

INSTYTUT AUTOMATYKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

P R A C E
INSTYTUTU AUTOMATYKI PAN

Zeszyt 71

JAKUB GUTENBAUM

ZAGADNIENIA ADAPTACYJNEGO STEROWANIA
WIELOWYMIAROWYMI OBIEKTAMI DYNAMICZNYMI



WARSZAWA

1968

INSTYTUT AUTOMATYKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

P R A C E
INSTYTUTU AUTOMATYKI PAN

Zeszyt 71

JAKUB GUTENBAUM

ZAGADNIENIA ADAPTACYJNEGO STEROWANIA
WIELOWYMIAROWYMI OBIEKTAMI DYNAMICZNYMI



WARSZAWA

1968

47471



Część druga

WYZNACZANIE PARAMETRÓW PEWNYCH WIELOWYMIAROWYCH NIELINIOWYCH OBIEKTÓW STEROWANIA

Przedstawiono metodę wyznaczania parametrów wielowymiarowych nieliniowych obiektów sterowania w toku ich normalnej pracy. Metodę można stosować w układach, w których istnieje możliwość pomiaru lub wyznaczania współrzędnych stanu, a równania różniczkowe układu można przedstawić w postaci (2). Uwzględniono działanie na układ addytywnych zakłóceń przypadkowych. Jako przykład rozpatrzono identyfikację parametrów kinetycznych cyklicznego procesu chemicznego.

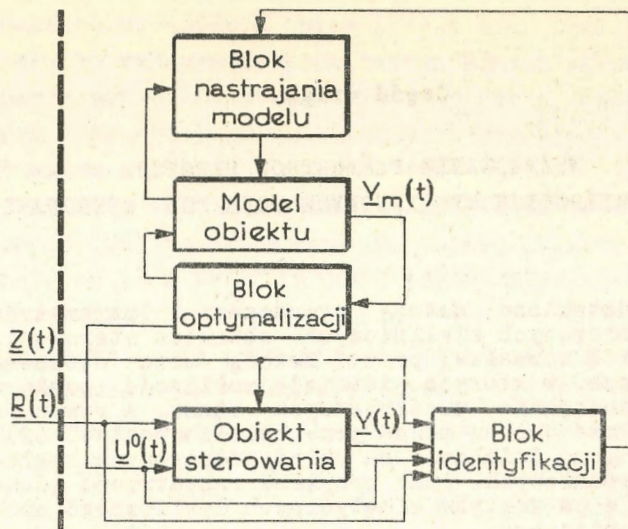
1. UWAGI OGÓLNE

Z punktu widzenia nowoczesnych problemów automatyki z zagadnieniem wyznaczania parametrów obiektów sterowania spotykamy się w zasadzie w dwóch przypadkach:

a. Optymalne sterowanie wyznaczane jest na podstawie obliczeń dokonywanych na modelu matematycznym obiektu /4, 33, 52/ (rys. 1). Parametry obiektu ulegają jednak powolnym zmianom i wskutek tego istnieje konieczność ich okresowej identyfikacji za pomocą pomiarów dokonywanych na obiekcie rzeczywistym. Typowym przykładem jest tu proces chemiczny, który przebiega w reaktorze w obecności katalizatora. Zmiana aktywności katalizatora powoduje zmiany parametrów procesu. Zmiany te powinny być uwzględniane przy wyznaczaniu sterowania optymalnego /2, 15, 101, 103/.

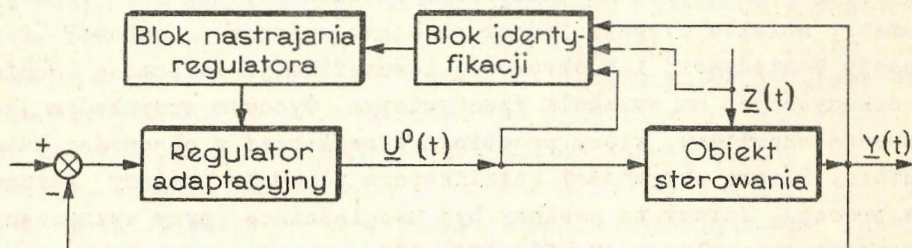
b. W układzie sterowania urządzeniem sterującym jest regulator adaptacyjny, który do wytworzenia sygnału optymalnego powinien otrzymywać informacje o aktualnych wartościach parametrów (rys.2). Przykładem może tu być autopilot adaptacyjny zmieniający algorytm sterowania w zależności od warunków lotu /89, 93, 110/. Ten przykład dotyczy w zasadzie układów mało złożonych, o niewielu parametrach nastrajanych.

