POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

# MODELE OPÓŹNIEŃ W SYSTEMACH EKONOMICZNYCH

Jan Gadomski

Warszawa 2015

MODELE OPÓŹNIEŃ W SYSTEMACH EKONOMICZNYCH - Jan Gadomski

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
Tom 74

**Redaktor naukowy:**
**Prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum**

Warszawa 2015

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH

**Jan Gadomski**

# MODELE OPÓŹNIEŃ W SYSTEMACH EKONOMICZNYCH

**Warszawa 2015**

## Autor:

**Jan Gadomski,**
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
Jan.Gadomski@ibspan.waw.pl

## Recenzent:

**….**
**….**

**Wydawca:**

**Instytut Badań Systemowych**
**Polskiej Akademii Nauk**
Newelska 6, 01-447 Warszawa
www.ibspan.waw.pl

**ISSN 0208-8029**
**ISBN 83-894-7559-6**

# CZĘŚĆ I

# Wprowadzenie

## 1.1. Podstawowe pojęcia

W dalszych rozważaniach czas jest z założenia dyskretny, tzn. chwile czasu są numerowane za pomocą liczb należących do zbioru liczb całkowitych a okresy powinny[1] być numerowane za pomocą liczb należących do zbioru liczb całkowitych z pominięciem liczby zero (nie rozważa się okresu o numerze *0*).

Model opóźnienia jest przedstawiany w dwóch alternatywnych postaciach. Pierwsza, najczęściej stosowana w modelach ekonometrycznych ma postać (Pesando (1972), Intriligator (1978), Dhrymes (1981)):

$$y_t = f( x_t , x_{t-1} , x_{t-2} , \ldots ; v_{t\,0}, v_{t\,1}, \ldots ;\ t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i}\ x_{t-i} + \varepsilon_t\ , \tag{1.1a}$$

podczas gdy druga ma postać (Hildreth, Houck (1968), Froelich (1973)):

$$y_t = f( x_t , x_{t-1} , x_{t-2} , \ldots ; v_{t\,0}, v_{t\,1}, \ldots ;\ t) = \sum_{i=0}^{n} v_{t\,i}\ x_{t-i}\ , \tag{1.1b}$$

gdzie:

$t$ - zmienna przyjmująca wartości ze zbioru liczb całkowitych oznaczająca czas, numer okresu,

$x_t$ - wartość zmiennej niezależnej w okresie $t$,

$y_t$ - wartość zmiennej zależnej w okresie $t$

$v_{t\,i}$ - współczynniki opóźnienia spełniające warunki:

$0 \leq v_{t\,i} < \infty,\ i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$

[1] Ten postulat bywa w praktyce pomijany, ponieważ zmienna zależna może reprezentować wielkości zasobu w chwilach, a zmienna niezależna wielkość strumienia w okresach (lub na odwrót), co wprowadzałoby niejednolitość numerowania zmiennych zależnej i niezależnej.

$\varepsilon_t$ - składnik losowy, o wartości oczekiwanej równej zero i skończonej wariancji,

$n$ - skończona liczba naturalna.

Inne ujęcie, które jednak nie znalazło wielu naśladowców, zaproponował P. A. Tinsley, Tinsley (1967):

$$y_t = \eta \sum_{i=0}^{n} w_{(i)}^{t-i} x_{t-i},$$

gdzie $\eta$ stały współczynnik, a współczynniki $w_{(i)}^{t-i}$, $i = 0, 1, 2, ..., n;$ oznaczają współczynniki wagowe (*weight coefficient*) związane ze zmiennymi niezależnymi $x_{t-i}$ z okresów $t-i$, $i = 0, 1, 2, ..., n$.

Warianty (1.1a) i (1.1b) różnią się przede wszystkim celem i metodyką modelowania. Wariant pierwszy jest stosowany, gdy chodzi o odseparowanie czynników deterministycznego, reprezentowanego przez zmienną niezależną i współczynniki opóźnienia, oraz czynnika losowego reprezentowanego przez składnik losowy $\varepsilon_t$. Ten ostatni można interpretować jako błąd pomiaru zmiennej zależnej. W niektórych zastosowaniach, o których będzie mowa w dalszej części, tak ogólne założenia okazują się niewystarczające. Postać (1.1a) ma zalety ujawniające się przy estymacji współczynników. W wariancie (1.1b) aspekt stochastyczny albo nie jest rozpatrywany, albo przyjmowane jest założenie, że współczynniki opóźnienia są zmiennymi losowymi.

Pomiędzy zmiennymi zależną i niezależną powinien zachodzić związek przyczynowo-skutkowy, zatem na wartości zmiennej zależnej w okresie $t$ nie mogą mieć wpływu wartości zmiennej niezależnej z okresów późniejszych, tj. $t+1$, $t+2$,… . Jest to wystarczający powód, dla którego wyrażenie po prawej stronie zależności (1.1a) i (1.1b) jest sumowane po indeksach nieujemnych. Jednakże w szczególnych przypadkach przydatne okazuje się formalne sumowanie również po indeksach ujemnych, przy założeniu, że dla wszystkich $i < 0$, $v_{t\,i} = 0$.

Modele (1.1a) i (1.1b) należy odczytywać w następujący sposób. Wpływ wartości zmiennej niezależnej $x$ na wartość zmiennej zależnej $y$ nie dokonuje się w pełni natychmiast, lecz albo jest rozłożony w czasie albo następuje z opóźnieniem po upływie określonej liczby okresów. Prawe strony zależności (1.1a) i (1.1b) mają z reguły postać addytywną lub taką, którą można przekształcić do postaci addytywnej.

Zmienna niezależna $x$ przyjmuje wartości ze zbioru liczb rzeczywistych; w wielu zastosowaniach postulowane jest spełnienie warunku stałego znaku.

Zmienna zależna $y$ przyjmuje skończone wartości ze zbioru liczb rzeczywistych. Suma w równaniu (1.1a) stanowi część deterministyczną modelu opóźnienia.

Wartość zmiennej zależnej $y$ w okresie $t$ zależy od:

- wartości zmiennej niezależnej $x$ w tym samym okresie oraz w okresach wcześniejszych,
- mechanizmu opóźnienia kształtującego opóźniony wpływ zmiennej $x$ na zmienną $y$,
- wartości składnika losowego $\varepsilon_t$.

Składnik losowy $\varepsilon_t$ ujmuje wpływ, jaki na zmienną zależną mają czynniki nieuwzględnione w części deterministycznej modelu (1.1a) oraz błędy pomiaru zmiennej $y$. O zmiennej $\varepsilon_t$ zakłada się najczęściej, że jej wartość oczekiwana jest równa zero oraz że ma ograniczoną wariancję. Zmienna ta będzie pomijana tam, gdzie nie jest przedmiotem rozważań.

Gdy przedmiotem analizy jest model opóźnienia rozłożonego w postaci (1.1b), współczynniki opóźnienia mogą zostać wyrażone za pomocą wzoru, jak to uczynili Hildreth, Houck (1968) badając własności modeli ze zmiennymi współczynnikami:

$$v_{t\,i} = v_i + \vartheta_{t\,i} \,,$$

w którym $v_i$ oznacza wartość oczekiwaną $i$-tego współczynnika opóźnienia, $\vartheta_{t\,i}$ to składnik losowy zakłócający obserwację $i$-tego współczynnika opóźnienia. Warto zauważyć, że w omówionym podejściu Hildretha i Houcka zmienność współczynników jest następstwem procesu losowego.

Mechanizmem opóźnienia nazywany jest ogół czynników i okoliczności kształtujący w każdym okresie $t$ wartości współczynników opóźnienia $v_{t\,i}$, $i=0, 1, 2,..$; $0 \le v_{ti} < \infty$, $i=0, 1, 2,..$; przyjmujących ograniczone wartości, o tym samym znaku.

W wielu zastosowaniach od współczynników opóźnienia oczekuje się ponadto, by ich suma

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i} \tag{1.2}$$

nazywana dalej mnożnikiem długookresowym, przyjmowała skończoną wartość, co jednak nie jest warunkiem koniecznym.

Uporządkowany zbiór (wektor) współczynników $V_t$, $V_t = (\, v_{t\,i},\ i = 0, 1, 2,... \,)$ będzie dalej nazywany strukturą opóźnienia.

Współczynnik $v_{t_0}$ jest nazywany mnożnikiem krótkookresowym lub bezpośrednim, ponieważ wskazuje na siłę oddziaływania zmiennej $x$ na zmienną $y$ bezpośrednio w tym samym okresie.

Wyrażenie

$$\sum_{i=1}^{\infty} v_{t\,i} \tag{1.3}$$

jest nazywane mnożnikiem opóźnienia, mnożnikiem skumulowanym, ujmującym siłę, z jaką na wartość zmiennej $y_t$ w okresie $t$ wpływają wartości zmiennej $x$ z okresów wcześniejszych, tzn. z okresów o numerach: $t$-$1$, $t$-$2$, $t$-$3$,..

Wyrażenie (1.2) ujmujące całkowity wpływ, jaki na wartość $y_t$, którą zmienna $y$ przyjmuje w okresie $t$, wywierają wartości zmiennej niezależnej z okresu $t$ oraz okresów wcześniejszych, tj. $x_t$, $x_{t-1}$, $x_{t-2}$,..; jest nazywane mnożnikiem zupełnym lub długookresowym.

Wartości współczynników opóźnienia $v_{ti}$, $i = 0, 1, 2,..$; z równania (1.1a) i (1.1b) mogą ulegać zmianie wraz ze zmianami zachodzącymi w działaniu mechanizmu opóźnienia. Zmiany te mogą być wynikiem występowania określonej tendencji lub działania czynników mających charakter deterministyczny lub losowy; ich przyczynami mogą być zmiany struktury rzeczowej czy funkcjonalnej opisywanego systemu, reguł podejmowania decyzji i innych.

