

INSTYTUT AUTOMATYKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

P R A C E
INSTYTUTU AUTOMATYKI PAN

Zeszyt 71

JAKUB GUTENBAUM

ZAGADNIENIA ADAPTACYJNEGO STEROWANIA
WIELOWYMIAROWYMI OBIEKTAMI DYNAMICZNYMI



WARSZAWA

1968

INSTYTUT AUTOMATYKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

P R A C E
INSTYTUTU AUTOMATYKI PAN

Zeszyt 71

JAKUB GUTENBAUM

ZAGADNIENIA ADAPTACYJNEGO STEROWANIA
WIELOWYMIAROWYMI OBIEKTAMI DYNAMICZNYMI



WARSZAWA

1968

47471



Część czwarta

ZASTOSOWANIE LINIOWEGO REGULATORA OPTYMALNEGO W UKŁADZIE Z OGRANICZENIEM SYGNAŁU STERUJĄCEGO

Rozpatrzono warunki, przy których regulator optymalny dla układu liniowego będzie realizował sterowanie optymalne w układzie z ograniczeniem sygnału sterującego. Rozpatrzono dwa przypadki: przypadek ograniczonego i przypadek nieograniczonego obszaru zmian warunków początkowych. W przypadku drugim spełnienie wspomnianego warunku wymaga, aby sygnał sterujący był monotonicznie malejącą funkcją czasu.

Przedstawiono możliwość stosowania algorytmu suboptymalnego, którego realizacja zapewnia monotoniczny przebieg sygnału sterującego. Realizacja takiego algorytmu jest dużo łatwiejsza niż realizacja algorytmu optymalnego, zwłaszcza w przypadku obiektów sterowania o niepełnej informacji początkowej.

1. UWAGI OGÓLNE

Zagadnienie syntezy regulatora optymalnego dla układu liniowego w przypadku całkowitego wskaźnika jakości o kwadratowej funkcji kosztów zostało rozwiązane przez A.M. Lotowa w cyklu artykułów dotyczących tzw. analitycznego konstruowania regulatorów /84, 85/. Zagadnieniu temu były również poświęcone prace R.E. Kalmana /61/, który zajmował się zarówno syntezą regulatora dla zadanego wskaźnika jakości, jak i zagadnieniem odwrotnym, a mianowicie wyznaczeniem wskaźników jakości o kwadratowej funkcji kosztów, dla których zadany układ liniowy jest optymalny.

W pracy A.M. Lotowa i N.N. Krasowskiego /70/ omówiono przypadek, w którym na sygnał sterujący jest nałożone ograniczenie. W pracy tej podano warunki, dla których układ optymalny bez uwzględnienia ograniczeń nałożonych na sygnał sterujący będzie nadal układem optymalnym przy istnieniu ograniczeń. Jednakże celem tej pracy było jedynie wykazanie możliwości istnienia takich warunków, wobec

czego nie ma w niej efektywnej metody ich wyznaczania.

W pracy Z.V. Rekasiusa i T.C. Hsia /102/ warunki, przy których sterowanie optymalne liniowe jest sterowaniem optymalnym przy istnieniu ograniczeń, podanow postaci równania macierzowego.

W pracy C.D. Johnsona i W.M. Wonhama /58/ warunki optymalności regulatora liniowego przy ograniczeniu sygnału sterującego są przedstawione w postaci pewnej zależności współczynników funkcji kosztów od wartości własnych macierzy, określonej równaniem układu otwartego.

Wyznaczenie sterowania optymalnego w przypadku układu liniowego bez ograniczeń przy wskaźniku jakości o kwadratowej funkcji kosztów jest zadaniem stosunkowo prostym. Otrzymany w wyniku syntezy regulator optymalny jest regulatorem liniowym. To samo dotyczy, oczywiście, przypadku, gdy stany początkowe układu znajdują się w obszarze, w którym sterowanie optymalne nie osiąga ograniczenia.

Gdy sterowanie optymalne przebiega monotonicznie, wówczas, mimo iż warunki początkowe mogą być takie, że w chwili początkowej sygnał sterujący znajduje się na ograniczeniu, w obszarze, w którym znajduje się on poniżej ograniczenia (w obszarze liniowym), regulator optymalny będzie również regulatorem liniowym.

