POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

Krzysztof KOŁOWROCKI

ASYMPTOTYCZNE PODEJŚCIE DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI SYSTEMÓW

ASYMPTOTYCZNE PODEJŚCIE DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI SYSTEMÓW

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 27

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2001

Krzysztof KOŁOWROCKI

ASYMPTOTYCZNE PODEJŚCIE DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI SYSTEMÓW

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. inż. Janusz Karpiński
Dr hab. inż. Józef Żurek

Publikacja współfinansowana przez
KOMITET BADAŃ NAUKOWYCH w ramach projektu badawczego Nr 9 T12C 022 16 nt. "Graniczne funkcje niezawodności dużych systemów wielostanowych oraz ich zastosowania w zagadnieniach transportowych i wytrzymałościowych"

ISBN 83-85847-58-8
ISSN 0208-8029

2. Pojęcia podstawowe

Badając niezawodność systemów przyjmujemy, że rozkłady czasów T zdatności zarówno elementów jak i systemów niekoniecznie muszą być skupione na przedziale $<0,\infty)$. Wtedy funkcja niezawodności

$$R(t) = P(T > t),\ t \in (-\infty, \infty),$$

nie musi spełniać zwykle wymaganego od niej warunku

$$R(t) = 1 \text{ dla } t \in (-\infty, 0).$$

Jest to pewne uogólnienie zazwyczaj stosowanego pojęcia funkcji niezawodności. Uogólnienie to jest wygodne w rozważaniach teoretycznych. Jednocześnie, przy tym założeniu, z uzyskanych wyników dotyczących uogólnionych funkcji niezawodności, jako szczególne przypadki, otrzymuje się te same wyniki dla zwykle używanej funkcji niezawodności.

Z przyjętego założenia wynika, że pomiędzy funkcją niezawodności $R(t)$ i dystrybuantą

$$F(t) = P(T \leq t),\ t \in (-\infty, \infty),$$

istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość określona wzorem

$$R(t) = 1 - F(t),\ t \in (-\infty, \infty).$$

Dlatego też, zgodnie z własnościami dystrybuanty, prawdziwy jest następujący wniosek.

Wniosek 2.1

Funkcja niezawodności $R(t)$ jest nierosnąca, prawostronnie ciągła, $R(-\infty) = 1$ oraz $R(+\infty) = 0$.

Definicja 2.1

Funkcję niezawodności $R(t)$ nazywamy zdegenerowaną jeśli istnieje $t_0 \in (-\infty, \infty)$ takie, że

$$R(t) = \begin{cases} 1, & t < t_0 \\ 0, & t \geq t_0. \end{cases}$$

Wniosek 2.2
Funkcja

$$R(t) = 1 - \exp[-V(t)],\ t \in (-\infty,\infty),$$

jest funkcją niezawodności wtedy i tylko wtedy gdy $V(t)$ jest nieujemna, nierosnąca, prawostronnie ciągła, $V(-\infty) = \infty$, $V(\infty) = 0$, a ponadto $V(t)$ może być tożsamościowo równa ∞ w pewnym przedziale.

Wniosek 2.3
Funkcja

$$\bar{R}(t) = \exp[-\ \bar{V}(t)],\ t \in (-\infty,\infty),$$

jest funkcją niezawodności wtedy i tylko wtedy gdy $\bar{V}(t)$ jest nieujemna, niemalejąca, prawostronnie ciągła, $\bar{V}(-\infty) = 0$, $\bar{V}(\infty) = \infty$, a ponadto $\bar{V}$(t) może być tożsamościowo równa ∞ w pewnym przedziale.

Umowa 2.1
W dalszych rozważaniach, jeśli używamy symboli $V(t)$ oraz $\bar{V}(t)$, zawsze mamy na myśli funkcje o własnościach zawartych we Wniosku 2.2 oraz Wniosku 2.3. Jeśli $V(t)$ oraz $\bar{V}(t)$ są tożsamościowo równe ∞, przyjmujemy, że $\exp[-\infty] = 0$. Jeśli mówimy, że $V(t)$ oraz $\bar{V}(t)$ są nieujemne, nierosnące lub niemalejące oraz prawostronnie ciągłe to mamy na myśli przedziały, w których $V(t) \neq \infty$ oraz $\bar{V}(t) \neq \infty$. Ponadto oznaczamy zbiór punktów ciągłości funkcji niezawodności $R(t)$ symbolem C_R, a zbiór złożony z punktów ciągłości funkcji $V(t)$ oraz punktów takich, że $V(t) = \infty$ przez C_V. Podobnie zbiór punktów ciągłości funkcji niezawodności $\bar{R}(t)$ oznaczamy przez $C_{\bar{R}}$, a zbiór punktów złożony z punktów ciągłości funkcji $\bar{V}(t)$ oraz punktów takich, że $\bar{V}(t) = \infty$ przez $C_{\bar{V}}$.

Zgodnie z Definicją 2.1, Wnioskiem 2.2, Wnioskiem 2.3 oraz Umową 2.1, przyjmujemy następujące definicje.

Definicja 2.2
Funkcję $V(t)$ określoną dla $t \in (-\infty,\infty)$, nieujemną, nierosnącą, prawostronnie ciągłą oraz taką, że $V(-\infty) = \infty$, $V(\infty) = 0$ nazywamy zdegenerowaną jeśli istnieje $t_0 \in (-\infty,\infty)$ takie, że

$$V(t) = \begin{cases} \infty, & t < t_0 \\ 0, & t \geq t_0. \end{cases}$$

Definicja 2.3
Funkcję $\bar{V}(t)$ określoną dla $t \in (-\infty,\infty)$, nieujemną, niemalejącą, prawostronnie ciągłą oraz taką, że $\bar{V}(-\infty) = 0$, $\bar{V}(\infty) = \infty$ nazywamy zdegenerowaną jeśli istnieje $t_0 \in (-\infty,\infty)$ takie, że

$$\bar{V}(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ \infty, & t \geq t_0. \end{cases}$$

Przy tych określeniach, następujące wnioski są oczywiste.