W tej części pracy przedstawiono pewien sposób wyznaczania pa-



Rys. 1. Wyznaczanie optymalnego sterowania za pośrednictwem modelu matematycznego obiektu sterowania

$\underline{R}(t)$ - wielkości wejściowe niesterowane
 $\underline{U}^0(t)$ - optymalne wielkości sterujące
 $\underline{Y}(t)$ - wielkości wyjściowe obiektu
 $\underline{Y}_m(t)$ - wielkości wyjściowe modelu
 $\underline{Z}(t)$ - zakłócenia



Rys. 2. Układ sterowania z regulatorem adaptacyjnym

rametrów dynamicznych obiektów sterowania w toku ich pracy. Sposób ten jest rozszerzeniem na niektóre układy nieliniowe i wielowymiarowe metody opisanej przez Mishkina i Corbina /90/, Zaborszky'ego

i Bergera /132/ oraz innych /18, 82, 131/. Uogólnienie stało się możliwe dzięki pewnym założeniom, z których najistotniejsze polega na tym, że wszystkie współrzędne stanu obiektu mogą być mierzone lub estymowane. Należy przy tym podkreślić, że znajomość współrzędnych stanu jest i tak konieczna do realizacji sterowania optymalnego obiektem dynamicznym /60, 95/.

2. POSTAWIENIE PROBLEMU

Rozpatrzmy problem wyznaczania nieznanymi, lecz dostatecznie wolnozmiennymi parametrami obiektów sterowania, opisanych równaniami różniczkowymi typu

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \mathbf{X}, \mathbf{U}, t); \quad \mathbf{X}(t = 0) = \mathbf{X}_0 \quad (1)$$

przy czym: $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ - wektor współrzędnych stanu, $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ - wektor sygnałów sterujących, \mathbf{Q} - wektor nieznanymi parametrów obiektu złożony z podwektorów $\mathbf{Q}^i = q_1^i, q_2^i, \dots, q_{1-1}^i$, ($i = 1, 2, \dots, n$). Zakładamy, że wszystkie składowe wektora stanu \mathbf{X} i wektora sygnałów sterujących \mathbf{U} można mierzyć lub wyznaczać podczas pracy układu sterowania oraz że postać wektora funkcji \mathbf{F} , stanowiących prawą stronę równań (1), jest znana.

Przedstawimy sposób wyznaczania elementów wektora \mathbf{Q} dla przypadku, gdy z n równań (1) opisujących obiekt można po uporządkowaniu utworzyć układ równań o postaci

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1^0(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t) + b_1(\mathbf{Q}^1, \bar{\mathbf{U}})f_1(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2^0(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t) + b_2(\mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2, \bar{\mathbf{U}})f_2(\mathbf{Q}^1, \mathbf{X}, \mathbf{U}, t)$$

.....

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i^0(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t) + b_i(\mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2, \dots, \mathbf{Q}^i, \bar{\mathbf{U}})f_i(\mathbf{Q}^1, \dots, \mathbf{Q}^{i-1}, \mathbf{X}, \mathbf{U}, t)$$

.....

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n^0(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t) + b_n(\mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2, \dots, \mathbf{Q}^n, \bar{\mathbf{U}})f_n(\mathbf{Q}^1, \dots, \mathbf{Q}^{n-1}, \mathbf{X}, \mathbf{U}, t) \quad (2)$$

w których \bar{U} - wektor składowych sygnału sterującego, stałych w pewnym przedziale czasu Δt .