Natomiast w przypadku ogólnym, gdy możliwe jest dojście do ograniczenia z obszaru liniowego, wyznaczenie algorytmu optymalnego staje się zagadnieniem bardzo złożonym: okazuje się, że opłaca się przed osiągnięciem ograniczenia, większym kosztem niż przy optymalnym sterowaniu liniowym zbliżyć się bardziej do celu. W tym przypadku sterowanie optymalne nie jest już sterowaniem liniowym.

Sprawa komplikuje się jeszcze bardziej, gdy posiadana przez nas informacja początkowa o obiekcie sterowania jest niepełna, a więc gdy wyznaczenie sterowania optymalnego jest związane z koniecznością jednoczesnej identyfikacji obiektu.

Aby uniknąć wspomnianych trudności, które do chwili obecnej nie znalazły pozytywnego rozwiązania, proponuje się zastosowanie pewnego uproszczenia. Polega ono na tym, że zamiast sterowania optymalizującego zadany wskaźnik jakości optymalizuje się pewien wskaźnik jakości zastępczy, zbliżony w sensie przyjętej miary do wskaźnika rzeczywistego. Zastępczy wskaźnik jakości jest tak dobrany, że optymalne dla niego sterowanie jest przebiegiem monotonicznym. Jest więc stosunkowo łatwe do wyznaczenia nawet w przypadku nie-

pełnej informacji o procesie sterowanym,

2. WARUNKI JEDNOCZESNEJ OPTIMALNOŚCI UKŁADU LINIOWEGO I UKŁADU Z OGRANICZENIEM

Zagadnienie rozpatrywane w tym rozdziale polega na określeniu warunków, przy których sygnał sterujący minimalizujący funkcjonał

$$I(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} [\underline{x}^T(t) B \underline{x}(t) + h^2 u^2(t)] dt = \int_{t_0}^{\infty} f[\underline{x}(t), u(t)] dt \quad (1)$$

dla przebiegów w układzie opisanym równaniem wektorowym

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = Q \underline{x}(t) + \underline{G} u(t) \quad \text{przy} \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad (2)$$

gdzie: $\underline{x}(t)$ - wektor stanu, Q - macierz kwadratowa, \underline{G} - wektor, $u(t)$ - wielkość skalarna, przy ograniczeniu

$$|u(t)| \leq L \quad (3)$$

ma postać

$$u^L(t) = \begin{cases} L & \text{przy} \quad u^0(t) \geq L \\ u^0 & \text{przy} \quad u^0(t) < L \\ -L & \text{przy} \quad u^0(t) \leq -L \end{cases} \quad (4)$$

gdzie

$$u^0(t) = \underline{c}^{0T} \underline{x}(t) \quad (5)$$

Sterowanie (5) minimalizuje funkcjonał (1) w przypadku układu liniowego, tzn. bez uwzględnienia ograniczeń (3).

Zagadnienie to ma bardzo ważny aspekt praktyczny, gdyż liniowy

regulator optymalny (5) przy istnieniu ograniczeń będzie realizował samoczynnie algorytm (4). Jeżeli jest to więc algorytm optymalny, to przy syntezie można nie uwzględniać wpływu ograniczeń. To samo dotyczy układów adaptacyjnych, w których synteza optymalnego regulatora liniowego odbywa się automatycznie.

Warunki, przy których algorytm (4) dla omawianego zadania jest algorytmem optymalnym, są przedstawione w sposób ogólny w pracy N. N. Krasowskiego i A.M. Lotowa /70/. W pracy tej punktem wyjścia jest równanie programowania dynamicznego Bellmana. Jak wiadomo, wyznaczenie sterowania optymalnego metodą programowania dynamicznego sprowadza się do rozwiązania względem funkcji $V(\underline{X}) = \min_u I(\underline{X}, u)$ równania

$$\min_{|u| \leq L} \left[\frac{dV}{dt} + f(\underline{X}, u) \right] = \frac{dV}{dt} \Big|_{u=u^L} + f(\underline{X}, u^L) = 0 \quad (6)$$

