej.

Metody wieloatrybutowego podejmowania decyzji można podzielić na następujące grupy (Hwang and Yoon 1981):

1. Metody nie wymagające informacji związanej z preferencjami dotyczącymi atrybutów: metoda dominacji (Calpine i Golding 1976), MAXIMIN oraz MAXIMAX (MacCrimmon 1968);
2. Metody dla zadanego standardowego poziomu preferencji dotyczących atrybutów: metoda grupowania (*ang. Conjunctive Method*) (Dawes 1964), metoda wydzielania (*ang. Disjunctive Method*) (Dawes 1964);
3. Metody dla porządkowej preferencji dotyczącej atrybutów: metoda leksykograficzna (Luce 1956, Tversky 1969), metoda eliminacji (Tversky 1971), metoda permutacji (Paelnick 1977);
4. Metody dla numerycznie określonej preferencji dotyczącej atrybutów: metoda przypisania liniowego (Bernardo i Blin 1977), prosta addytywna metoda wagowa (MacCrimon 1968), metoda ELECTRE (*fr. Elimination et Choice Translating Reality*) (Banayoun i inni 1966);

Metoda dominacji polega na redukcji liczby wariantów poprzez kolejne usuwanie wariantów zdominowanych. Zakłada się, że wariant jest zdominowany, jeśli istnieje inny wariant, który jest lepszy od niego względem jednego lub większej liczby atrybutów.

Metoda MAXIMIN sprowadza się do określenia dla każdego z wariantów atrybutu o najgorszej wartości preferencji, a następnie wybraniu wariantu o najlepszej wartości, z określonego wcześniej zbioru.

Metoda MAXIMAX realizowana jest w sposób analogiczny, przy czym w obydwu przypadkach wybierana jest najlepsza wartość preferencji. Zakłada się tutaj optymistyczne podejście decydenta w przeciwieństwie do metody poprzedniej, w której zakłada się podejście pesymistyczne.

W praktycznych sytuacjach, związanych z podejmowaniem decyzji bardzo często zdarza się, że preferencja dotycząca wariantu względem danego atrybutu nie może być mniejsza od pewnej z góry założonej wielkości. Może to na przykład wynikać z pewnych przepisów prawnych dotyczących na przykład ochrony środowiska. Metoda grupowania polega na usunięciu wariantu, dla którego wartość preferencji względem danego atrybutu jest mniejsza od założonej dla niego wartości. W praktyce stosowana jest ona przede wszystkim do podzielenia wariantów na kategorie akceptowalne i nie akceptowalne. Metoda ta może być stosowana w celu wyeliminowania wariantów, które nie mogą być zrealizowane ze względu na przekroczenie pewnych wielkości, które nie mogą być przekroczone.

W przeciwieństwie do omówionej wyżej metody, w metodzie wydzielania definiuje się najwyższą wartość preferencji wariantów względem danego atrybutu. Służy ona do wyboru wariantów, dla których wartość preferencji dla danego atrybutu jest większa od założonego progu oraz pozwala na wybór wariantów przewyższających wcześniej założoną wartość preferencji dla danego atrybutu. Posiada podobne własności jak metoda poprzednia i również może być stosowana do wstępnej selekcji wariantów lub ich grupowania.

W pewnych sytuacjach decyzyjnych pojedynczy atrybut może wydawać się najważniejszy (na przykład koszt). W sytuacji takiej celowe wydaje się porównanie wariantów biorąc pod uwagę dany atrybut. Metoda leksykograficzna wymaga wcześniejszego uszeregowania atrybutów od najważniejszego do najmniej ważnego. Uszeregowanie wariantów odbywa się kolejno względem przyjętego uszeregowania dotyczącego atrybutów. Metoda ta nie wymaga wartości numerycznych preferencji. Warto zwrócić uwagę, że wagi dla poszczególnych atrybutów nie muszą mieć również postaci numerycznej, wystarczy natomiast, aby były uporządkowane.

Metoda eliminacji oparta jest na klasycznym procesie podejmowania decyzji przez człowieka. Zakłada ona minimalną wartość preferencji dla każdego atrybutu. Wybierany jest pierwszy atrybut i wszystkie warianty z atrybutem o wartości mniejszej niż zadana są usuwane, następnie wybierany jest drugi atrybut, itd. Wybór atrybutów dokonywany jest losowo. Z tego też powodu metoda ta może dawać w wyniku wariant „gorszy" od wyeliminowanych.

Metoda permutacji opiera się na zbiorze permutacji uszeregowań wariantów względem wszystkich atrybutów. Uwzględnia ona przypisanie wag poszczególnym atrybutom. Każdy z elementów zbioru permutacji sprawdzany jest w sensie zgodności uporządkowania i wybierane jest uporządkowanie najlepsze w sensie testu zgodności. Metoda wymaga jednak wielu pracochłonnych obliczeń.

Metoda przypisania liniowego polega na przypisaniu wagi każdemu atrybutowi, uszeregowaniu wariantów względem atrybutów poprzez przypisanie im lokat oraz obliczeniu wyniku w postaci sumy ważonej. Metoda ta wymaga numerycznej wartości poszczególnych wag i jest atrakcyjna z punktu widzenia realizacji numerycznej.