O zależnościach

$$b_1(Q^1, \bar{U}_k) = b_{1k}(q_1^1, q_2^1, \dots, q_{l_1}^1), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, l_1$$

zakłada się, że ich postać jest znana oraz że są one wzajemnie jednoznaczne. Oznacza to, że na podstawie znanych wartości b_{ik} , $k = 1, 2, \dots, l_1$, można wyznaczyć wartości $q_1^1, q_2^1, \dots, q_{l_1}^1$.

Jak widać z postaci równań (2) zagadnienie można sprowadzić do kolejnego wyznaczania nieznanymi parametrów występujących w poszczególnych równaniach (2), a mianowicie: na podstawie pierwszego równania układu (2) dla l_1 różnych wartości \bar{U}_k w l_1 przedziałach czasu Δt można wyznaczyć elementy wektora Q^1 i podstawić ich wartości do równania drugiego, które przyjmie wtedy postać

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2^0(\underline{X}, \underline{U}, t) + b_2(Q^2, \bar{U}) f_2(\underline{X}, \underline{U}, t) \quad (3)$$

W dalszym ciągu na podstawie równania (3) należy wyznaczyć elementy wektora Q^2 i podstawić do równania trzeciego układu (2) i tak dalej.

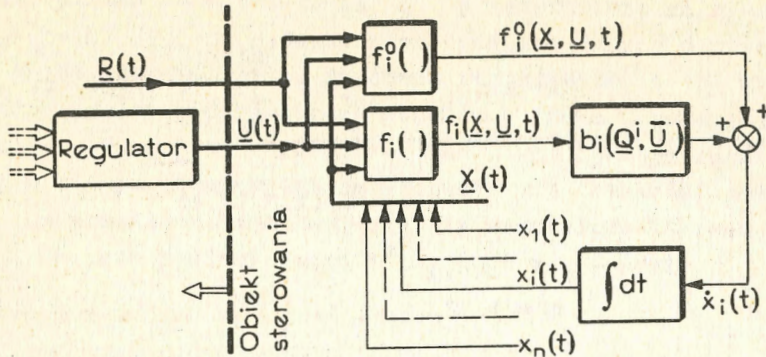
3. METODA WYZNACZANIA PARAMETRÓW

Rozpatrzmy sposób wyznaczania parametrów Q^1 z układu równań (2).

Zgodnie z przyjętymi założeniami możemy uważać, że elementy wektorów Q^1, Q^2, \dots, Q^{i-1} są już znane. Tak więc i-te równanie układu (2) można przedstawić wzorem

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i^0(\underline{X}, \underline{U}, t) + b_i(q_1^1, q_2^1, \dots, q_{l_1}^1, \bar{U}) f_i(\underline{X}, \underline{U}, t) \quad (4)$$

Strukturę i-tego członu obiektu opisanego równaniem (4) przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Struktura i -tego członu odpowiadająca równaniu (4)

W (4) nieznanne są jedynie parametry $q_1^i, q_2^i, \dots, q_{l_1}^i$ występujące w drugim składniku prawej strony tego wzoru. Aby określić ich wartości, scałkujemy obie strony (4) w granicach od t_k do t_{k+1} l_1 -krotnie w kolejnych przedziałach czasu dla różnych wartości \underline{U}_k . Otrzymamy

$$x_1(t_{k+1}) - x_1(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[f_1^0(\underline{x}, \underline{U}, t) + b_{1k}(q_1^i, \dots, q_{l_1}^i) f_1(\underline{x}, \underline{U}, t) \right] dt \quad (5)$$

$$k = 1, 2, \dots, l_1$$

Zakładamy, że w czasie $\Delta t = t_k - t_{k+1}$ parametry obiektu q^i są, praktycznie biorąc, stałe. Upoważnia nas to do zapisania (5) w postaci

$$x_1(t_{k+1}) - x_1(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_1^0(\underline{x}, \underline{U}, t) dt + b_{1k}(q_1^i, \dots, q_{l_1}^i) \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_1(\underline{x}, \underline{U}, t) dt \quad (6)$$