przy czym

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

Jeżeli przy rozwiązaniu równania (6) obszar zmienności warunków początkowych \underline{X}_0 , w którym szuka się rozwiązania $V(\underline{X})$, rozбивa się na podobszary $|\underline{c}^{OT} \underline{X}| < L$ oraz $|\underline{c}^{OT} \underline{X}| \geq L$, to algorytm (4) będzie algorytmem optymalnym wtedy i tylko wtedy, kiedy funkcja $V(\underline{X})$, spełniająca w poszczególnych obszarach równanie (6), będzie ciągła przy przejściu z jednego podobszary do innego podobszary. Natomiast w przypadku gdy funkcja $V(\underline{X})$ jest ciągła wszędzie oprócz punktów leżących na hiperpłaszczyznach rozdzielających podobszary

$$F_k(\underline{X}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l$$

przy czym

$$\lim_{\pm \rightarrow \infty} \underline{X}(t) = 0, \quad V(0) = 0, \quad \int_{t_0}^{\infty} f(\underline{X}, u) dt < \infty$$

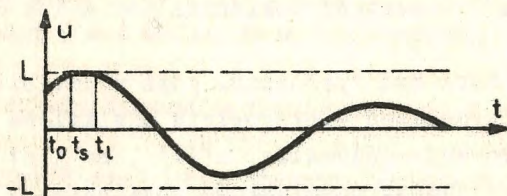
to algorytm (4) minimalizuje funkcjonal

$$I_S^*(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} f(\underline{X}, u) dt - \sum_{s=1}^r \Delta_s(V) \quad (7)$$

przy czym: $\Delta_s(V)$ - skok funkcji $V(\underline{X})$ przy przejściu przez hiperpłaszczyznę rozdzielającą; r - liczba przejść toru punktu opisującego przez tę hiperpłaszczyznę.

Biorąc za podstawę podany warunek ciągłości można sformułować twierdzenie, że algorytm (4) określa sterowanie optymalne jedynie w przypadkach, gdy jego realizacja nie powoduje przejścia toru punktu opisującego z obszaru sterowania liniowego w obszar nasycenia. Dowód tego można oprzeć na następującym rozumowaniu:

Zakłada się, że startuje się od warunków początkowych, dla których dopuszczalne jest sterowanie liniowe. Bez ograniczenia ogólności rozważań można założyć, że interesuje nas obszar warunków początkowych, dla którego przyjęty algorytm sterowania powoduje jedynie jednokrotne przejście z obszaru liniowego w obszar nasycenia (rys. 1).



Rys. 1. Przebieg $u(t)$ w układzie z ograniczeniem $|u(t)| \leq L$

Sprawdźmy, czy algorytm (4) $[u(t) = u^L(t)]$ realizuje w tym przypadku sterowanie optymalne. W tym celu rozpatrzmy poszczególne odcinki toru punktu opisującego w przestrzeni stanu.

Od warunków początkowych w chwili t_0 , a więc przy $\underline{C}^{OT} \underline{X}(t_0) =$

$= L$ oraz $\frac{d}{dt} [c^{OT} \underline{x}(t)]_{t=t_s} > 0$, sterowaniem optymalnym jest na pewno sterowanie

$$u(t) = \begin{cases} L & \underline{c}^{OT} \underline{x}(t) \geq L \quad t_s \leq t < t_1 \\ u^o(t) & \underline{c}^{OT} \underline{x}(t) < L \quad t_1 \leq t < \infty \end{cases}$$

wiadomo bowiem, że przy $\underline{c}^{OT} \underline{x}(t) \geq L$ sterowanie $u(t) = L$ spełnia równanie Bellmana, natomiast w chwili t_1 , a więc przy $\underline{c}^{OT} \underline{x}(t_1) = L$ i $\frac{d}{dt} [c^{OT} \underline{x}(t)]_{t=t_1} < 0$ sterowaniem optymalnym jest

na pewno sterowanie $u^o(t)$, gdyż jedynie to sterowanie minimalizuje funkcjonal (1) w granicach $t_1 \leq t < \infty$.

Wartość ekstremalną wskaźnika jakości dla warunków początkowych istniejących w chwili t_s oznacza się symbolem $V(t_s, u^L)$.