Prosta addytywna metoda wagowa wymaga dokonania normalizacji macierzy uszeregowań Następnie uszeregowanie wariantów odbywa się poprzez obliczenie sumy ważonej wartości ważności wariantów względem atrybutów. Metoda wymaga wartości numerycznych atrybutów i wag, niemniej jednak w prosty sposób może być rozwinięta na przypadek z wartościami numerycznymi i lingwistycznymi przy wykorzystaniu arytmetyki liczb rozmytych. Istnieje również wersja nieliniowa tej metody.

Metoda ELECTRE opiera się na pojęciu częściowego uporządkowania wariantów oraz ich porównywaniu parami. Na tej podstawie tworzone są zbiory zgodności i niezgodności. W efekcie otrzymywany jest graf przedstawiający uporządkowanie wariantów. W szczególnym przypadku można uzyskać uporządkowanie bez preferencji dotyczącej wybranych wariantów. Metoda ta posiada prostą logikę, pełne wykorzystanie informacji zawartej w macierzy uszeregowań oraz wyrafinowaną procedurę numeryczną. Znalazła swoją implementację w postaci programu komputerowego.

Bardziej szczegółowy przegląd i charakterystyka metod wieloatrybutowych znajduje się m.in. w pracach (Hwang i Yooon 1981; Chen i inni 1992).

Do ważniejszych rozmytych rozwinięć metod wieloatrybutowych należą:

1. Rozmyta metoda MAXIMIN w ujęciu:
   - Bellmana i Zadeha (1970) oraz
   - Yagera (1978);
2. Rozmyte rozwinięcia metod grupowania i wydzielania (Dubois i inni 1988);
3. Rozmyta addytywna prosta metoda wagowa:
   - ujęcie Baassa i Kwakernaaka (1977),
   - metoda Kwakernaaka (1979),
   - metoda Dubois i Prade'a (1982),
   - ujęcie Chenga i MCInnis'a (1980),
   - podejście Bonissone'a. (1982).

Szeroki przegląd rozmytych metod wieloatrybutowych można znaleźć między innymi w pracach (Chen i inni 1992; Perny i Rubens 1998).

Saaty (1977, 1980) zaproponował wyodrębnienie *podkryteriów* w wieloatrybutowej analizie decyzyjnej, która dzięki temu uzyskała strukturę hierarchiczną (Rys. 1.1 i 1.2) oraz została nazwana przez Saaty'ego analitycznym hierarchicznym procesem decyzyjnym (*ang. Analytic **Hierarchy Process - AHP***). Ze względu na dużą popularność tej metody pojawił się powszechnie używany skrót AHP. W literaturze ekonomicznej metoda AHP nazywana jest *metodą analitycznej hierarchizacji* (Witkowski 2000). Metodę tę można zaliczyć do klasy metod wieloatrybutowych dla numerycznie określonej preferencji dotyczącej atrybutów. Przegląd zastosowań AHP można znaleźć w pracy (Vargas 1990). Metodę AHP zastosowano między innymi do rozwiązywania zagadnień z dziedziny zarządzania i ekonomii, polityki i problemów społecznych oraz technologii. Metoda AHP doczekała się również realizacji w postaci programu komputerowego Expert Choice.

Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że według Barzilai'ego (2001) Miller (1966, 1969, 1970) jako pierwszy zaproponował wyodrębnienie podatrybutów i dlatego też bardziej prawidłową nazwą byłaby nazwa *Miller's **Hierarchy** Process* (MHP). Podkreśla on, że dekompozycja na podkryteria zaproponowana przez Millera (1966) została wykorzystana w wieloatrybutowej teorii użyteczności przez Raiffa'e (1969 strona 17).

Można przyjąć, że AHP posiada następujące cechy:

1. Problem decyzyjny ma charakter hierarchiczny;
2. Poszczególne warianty decyzji charakteryzowane są wieloma atrybutami;
3. Atrybuty mogą być określone w postaci liczbowej lub lingwistycznej;
4. Poszczególnym atrybutom mogą być przypisane wagi;
5. Na poszczególnych poziomach decyzyjnych mogą występować różne grupy ekspertów, uczestniczących w podejmowaniu decyzji – grupowe podejmowanie decyzji lub różni eksperci;
6. Podstawę procesu podejmowania decyzji na każdym poziomie stanowi macierz uszeregowań **D**, w której wiersze odpowiadają wariantom, natomiast kolumny atrybutom (kryteriom).

W przedstawionym podejściu pojawiają się następujące zagadnienia:

1. Ustalenie skończonego zbioru wariantów;
2. Zdefiniowanie struktury decyzyjnej z wyodrębnieniem podatrybutów (Rys. 1.1);
3. Utworzenie wektorów wag;
4. Utworzenie uszeregowań na najniższym poziomie struktury decyzyjnej;
5. Dokonanie agregacji względem ekspertów;
6. Dokonanie agregacji względem podatrybutów i atrybutów (Rys. 1.2), uwzględniając wektory wag.