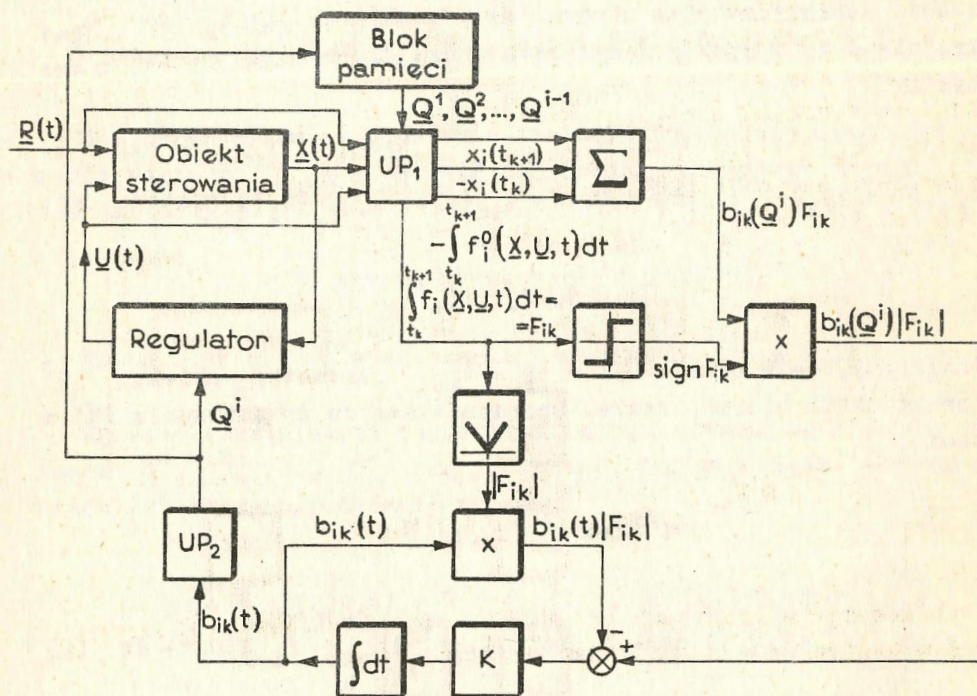
$$k = 1, 2, \dots, l_1$$

Z (6) wynika

$$b_{ik}(q_1^1, \dots, q_{l_1}^1) = \frac{x_1(t_{k+1}) - x_1(t_k) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_1^0(\underline{X}, \underline{U}, t) dt}{\int_{t_k}^{t_{k+1}} f_1(\underline{X}, \underline{U}, t) dt} \quad (7)$$

$$k = 1, 2, \dots, l_1$$

W ten sposób otrzymaliśmy układ l_1 równań algebraicznych o niewiadomych $q_1^1, q_2^1, \dots, q_{l_1}^1$. Jeżeli otrzymane równania mają rozwiązania jednoznaczne, to można z nich wyznaczyć poszukiwane parametry.



Rys. 4. Układ pomiaru parametrów Q^1

Schemat układu do wyznaczania Q^1 przedstawiono na rys. 4.

Przelicznik UP_1 na podstawie otrzymanych danych o przebiegach współrzędnych stanu obiektu, sygnałów sterujących i o znanych z poprzednich pomiarów parametrach obiektu oblicza i całkuje funkcje $f_1^0(\underline{X}, \underline{U}, t)$ i $f_1(\underline{X}, \underline{U}, t)$, Po przeliczniku tym istnieje również blok pamięci, w którym utrzymywane są w czasie Δt wartości początkowe $x_i(t_k)$. Za przelicznikiem znajduje się sumator, na którego wyjściu zgodnie z (6) otrzymujemy funkcje $b_{ik}(Q^1) F_{ik}$, gdzie

$$F_{ik} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_1(\underline{X}, \underline{U}, t) dt$$

Omawiany rysunek ilustruje możliwość dokonania dzielenia w układzie analogowym. W tym celu za pomocą bloków przedstawionych na rysunku dokonujemy operacji, które nam dają funkcje $|F_{ik}|$ oraz $b_{ik}(Q^1)|F_{ik}|$. Funkcje te doprowadza się do bloku dzielenia analogowego. Składa się on z członu całkującego o wzmacnieniu K i członu mnożącego w gałęzi sprzężenia zwrotnego.