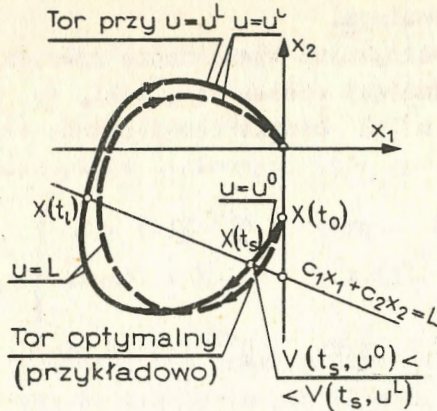
Obecnie zakłada się, że od punktu w przestrzeni stanu $\underline{x}(t_0)$ doszło się do punktu $\underline{x}(t_s)$ stosując sterowanie $u(t) = u^o(t)$. Sterowanie to spełnia równanie Bellmana na tym odcinku toru, jednakże w chwili t_s otrzymuje się

$$V(t_s, u^o) < V(t_s, u^L) \quad (8)$$

przy czym $V(t_s, u^o)$ - wartość wskaźnika jakości w chwili t_s przy sterowaniu $u(t) = u^o(t)$.

Nierówność (8) musi być spełniona, gdyż w przeciwnym przypadku - w układzie bez ograniczeń - sterowanie nieliniowe byłoby korzystniejsze niż sterowanie optymalne $u^o(t)$, co jest absurdem. Nierówność (8) oznacza jednak nieciągłość rozwiązania równania Bellmana przy sterowaniu (4) w punkcie $t = t_s$, czyli nieciągłość toru ekstremalnego w tym punkcie. Z przedstawionego rozumowania wynika więc jednoznaczny wniosek, że sterowanie $u(t) = u^L(t)$ nie jest sterowaniem optymalnym, w przypadku ogólnym.

Przeprowadzone rozumowanie dla układu drugiego rzędu ilustruje rys. 2. Linia ciągłą oznaczono na nim tor punktu opisujuącego dla $u(t) = u^L(t)$, natomiast linią przerywaną - przykładowo - tor optymalny.



Rys. 2. Tory punktu opisującego w układzie drugiego rzędu przy sterowaniu $u(t) = u^L(t)$ (linia ciągła) oraz przy sterowaniu optymalnym (linia przerywana)

Sterowanie $u(t) = u^L(t)$ będzie sterowaniem optymalnym jedynie wtedy, kiedy jego realizacja nie spowoduje przejścia sygnału sterującego z obszaru liniowego w obszar nasycenia. Postulat ten może być spełniony w następujących przypadkach:

- gdy obszar zmienności warunków początkowych \underline{X}_0 jest odpowiednio ograniczony,
- gdy sterowanie optymalne jest monotonicznie malejącą funkcją czasu.

Rozpatrzmy dokładniej oba te przypadki.

3. OGRANICZENIE OBSZARU ZMIENNOŚCI WARUNKÓW POCZĄTKOWYCH

Jest rzeczą oczywistą, że dla układu stabilnego w przestrzeni współrzędnych stanu $\underline{X}(t)$ można wyodrębnić pewien obszar S taki, że przy $\underline{X}_0 = \underline{X}(t = t_0) \in S$ i $u(t) = u^0(t)$ będzie obowiązywała nierówność $\underline{C}^{OT} \underline{X}(t) \leq L$ dla $t \geq t_0$.

Obszar S będzie ograniczony hiperpłaszczyznami $\underline{C}^{OT} \underline{X}(t) = \pm L$ oraz hiperpowierzchniami, na których znajdują się tory styczne do tych hiperpłaszczyzn.

Dla warunków początkowych znajdujących się w obszarze S ogra-

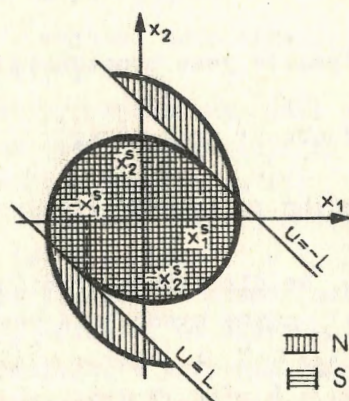
niczenie nie odgrywa żadnej roli, a więc sterowanie $u(t) = u^0(t)$ jest sterowaniem optymalnym.