Gdy wszystkie współczynniki są stałe, mamy do czynienia ze modelem opóźnienia rozłożonego, charakteryzującym się stałymi, nieulegającymi zmianie w badanym okresie mechanizmem oraz parametrami charakteryzującymi ten mechanizm:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i\, x_{t-i} + \varepsilon_t \ . \tag{1.4}$$

Modele opóźnienia ze stałymi współczynnikami są stosowane, gdy:

- istnieją przesłanki pozwalające na przyjęcie założenia, że mechanizm opóźnienia nie ulega zmianie,
- wiedza o badanym zjawisku jest niewystarczająca do posługiwania się modelem bardziej złożonym.

Przedstawione wyżej warunki decydują, że w literaturze zdecydowanie przeważają modele ze stałymi współczynnikami (1.4).

Skończonymi modelami opóźnienia rozłożonego nazywane są modele, w których współczynniki $v_t$ , $i$=$0$, $1$, $2$,..; mają tę własność, że wartości wszystkich współczynników o numerach większych od pewnej skończonej liczby naturalnej $i_g(V_t)$, $0 < i_g(V_t) < \infty$; która również może być funkcją czasu, $i_g=i_g(t)$, są równe zero:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i}\ x_{t-i} + \varepsilon_t\ = \sum_{i=0}^{i_g(V_t)} v_{t\,i}\ x_{t-i} + \varepsilon_t\ . \tag{1.5}$$

W pewnych przypadkach przydatna jest również następująca forma zapisu modelu (1.5):

$$y_t = \sum_{i=i_d(V_t)}^{i_g(V_t)} v_{t\,i}\ x_{t-i} + \varepsilon_t\ ,$$

gdzie $i_d(V_t)$, liczba naturalna, $0 \le i_d(V_t) < \infty$, oznacza najmniejszy indeks ze zbioru współczynników opóźnienia nierównych zero (numer pierwszego niezerowego); indeks ten również może być funkcją czasu, $i_d= i_d(V_t)$.

W opisie skończonych modeli opóźnienia rozłożonego przydatne bywa pojęcie rozpiętości struktury opóźnienia $R(V_t)$, oznaczające liczbę współczynników zawierających się w przedziale $[i_d(V_t),\ i_g(V_t)\ ]$. Rozpiętość struktury opóźnienia jest równa:

$$R(V_t) = i_g(V_t)\text{-}i_d(V_t) + 1.$$

Różnica pomiędzy modelami nieskończonym (1.1) a skończonym (1.5) nie sprowadza się jedynie do zapisu, ale wiąże się również z pytaniem natury ogólnej: jak bardzo historia wpływa na teraźniejszość. Jeśli istnieją przesłanki wskazujące na skończoność horyzontu czasowego, w którym zmienna niezależna wpływa na badaną zmienną zależną, to stanowi to uzasadnienie do zastosowania modelu skończonego. Jednakże w niektórych przypadkach odpowiedź może nie być jednoznaczna i wtedy jest bezpieczniej– przy spełnieniu pewnych dodatkowych warunków - posługiwanie się modelem nieskończonym. Na rzecz tego ostatniego często przemawiają względy informacyjne - współczynniki opóźnienia w modelach nieskończonych są opisywane za pomocą niedużej liczby parametrów. Jest to istotne przy estymacji, ponieważ zwiększenie liczby współczynników zmniejsza liczbę stopni swobody.

Najprostszym przypadkiem modelu opóźnienia jest model o postaci:

$$y_t = v_{tl}\ x_{t-l} + \varepsilon_t\,,\ l > 0,\ v_{tl} \neq 0\,, \tag{1.6}$$

nazywany opóźnieniem prostym o $l$ okresów (lub zwłoką). Model (1.6) jest szczególnym przypadkiem modelu (1.1), w którym w każdym z okresów tylko współczynnik o numerze $i$ - który może ulegać zmianie[2] - jest nierówny zero. Jest to

[2] Nietrudno wyobrazić sobie model, w którym tylko jeden niezerowy współczynnik zmienia numer (tj. indeks $i$ ) wraz ze zmianą okresu $t$, $i_{\llcorner} = i\ (t)$.

model opóźnienia skupionego (nierozłożonego), ponieważ zmiana wartości zmiennej zależnej następuje po upływie dokładnie $l$ okresów po zmianie wartości zmiennej niezależnej.

Przejdziemy do interpretacji współczynników $v_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,...$. Załóżmy, że zmienna niezależna $x$ przyjmuje wartości dodatnie, $x_{t-i} > 0$, $i = 0, 1, 2,..$, współczynniki $v_{t\,i}$ , $i = 0, 1,.2,..$, są nieujemne, oraz że przynajmniej jeden współczynnik $v_{t\,i}$ jest niezerowy (z czego wynika, że zawsze zachodzi relacja: $y_t > 0$ ).

Przy założeniu, że wartość oczekiwana $E(\varepsilon_t) = 0$ , wartość oczekiwana $E(y_t)$ zmiennej zależnej $y_t$ wynosi, na podstawie (1.1):

$$E(y_t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i} x_{t-i} = \sum_{i=0}^{\infty} y_{t\,i} \quad . \tag{1.7}$$

gdzie $y_{t\,i} = v_{t\,i}\, x_{t-i}$, $i = 0, 1, 2,..$ .

Przy tak poczynionych założeniach każdy iloczyn $y_{t\,i} = v_{t\,i}\, x_{t-i}$; $i = 0, 1,..$; wchodzący w skład sumy w równaniu (1.7) można interpretować jako łączny wkład wartości zmiennej niezależnej $x$ z okresu $t-i$, $i = 0, 1,..$; wraz z odpowiednią wagą $v_{t\,i}$, jaką w okresie $t$ nadał jej mechanizm opóźnienia, w wartość zmiennej zależnej $y_t$.

Ponieważ z założenia zmienna zależna $y$ przyjmuje skończone wartości, sumy w zależności (1.7) są również skończone, z czego wynika, że $\lim_{i\to\infty} y_{t\,i} = \lim_{i\to\infty} v_{t\,i} x_{t-i} = 0.$ Mogą zatem istnieć modele opóźnienia o nieskończonej wartości mnożnika długookresowego (1.2), w których skończone wartości zmiennej zależnej $y$ są wynikiem zbieżności zmiennej niezależnej $x$ (model taki jest omawiany w Przykładzie 1.2).

Model (1.6) oraz zależność (1.7) pozwalają na interpretację modelu (1.1) jako sumy opóźnień prostych tej samej zmiennej niezależnej.

## 1.2. Rozkład opóźnienia

Gdy mnożnik długookresowy, suma (1.2), ma wartość skończoną, model (1.1a) można przedstawić w następującej postaci:

$$y_t = a_t \sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i} x_{t-i} + \varepsilon_t \tag{1.8}$$

gdzie:

$a_t$ – mnożnik długookresowy, zależność (1.2):

$$a_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i} \, , \tag{1.9}$$

$w_{ti}$ – współczynniki uzyskane w wyniku unormowania współczynników $v_{ti}$, $i = 0, 1, 2,..$;

$$w_{ti} = \frac{v_{ti}}{\sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}} = \frac{v_{ti}}{a_t}. \quad i = 0, 1, 2, ..; \tag{1.10}$$

Normalizacja współczynników $v_{ti}$, $i = 0, 1, 2,..;$ zapewnia spełnienie następujących warunków:

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_{ti} = 1 \quad \text{oraz } w_{ti} \geq 0,\ i = 0, 1, 2,.. . \tag{1.11}$$

Uporządkowany zbiór współczynników (wektor) $W_t$, $W_t = (w_{t0}, w_{t1}, w_{t2}, \ldots)$ będzie dalej nazywany rozkładem opóźnienia $W_t$ pewnej zmiennej losowej $\tau'$:

$$Pr(\tau' = i) = w_{ti}.$$

Rozkład opóźnienia $W_t$ charakteryzują parametry (jeśli istnieją):

$M(W_t)$ - wartość średnia rozkładu opóźnienia:

$$M(W_t) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot w_{ti}, \tag{1.12}$$

$D^2(W_t)$ - wariancja rozkładu opóźnienia:

$$D^2(W_t) = \sum_{i=0}^{\infty} w_{ti}\left[i - M(W_t)\right]^2 = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 w_{ti} - \left[M(W_t)\right]^2. \tag{1.13}$$

W modelach nieskończonych, pomimo istnienia rozkładu opóźnienia $W_t$, parametry rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ i $D^2(W_t)$ mogą pozostać nieokreślone, jak na przykład wtedy, gdy współczynniki opóźnienia są zdefiniowane jak w przedstawionym dalej Przykładzie 1.1, w którym składniki sumy (1.9) tworzą ciąg harmoniczny, którego suma jest rozbieżna.

W niektórych pracach, np. w Hendry, Pagan, Sargan (1984) omawiany jest również inny parametr rozkładu opóźnienia: mediana rozkładu opóźnienia $\eta(W_t)$ definiowana jako pewna liczba naturalna spełniająca zależność:

$$\sum_{i=0}^{\eta(W_t)} w_{ti} < \frac{1}{2} \leq \sum_{i=\eta(W_t)+1}^{\infty} w_{ti}. \tag{1.14}$$

Mediana rozkładu opóźnienia $\eta(W_t)$ jest rzadziej wykorzystywanym parametrem rozkładu opóźnienia. Wartość średnia i mediana rozkładu opóźnienia znajdują zastosowanie, o czym będzie mowa w dalszej części, jako miary opóźnienia.

Wprowadzenie pomocniczej zmiennej zależnej $y'_t$:

$$y'_t = \sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i} x_{t-i} \tag{1.15}$$

pozwala na zapisanie zależności (1.1) w następującej postaci:

$$y_t = a_t y'_t + \varepsilon_t . \tag{1.16}$$

Zdefiniowana w równaniu (1.15) zmienna pomocnicza $y'_t$ jest średnią ważoną niepóźniejszych wartości zmiennej niezależnej $x$, tj. $x_t$, $x_{t-1}$, $x_{t-2}$, .., których wagami są odpowiednio współczynniki opóźnienia $w_{t\,0}$, $w_{t\,1}$, $w_{t\,2}$, ... . Zmienność współczynników $w_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,..$, będąca następstwem zmienności współczynników $v_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,...;$ sprawia, że w kolejnych okresach zmianie ulegają mnożnik długookresowy $a_t$ oraz wartość średnia rozkładu opóźnienia $M(W_t)$.