Wniosek 2.4
Funkcja niezawodności

$$R(t) = 1 - \exp[-V(t)],\ t \in (-\infty,\infty),$$

jest zdegenerowana wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $V(t)$ jest zdegenerowana.

Wniosek 2.5
Funkcja niezawodności

$$\bar{R}(t) = \exp[-\ \bar{V}(t)],\ t \in (-\infty,\infty),$$

jest zdegenerowana wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $\bar{V}(t)$ jest zdegenerowana.

Asymptotyczne podejście do badania niezawodności systemów dwustanowych polega na badaniu granicznych rozkładów standaryzowanej zmiennej losowej

$$(T - b_n)/a_n,$$

gdzie T jest czasem zdatności systemu oraz $a_n > 0$, $b_n \in (-\infty, \infty)$ są odpowiednio dobranymi liczbami. Ponieważ

$$P((T - b_n)/a_n > t) = P(T > a_n t + b_n) = \boldsymbol{R}_n(a_n t + b_n),$$

gdzie $\boldsymbol{R}_n(t)$ jest funkcją niezawodności n elementowego systemu, więc przyjmujemy następującą definicję.

Definicja 2.4

Funkcję niezawodności $\mathfrak{R}(t)$ nazywamy graniczną funkcją niezawodności systemu jeśli istnieją stałe normujące $a_n > 0$, $b_n \in (-\infty,\infty)$ takie, że

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}_n(a_n t + b_n) = \mathfrak{R}(t) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}}.$$

Stąd, dla dostatecznie dużych n, otrzymujemy następujący wzór przybliżony

$$\boldsymbol{R}_n(\mathrm{t}) \cong \mathfrak{R}((t - b_n)/a_n),\ t \in (-\infty,\infty). \tag{2.1}$$

Z warunku

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}_n(a_n t + b_n) = \mathfrak{R}(t) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}},$$

wynika, że przyjmując

$$\alpha_n = a a_n,\ \beta_n = b a_n + b_n,$$

gdzie $a > 0$ oraz $b \in (-\infty,\infty)$, mamy

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}_n(\alpha_n t + \beta_n) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}_n(a_n(at + b) + b_n) = \mathfrak{R}(at + b) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}}.$$

Zatem, jeśli $\mathfrak{R}(t)$ jest graniczną funkcją niezawodności systemu, to $\mathfrak{R}(at + b)$ dla dowolnych $a > 0$ oraz $b \in (-\infty,\infty)$ jest nią także. Fakt ten usprawiedliwia następujące definicje.

Definicja 2.5

Funkcje niezawodności $\mathfrak{R}_0(t)$ oraz $\mathfrak{R}(t)$ nazywamy tego samego typu jeśli istnieją liczby $a > 0$ oraz $b \in (-\infty,\infty)$ takie, że

$$\mathfrak{R}_0(t) = \mathfrak{R}(at + b) \text{ dla } t \in (-\infty,\infty).$$

Umowa 2.2
W dalszych rozważaniach przyjmujemy następujące oznaczenia:

$x(n) << y(n)$, gdzie $x(n)$ oraz $y(n)$ są funkcjami dodatnimi, oznacza, że $x(n)$ jest rzędu dużo mniejszego niż $y(n)$ w sensie

$$\lim_{n\to\infty} x(n) / y(n) = 0,$$

$x(n) \approx y(n)$, gdzie $x(n)$ oraz $y(n)$ są funkcjami dodatnimi lub ujemnymi, oznacza, że $x(n)$ jest rzędu $y(n)$ w sensie

$$\lim_{n\to\infty} x(n) / y(n) = 1,$$

$x(n) >> y(n)$, gdzie $x(n)$ oraz $y(n)$ są funkcjami dodatnimi, oznacza, że $x(n)$ jest rzędu dużo większego niż $y(n)$ w sensie

$$\lim_{n\to\infty} x(n) / y(n) = \infty.$$

Krzysztof Kołowrocki

ASYMPTOTYCZNE PODEJŚCIE DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI SYSTEMÓW

Książka zawiera opis metod oraz wyniki badań niezawodności dużych systemów.

Rozważane są nieodnawialne systemy dwustanowe oraz systemy wielostanowe ze starzejącymi się elementami uszkadzającymi się niezależnie.

Ustalone zostały klasy możliwych granicznych funkcji niezawodności dla dwu i wielostanowych jednorodnych i niejednorodnych systemów szeregowych, równoległych, szeregowo-równoległych i równoległo-szeregowych. Problem wyznaczania granicznych funkcji niezawodności dla tych systemów został rozwiązany całościowo przy dowolnych funkcjach niezawodności ich elementów.

Przytoczone zostały przykłady zastosowań wyników do oceny niezawodności modelowych dużych systemów dwustanowych. Wyniki dotyczące systemów wielostanowych zastosowane zostały do oszacowania charakterystyk niezawodnościowych dużych systemów transportu portowego i stoczniowego.

Sformułowane zostały problemy otwarte oraz wytyczona została perspektywa dalszych badań nad metodami oceny i optymalizacji niezawodności dużych systemów.

Monografia przeznaczona jest dla czytelników zainteresowanych badaniami niezawodności oraz bezpieczeństwa eksploatacji dużych systemów technicznych na etapach ich projektowania i eksploatacji.

ISSN 0208-8029
ISBN 83-85847-58-8

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: bibliote@ibspan.waw.pl