Funkcję $b_{ik}(Q^1)|F_{ik}|$ porównuje się w węźle sumującym z sygnałem wyjściowym członu całkującego $b_{ik}(t)$ przemnożonym przez $|F_{ik}|$. Wielkość $b_{ik}(t)$ otrzymuje się według równania

$$K|F_{ik}|[b_{ik}(Q^1) - b_{ik}(t)] = \frac{db_{ik}(t)}{dt} \quad (8)$$

Z (8) wynika

$$K|F_{ik}|dt = \frac{db_{ik}(t)}{b_{ik}(Q^1) - b_{ik}(t)} \quad (9)$$

Po scałkowaniu w granicach od t_k do t_{k+1} obu stron (9) otrzymuje się w wyniku

$$-K \int_{t_k}^{t_{k+1}} |F_{ik}| dt = \ln \left[\frac{b_{ik}(Q^1) - b_{ik}(t)}{b_{ik}(Q^1) - b_{ik}(t_k)} \right] \quad (10)$$

Z (10) przy założeniu, że całkowanie rozpoczyna się od zerowych warunków początkowych, czyli że $b_{ik}(t_k) = 0$, otrzymuje się

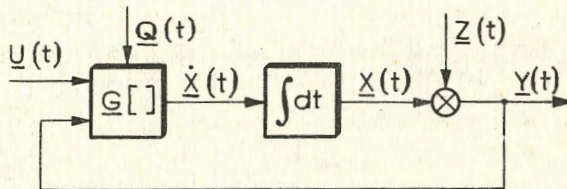
$$b_{ik}(t_{k+1}) = b_{ik}(Q^1) \left[1 - \exp(-K \int_{t_k}^{t_{k+1}} |F_{ik}| dt) \right] \quad (11)$$

Współczynnik wzmocnienia K należy tak dobrać, żeby po upływie czasu Δt drugi składnik w nawiasie kwadratowym (11) był pomijalnie mały. Przypominamy, że na wybór wartości Δt wpływa wymaganie, aby w ciągu tego przedziału czasu parametry obiektu można było uważać za stałe.

Przelicznik UP_2 na podstawie współczynników $b_{ik}(t_{k+1})$ oblicza parametry q_k^i ($k = 1, 2, \dots, l_1$).

4. UWZGLĘDNIENIE WPŁYWU ZAKŁÓCEŃ PRZYPADKOWYCH

W pktcie 2 założyliśmy, że wszystkie sygnały działające na układ mogą być mierzone oraz że w toku identyfikacji wartości wyznaczanych parametrów nie ulegają zmianie. Obecnie uwzględnimy wpływ niemierzalnych zakłóceń przypadkowych działających na wyjście układu oraz powolnych zmian jego parametrów.



Rys. 5. Schemat strukturalny układu sterowania uwzględniający działanie zakłóceń addytywnych

Omówiona metoda jest szczególnie dogodna w przypadku układów, których model przedstawiono na rys. 5. Taki też model będzie rozpatrywany w dalszym ciągu. Charakteryzuje go to, że nieznanne parametry Q funkcji $G(Q, Y, U, t)$ mają być wyznaczone na podstawie pomiarów wykonywanych w zamkniętym układzie regulacji. Taka sytuacja powstaje na przykład wówczas, gdy ze względów technologicznych

nie wolno przerwać obwodu sprzężenia zwrotnego i odłączyć obiekt od regulatora.

Równanie tego modelu dla i -tej współrzędnej ma postać

$$\frac{dx_i}{dt} = \varepsilon_i(Q^i, \underline{Y}, \underline{U}, t) \quad (12)$$

$$y_i = x_i + z_i \quad (13)$$

przyczym z_i - realizacja procesu przypadkowego.