Warto jeszcze raz podkreślić, że uszeregowania wariantów względem poszczególnych atrybutów, czy też podatrybutów, stanowią kolumny w odpowiednich tablicach uszeregowań.

Przykładową strukturę hierarchicznego wieloatrybutowego podejmowania decyzji dla zagadnienia szeregowania ekspertów względem stopnia zaufania do nich przedstawiono na Rys. 1.3 (Zio 1996).

W podejściu AHP (Saaty 1977, 1980) uszeregowania wariantów dla poszczególnych podatrybutów tworzone są w oparciu o metodę *porównywania parami*, której koncepcję wprowadził Thurstone (1927a, b, c), natomiast agregacja dokonywana jest za pomocą prostej addytywnej metody wagowej (MacCrimon 1968). Wagi obliczane są również z wykorzystaniem metody porównywania parami. Z tego powodu w dalszej części pracy używa się pojęcia *szeregowania czynników* (*ang. factors*), jako bardziej ogólnego i obejmującego zarówno pojęcie szeregowania wariantów, jak i wag. Ze względu na konieczność operowania na uszeregowaniach jakościowych oraz ilościowych istnieje wiele podejść do *rozmytego rozwinięcia AHP*, a w szczególności do *rozmytego rozwinięcia szeregowania czynników.*

Proces szeregowania czynników z wykorzystaniem metody porównywania parami został rozwinięty przez Davida (1963), a następnie Saaty'ego (1977, 1980), który zaproponował następującą procedurę:

- Określenie przez eksperta tzw. *oceny pary wariantów*, która wyraża preferencję jednego składnika pary w stosunku do drugiego;
- Przyporządkowanie każdej z ocen liczby ze zdefiniowanej wcześniej *skali*;
- Umieszczenie wyników w *macierzy ocen* (macierzy porównań parami);
- Obliczenie *znormalizowanego uszeregowania* przy wykorzystaniu *metody maksymalnej wartości własnej* (Saaty 1977, 1980).

Zilustrujmy metodę AHP dla struktury dwupoziomowej i załóżmy, jak poprzednio, że w rozważanym procesie decyzyjnym mamy m wariantów i n atrybutów. Pierwszym krokiem jest utworzenie macierzy ocen (macierzy porównań) wariantów, dla każdego z n atrybutów. Macierz ocen tworzona jest na podstawie porównań parami poszczególnych wariantów.

W celu znalezienia uszeregowania atrybutów (uporządkowanie preferencyjne ilościowe) Saaty (1980) proponuje wprowadzenie preferencji względnej. W celu jej określenia wprowadza on relację binarna, dotyczącą dwóch wariantów decyzyjnych, wyróżniając pięć sytuacji podstawowych:

- sytuacja *równoważności*, kiedy obydwa warianty są równoważne,
- sytuacja *słabej preferencji*, kiedy pierwszy wariant jest słabo preferowany względem drugiego, albo odwrotnie,
- sytuacja *istotnej preferencji*, kiedy pierwszy wariant jest istotnie preferowany względem drugiego, albo odwrotnie,
- sytuacja *wyraźnej preferencji*, kiedy pierwszy wariant jest wyraźnie preferowany względem drugiego, albo odwrotnie,
- sytuacja *bezwzględnej preferencji*, kiedy pierwszy wariant jest bezwzględnie preferowany względem drugiego, albo odwrotnie.

Saaty zakłada również możliwość wystąpienia preferencji pośrednich, czyli w efekcie otrzymamy skalę dziewięciostopniową.

W oparciu o przedstawioną relacje ekspert wyraża swoje względne preferencje, dotyczące wszystkich par wariantów. Poszczególnym stopniom preferencji przyporządkowywane są liczby. Saaty (1977) zaproponował skalę liczb naturalnych od 1 do 9 oraz odwrotności tych liczb dla relacji przeciwnej. Im wyższa liczba, tym większa intensywność preferencji. Przyporządkowanie liczby równej 1 oznacza równoważność wariantów. Liczby te zwane są ocenami. Następnie zakłada się, że oceny te są niedokładne, a ocenami dokładnymi są ilorazy odpowiednich składowych poszukiwanego wektora uszeregowania.

Oceny przyporządkowane przez eksperta w sposób określony powyżej umieszczane są w kwadratowych macierzach ocen. Oznaczmy ocenę przyporządkowaną parze wariantów (k,l) względem atrybutu j przez $r_{kl}^{(j)}, k,l = 1,2,...,m$. Macierz ocen $\mathbf{R}^{(j)}$dla j-tego atrybutu (j=1,...,n) będzie miała postać:

$$\mathbf{R}^{(j)} = \begin{pmatrix} r_{11}^{(j)} & r_{12}^{(j)} & \cdots & r_{1m}^{(j)} \\ r_{21}^{(j)} & r_{22}^{(j)} & \cdots & r_{2m}^{(j)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{m1}^{(j)} & r_{m2}^{(j)} & \cdots & r_{mm}^{(j)} \end{pmatrix}.$$