W przestrzeni współrzędnych stanu można również wyodrębnić pewien obszar N , obejmujący obszar S , taki, że przy $\underline{x}_0 = \underline{x}(t = t_0) \in N$ i $u(t) = u^L(t)$ będzie obowiązywało

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\underline{c}^{oT} \underline{x}(t) \right] < 0 & \quad \text{przy} \quad \underline{c}^{oT} \underline{x}(t) = L \\ \frac{d}{dt} \left[\underline{c}^{oT} \underline{x}(t) \right] > 0 & \quad \text{przy} \quad \underline{c}^{oT} \underline{x}(t) = -L \end{aligned} \right\} \text{ dla } t > t_0 \quad (9)$$

Innymi słowy, dla warunków początkowych leżących w obszarze N sygnał sterujący może przejść z obszaru nasycenia w obszar liniowy, lecz nie przeciwnie. Wobec tego w rozwiązaniu równania (6) nie będzie punktów nieciągłości, które występują jedynie przy przejściu wielkości $\underline{c}^{oT} \underline{x}(t)$ z obszaru liniowego w obszar nasycenia. A więc dla warunków początkowych znajdujących się w obszarze N sterowanie $u(t) = u^L(t)$ będzie sterowaniem optymalnym.

Obszary S i N dla układu drugiego rzędu przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Obszary N i S w układzie drugiego rzędu

Dla liniowego układu drugiego rzędu optymalny sygnał sterujący

jest wyrażony zależnością

$$u^0(t) = c_1^0 x_1(t) + c_2^0 x_2(t) \quad (9)$$

Na płaszczyźnie stanu (rys. 3) można wykreślić proste ograniczające obszar sterowania liniowego. Będą one określone równaniami:

$$c_1^0 x_1(t) + c_2^0 x_2(t) = L, \quad c_1^0 x_1(t) + c_2^0 x_2(t) = -L \quad (10)$$

Obszar S jest wyznaczony przez proste (10) oraz toru punktu opisuującego, styczne do tych prostych (obszar S jest zakreskowany poziomo na rys. 3).

Punkt opisuujący, którego tor rozpoczyna się w obszarze N (zakreskowanym pionowo na rys. 3), może przeciąć proste ograniczające obszar sterowania liniowego jedynie w kierunku z obszaru nasycenia w obszar sterowania liniowego.

P r z y k ł a d . Wyprowadzimy równania torów ograniczających dla układu opisanego równaniami

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u \quad (11)$$

przy wskaźniku jakości

$$I = \int_0^{\infty} (x_1^2 + h^2 u^2) dt \quad (12)$$

i przy ograniczeniu

$$|u| \leq L \quad (13)$$

Sygnał sterujący $u^0(t)$ minimalizujący funkcjonal (12) bez uwzględnienia ograniczeń jest wyrażony wzorem (9), w którym (zob. (8)) w części trzeciej)

$$c_1^0 = -\frac{1}{h}, \quad c_2^0 = -\sqrt{\frac{2}{h}} \quad (14)$$

Równania liniowego układu optymalnego otrzymuje się po podstawieniu (14) do (11).

Aby otrzymać tory optymalne w przestrzeni stanu, dzieli się przez siebie równania (11) przy $u(t) = u^0(t)$. Otrzymuje się

$$-\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{1}{h} \frac{x_1}{x_2} + \sqrt{\frac{2}{h}} \quad (15)$$

Po podstawieniu $x_1/x_2 = y$ do (15) otrzymuje się równanie z rozdzielającymi się zmiennymi, które po scałkowaniu i uporządkowaniu przyjmuje postać równania spirali logarytmicznej

$$\ln K(x_1^2 + \sqrt{2h} x_1 x_2 + hx_2^2) + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{h}} \frac{x_1}{x_2} \right) = 0 \quad (16)$$

przy czym K - stała całkowania zależna od warunków początkowych.

W punktach styczności $x = x^s$ nachylenie prostych (10) ograniczających obszar liniowy

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{c_1^0}{c_2^0} = -\sqrt{\frac{1}{2h}} \quad (17)$$

oraz nachylenie torów fazowych krzywej (16) wyrażone zależnością (15) są sobie równe

$$\sqrt{\frac{1}{2h}} = \frac{1}{h} \frac{x_1^s}{x_2^s} + \sqrt{\frac{2}{h}} \quad (18)$$

Poza tym w punktach styczności obowiązują równania (10). Po podstawieniu (18) do (10) otrzymuje się współrzędne punktów styczności

$$x_2^s = \pm \sqrt{2h} L, \quad x_1^s = \pm hL \quad (19)$$

Po podstawieniu (19) do (16) otrzymuje się stałą całkowania

określającą tory graniczne

$$K^B = 1/L^2 h^2 \quad (20)$$

Równania określające tory graniczne otrzymuje się podstawiając stałą całkowania K^B z (20) do (16)

$$\ln \frac{1}{L^2 h^2} (x_1^2 + \sqrt{2h} x_1 x_2 + h x_2^2) + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{h}} \frac{x_1}{x_2} \right) = 0 \quad (21)$$

lub

$$\exp \left[-2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{h}} \frac{x_1}{x_2} \right) \right] = \frac{1}{L^2 h^2} (x_1^2 + \sqrt{2h} x_1 x_2 + h x_2^2) \quad (22)$$