Po podstawieniu (13) do (12) i scałkowaniu w przedziale czasu $\Delta t = t_1 - t_{1+1}$ otrzymuje się

$$y_i(t_{1+1}) - y_i(t_1) = \int_{t_1}^{t_{1+1}} \varepsilon_i(Q^i, \underline{Y}, \underline{U}, t) dt + z_i(t_{1+1}) - z_i(t_1) \quad (14)$$

Zakładamy, że funkcję podcałkową w (14) można przedstawić w postaci (dla uproszczenia zakładamy, że $f_i^0(\underline{Y}, \underline{U}, t) = 0$)

$$\varepsilon_i(Q^i, \underline{Y}, \underline{U}, t) = -b_{ik}(Q^i) \left[1 + \beta_i(t) \right] f_i(\underline{Y}, \underline{U}, t) \quad (15)$$

gdzie $b_{ik}(Q^i)$ - wartość średnia $b_{ik}(Q^i)$ na odcinku czasu Δt , $\beta_i(t)$ - odchylenie względne od wartości średniej.

Funkcja $\beta_i(t)$ jest realizacją procesu przypadkowego, który można np. opisać prawdopodobieństwem warunkowym /69, 80/:

$$P\left\{ \beta_i(t) = 0(t_1 \leq t \leq t_{1+1}) \mid \beta_i(t_1) = 0 \right\} \approx 1 - r_i(t_1 - t_{1+1}) \quad (16)$$

przy czym r_i - wielkość przypadkowa o znanym rozkładzie prawdopodobieństwa.

Po podstawieniu (15) do (14) otrzymamy

$$y_i(t_{1+1}) - y_i(t_1) = b_{ik}(Q^i) \left[\int_{t_1}^{t_{1+1}} f_i(\underline{Y}, \underline{U}, t) dt + \right.$$

$$+ \int_{t_1}^{t_{1+1}} \beta_i(t) f_i(\underline{Y}, \underline{U}, t) dt + z_i(t_{1+1}) + z_i(t_1) \quad (17)$$

Współczynniki $b_{ik}(\bar{Q}^1)$ estymujemy na podstawie zależności

$$\min_{b_{ik}(\bar{Q}^1)} \sum_{l=1}^N \left[\Delta y_{il} - b_{ik}(\bar{Q}^1) F_{il} \right]^2 = \sum_{l=1}^N (\Delta y_{il} - \hat{b}_{ik} F_{il})^2 \quad (18)$$

przy czym: \hat{b}_{ik} - estymator $b_{ik}(\bar{Q}^1)$, $\Delta y_{il} = y_i(t_{1+1}) - y_i(t_1)$.

$$F_{il} = \int_{t_1}^{t_{1+1}} f_i(\underline{Y}, \underline{U}, t) dt \quad (19)$$

Pewną ocenę dokładności estymacji współczynnika $b_{ik}(\bar{Q}^1)$ daje tzw. wariancja resztowa /88/

$$s_{ik}^2 = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N (\Delta y_{il} - \hat{b}_{ik} F_{il})^2 \quad (20)$$

Załóżmy, że w czasie trwania procesu identyfikacji zmiany współczynników \bar{Q}^1 są pomijalnie małe

$$\beta_i(t) \approx 0 \quad (21)$$

Jeżeli $z_i(t)$ jest realizacją procesu przypadkowego, stacjonarnego, o wartości średniej równej zeru, to przy $N \rightarrow \infty$ otrzymuje się

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_{ik}^2 = M \left\{ [z_i(t_{1+1}) - z_i(t_1)]^2 \right\} = 2 \left[\sigma_1^2 - R_1(\Delta t) \right] \quad (22)$$

przy czym: σ_1^2 - wariancja zakłócenia $z_i(t)$; $R_1(\Delta t)$ - funkcja

autokorelacji zakłócenia $z_1(t)$ dla przesunięcia $\Delta t = t_1 - t_{1+1}$.