W celu znalezienia wektora uszeregowania wariantów $\mathbf{p}^{(j)} = \left(p_1^{(j)},\ldots,p_m^{(j)}\right)^T$ Saaty (1980) postuluje przybliżenie macierzy ocen $\mathbf{R}^{(j)}$ za pomocą następującej macierzy ilorazów:

$$\mathbf{P}^{(j)} = \begin{pmatrix} p_1^{(j)}/p_1^{(j)} & p_1^{(j)}/p_2^{(j)} & \cdots & p_1^{(j)}/p_m^{(j)} \\ p_2^{(j)}/p_1^{(j)} & p_2^{(j)}/p_2^{(j)} & \cdots & p_2^{(j)}/p_m^{(j)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_m^{(j)}/p_1^{(j)} & p_m^{(j)}/p_2^{(j)} & \cdots & p_m^{(j)}/p_m^{(j)} \end{pmatrix}.$$

gdzie składowa $p_{kl}^{(j)} = p_k^{(j)}/p_l^{(j)}$, stanowi iloraz składowej k i składowej l wektora ważności poszukiwanego uszeregowania.

Obliczenia uszeregowania wariantów $\mathbf{p}^{(j)}$proponuje dokonać w oparciu o równanie:

$$\mathbf{R}^{(j)}\mathbf{p}^{(j)} = \lambda_{\max}^{(j)}\mathbf{p}^{(j)},$$

gdzie $\lambda_{\max}^{(j)}$ jest maksymalną wartością własną macierzy ocen $\mathbf{R}^{(j)}$, natomiast wektor uszeregowania wariantów $\mathbf{p}^{(j)}$, odpowiadającym jej wektorem własnym (znormalizowanym arytmetycznie). Zatem znalezienie wektora uszeregowania wariantów sprowadza się do znalezienia wektora własnego macierzy ocen $\mathbf{R}^{(j)}$, odpowiadającego jej maksymalnej wartości własnej $\lambda_{\max}^{(j)}$. Jak udowodnił Saaty (1980) istnieje jeden i tylko jeden znormalizowany wektor własny odpowiadający maksymalnej wartości własnej, która jest liczbą rzeczywistą.

Uszeregowania wariantów $\mathbf{p}^{(j)}$ (j=1,...,n), dla poszczególnych atrybutów utworzą następującą macierz uszeregowań **D**:

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_1^{(1)} & p_1^{(2)} & \cdots & p_1^{(n)} \\ p_2^{(1)} & p_2^{(2)} & \cdots & p_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_m^{(1)} & p_m^{(2)} & \cdots & p_m^{(n)} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Obliczenia wektora wag **w** Saaty (1980) proponuje dokonać również za pomocą porównań parami, ale w tym przypadku atrybutów. Uszeregowanie wynikowe wariantów $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)^T$ natomiast proponuje obliczyć z wykorzystaniem sumy ważonej:

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} w_j p_i^j, \quad i = 1,2,\dots,m.$$

W praktyce zachodzi często sytuacja, w której ekspert nie jest w stanie podać oceny dotyczącej wybranej lub wybranych par czynników (przypadek nieporównywalności) (Crawford i Williams 1985). Wówczas mamy do czynienia z przypadkiem brakujących ocen. Zatem w przypadku ogólnym należało by rozważać zagadnienie szeregowania czynników przy założeniu brakujących danych.

Metoda AHP w bardzo krótkim czasie stała się metodą bardzo popularną i powstały na jej temat setki prac. Do końca lat osiemdziesiątych znalazła ona zastosowanie w następujących dziedzinach (Vargas 1990):

- Ekonomia i zarządzanie (m.in. finanse, marketing, planowanie, transport, prognozowanie, alokacja zasobów);
- Problemy polityczne (m.in. konflikty i negocjacje, kontrola zbrojeń, gry wojenne);
- Problemy społeczne (m.in. edukacja, zdrowie i medycyna, prawo, sektor publiczny);
- Problemy technologiczne (m.in. wybór rynku, transfer technologii).

Główne kierunki badań związane były z następującymi zagadnieniami:

- Rodzaj ocen: losowe (Vargas 1982; Dennis 1987; Ramathan 1997), przedziałowe (Moreno-Jimenez i Vargas 1993; Haines 1998), zależne od czasu (Saaty 1979) i rozmyte (Boender i inni 1989; van Laarhoven i Pedrycz 1983; Buckley 1985; Buckley i inni 2000);
- Liczba ocen (brakujące oceny) (de Gran 1980; Laarhoven i Pedrycz 1983; Harker 1987);
- Miary niezgodności ocen (Jensen 1987; Shen 1990);
- Oceny grupowe ekspertów i konsensus grupy (Basak 1988; Bard i Sousk 1990; Lee i Ahn 1991, van Honert 1998);
- Różne metody obliczania wektora uszeregowania wariantów: metoda maksymalnej wartości własnej, metoda logarytmicznych najmniejszych kwadratów, metoda najmniejszych kwadratów (Graan 1980; Saaty i Vargas 1984; Jensen 1984, Crawford i Williams 1985).