Równanie (1.15) jest modelem opóźnienia rozłożonego, w którym mnożnik długookresowy jest stały i równy jeden. Ważną własnością tego modelu jest to, że ma identyczny z modelem (1.8) rozkład opóźnienia. Identyczność tych rozkładów jest oczywista, ponieważ oba modele mają takie same współczynniki rozkładu opóźnienia.

Mnożnik długookresowy $a_t$ obrazuje siłę, z jaką pomocnicza zmienna zależna $y'_t$ wpływa na zmienną zależną $y$. Wzrost wartości bezwzględnej współczynnika $a_t$ oznacza wzmocnienie wpływu, jaki pomocnicza zmienna $y'_t$ wywiera na zmienną zależną $y$, a jej spadek oznacza osłabianie tego wpływu. Pomiędzy zmiennością współczynnika $a_t$ oraz zmianami wartości i wzajemnych proporcji współczynników $w_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,...$; może występować związek funkcyjny. Ponieważ współczynnik $a_t$ został określony w równaniu (1.13) za pomocą współczynników $v_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,..$; zmiany jego wartości są wynikiem działania mechanizmu opóźnienia. Ten sam mechanizm opóźnienia, wpływając na wartości znormalizowanych współczynników opóźnienia $w_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,..$; wpływa na wartość średnią rozkładu opóźnienia $M(W_t)$, wariancję $D^2(W_t)$ oraz medianę $\eta(W_t)$.

Równanie (1.16) pozwala na interpretację modelu opóźnienia rozłożonego (1.1) jako zależności zmiennej zależnej $y_t$ od średniej ważonej wartości $y'_t$ przeszłych wartości zmiennej niezależnej $x$, zmiennej siły wpływu $a_t$, jaki mnożnik długookresowy wywiera na zmienną zależną oraz od składnika losowego[3]. Przydatność ujęcia (1.16) ilustruje przypadek opóźnienia rozłożonego, w którym zmia-

[3] Zmienność mnożnika długookresowego jest ściśle związana z modelem opóźnienia rozłożonego mającego zmienny rozkład opóźnienia. W modelu ze stałym rozkładem opóźnienia mnożnik długookresowy ma stałą wartość.

nie ulegają rozkład opóźnienia i jego parametry, takie jak np. wartość średnia, natomiast mnożnik długookresowy nie ulega zmianie, a w ogólności wtedy, gdy celem analizy jest odseparowanie zmian mnożnika długookresowego od zmian struktury/rozkładu opóźnienia.

## 1.3. Wynikowy rozkład opóźnienia

W tym rozdziale proponowane są nowe, w literaturze na temat modeli opóźnienia rozłożonego niespotykane pojęcia. Są to: współczynniki udziału, wynikowy rozkład opóźnienia oraz wartość średnia i wariancja wynikowego rozkładu opóźnienia. Pojęcia te są przedstawione poniżej.

Współczynniki udziału $u_{t\,i}$; $i=0, 1, 2,..$; są definiowane jako udziały wkładów $y_{t\,i}$, $i= 0,1,2,...$; w wartości oczekiwanej $E(y_t)$ zmiennej zależnej $y_t$ reprezentowanych przez następujące ilorazy:

$$u_{t\,i} = \frac{v_{t\,i}\, x_{t-i}}{E(y_t)} = \frac{y_{t\,i}}{E(y_t)} = \frac{v_{t\,i}\, x_{t-i}}{\sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i}\, x_{t-i}}, \quad E(y_t) \neq 0,\ i = 0, 1, 2,... \tag{1.17}$$

Jak wynika z zależności (1.17), współczynniki udziału $u_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,...$; są określone, gdy wartość oczekiwana zmiennej zależnej jest nierówna zero. Spełnienie tego warunku oznacza konieczność poczynienia dodatkowych założeń o wartościach zmiennej niezależnej. Ilekroć dalej mowa będzie o rozkładzie wynikowym opóźnienia, będzie to oznaczać, że przyjęte zostało założenie, iż zmienna niezależna nie zmienia znaku i przyjmuje wartości nierówne zeru[4]. Zaletą tego rozwiązania jest klarowna interpretacja wielkości nazywanych udziałami (o co byłoby trudno, jeśli przyjmowałyby zarówno dodatnie jak i ujemne wartości). Z drugiej strony wyklucza zastosowanie tego podejścia do modelowania zjawisk, w których zmienna niezależna jest zmienną losową o zerowej wartości oczekiwanej.

W każdym okresie $t$ określone w zależności (1.17) udziały $u_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,..$; spełniają następujące warunki:

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_{t\,i} = 1;$$

oraz (1.18)

$$u_{t\,i} \geq 0,\ i = 0, 1, 2,...;$$

z których wynika, że $U_t$ jest unormowaną strukturą opóźnienia, którą można interpretować jak rozkład prawdopodobieństwa. Udziały $u_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,...;$ wzór (1.17),

[4] Jest to nieduża ingerencja w ogólność rozważań, bowiem przy założonej wcześniej ograniczoności zmiennej niezależnej można skonstruować nową zmienną niezależną odpowiednio powiększoną (lub pomniejszoną) o stałą.

można interpretować jak prawdopodobieństwo tego, że pewna zmienna losowa $\tau$ przyjmie wartość równą $i$:

$$Pr(\tau = i) = u_{t\,i}$$

O udziałach $u_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,...$; będziemy mówić, że tworzą strukturę unormowaną opóźnienia lub rozkład wynikowy opóźnienia $U_t$. Rozkład wynikowy opóźnienia $U_t$ charakteryzują podstawowe parametry (jeśli istnieją):

$M(U_t)$ - wartość średnia rozkładu wynikowego $U_t$:

$$M(U_t) = \sum_{i=0}^{\infty} i\,u_{t\,i} = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{y_{t\,i}}{E(y_t)} = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{v_{t\,i}\,x_{t-i}}{\sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i}\,x_{t-i}}, \tag{1.19}$$

$D^2(U_t)$ - wariancja wynikowego rozkładu opóźnienia $U_t$:

$$D^2(U_t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_{t\,i}\left[i - m(U_t)\right]^2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} i^2 u_{t\,i}\right) - m^2(U_t). \tag{1.20}$$

Dla wynikowego rozkładu opóźnienia $U_t$ można zdefiniować, analogicznie jak dla rozkładu opóźnienia $W_t$, medianę rozkładu wynikowego opóźnienia $\eta(U_t)$:

$$\sum_{i=0}^{\eta(U_t)} u_{t\,i} < \frac{1}{2} \leq \sum_{i=\eta(U_t)+1}^{\infty} u_{t\,i}. \tag{1.21}$$

Dla modeli opóźnienia skończonego wartości parametrów $M(U_t)$ i $D^2(U_t)$ są zawsze określone, co wynika bezpośrednio z przyjętych założeń o współczynnikach opóźnienia i wartościach zmiennej niezależnej. Należy odnotować, że w przypadku nieskończonego modelu opóźnienia parametry $M(U_t)$ i $D^2(U_t)$ mogą nie być określone.

Warto zwrócić uwagę na pewną własność. Jeśli zmienna niezależna $x$ jest zmienną losową o stałej i niezerowej wartości oczekiwanej równej $x^*$ oraz gdy istnieje rozkład opóźnienia $W_t$, wtedy – co wynika z definicji rozkładu wynikowego $U_t$ – rozkłady $W_t$ i $U_t$ są sobie równe, ponieważ:

$$E(y_t) = a_t x^* \text{ oraz } u_{t\,i} = \frac{v_{t\,i}\,x^*}{a_t\,x^*} = \frac{v_{t\,i}}{\sum_{j=0}^{\infty} v_{t\,j}} = w_{t\,i},\ i = 0, 1, 2,...$$

Warto również zwrócić uwagę na to, że ważną i bardzo przydatną w dalszych rozważaniach własnością modelu (1.15) jest to, że ma on identyczny z modelem (1.8) rozkład opóźnienia wynikowego.

Współczynniki $u_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,...$; udziałów modelu (1.18) są, zgodnie z definicją (1.17), równe:

$$u_{t\,i} = \frac{w_{t\,i}\,x_{t-i}}{E(y'_t)},\ i = 0, 1, 2,...$$

Na podstawie wzoru (1.10) określającego współczynniki rozkładu opóźnienia można łatwo uzyskać równość:

$$u_{t\,i} = \frac{w_{t\,i}\,x_{t-i}}{E(y'_t)} = \frac{w_{t\,i}\,x_{t-i}}{\sum_{j=0}^{\infty} w_{t\,j}\,x_{t-j}} = \frac{v_{t\,i}\,x_{t-i}}{\sum_{j=0}^{\infty} v_{t\,j}\,x_{t-j}},\ i = 0, 1, 2,....$$

Zatem modele (1.8) i (1.15) mają jednakowe rozkłady opóźnienia $W_t$ i opóźnienia wynikowego $U_t$.

Uwaga.

Istnienie rozkładu opóźnienia wynikowego $U_t$ nie jest warunkiem wystarczającym istnienia rozkładu opóźnienia $W_t$; istnienie rozkładu opóźnienia wynikowego $U_t$ jest zawsze zapewnione dzięki założeniu o skończonych i niezerowych wartościach, jakie przyjmuje zmienna zależna $y$.

Uwaga.

W skończonych modelach opóźnienia rozłożonego rozkłady opóźnienia i opóźnienia wynikowego oraz parametry tych rozkładów istnieją zawsze.

Uwaga.

Jeśli tylko istnieje rozkład (wynikowy opóźnienia i/lub opóźnienia), to można dla niego określić medianę rozkładu.

Oto dwa przykłady ilustrujące omawiane zagadnienia.

Przykład 1.1

Rozważamy model ze stałymi współczynnikami przyjmującymi wartości:

$v_{t\,0} = 0$ i $v_{t\,i} = 1/i^2$ dla $i > 0$.