4. WARUNKI MONOTONICZNOŚCI SYGNAŁU STERUJĄCEGO

Przebieg sygnału sterującego $u(t)$ w obszarze sterowań dopuszczalnych $|u(t)| \leq L$ będzie malejącym przebiegiem monotonicznym, niezależnie od warunków początkowych, gdy będzie różnił się znakiem od swojej pochodnej względem czasu. Warunek ten dla przebiegów opisanych liniowymi równaniami różniczkowymi można zapisać w postaci

$$\frac{du(t)}{dt} = \alpha u(t) \quad (23)$$

przy czym $\alpha < 0$.

Po uwzględnieniu równania obiektu sterowania (2) i równania regulatora

$$u(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) \quad (24)$$

otrzymamy

$$\underline{c}^T (Q + \underline{g} \underline{c}^T) \underline{x}(t) = \alpha \underline{c}^T \underline{x}(t)$$

lub

$$\underline{c}^T(Q + G\underline{c}^T) = \alpha \underline{c}^T \quad (25)$$

W pracy /102/ równanie macierzowe (25) jest punktem wyjścia do otrzymania warunków, dla których algorytm (4) jest algorytmem optymalnym.

Z (25) można wyznaczyć zależność

$$c_i = f_i(\alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (26)$$

Parametry c_i , które spełniają równania (25), będą w dalszym ciągu oznaczone symbolem c_i^* . Są to parametry, przy których sygnał sterujący będzie monotonicznie malejącą funkcją czasu.

P r z y k ł a d . Rozpatrzmy układ rzędu drugiego opisany równaniem

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q_1 & -q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad \begin{array}{l} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{array} \quad (27)$$

gdzie

$$u = c_1 x_1 + x_2 x_2 \quad (28)$$

W tym przypadku równanie (25) będzie miało postać

$$\begin{bmatrix} c_1^* & c_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c_1^* - q_1 & c_2^* - q_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} c_1^* & c_2^* \end{bmatrix} \quad (29)$$

Z (29) otrzymujemy równania

$$\alpha c_1^* = c_2^*(c_1^* - q_1), \quad \alpha c_2^* = c_1^* + c_2^*(c_2^* - q_2) \quad (30)$$

skąd wynika

$$\begin{aligned}c_1^* &= \left(\frac{q_2}{2} \pm \sqrt{\frac{q_2^2}{4} - q_1}\right)c_2^* \\c_2^* &= \alpha + \frac{q_2}{2} \pm \sqrt{\frac{q_2^2}{4} - q_1}\end{aligned}\tag{31}$$

Wyznamy przebiegi w układzie: $x_1(t)$, $x_2(t)$, $u(t)$.
Równanie charakterystyczne układu ma postać

$$\gamma^2 + (q_2 - c_2)\gamma + q_1 - c_1 = 0\tag{32}$$

Po uwzględnieniu warunków monotoniczności (30) otrzymamy z (32)

$$\gamma^2 + \left(\frac{c_1^*}{c_2^*} - \alpha\right)\gamma - \frac{c_1^*}{c_2^*}\alpha = 0\tag{33}$$

Z (33) wynika

$$\gamma_1 = \alpha, \quad \gamma_2 = -\frac{c_1^*}{c_2^*}\alpha\tag{34}$$

Przebiegi $x_1(t)$ oraz $x_2(t)$ można przedstawić następująco:

$$x_1(t) = x_{10} \exp \alpha t + x_{20} \exp \left(-\frac{c_1^*}{c_2^*} t\right)\tag{35}$$

$$x_2(t) = \alpha x_{10} \exp \alpha t - \frac{c_1^*}{c_2^*} x_{20} \exp \left(-\frac{c_1^*}{c_2^*} t\right)$$