Jak to zwykle bywa, mimo ogromnej popularności metody AHP, w późniejszych latach wystąpiła także jej krytyka. Pokazano, że metoda AHP w swojej pierwotnej postaci, scharakteryzowanej powyżej, posiada szereg wad. Po pierwsze nie może być w sposób bezpośredni stosowana dla przypadków z brakującymi danymi. Po drugie, jeśli dokonamy operacji transponowania macierzy ocen **R**, to rozwiązanie otrzymane z wykorzystaniem metody maksymalnej wartości własnej będzie się różniło od rozwiązania obliczonego przed wykonaniem operacji transponowania. Zjawisko to zostało nazwane w literaturze, jako zależność rozwiązania od odwrócenia skali. Po trzecie, przy dodaniu nowego wariantu może wystąpić zjawisko tzw. utraty ważności, co polega na zmianie *porządku* wcześniej otrzymanego uszeregowania w sensie relacji uporządkowania w zbiorze liczb rzeczywistych. Wreszcie po czwarte może dawać rozwiązania zależne od kolejności operacji agregacji i wyznaczania uszeregowania. Oznacza to, że rozwiązanie otrzymane w wyniku dokonania agregacji kilku macierzy ocen, a następnie obliczeniu uszeregowania, będzie się różniło od rozwiązania otrzymanego w wyniku obliczenia uszeregowań dla poszczególnych macierzy i późniejszego dokonania agregacji. Szeroką dyskusję pewnych usterek metody AHP Saaty'ego można znaleźć między innymi w pracach (Barzilai i inni 1987; Barzilai i Golany 1994; Barzilai 1997, 1998, 2001).

Ze względu na duży potencjał metody AHP w zakresie zastosowań autor rozprawy podjął się dokonania pewnych modyfikacji metody AHP w celu usunięcia jej usterek i złagodzenia dotyczących jej zarzutów. Modyfikacje te głównie polegają, na innym niż zaproponowany przez Saaty'ego, sposobie obliczania wektora uszeregowania wariantów. W nieco odmiennym ujęciu zagadnienie to podjęto w pracach (Bury i inni 2000; Wagner 2000, Triantaphyllou 2000).

Określenie uszeregowania wariantów można sprowadzić do rozwiązania zagadnienia aproksymacji macierzy ocen za pomocą macierzy ilorazów. składowych wektora uszeregowania. W związku ze wspomnianymi wadami metody maksymalnej wartości własnej zaproponowane zostały i są rozwijane inne metody, a mianowicie *metoda logarytmicznych najmniejszych kwadratów* (de Gran 1980, Saaty 1980, Lootsma 1981), czy też *metoda najmniejszych kwadratów* (Saaty 1980, Jensen 1984; Crawford i Williams 1985).

Zagadnienie aproksymacji macierzy ocen przy wykorzystaniu metody maksymalnej wartości własnej, jak i najmniejszych kwadratów, sprowadza się do rozkładu macierzy na wartości własne, natomiast wykorzystanie logarytmicznej regresji sprowadza się do rozwiązania układu równań liniowych niepełnego rzędu, co może być zrealizowane za pomocą rozkładu macierzy na wartości szczególne. W pracach (Kwiesielewicz 1993a, 1994a, 1994b, 1996) zaproponowano nową metodę rozwiązania układu równań liniowych dla rozważanego przypadku. Opiera się ona na wykorzystaniu uogólnionej pseudoodwrotności do rozwiązania układu równań liniowych z macierzą lewych stron niepełnego rzędu. Wprowadzenie rozkładu macierzy na wartości własne, w miejsce rozkładu na wartości szczególne, pozwoliło na dokonanie szczegółowej analizy rozwiązania układu równań normalnych w przypadku ogólnym, co nie było dotychczas możliwe. Wprowadzona modyfikacja zaproponowanego algorytmu (Kwiesielewicz i van Uden 2001a) pozwoliła na transformację układu równań normalnych do układu równań z macierzą lewych stron pełnego rzędu, a co za tym idzie, znaczne uproszczenie obliczeń numerycznych.

W celu umożliwienia operowania na uszeregowaniach, zarówno ilościowych, jak i jakościowych, podjęto próby dokonania rozmytego rozwinięcia metodyki AHP. Rozmyte rozwinięcie rozważanej metody porównywania parami zostało zaproponowane głównie dla metody maksymalnej wartości własnej (Buckley 1985) oraz metody logarytmicznych najmniejszych kwadratów (van Laarhoven i Pedrycz 1982, 1983). Kolejne rozwinięcia tych metod dotyczą:

- Metody logarytmicznych najmniejszych kwadratów z rozmytymi ocenami (Boender i inni 1985, 1989; Gogus i Boucher 1997; Lootsma 1985, 1987; Kwiesielewicz, 1995a, 1998, 1999, 2000; Kwiesielewicz i van Uden 2001a, Ruoning and Xiaoyan 1992, 1996);

- Metody maksymalnej wartości własnej z rozmytymi ocenami (Buckley 1985, 1992a, Buckley i inni 1999; 2001a, b).