W tym wypadku suma

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_{ti} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

jest zbieżna, lecz suma

$$\sum_{i=1}^{\infty} i w_{t\,i} = \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{\frac{1}{i^2}}{\left(\frac{\pi^2}{6}\right)} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

jest rozbieżna, ponieważ wartości iloczynów $iw_{t\,i}$ , $i = 1, 2,..$; tworzą rozbieżny ciąg harmoniczny. W tym przypadku istnieje rozkład opóźnienia $W_t$, którego podstawowe parametry, tj. wartość średnia i wariancja, są nieokreślone.

Przykład 1.2

Niech dla wszystkich $i \geq 0$, $v_{t\,i} = 1$, natomiast wartości zmiennej niezależnej tworzą ciąg: $x_t = 1$ i $x_{t-i} = 1/i^2$ dla $i > 0$. W tym przypadku nie istnieje rozkład opóźnienia $W_t$, ponieważ suma współczynników opóźnienia jest rozbieżna, natomiast istnieje rozkład wynikowy $U_t$, a jego podstawowe parametry, tj. wartość średnia i wariancja, są nieokreślone[5]:

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i} = \sum_{i=0}^{\infty} 1 = \infty ;$$

$$u_{t\,i} = \begin{cases} \dfrac{6}{6+\pi^2}, & i = 0; \\ \dfrac{6}{6+\pi^2}\dfrac{1}{i^2}, & i > 1. \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i u_{t\,i} = \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{\frac{1}{i^2}}{\left(\frac{6+\pi^2}{6}\right)} = \frac{6}{6+\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty.$$

Z powyższych rozważań wynika, że - przy spełnionych założeniach o zmiennej niezależnej - rozkład wynikowy opóźnienia istnieje zawsze, a jego parametry są zawsze określone w modelach skończonych, oraz mogą nie być określone w pewnych modelach nieskończonych.

W przypadku modeli skończonych suma (1.9) jest zawsze zbieżna, zatem zawsze mają zdefiniowane rozkłady: wynikowy opóźnienia i opóźnienia.

[5] Na podstawie zależności: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

W przypadku opóźnienia prostego (zwłoki), będącego szczególnym przypadkiem modelu skończonego, oba te rozkłady istnieją zawsze i są rozkładami jednopunktowymi.

## 1.4. Wybrane własności dynamiczne

Gdy struktura opóźnienia ulega zmianie, celowe jest analizowanie mierników opóźnienia dwuetapowo: wpierw jako wielkości stałych, a następnie – jeśli znany jest charakter ewolucji rozkładów opóźnienia – tendencji.

W analizie modeli opóźnienia wykorzystane będą pojęcia stanu ustalonego oraz pomocniczej zmiennej zależnej $y'$, użyteczne w badaniu mechanizmu opóźnienia w modelu (1.12) bez konieczności uwzględniania zmian wartości mnożnika długookresowego $a_t$.

Definicja. Stan ustalony występuje wtedy, gdy wszystkie wartości zmiennej niezależnej $x$ przyjmują tę samą wartość $x^*$, $x^* \neq 0$:

$$x_t = x_{t-1} = x_{t-2} = \ldots = x^*,$$

w którym pomocnicza zmienna zależna $y'_t$ również przyjmuje, wzór (1.15), stałą wartość:

$$y'_t = x^* \sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i} = x^* \quad .$$

Jak wynika z powyższej zależności, w stanie ustalonym pomocnicza zmienna zależna $y'_t$ ma stałą wartość równą $x^*$, co nie przesądza stałości zmiennej zależnej $y_t$, której wartość w stanie ustalonym jest określona również przez współczynnik $a_t$ (mnożnik długookresowy) oraz składnik losowy $\varepsilon_t$:

$$y_t = a_t x^* + \varepsilon_t .$$

Zatem w stanie ustalonym zmienność wartości oczekiwanej zmiennej zależnej $E(y_t)$ jest wynikiem zmienności mechanizmu opóźnienia wyrażającej się zmiennością mnożnika długookresowego $a_t$. Wartość oczekiwana pomocniczej zmiennej zależnej $y'_t$ w stanie ustalonym jest równa $x^*$, a zmiany wartości współczynników rozkładu opóźnienia nie mają wpływu na jej wartość.

W stanie ustalonym modele opóźnienia rozłożonego ze stałymi współczynnikami mają stałą wartość oczekiwaną zmiennej zależnej.

Celem badania własności dynamicznych modeli opóźnienia rozłożonego jest rozpoznanie sposobu, w jaki zmienna zależna reaguje na różnego rodzaju zakłócenia stanu ustalonego. Dla uzyskania możliwie klarownej interpretacji badanie zostaje przeprowadzone przy założeniu, że istnieją podstawowe parametry rozkładu opóźnienia.

Analizę rozpoczniemy od badania następstw jednorazowego zakłócenia (impulsem) $\Delta x$ wartości zmiennej niezależnej w stanie ustalonym w okresie $t = t_0$:

$$x_t = \begin{cases} x^*, & t \neq t_0; \\ x^* + \Delta x & t = t_0. \end{cases} \tag{1.22}$$

Nietrudno wyliczyć, że pomocnicza zmienna zależna $y'$ przyjmuje wartości:

$$y_t' = \begin{cases} x^*, & t < t_0, \\ x^* + w_{t,t-t_0} \Delta x, & t \geq t_0; \end{cases} \tag{1.23}$$

lub

$$y_t' = \begin{cases} x^*, & t < t_0, \\ x^* \left( 1 + w_{t,t-t_0} \dfrac{\Delta x}{x^*} \right), & t \geq t_0. \end{cases}$$

We wszystkich okresach o numerach $t \geq t_0$, odchylenie $y_t' - x_t$ wartości pomocniczej zmiennej niezależnej $y_t'$ od wartości zmiennej niezależnej $x_t$ w stanie ustalonym ($x_{t-i} = x^*$, $i=0, 1, 2, \ldots$) jest równe

$$y_t' - x_t = \Delta x \cdot w_{t,t-t_0}.$$

Z powyższej zależności wynika, że odchylenie wartości zmiennej $x_t$ od wartości $x^*$ o wielkość $\Delta x$ powoduje w kolejnych okresach odchylenia wartości pomocniczej zmiennej $y_t'$ od jej wartości w stanie ustalonym: w okresie $t_0$ o wartość $\Delta x \cdot w_{t_0,0}$, w okresie $t_0+1$ o wartość $\Delta x \cdot w_{t_0+1,1}$, w okresie $t_0+2$ o wartość $\Delta x \cdot w_{t_0+2,2}$, itd.

W ogólnym przypadku można stwierdzić, że wraz z $t \to \infty$ wyrażenia $\Delta x\, w_{t,t-t_0}$ dążą do zera (model nieskończony) lub przyjmują wartość zero dla[6] $t \geq t_0+i_g$ (model skończony). Oznacza to również, że efekt powstałego w okresie $t_0$ zakłócenia stanu ustalonego wygasa wraz z upływem czasu a model powraca do stanu ustalonego.

Wśród modeli opóźnienia ważną rolę pełnią modele o stałych rozkładach opóźnienia; $W_t = W$; tzn. dla wszystkich okresów $t$, $w_{t,i} = w_i = const.$; $i = 0, 1, 2, \ldots$

[6] Przez $i_g$ oznaczono najwyższy indeks niezerowego współczynnika rozkładu opóźnienia.

W przypadku modeli o stałych rozkładach opóźnienia suma odchyleń wartości pomocniczej zmiennej zależnej $y_t^{'}$ od wartości tej zmiennej w stanie ustalonym $x^*$ jest równa dokładnie wielkości odchylenia wartości zmiennej niezależnej w okresie $t_0$ od wartości tej zmiennej w stanie ustalonym:

$$\Delta x \sum_{i=0}^{\infty} w_i = \Delta x .$$

Z powyższego równania wynika, że przy stałym rozkładzie opóźnienia impulsowe zakłócenie zmiennej niezależnej w pełni przenosi się na wartości pomocniczej zmiennej zależnej $y_t^{'}$ lub, innymi słowy: to, co „wchodzi" w opóźnienie w pełni z niego „wychodzi"; w modelu skończonym w czasie skończonym, natomiast w modelu nieskończonym w czasie nieskończonym.

Wyrażenie:

$$\sum_{t=t_0}^{\infty} (t - t_0) w_{t-t_0} = \sum_{i=0}^{\infty} i w_i$$

określa średnią ważoną czasu trwania zmian zmiennej zależnej spowodowanej odchyleniem wartości zmiennej niezależnej od stanu ustalonego, w której wagami są współczynniki rozkładu opóźnienia. Powyższe wyrażenie jest tożsame, co wynika z jego prawej strony, ze średnią *M(W)* rozkładu opóźnienia *W* o stałych współczynnikach.

Na podstawie przedstawionego wyżej rozumowania wartość średnią rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ można interpretować jako średni czas trwania zakłócenia stanu ustalonego, jeśliby rozkład opóźnienia „zastygł" w postaci, jaką uzyskał w okresie *t*. Własność ta pozwala na wykorzystanie średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ jako miernika wielkości opóźnienia będącego rezultatem działania mechanizmu opóźnienia.

Do interpretacji mediany rozkładu opóźnienia wykorzystane zostanie zakłócenie stanu ustalonego przez schodkową zmianę wartości zmiennej niezależnej:

$$x_t = \begin{cases} x^*, & t < t_0; \\ x^* + \Delta x & t \geq t_0. \end{cases} \tag{1.24}$$

powodujące, że pomocnicza zmienna zależna przyjmuje, na podstawie zależności (1.15) wartości:

$$y_t^{'} = \begin{cases} x^*, & t < t_0; \\ x^* + \Delta x \sum_{i=0}^{t-t_0} w_{t\,i}, & t \geq t_0. \end{cases} \tag{1.25}$$

lub

$$y_t' = \begin{cases} x^*, & t < t_0; \\ x^*\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x^*}\sum\limits_{i=0}^{t-t_0} w_{t\,i}\right), & t \ge t_0. \end{cases}$$

Z powyższego wzoru wynika, że dla $t \ge t_0$, odchylenie wartości pomocniczej zmiennej zależnej od wartości zmiennej niezależnej wynosi:

$$y_t' - x_t = \Delta x \sum_{i=0}^{t-t_0} w_{t\,i} - \Delta x = \Delta x \left(\sum_{i=0}^{t-t_0} w_{t\,i} - 1\right) = -\Delta x \sum_{i=t-t_0+1}^{\infty} w_{t\,i}\,,$$

co oznacza, że dąży ono do zera. Wartość pomocniczej zmiennej zależnej $y_t'$ zmienia się w kolejnych okresach o wartość $\Delta x \cdot w_{t,t-t_0}$, dążąc do wartości $x^* + \Delta x$. W przypadku nieskończonego rozkładu opóźnienia całkowite zrównanie się wartości zmiennych $y_t'$ i $x_t$ następuje w czasie nieskończonym.