Tak więc z punktu widzenia dokładności estymacji parametru $b_{ik}(Q^i)$, przy nieoscylacyjnej funkcji autokorelacji zakłócenia $z_1(t)$, korzystnie jest zmniejszanie przedziału całkowania Δt .

5. PRZYKŁAD

Jako przykład rozpatrzmy równania kinetyki cyklicznego procesu chemicznego przebiegającego w reaktorze z katalizatorem /103/

$$x_1 = -K_1 x_1 x_2 - 2K_2 x_2^2 \quad (23)$$

$$x_2 = -K_2 x_1 x_2 \quad (24)$$

gdzie

$$K_1 = A_1 \exp\left(-\frac{E_1}{R\Theta}\right) \quad (25)$$

$$K_2 = A_2 \exp\left(-\frac{E_2}{R\Theta}\right) \quad (26)$$

przy czym: x_1, x_2 - stężenia reagentów; Θ - temperatura; R - stała gazowa; A_i, E_i ($i = 1, 2$) - parametry zależne od aktywności katalizatora.

Optymalne sterowanie przebiegiem $\Theta(t)$ polega na maksymalizacji wskaźnika jakości

$$I(t_1) = x_2(t_0) - x_2(t_1) \quad (27)$$

gdzie t_0 - zadana chwila czasu.

Dla wyznaczenia sterowania optymalnego należy dokonywać okresowej identyfikacji współczynników E_i, A_i , których wartości ulegają ciągłym powolnym zmianom. Opiszemy sposób wyznaczania tych parametrów za pomocą omówionej poprzednio metody.

Zakładamy, że wahania temperatury w toku wyznaczania nieznanych parametrów są niewielkie, co pozwala przyjąć aproksymację

$$\exp\left(-\frac{E_i}{R\Theta}\right) \approx \left(1 + \frac{\Delta\Theta E_i}{R\Theta_k^2}\right) \exp\left(-\frac{E_i}{R\Theta_k}\right), \quad i = 1, 2 \quad (28)$$

gdzie: $\Theta = \bar{\Theta}_k + \Delta\Theta$; $\bar{\Theta}_k = \text{const}$ przy $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, $\frac{\Delta\Theta E_1}{R\bar{\Theta}_k^2} \ll 1$.

Po podstawieniu (28) do (25) i (26), a wyniku - do (23) i (24) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & -A_1 \left[\exp \left(-\frac{E_1}{R\bar{\Theta}_k} \right) \left(1 + \frac{\Delta\Theta E_1}{R\bar{\Theta}_k^2} \right) x_1 x_2 + \right. \\ & \left. - 2A_2 \left[\exp \left(-\frac{E_2}{R\bar{\Theta}_k} \right) \left(1 + \frac{\Delta\Theta E_2}{R\bar{\Theta}_k^2} \right) x_2^2 \right] \right. \end{aligned} \quad (29)$$

$$\dot{x}_2 = -A_2 \left[\exp \left(-\frac{E_2}{R\bar{\Theta}_k} \right) \left(1 + \frac{\Delta\Theta E_2}{R\bar{\Theta}_k^2} \right) x_1 x_2 \right. \quad (30)$$

Otrzymano w ten sposób równania, do których można zastosować zaproponowaną procedurę wyznaczania parametrów.

Ponieważ w równaniach (29) i (30) są po dwie niewiadome, należy te równania całkować dwukrotnie dla różnych temperatur $\bar{\Theta}_k$, $k = 1, 2$.