W większości rozważanych przypadków zagadnienie szeregowania czynników z rozmytymi ocenami sprowadza się do rozwiązania układu równań liniowych z rozmytymi współczynnikami, które nie zawsze posiadają rozmyte rozwiązanie (Buckley 1985, 1990, 1992a, 1992b; Buckley i Qu 1990a, 1990b, 1991a, 1991b; Buckley i inni 1999; Boender i inni 1985; Kwiesielewicz 1993b, 1995b, 1998, Laarhoven i Pedrycz 1982, 1983).

Dla zagadnienia rozmytego rozwinięcia metody logarytmicznych najmniejszych kwadratów, wykorzystując sposób z zastosowaniem uogólnionej pseudoodwrotności (Kwiesielewicz 1993a, 1996), pokazano, że rozmyte rozwiązanie zagadnienia szeregowania nie jest rozwiązaniem jedynym w przypadku ogólnym (Kwiesielewicz 1998). Z uwagi na przytoczony fakt braku istnienia rozmytego rozwiązania w przypadku ogólnym, zaproponowano oryginalną metodę rozwiązania rozmytego rozwinięcia układu równań normalnych (Kwiesielewicz 1995a, 1999, 2000), oparte o koncepcję rozmytego rozwiązania jawnego (Kwiesielewicz 1993b, 1995), które zawsze daje rozwiązanie.

Celem niniejszej rozprawy jest:

- ***Systematycznego uporządkowanie wiedzy na temat szeregowania czynników w sensie AHP z danymi ostrymi i rozmytymi.***
- ***Analiza i rozwiązanie zagadnienia szeregowania czynników z danymi ostrymi i rozmytymi.***
- ***Opracowanie metody szeregowania czynników w sensie AHP z danymi ostrymi i rozmytymi, uwzględniającej brakujące dane oraz zapewniającej istnienie rozmytego rozwiązania w przypadku ogólnym.***

Praca została podzielona na pięć części.

W części pierwszej (rozdział 2) dokonano przeglądu podstawowych metod szeregowania czynników w sensie AHP, co sprowadza się do przeglądu metod aproksymacji macierzy ocen. Zaproponowano również metodę aproksymacji dla przypadku z brakującymi danymi, wykorzystującą koncepcję rozwiązania ogólnego z wykorzystaniem pseudoodwrotności.

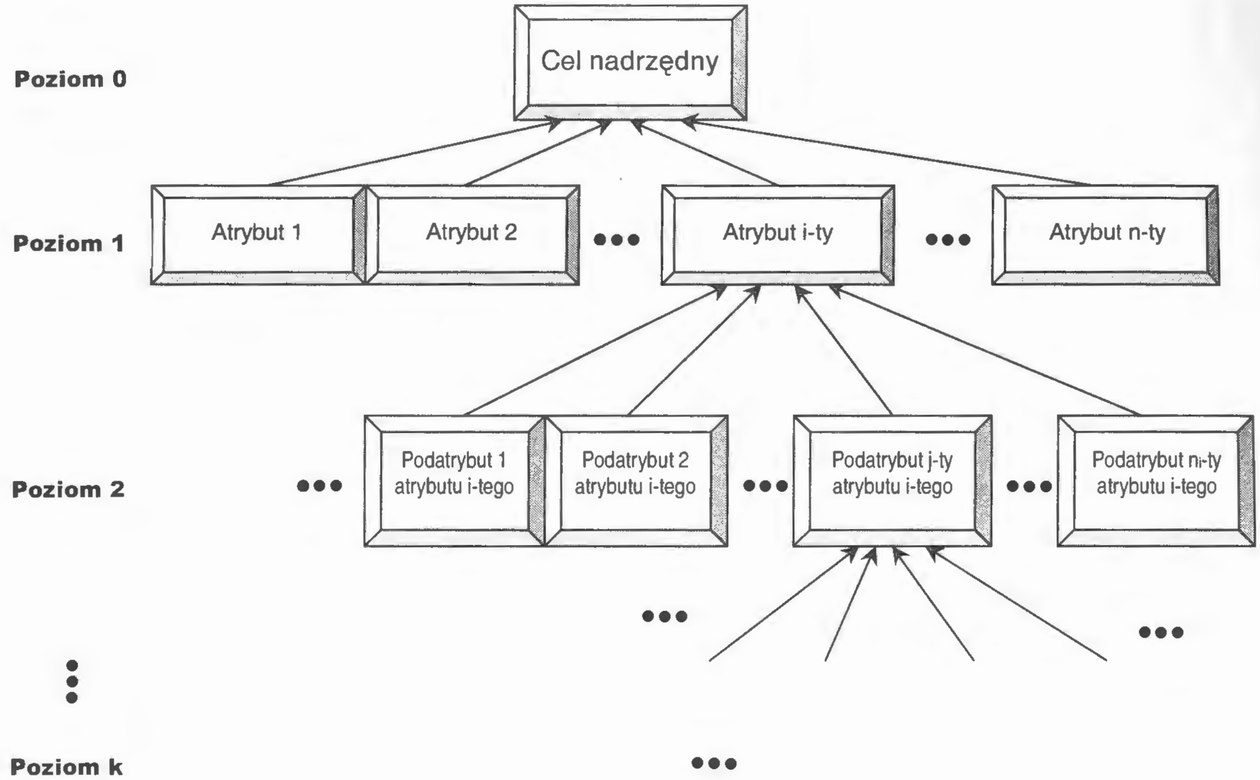
Ze względu na duże znaczenie rozwiązywania układów równań z rozmytymi współczynnikami część drugą (rozdział 3) poświęcono równaniom i układom równań rozmytych. Wprowadzono koncepcję rozwiązania jawnego i niejawnego liniowych układów równań z rozmytym wektorem prawych stron oraz pokazano pewne zależności pomiędzy nimi.