Istotne jest pytanie o czas niezbędny do tego, aby zmienna zależna $y_t'$ pokonała połowę drogi do uzyskania wartości granicznej $x^* + \Delta x$.

Współczynnik $\eta$ w wyrażeniu:

$$\sum_{t=0}^{\eta} w_{t\,i} < \frac{1}{2} \le \sum_{t=\eta+1}^{\infty} w_{t\,i}$$

określa liczbę okresów, po upływie których następuje połowa zmiany wartości pomocniczej zmiennej zależnej spowodowanej przez zakłócenie stanu ustalonego w następstwie schodkowej zmiany wartości zmiennej niezależnej. Własność ta pozwala na stosowanie mediany $\eta(W_t)$ rozkładu opóźnienia $W_t$ jako miernika wielkości opóźnienia będącego rezultatem działania mechanizmu opóźnienia.

Powyższe rozumowanie pozwala na interpretowanie wartości $\eta(W_t)$ jako czas potrzebny do osiągnięcia 50% reakcji pomocniczej zmiennej zależnej $y'$ na schodkową zmianę wartości zmiennej niezależnej $x$, jeśliby rozkład opóźnienia „zastygł” w postaci, jaką uzyskał w okresie $t$. Własność ta pozwala na wykorzystanie mediany rozkładu opóźnienia $\eta(W_t)$ jako miernika opóźnienia będącego rezultatem działania mechanizmu opóźnienia.

Przenoszenie wahań zmiennej niezależnej

Analiza modeli opóźnienia rozłożonego, gdy zmienna niezależna jest funkcją okresową, ukazuje wiele ważnych własności tych modeli.

Niech zmienna niezależna będzie sumą pewnej stałej $x_0$ i funkcji okresowej rozwiniętej w szereg Fouriera, Fichtenholz (1963), Bronsztejn et al. (2004):

$$x_t = x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \, sin( j\omega t + \varphi_j ) , \tag{1.26}$$

gdzie:

$x_0$ – stała, liczba rzeczywista;

$c_j$ – stałe przyjmujące ograniczone wartości ze zbioru liczb rzeczywistych, $j = 0, 1, 2, ...$;

$\varphi_j$ – stałe przyjmujące ograniczone wartości ze zbioru liczb rzeczywistych, $j = 0, 1, 2, ...$;

$\omega$ – stała oznaczająca częstość podstawową, przy czym:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} ,$$

gdzie stała $T$ , $0 < T < \infty$, oznacza okres wahań.

Występująca we wzorze (1.26) stała $x_0$ ma na celu zapewnienie, w razie potrzeby, by zmienna zależna nie zmieniała znaku; rozwiązanie to jest przydatne, gdy przedmiotem rozważań jest między innymi wynikowy rozkład opóźnienia (patrz komentarz do wzoru (1.17) wraz z przypisem).

Jak poprzednio, analiza zostanie obecnie ograniczona do badania zależności zmiennej pomocniczej $y_t'$ od zmiennej niezależnej $x_t$ określonej tym razem za pomocą wzoru (1.26).

Podstawiając wzór (1.26) do wzoru (1.15) uzyskujemy:

$$y_t' = \sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i} \left\{ x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \, sin[\, j\omega(t-i) + \varphi_j \,] \right\} = \sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i} \, x_0 + \sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \, sin[\, j\omega(t-i) + \varphi_j \,]$$

$$= x_0 + \sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \, sin[ j\omega(t-i) + \varphi_j ] \qquad = x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i} \, sin[ j\omega(t-i) + \varphi_j ]$$

$$= x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \left[ \sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i} \, sin( j\omega t + \varphi_j ) cos( j\omega i ) - \sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i} \, cos( j\omega t + \varphi_j ) sin( j\omega\, i ) \right]$$

$$= x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \left[ sin( j\omega t + \varphi_j ) \sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i} \; cos( j\omega i ) - cos( j\omega t + \varphi_j ) \sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i} \; sin( j\omega\, i ) \right]$$

Przyjmując oznaczenia

$$R( j\omega ) = \sqrt{ \left[ \sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i} \;\; sin( j\omega i ) \right]^2 + \left[ \sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i} \;\; cos( j\omega i ) \right]^2 } , \qquad j = 0, 1, 2, ...; \tag{1.27}$$

$$sin\,\psi_j = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i}\ sin(\,j\omega\,i\,)}{r_j}, cos\,\psi_j = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i}\ cos(\,j\omega\,i\,)}{r_j};\ j=0,\ 1,\ 2,...;$$

$$\psi(\,j\omega\,) = arctg\left(\frac{\sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i}\ sin(\,j\omega\ i\,)}{\sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i}\ cos(\,j\omega\ i\,)}\right); \tag{1.28}$$

powyższy wzór można przedstawić w postaci:

$$y_t' = x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} c_j\ R(\,j\omega\,) sin\left[j\omega t + \varphi_j - \psi(\,j\omega\,)\right]. \tag{1.29}$$

Ponieważ współczynniki $R(\,j\omega\,)$, $j=0,\ 1,\ 2,...$; nazywane dalej współczynnikami tłumienia, spełniają warunek $0 \le R(\,j\omega\,) \le 1$, o zmiennej pomocniczej we wzorze (1.29) można powiedzieć, że jest również funkcją okresową, w której poszczególne częstotliwości mają w stosunku do zmiennej niezależnej zmniejszone amplitudy o czynnik $R(\,j\omega\,)$ będący funkcją rozkładu opóźnienia $W_t$ i częstotliwości $j\omega$. Ponadto dla poszczególnych częstotliwości występują przesunięcia fazy o wielkości $\psi_j$, $0 \le \psi_j \le \pi$, $j=0,\ 1,\ 2,...$; będące również funkcjami rozkładu opóźnienia $W_t$ i częstotliwości $j\omega$, $j=0,\ 1,\ 2,...$.

Reasumując wnioski ze wzoru (1.28) można skonstatować, że mechanizm opóźnienia tłumi poszczególne częstotliwości z różną siłą (czynnik $R_j$), oraz opóźnia każdą o $\tau_j$ okresów:

$$\tau_j = \frac{\psi_j}{2\pi},\ j=0,\ 1,\ 2,... . \tag{1.30}$$

## 1.5. Mierzenie opóźnienia

Znajomość współczynników modelu opóźnienia stanowi punkt wyjścia do sformułowania odpowiedzi na pytanie o wielkość opóźnienia zmiennej zależnej względem zmiennej niezależnej. Podstawowym elementem potrzebnym do udzielenia odpowiedzi jest wybór miary opóźnienia.

Określenie wielkości opóźnienia jest łatwe w szczególnym przypadku modelu opóźnienia prostego, w którym opóźnienie zmiennej zależnej względem zmiennej niezależnej jest równe wartości indeksu jedynego niezerowego współczynnika opóźnienia, zarazem wartości średniej oraz medianie rozkładu opóźnienia. Opóźnienie w takim wypadku jest doskonale skupione (zerowa wariancja rozkładu opóźnienia jest oczywistym następstwem faktu, że rozkład opóźnienia modelu opóźnienia prostego jest jednopunktowy). Ponadto, w modelu opóźnienia prostego rozkład opóźnienia wynikowego jest identyczny z rozkładem opóźnienia, zatem wszystkie odpowiednie parametry obu rozkładów są sobie równe.

W przypadku skończonego modelu opóźnienia rozłożonego problem staje się bardziej złożony; wiadomo, że opóźnienie jest nie mniejsze od wartości $i_d$ oraz nie przekracza wartości $i_g$, jednak zmiany wartości zmiennej zależnej w reakcji na zmianę wartości zmiennej niezależnej są rozłożone w czasie. W przypadku modelu nieskończonego problem jest bardziej złożony, ponieważ wielkość opóźnienia może przyjmować wartości z przedziału $[i_d, \infty]$.

W literaturze przedmiotu, niemającą konkurencji miarą opóźnienia jest wartość średnia rozkładu opóźnienia. Jest ona często nazywana wprost, na przykład Kenkel (1974), Intriligator (1978), średnim lub przeciętnym opóźnieniem (mean lag, average lag). Kolejną teoretycznie uzasadnioną miarą jest mediana rozkładu opóźnienia[7], Hendry, Pagan, Sargan (1984), która jest szczególnym przypadkiem jeszcze innej miary opóźnienia - liczby okresów, jaka jest niezbędna dla realizacji ustalonej części całkowitego efektu (mediana liczba okresów potrzebna do uzyskania 50% całkowitego efektu). Ta ostatnia miara jest stosowana najczęściej, jak się wydaje, w badaniach wpływu nakładów na reklamę na sprzedaż, Clark (1976), Frances, Vroomen (2003), Frances, Vroomen (2006).

Analizując własności średniej $M(W_t)$ i mediany $\eta(W_t)$ rozkładu opóźnienia jako miar opóźnienia należy mieć na uwadze również ich niedostatki jako miary uniwersalnej lub miary wielkości opóźnienia zmian zmiennej zależnej względem zmian zmiennej niezależnej. Mierniki te opisują mechanizm opóźnienia, lecz nie muszą być (i często nie są) zadowalającą miarą opóźnienia zmian zmiennej zależnej względem zmiany zmiennej niezależnej.