Po scałkowaniu (29) i (30) w granicach od t_k do t_{k+1} otrzymuje się

$$\begin{aligned} x_1(t_{k+1}) - x_1(t_k) = & -A_1 \exp \left(-\frac{E_1}{R\bar{\Theta}_k} \right) (F_{1k} + E_1 F_{2k}) + \\ & - 2A_2 \exp \left(-\frac{E_2}{R\bar{\Theta}_k} \right) (F_{3k} + E_2 F_{4k}), \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (31)$$

$$x_2(t_{k+1}) - x_2(t_k) = -A_2 \exp \left(-\frac{E_2}{R\bar{\Theta}_k} \right) (F_{1k} + E_2 F_{2k}), \quad k = 1, 2 \quad (32)$$

przy czym

$$F_{1k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} x_1 x_2 dt, \quad F_{2k} = \frac{1}{R \bar{\Theta}_k^2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Delta \Theta x_1 x_2 dt$$

$$F_{3k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} x_2^2 dt, \quad F_{4k} = \frac{1}{R \bar{\Theta}_k^2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Delta \Theta x_2^2 dt$$

Z równań (31) i (32) po dokonaniu odpowiednich pomiarów można wyznaczyć numerycznie niewiadome wartości parametrów A_1 , A_2 , E_1 , E_2 .

Zagadnienie wyznaczania współczynników E_i oraz A_i w rozpatrywanym przykładzie można również potraktować jako zagadnienie identyfikacji współczynników w układzie, na który działają zakłócenia multiplikatywne. W tym przypadku parametry K_1 i K_2 przedstawiamy w postaci

$$K_1 = b_1(A_1, E_1, \bar{\Theta}) [1 + \beta(\Delta \Theta)] \quad (33)$$

$$K_2 = b_2(A_2, E_2, \bar{\Theta}) [1 + \beta(\Delta \Theta)] \quad (34)$$

gdzie

$$b_i(A_i, E_i, \bar{\Theta}) = A_i \exp\left(-\frac{E_i}{R \bar{\Theta}}\right), \quad i = 1, 2 \quad (35)$$

Po podstawieniu (33) i (34) do równań procesu (23) i (24) oraz po scałkowaniu w granicach od t_1 do t_{1+1} ($1 = 1, 2, \dots, N$) dla $\bar{\Theta} = \bar{\Theta}_k$ ($k = 1, 2$) otrzymamy

$$\begin{aligned} x_1(t_{1+1}) - x_1(t_1) = & -b_{1k} \int_{t_1}^{t_{1+1}} [1 + \beta(\Delta \Theta)] x_1 x_2 dt + \\ & - b_{2k} \int_{t_1}^{t_{1+1}} [1 + \beta(\Delta \Theta)] x_2^2 dt \end{aligned} \quad (36)$$

$$x_2(t_{1+1}) - x_2(t_1) = -b_{2k} \int_{t_1}^{t_{1+1}} [1 + \beta(\Delta\Theta)] x_2^2 dt \quad (37)$$

$k = 1, 2; \quad l = 1, 2, \dots, N$

przy czym $b_{ik} = b_i(A_i, E_i, \bar{\Theta}_k)$, $k = 1, 2$.

Estymatorów \hat{b}_{ik} ($i = 1, 2; k = 1, 2$) szukamy z warunku na minimum sumy kwadratów. Zaczynamy od wyznaczenia estymatora b_{2k} spełniającego zależność

$$\min_{b_{2k}} \sum_{l=1}^N (\Delta x_{2l} + b_{2k} F_{2l})^2 = \sum_{l=1}^N (\Delta x_{2l} + \hat{b}_{2k} F_{2l})^2 \quad (38)$$

gdzie

$$\Delta x_{2l} = x_2(t_{l+1}) - x_2(t_l)$$

$$F_{2l} = \int_{t_l}^{t_{l+1}} x_2^2 dt$$

Następnie wyznaczamy \hat{b}_{1k} na podstawie zależności

$$\min_{b_{1k}} \sum_{l=1}^N (\Delta x_{1l} + b_{1k} F_{1l})^2 = \sum_{l=1}^N (\Delta x_{1l} + \hat{b}_{1k} F_{1l})^2 \quad (39)$$

gdzie

$$\Delta x_{1l} = x_1(t_{l+1}) - x_1(t_l)$$

$$F_{1l} = \int_{t_l}^{t_{l+1}} x_1 x_2 dt$$

Z otrzymanych w ten sposób $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ można wyznaczyć - na podstawie (35) - parametry A_1, A_2, E_1, E_2 .

IBS PAN

47471