Część trzecia (rozdział 4) zawiera przegląd podstawowych metod z zakresu rozmytego rozwinięcia metody porównywania parami oraz propozycję rozwiązania zagadnienia w oparciu o koncepcję rozmytego rozwiązania jawnego.

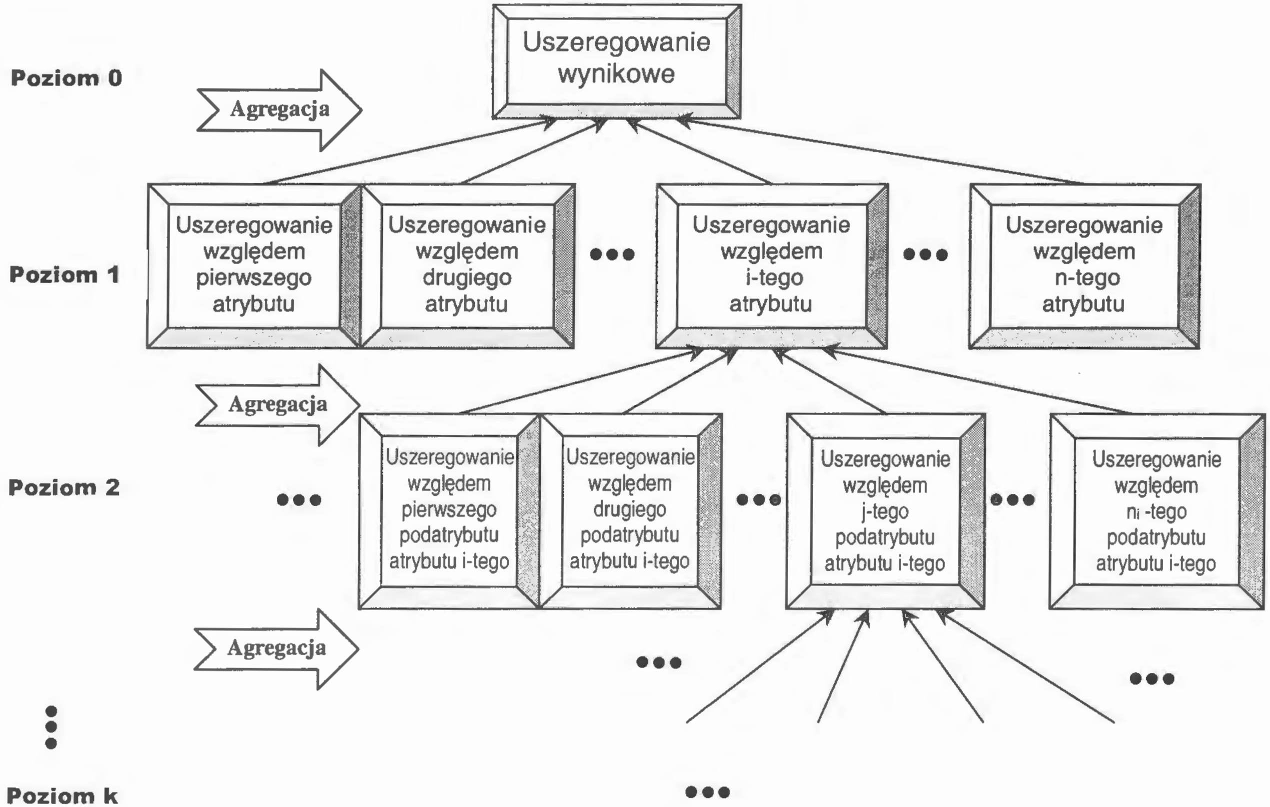
Część czwarta (rozdział 5) zawiera wnioski wynikające z pracy oraz kierunki dalszych badań w dziedzinie szeregowania czynników z wykorzystaniem metody porównywania parami.