O rozkładzie opóźnienia $W_t$ można mówić jedynie wtedy, gdy suma (1.2) jest zbieżna. Postulat, by mnożnik długookresowy, suma (1.2), miał skończoną wartość, nie jest formalnie niezbędny czy konieczny z punktu widzenia interpretacji ekonomicznej. Jego spełnienie daje korzyści wynikające z formalnego uproszczenia umożliwiającego zastosowanie znanych metod analizy matematycznej.

Może się zdarzyć, jak to ukazał Przykład 1.2, że danej strukturze opóźnienia nie odpowiada rozkład opóźnienia, zatem nie można określić również średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$. Mimo, że zmienna zależna przyjmuje skończone wartości i jest kształtowana przez przeszłe wartości zmiennej niezależnej.

Na wartości zmiennej zależnej wpływ ma nie tylko mechanizm opóźnienia, ale również wartości zmiennej niezależnej; zmienna ta może przecież zmieniać się w różnorodny sposób: rosnąć, maleć, podlegać wahaniom okresowym. Dlatego

[7] Ponieważ jest to miernik:

a. obliczeniowo niewygodny,
b. jego wartość informacyjna bardzo zależy od symetrii rozkładu,
c. przyjmuje tylko wartości całkowite.

celowe wydaje się stosowanie jako miary opóźnienia zdefiniowanej wyżej średniej rozkładu opóźnienia wynikowego $M(U_t)$, wzór (1.19), która uwzględnia łączny wpływ, jaki na kształtowanie się zmiennej zależnej mają dwa mechanizmy: opóźnienia oraz kształtowania wartości zmiennej niezależnej.

Rozważając problem określania wielkości opóźnienia warto zwrócić uwagę na to, że pytanie dotyczy jednego z dwóch niejednakowych przypadków:

1. określenia przeciętnej ilości[8] okresów, o jaką dany mechanizm opóźnienia opóźnia zmienną zależną względem zmiennej niezależnej bez względu na kształtowanie się jej wartości
2. określenia przeciętnego czasu trwania zmian wartości zmiennej zależnej w reakcji na zmianę wartości zmiennej niezależnej przy danym mechanizmie opóźnienia i kształtowaniu się zmiennej niezależnej.

W ogólnym przypadku próba odpowiedzi na pytanie o wielkość opóźnienia powinna być poprzedzona ustaleniem, który z powyższych przypadków jest przedmiotem analizy.

W pierwszym przypadku pytanie dotyczy właściwości mechanizmu opóźnienia. Odpowiedź na to pytanie powinna opierać się na mierniku opóźnienia niezwiązanym z wartościami zmiennej niezależnej; takimi miernikami są średnia rozkładu opóźnienia oraz mediana rozkładu opóźnienia.

W drugim przypadku pytanie dotyczy właściwości łącznego działania mechanizmów opóźnienia i kształtowania się wartości zmiennej niezależnej. Odpowiedź na pytanie o czas trwania zmian wartości zmiennej zależnej w reakcji na zmianę wartości zmiennej niezależnej wymaga posłużenia się miernikiem opierającym się na rozkładzie wynikowym opóźnienia, a więc wartością średnią rozkładu wynikowego opóźnienia lub medianą rozkładu wynikowego opóźnienia.

Najprostszym testem przydatności średniej rozkładu wynikowego $M(U_t)$ jako miary opóźnienia jest sprawdzenie, ile ono wynosi w modelu opóźnienia prostego (1.6). W opóźnieniu prostym jedyny niezerowy (i równy dokładnie jeden) udział $u_{t\,l}$ przypada na indeks równy liczbie okresów, o jaką jest w okresie $t$ opóźniona zmienna zależna względem zmiennej niezależnej. Zatem w przypadku opóźnienia prostego średnia rozkładu opóźnienia wynikowego jest równa średniej rozkładu opóźnienia. W modelu opóźnienia prostego wariancja rozkładu wynikowego jest równa zero (podobnie jak wariancja rozkładu opóźnienia), opóźnienie jest doskonale skupione (przypadek rozkładu jednopunktowego).

Dla uchwycenia innych różnic pomiędzy średnią rozkładu opóźnienia i średnią rozkładu wynikowego opóźnienia zwróćmy uwagę na to, że $M(U_t)$ ujmuje wpływ zarówno mechanizmu opóźnienia jak i zmian wartości zmiennej niezależ-

[8] Ponieważ wielkości te nie muszą być całkowite.

nej. Gdy zmienną niezależną charakteryzuje brak dynamiki, wartości średniego opóźnienia wynikowego i średniej rozkładu opóźnienia są sobie równe. Potwierdza to przedstawiony poniżej Lemat1.

Lemat 1. W stanie ustalonym wartości średniego opóźnienia wynikowego $M(U_t)$ i średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ są równe: $M(W_t) = M(U_t)$.

Dowód sprowadza się do obliczenia średniego wynikowego opóźnienia w stanie ustalonym na podstawie definicji, wzór (1.10):

$$M(U_t) = \sum_{i=0}^{\infty} i\, u_{t\,i} = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{v_{t\,i}\, x^*}{\sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i}\, x^*} = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{v_{ti}}{\sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i}} = \sum_{i=0}^{\infty} i\, w_{t\,i} = M(W_t).$$

C.b.d.o.

Dla klarowności interpretacji różnice pomiędzy średnią rozkładu wynikowego opóźnienia $M(U_t)$ a średnią rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ zostaną poniżej przeanalizowane na modelach opóźnień ze stałymi współczynnikami.

Rozpoczniemy od już omawianego w Przykładzie 1.2 modelu, w którym suma (1.2) jest nieskończona, a mimo to model nie traci sensu ekonomicznego. Przykład ten ukazuje skrajny sposób, w jaki na wartość zmiennej zależnej mogą wpływać dwa niezależne czynniki: mechanizm opóźnienia oraz mechanizm kształtujący wartości zmiennej niezależnej. Analizując następny przykład nie zapominamy jednak, że problem rozbieżności sumy (1.2) może wystąpić, przy przyjętych ogólnych założeniach, wyłącznie w przypadku modeli nieskończonych.

Przykład 1.3

Niech wszystkie współczynniki będą stałe i równe jeden, $v_{t\,i} = 1$; $i = 0, 1, 2, \ldots$; zmienna $x$ w okresie $t$ ma skończoną wartość $x_t$, którą osiągnęła w wyniku wzrostu ze stałą stopą $r$, $r>0$, natomiast wartości zmiennej niezależnej w poprzedzających okresach tworzą ciąg geometryczny o kolejnych wyrazach:

$$x_{t-1} = x_t (1+r)^{-1},\ x_{t-2} = x_t (1+r)^{-2}, \ldots$$

Mimo, że w omawianym przypadku suma wszystkich współczynników jest nieograniczona:

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i = \sum_{i=0}^{\infty} 1 = \infty,$$

to zmienna zależna $y$ przyjmuje skończone wartości:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} 1 \cdot x_{t-i} = \sum_{i=0}^{\infty} 1 \cdot x_t (1+r)^{-i} = x_t \sum_{i=0}^{\infty} (1+r)^{-i} = x_t (1+r)/r.$$

Ilustracją tego przypadku jest model wykorzystany między innymi w: Klein (1950), Tinbergen (1959), Klein (1982), Solow (2000), w którym zasób kapitału $K_t$ pod koniec okresu $t$ jest wynikiem powiększenia kapitału $K_{t-1}$ z końca poprzedniego okresu o inwestycje netto $I_t$ poniesione w okresie $t$:

$$K_t = K_{t-1} + I_t. \tag{1.31}$$

Ponieważ zasada kształtowania $K$ jest taka sama we wszystkich okresach:

$$K_{t-i} = K_{t-i-1} + I_{t-i},\ i = 0, 1, 2,...;$$

przez kolejne podstawianie uzyskujemy zależność:

$$K_t = \sum_{i=0}^{\infty} I_t\ , \tag{1.32}$$

z której wynika, że kapitał jest wynikiem skumulowania inwestycji netto poczynionych w całej historii.

(Należy zwrócić uwagę na to, że tzw. hipoteza permanentnego dochodu (*Permanent income hypothesis*), M. Friedmana, Friedman (1957), ma daleko idące podobieństwo do powyżej przedstawionego modelu, z tą różnicą, że jest on zwrócony w przyszłość).

Równanie (1.32) jest modelem opóźnienia, w którym wszystkie współczynniki struktury opóźnienia są równe, $v_i=1$, $i= 0, 1, 2,..$; i dlatego odpowiadająca im suma (1.2) jest rozbieżna. Jednak kapitał określony w równaniu (1.32) ma skończoną wartość implikującą zbieżność szeregu $\sum_{i=0}^{\infty} I_t$ .

W kategoriach ekonomicznych zbieżność tę można uzasadnić na dwa sposoby. Pierwszy wiąże się z faktem, iż rozwój gospodarczy nie ma nieskończonej historii, a niezerowe inwestycje są ponoszone dopiero od pewnego - gorzej lub lepiej - sprecyzowanego okresu początkowego. W takim wariancie mamy do czynienia z modelem skończonym, który jest zawsze zbieżny przy ograniczonych wartościach współczynników i zmiennej niezależnej.