Po podstawieniu (31) i (35) do (28) otrzymuje się przebieg

$$u(t) = (q_1 - \alpha q_2 + \alpha^2)x_{10} \exp \alpha t\tag{36}$$

5. WYBÓR STEROWANIA SUBOPTYMALNEGO W KLASIE STEROWAŃ MONOTONICZNYCH

Gdy wartości optymalnych parametrów regulatora nie spełniają warunku monotoniczności, optymalizacja układu przy istnieniu ograniczeń wymaga zastosowania regulatora nieliniowego o parametrach zależnych od bieżących wartości współrzędnych stanu. Zagadnienie staje się skomplikowane zarówno, jeśli chodzi o obliczenia, jak i realizację. Bardzo trudne, jeżeli nie wręcz niemożliwe, staje się rozwiązanie problemu w przypadku niepełnej apriorycznej informacji o procesie sterowanym, a więc w przypadku, gdy istnieje konieczność stosowania regulatora adaptacyjnego.

W związku z powyższym wydaje się sensowne przejście od zagadnienia optymalnego do zagadnienia suboptymalnego, które polega na doborze sygnału sterującego w klasie przebiegów monotonicznych.

Dla układu liniowego stabilnego, przy kwadratowej funkcji kosztów, wartość wskaźnika jakości dla zadanych warunków początkowych jest określona formą kwadratową współrzędnych stanu w chwili początkowej (zob. część trzecia):

$$I(t_0) = \underline{\underline{X}}^T(t_0) \underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}}(t_0) \quad (37)$$

Uwzględniając że równanie regulatora ma postać

$$u(t) = \underline{\underline{C}}^T \underline{\underline{X}}(t) \quad (38)$$

otrzymuje się z (1), (2) i (37) po zróżniczkowaniu i podstawieniu (24)

$$-(B + h^2 \underline{\underline{C}} \underline{\underline{C}}^T) = (Q + \underline{\underline{G}} \underline{\underline{C}}^T)^T \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}} (Q + \underline{\underline{G}} \underline{\underline{C}}^T) \quad (39)$$

Parametry regulatora optymalnego są określone zależnością

$$\underline{\underline{C}}^0 = - \frac{1}{h^2} \underline{\underline{A}}^0 \underline{\underline{G}} \quad (40)$$

gdzie $\underline{\underline{A}}^0 = A(Q, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{C}}) \Big|_{\underline{\underline{C}}=\underline{\underline{C}}^0}$.

Po podstawieniu (40) do (39) otrzymuje się równanie obowiązujące dla sterowania optymalnego

$$Q^T A + A Q - \frac{1}{h^2} A G^T G A + B = 0 \quad (41)$$

Z równania macierzowego (39) można wyznaczyć elementy macierzy A jako funkcje elementów macierzy B i wektora C zgodnie z wzorem (12).

Podstawiając następnie elementy macierzy A do równań wynikających z (41) uzyskuje się zależności wiążące parametry regulatora optymalnego, obiektu sterowania i współczynniki funkcji kosztów.

Przy zadanych równaniach oraz parametrach obiektu sterowania i regulatora z zależności tych można wyznaczyć elementy macierzy B, określające wskaźnik jakości o postaci (1), względem którego dany układ jest optymalny.

Gdy do wzoru (41) podstawić współczynniki $c_1^0 = c_1^*$ spełniające warunki monotoniczności, otrzymuje się macierz

$$B = B^*(\alpha) \quad (42)$$

określającą rodzinę wskaźników jakości, dla których sterowanie optymalne danym układem jest monotoniczną funkcją czasu.

Oczywiście, tylko w szczególnych przypadkach zadany wskaźnik jakości będzie należał do rodziny wyznaczonej zależnością (42). Jeżeli jednak różnice są niewielkie, można zgodzić się na pewną suboptymalizację, która polega na zastąpieniu rzeczywistego wskaźnika jakości wskaźnikiem zastępczym

$$I^*(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \left[\underline{x}^T(t) B^* \underline{x}(t) + h^2 u^2(t) \right] dt \quad (43)$$

Jako podstawę do wyboru wartości współczynnika α można wykorzystać na przykład warunek minimalizacji wyrażenia

$$\Delta b(\alpha) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (b_{ij} - b_{ij}^*)^2 \quad (44)$$

Oczywista, w niektórych przypadkach, na przykład gdy sterowanie optymalne jest silnie oscylacyjne, proponowane uproszczenie może okazać się nie do przyjęcia.