Oryginalnymi osiągnięciami autora rozprawy, zdaniem autora są:

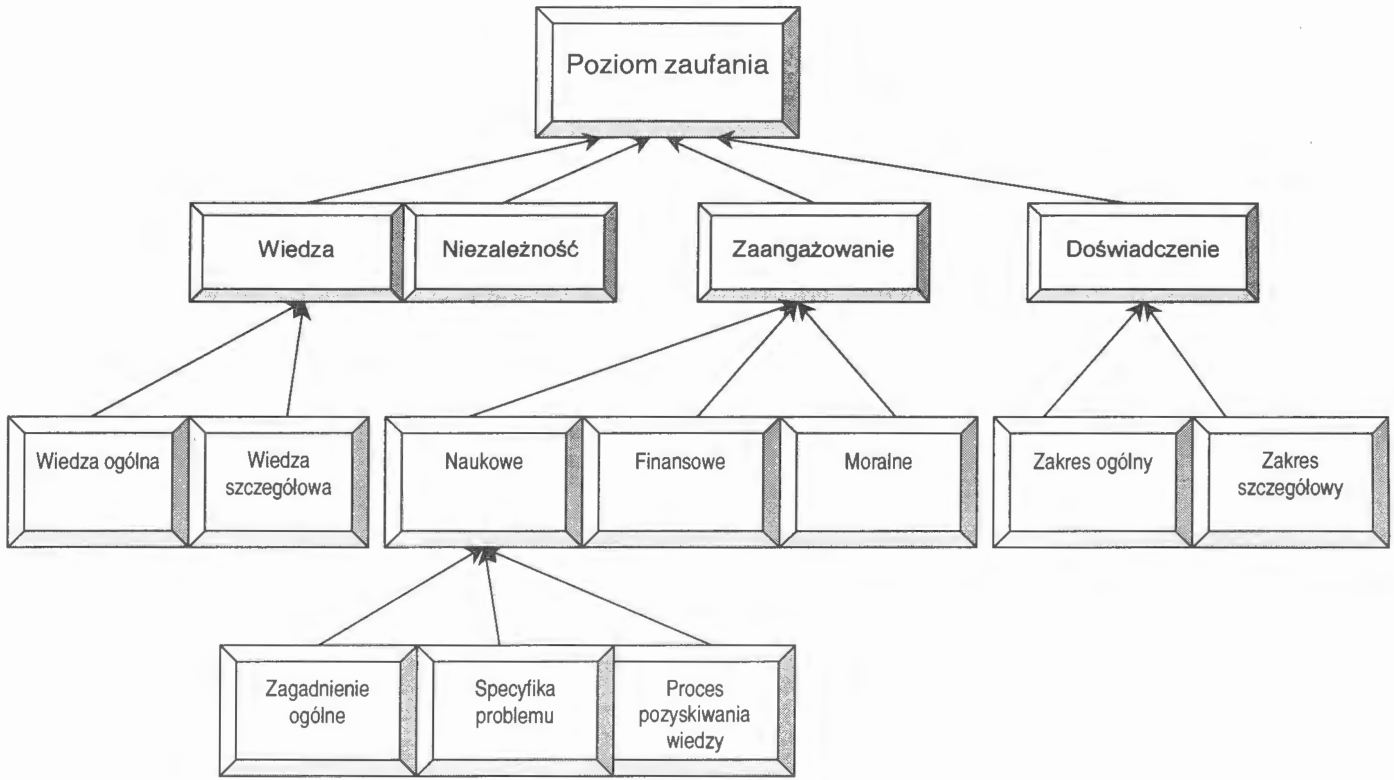
- ***Zastosowanie uogólnionej metody rozwiązania układu równań normalnych dla przypadku ostrego i rozmytego.***
- ***Udowodnienie szeregu twierdzeń i sformułowanie wniosków, pozwalających na analizę rozwiązania zagadnienia szeregowania wariantów z wykorzystaniem metody logarytmicznych najmniejszych kwadratów dla danych ostrych i rozmytych.***
- ***Zastosowanie rozwiązania jawnego w rozmytym rozwinięciu metody logarytmicznych najmniejszych kwadratów.***



Rys. 1.1 Wieloatrybutowa struktura decyzyjna



Rys. 1.2 Hierarchiczne szeregowanie wieloatrybutowe



Rys. 1.3 Struktura procesu decyzyjnego dotyczącego poziomu zaufania do eksperta

Mirosław KWIESIELEWICZ

ANALITYCZNY HIERARCHICZNY PROCES DECYZYJNY

Nierozmyte i rozmyte porównania parami

Analityczny hierarchiczny proces decyzyjny (ang. Analytic Hierarchy Proces - AHP) należy do klasy metod wielokryterialnych podejmowania decyzji. Polega na wyborze najlepszego wariantu, ze skończonej, niezbyt dużej ich liczby, z uwzględnieniem wielu kryteriów. Metoda oparta jest na porównaniach parami wariantów, dokonywanych przez ekspertów, w oparciu o subiektywną preferencję jednego wariantu nad drugim. Wynikiem porównania może być ocena nierozmyta i rozmyta. Może również zaistnieć sytuacja braku ocen. Na podstawie uzyskanych ocen otrzymywane są wagi, wyrażające ważność poszczególnych wariantów.

Praca koncentruje się na analizie i ocenie głównych metod obliczania wag. Autor proponuje również własne podejście dla przypadku z brakującymi danymi oraz danymi nierozmytymi i rozmytymi.

ISSN 0208-8029
ISBN 83-85847-69-3