Sposób drugi, niewymagający założenia o skończoności horyzontu historycznego, opiera się na założeniu, że w całym okresie, w którym czas przyjmował wartości od $-\infty$ do $t$, inwestycje wzrastały z przeciętną stopą wzrostu $r$, $r > 0$. W tym wariancie zbieżność szeregu, którego wyrazami są elementy ciągu geometrycznego, jest zapewniona przez zbieżność tego ciągu przy dodatniej wartości przeciętnej stopy wzrostu $r$. Założenie to pozwala na odtworzenie uśrednionych wartości minionych nakładów inwestycyjnych:

$$I_{t-1} = I_t(1+r)^{-1},\ I_{t-2} = I_t(1+r)^{-2},...,\ I_{t-i} = I_t(1+r)^{-i},..;\ i = 0, 1, 2,...:$$

oraz, po podstawieniu odpowiednich wyrazów do sumy (1.27), na przedstawienie kapitału $K_t$ za pomocą następującego równania

$$K_t = I_t \sum_{i=0}^{\infty} (1+r)^{-i} = I_t (1 + r) / r.$$

Obliczając na podstawie wzoru (1.8) udziały $u_{t\,i}$:

$$u_{t\,i} = \frac{I_t (1+r)^{-i}}{I_t \frac{1+r}{r}} = \frac{r (1+r)^{-i}}{1+r} = r (1+r)^{-(i+1)},\ i = 0,\ 1,\ 2, \ldots;,$$

można obliczyć, zgodnie ze wzorem (1.10), średnie wynikowe opóźnienie:

$$M(U_t) = \sum_{i=0}^{\infty} i\, u_{i\,t} = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{r}{1+r} (1+r)^{-i} = \frac{r}{1+r} \sum_{i=0}^{\infty} i (1+r)^{-i} = \frac{1}{r}.$$

W omawianym przykładzie wartość średnia wynikowego rozkładu opóźnienia jest funkcją przeciętnej stopy wzrostu inwestycji: im niższa wartość tej stopy, tym wyższa wartość tej średniej.

Przyjmując, że przeciętna w całej historii stopa wzrostu inwestycji $r$ wyniosła 5% rocznie, uzyskujemy wartość wynikowego opóźnienia równą 20 lat. Wielkość tę można interpretować (będzie o tym mowa dalej podczas omawiania modeli przepływów) jako przeciętny wiek jednostek wchodzących w skład skumulowanego kapitału. Korzystając z własności ciągu geometrycznego nietrudno obliczyć, że pod koniec okresu $t$ 64% jednostek zainstalowanego kapitału ma mniej niż 21 lat, natomiast pozostałe 36% składa się z jednostek w wieku zawierającym się w przedziale pomiędzy 21 latami i nieskończonością.

W przedstawionym wyżej Przykładzie 1.3 zbieżność sumy w wyrażeniu (1.1) nie wynikała ze zbieżności sumy (1.2) lecz ze skończonej wielkości historycznie poniesionych nakładów inwestycyjnych. W przykładzie tym nie istnieje rozkład opóźnienia, zatem nie jest również określona średnia rozkładu opóźnienia $M(W_t)$, można natomiast określić średnią rozkładu opóźnienia wynikowego $M(U_t)$. O tym, jaki jest przeciętny wiek jednostki kapitału decyduje w Przykładzie 1.3 nie mechanizm opóźnienia, lecz wyłącznie mechanizm kształtowania się zmiennej niezależnej.

Przejdziemy teraz do analizy modelu opóźnienia, w którym istnieją obie wielkości średnie: średnia rozkładu opóźnienia wynikowego i średnia rozkładu opóźnienia.

<u>Przykład 1.4</u>

Niech wartości współczynników opóźnienia tworzą malejący ciąg geometryczny:

$$v_i = (1 - \lambda)^i,\ 0 \leq \lambda < 1,\ i = 0, 1, 2,...;$$

którego suma (1.2) (mnożnik długookresowy) ma skończoną wartość i wynosi:

$$a_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i = 1/\lambda;$$

znormalizowane współczynniki $w_i$ , $i = 0, 1, 2,..$; mają postać:

$$w_i = \lambda (1 - \lambda)^i,\ i = 0, 1, 2,...;$$

a średnia rozkładu opóźnienia $M(W)$ wynosi:

$$M(W) = (1 - \lambda) / \lambda. \tag{1.33}$$

Analityczne wyznaczenie wartości średniej rozkładu opóźnienia wynikowego wymaga dodatkowych założeń o kształtowaniu się zmiennej niezależnej. Niech, podobnie jak w Przykładzie 1.3, zmienna niezależna wzrasta z określonym stałym tempem wzrostu $r$:

$$x_t = x_t,\ x_{t-1} = x_t (1+ r)^{-1},\ x_{t-2} = x_t (1 + r)^{-2},\dots$$

tym razem jednak nie precyzując z góry przedziału zmienności stopy $r$.

Uwzględnienie ostatniego założenia pozwala na wyznaczenie wartości zmiennej zależnej jako sumy postępu geometrycznego:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i \cdot x_{t-i} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda (1-\lambda)^i \cdot x_t (1+r)^{-i} = \lambda\, x_t \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{1-\lambda}{1+r} \right)^i = \lambda\, x_t \frac{1+r}{\lambda + r} \tag{1.34}$$

oraz udziałów $u_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,..;$ (na podstawie wzoru (1.8)):

$$u_{t\,i} = \frac{v_i\, x_{t-i}}{E(y_t)} = \frac{\lambda\, x_t \left( \frac{1-\lambda}{1+r} \right)^i}{\lambda\, x_t \frac{1+r}{\lambda + r}} = \frac{\lambda + r}{1+r} \left( \frac{1-\lambda}{1+r} \right)^i, \tag{1.35}$$

na których podstawie po nieskomplikowanych przekształceniach uzyskujemy wartość średnią wynikowego opóźnienia $M(U_t)$:

$$M(U_t) = \frac{1-\lambda}{\lambda + r}. \tag{1.36}$$

Mianownik parametru $M(U_t)$, wzór (1.36), różni się od mianownika parametru $M(W)$, wzór (1.33), o wartość współczynnika $r$. Warunkiem, aby zmienna zależna $y_t$ miała skończoną i dodatnią wartość jest zbieżność sumy,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1-\lambda}{1+r}\right)^{i},$$

która zachodzi, gdy $r$ spełnia warunek: $-r < \lambda < 2+r$.

Z przedstawionego wyżej wywodu wynika, że dla zapewnienia zbieżności powyższej sumy stopa wzrostu wartości zmiennej niezależnej nie musi być dodatnia, jednak musi być większa od wartości współczynnika $\lambda$ ze znakiem ujemnym ($r > \lambda$).

Ze wzorów (1.33) i (1.36) wynika ponadto, że w omawianym przykładzie udziały $u_i$, $i = 0, 1, 2,..;$ a co za tym idzie, również średnia wynikowego rozkładu opóźnienia $M(U_t)$, nie zależą od czasu. Jest to rezultat tego, że zmianie nie ulega stopa wzrostu wartości zmiennej niezależnej. Jednak w ogólnym przypadku parametry rozkładu wynikowego opóźnienia są zmienne.

Różnica pomiędzy wartościami $M(W)$, wzór (1.33), i $M(U_t)$, wzór (1.36), jest skutkiem tego, że pierwsza wielkość nie zależy od kształtowania się zmiennej niezależnej i określa opóźnienie wynikające z działania mechanizmu opóźnienia, natomiast druga wielkość uwzględnia łączny efekt działania mechanizmu opóźnienia, jak i kształtowania się zmiennej niezależnej. Ponieważ w rozpatrywanym przykładzie wartości zmiennej niezależnej wzrastają, znacznie większą wagę w kształtowaniu wartości zmiennej zależnej mają wyższe, najpóźniejsze wartości zmiennej zależnej, których wkład - w tym przykładzie - jest ważony za pomocą współczynników opóźnienia o wyższych wartościach. Zmniejsza to w efekcie udział wcześniejszych wartości zmiennej niezależnej w kształtowaniu wartości zmiennej zależnej.

Porównanie uzyskanych wartości $M(W)$ i $M(U_t)$ prowadzi do wniosku, że przy $r = 0$, $M(W) = M(U_t)$. Wynik ten w omawianym przykładzie nie jest efektem szczególnego doboru współczynników opóźnienia, lecz ma charakter ogólniejszy - jest zgodny z Lematem 1, z którego wynika, że w stanie ustalonym średnia wynikowego rozkładu opóźnienia i średnia rozkładu opóźnienia są sobie równe.

W sensie formalnym analizowany tu model można uznać za ogólniejszy od modelu z Przykładu 1.3, który można interpretować jako jego szczególny przypadek przy wartości parametru $\lambda = 0$.

Ekonomiczną ilustracją może być model kształtowania się kapitału pod wpływem ponoszonych nakładów inwestycyjnych oraz uwzględnionego *explicitè* procesu deprecjacji kapitału. Przy założeniu stałej wartości współczynnika deprecjacji $d$ i mechanizmu deprecjacji kapitału, w którym wielkość deprecjacji jest proporcjonalna do wielkości kapitału, równanie kapitału przyjmuje następującą postać:

$$K_t = K_{t-1} - d\,K_{t-1} + I'_t = (\,1 - d\,)\,K_{t-1} + I'_t. \tag{1.37}$$

Współczynnik deprecjacji $d$ określa w okresie $t$ wielkość $d\,K_{t-1}$, tzn. tę część kapitału $K_{t-1}$, która w tym okresie ubywa z zasobu tego kapitału. Zmienna $I'_t$ oznacza wielkość inwestycji brutto, której związek z inwestycjami netto $I_t$ z Przykładu 1.1 opisuje zależność:

$$I_t = I'_t - d\,K_{t-1}.$$

Załóżmy, że zależność (1.37) obowiązuje we wszystkich okresach poprzedzających okres $t$:

$$K_{t-i} = (\,1 - d\,)\,K_{t-i-1} + I'_t. \qquad i = 0, 1, 2,\ldots \tag{1.38}$$

Zastępując w równaniu (1.38) odpowiednio zmienną $K_{t-1}$ przez $K_{t-2}$, $K_{t-2}$ przez $K_{t-3}$, itd., określane dla kolejnych $i$ otrzymujemy następującą postać zależności (1.37):

$$K_t = I_t + (\,1 - d\,)^1\,I'_{t-1} + (\,1 - d\,)^2\,I'_{t-2} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty}(1-d)^i\,I'_{t-i}\,. \tag{1.39}$$

Równanie (1.39) można interpretować jako model opóźnienia, w którym inwestycje są zmienną niezależną, współczynniki opóźnienia $v_i$, $i = 0, 1, 2,\ldots$; są wyrażone za pomocą wzoru:

$$v_i = (\,1 - d\,)^i,\ i = 0, 1, 2,\ldots$$

mnożnik długookresowy jest równy $1/d$, a znormalizowane współczynniki są opisane za pomocą następującego wzoru:

$$w_i = d(\,1 - d\,)^i,\ i = 0, 1, 2,\ldots$$

Analizując przypadek dodatnich wartości stopy wzrostu inwestycji $r$ nietrudno zauważyć, że średnia rozkładu opóźnienia $M(W)$ jest większa od wartości średniej wynikowego rozkładu opóźnienia $M(U_t)$. Przyjmując, podobnie jak w Przykładzie 1.3, że stopa wzrostu $r = 5\%$ oraz współczynnik $d = 0{,}075$, uzyskujemy:

$$M(W) = 12\tfrac{1}{3} \text{ oraz } M(U_t)_{r=5\%} = 7{,}4.$$

Różnica pomiędzy $M(W)$ oraz $M(U_t)$ jest znacząca: zwiększenie stopy wzrostu od zera (w stanie ustalonym) do pięciu punktów procentowych obniża średnie opóźnienie o $40\%$.