Należy również zauważyć, że zaproponowana tu metoda nie rozwiązuje zagadnienia optymalnego sterowania obiektami o zmieniających się parametrach za pomocą algorytmu przedstawionego w części 3, albowiem jednoczesne spełnienie warunków monotoniczności i warunków minimalizacji wskaźnika jakości, w ogólnym przypadku, możliwe jest jedynie dla określonych parametrów obiektu sterowania. Optymalne sterowanie przy innych parametrach może już nie spełniać warunku monotoniczności. Natomiast w przypadku ograniczonego obszaru warunków początkowych, gdy sterowanie optymalne ma postać (4), do obiektu o zmieniających się parametrach można zastosować algorytm adaptacji zaproponowany w części 3.

P r z y k ł a d . Rozpatrzmy układ rzędu drugiego (rys. 4) opisany równaniami:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= x_2, & x_1(t_0) &= x_{10} \\ dx_2/dt &= u - x_2, & x_2(t_0) &= x_{20} \end{aligned} \quad (45)$$

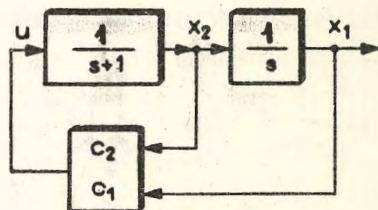
gdzie

$$u = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

przy wskaźniku jakości

$$I(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} (b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + h^2 u^2) dt \quad (46)$$

Rys. 4. Schemat blokowy układu opisanego równaniem (45)



Szuka się współczynników $b_{11} = b_{11}^*$ i $b_{22} = b_{22}^*$, dla których sterowanie optymalne jest sterowaniem monotonicznym.

Parametry regulatora, przy których sterowanie jest przebiegiem monotonicznym, otrzymuje się z zależności (25), która w rozpatrywanym przypadku ma postać

$$\alpha c_1^* = c_1^* c_2^*, \quad \alpha c_2^* = c_1^* + c_2^* (c_2^* - 1) \quad (47)$$

skąd wynika

$$c_1^* = \alpha, \quad c_2^* = \alpha. \quad (48)$$

W dalszym ciągu na podstawie (44) oblicza się

$$a_{12} = - \frac{b_{11} + c_1^2 h^2}{2c_1}, \quad a_{22} = \frac{b_{11} + c_1^2 h^2 - c_1 (b_{22} + c_2^2 h^2)}{2(c_2 - 1)c_1} \quad (49)$$

Współczynnik a_{11} nie jest potrzebny do dalszych obliczeń. Po podstawieniu (48) do (49) otrzymuje się

$$a_{12} = - \frac{b_{11}^* + \alpha^2 h^2}{2\alpha}, \quad a_{22} = \frac{\alpha h^2 (2 - \alpha) - b_{22}^*}{2(\alpha - 1)} \quad (50)$$

Po podstawieniu do (41) wzorów (50) otrzymuje się

$$b_{11}^* = h^2 \alpha^2, \quad b_{22}^* = h^2 \alpha^2 \quad (51)$$

Z (51) wynika, że monotoniczny przebieg sygnału sterującego jest przebiegiem optymalnym dla układu (45) wówczas, gdy wskaźnik jakości ma postać

$$I(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} [h^2 \alpha^2 (x_1^2 + x_2^2) + u^2] dt \quad (52)$$

a więc, gdy współczynniki funkcji kosztów przy współrzędnych x_1 i x_2 będą jednakowe. Natomiast w przypadku gdy wskaźnik jakości ma inną postać, można dokonać suboptymalizacji zgodnie ze wzorem (44).

Założmy jako przykład, że wskaźnik jakości ma postać

$$I(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} (x_1^2 + 0,5x_2^2 + u^2) dt \quad (53)$$

Szuka się zastępczego wskaźnika jakości minimalizując względem α wyrażenie

$$\Delta b(\alpha) = (1 - \alpha^2)^2 + (0,5 - \alpha^2)^2 \quad (54)$$

Różniczkując (54) względem α i przyrównując otrzymane wyrażenie do zera, otrzymuje się

$$\alpha_{\text{opt}} = 0,75$$

Zastępczy wskaźnik jakości ma więc postać

$$I^*(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} [0,75(x_1^2 + x_2^2) + u^2] dt \quad (55)$$

IBS PAN

47471