Parametry $M(W)$ i $M(U_t)$ mają skończone wartości tak długo, jak długo spełniony jest warunek $-d \le r$ . Jeśliby założyć, że inwestycje historyczne nie rosły, lecz spadały w tempie $2{,}5\%$ rocznie, wówczas

$$M(W) = 12\tfrac{1}{3} \text{ oraz } M(U_t)_{r=-2{,}5\%} = 18\,\tfrac{1}{2}.$$

W powyższym przykładzie różnica pomiędzy $M(W)$ i $M(U_t)$ jest dodatnia przy inwestycjach rosnących oraz malejąca przy inwestycjach spadających. Wykres zależności pomiędzy wartością średnią wynikowego rozkładu opóźnienia $M(U_t)$ a stopą wzrostu $r$ w analizowanym przykładzie przedstawiono na rys. 1.1. Omawiana własność nie wynika z doboru konkretnego modelu opóźnienia, lecz ma charakter ogólniejszy. Mówi o tym przedstawione dalej Twierdzenie 1, którego dowód jest zamieszczony w Dodatku 1.

Równie ważną rzeczą jest wpływ stopy wzrostu na wariancję wynikowego rozkładu opóźnienia. Korzystając ze wzorów (1.20) i (1.24) po nieskomplikowanych przekształceniach można uzyskać dla rozważanego przykładu następujący wzór:

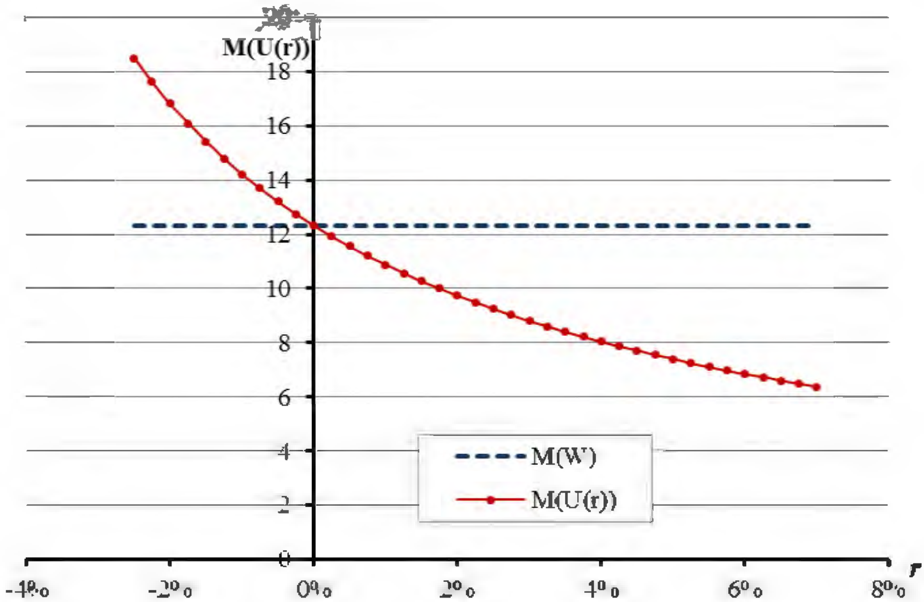
$$D^2(U) = \frac{(1+r)(1-d)}{(d+r)^2},$$

objaśniający zależność wariancji wynikowego rozkładu opóźnienia od stopy wzrostu zmiennej niezależnej.

Z powyższego wzoru wynika, że przy zerowej stopie wzrostu wariancja rozkładu opóźnienia i wariancja rozkładu wynikowego opóźnienia są równe, a ponadto wraz ze wzrostem stopy $r$, wariancja rozkładu wynikowego opóźnienia maleje.

Przyjmując, że współczynnik $d = 0{,}075$ a stopa wzrostu $r = 5\%$ uzyskujemy:

$D^2(W)_{r=5\%} = 164{,}4$; $D(W)_{r=5\%} = 12{,}8$ oraz $D^2(U)_{r=5\%} = 62{,}2$, $D(U)_{r=5\%} = 7{,}9$.




Rys. 1.1. Przykład 1.4. Zależność średniego łącznego opóźnienia $M(U(r))$ od stopy wzrostu $r$ przy założonej wartości średniej rozkładu opóźnienia $M(W)$ równej $12\frac{1}{3}$.

Przy tej samej wartości współczynnika $d$ lecz z ujemną stopą wzrostu $r= -2,5\%$ wariancja wynikowego rozkładu opóźnienia wynosi:

$$D^2(U)_{r=-2,5\%} = 360,8; \; D(U)_{r=-2,5\%} = 19,0.$$

Z przedstawionych powyżej obliczeń dla Przykładu 1.4 wynika, że wariancja rozkładu wynikowego opóźnienia reaguje na wielkość stopy wzrostu zmiennej niezależnej podobnie jak wartość średnia rozkładu wynikowego opóźnienia: maleje wraz ze wzrostem stopy wzrostu zmiennej niezależnej oraz rośnie ze spadkiem tej zmiennej.

Uwaga. Ten wynik nie ma charakteru ogólnego, bowiem w przypadku niektórych rozkładów opóźnienia zwiększenie stopy wzrostu zmiennej niezależnej powoduje wzrost wariancji wynikowego rozkładu opóźnienia. Ilustruje to następujący przykład.

Przykład 1.5

Rozważmy dwa skończone rozkłady opóźnienia $W^{(1)}$ i $W^{(2)}$. Niech pierwszy rozkład opóźnienia $W^{(1)}$ ma tylko dwa niezerowe stałe współczynniki rozkładu: $w_0^{(1)} = 1/3$ i $w_1^{(1)} = 2/3$. Wartość średnia rozkładu opóźnienia wynosi $M(W^{(1)}) = 2/3$ a wariancja $D^2(W^{(1)}) = 2/9$.

Zakładając, że zmienna niezależna $x$ rośnie ze stopą wzrostu równą $r=5\%$, średnia oraz wariancja wynikowego rozkładu opóźnienia wynoszą odpowiednio: $M(U_t^{(1)}) = 0,6446$ i $D^2(U_t^{(1)}) = 0,2291$. Zatem wariancja wynikowego rozkładu opóźnienia obliczona dla wartości stopy wzrostu równej $r=5\%$ jest większa od wariancji rozkładu wynikowego opóźnienia obliczonej dla wartości stopy wzrostu równej $r=0\%$.

Drugi z rozważanych w ramach tego przykładu skończony rozkład opóźnienia $W^{(2)}$ ma również tylko dwa niezerowe stałe współczynniki rozkładu: $w_0=2/3$ i $w_1= 1/3$. Wartość średnia rozkładu opóźnienia wynosi $M(W^{(2)})= 1/3$; zaś wariancja rozkładu opóźnienia wynosi podobnie jak w pierwszym rozkładzie $D^2(W^{(2)})= 0,222....$ .

Przyjmując to samo założenie, że zmienna niezależna $x$ rośnie ze stopą wzrostu równą $r=5\%$, średnia oraz wariancja wynikowego rozkładu opóźnienia wynoszą dla tego rozkładu odpowiednio: $M(U_t^{(2)}) = 0,312$ i $D^2(U_t^{(2)}) = 0,215$ $M(U_t)= 0,312$ i $D^2(U_t)= 0,215$. Zatem wariancja rozkładu wynikowego opóźnienia obliczona dla wartości stopy wzrostu równej $r=5\%$ jest mniejsza od wariancji rozkładu wynikowego opóźnienia obliczonej dla wartości stopy wzrostu równej $r=0\%$.

W obu rozważanych w tym przykładzie przypadkach, wzrost zmiennej niezależnej powoduje obniżenie wartości średniej rozkładu opóźnienia wynikowego w stosunku do wartości średniej rozkładu opóźnienia.

Analiza kształtowania się wariancji wynikowego rozkładu opóźnienia w obu przypadkach wskazuje na jej odmienny przebieg. W przypadku pierwszego z rozważanych rozkładów następuje spadek, natomiast w drugim wzrost wariancji wynikowego rozkładu opóźnienia. Wynika z tego następujący wniosek: w ogólnym przypadku wzrost stopy wzrostu może powodować zarówno wzrost jak i spadek wartości wariancji rozkładu wynikowego opóźnienia.

Wyjaśnienie zjawiska różnego zachowania się wariancji rozkładu opóźnienia wynikowego w podanych wyżej przykładach można ograniczyć do opisu słownego: w przypadku pierwszego rozkładu wzrost zmiennej niezależnej powoduje zwiększenie stromizny rozkładu opóźnienia wynikowego, co pociąga za sobą spadek wartości wariancji rozkładu opóźnienia wynikowego, natomiast w przypadku drugiego rozkładu wzrost zmiennej niezależnej powoduje spłaszczenie rozkładu opóźnienia wynikowego, co pociąga za sobą wzrost wartości wariancji rozkładu opóźnienia wynikowego[9].

## 1.6. Średnia wynikowego rozkładu opóźnienia *M(U$_t$)* jako miara opóźnienia (1)

Analiza własności średniej rozkładu opóźnienia wynikowego rozpoczęta zostanie od zbadania ogólnej zależności rozkładu opóźnienia wynikowego od stopy wzrostu zmiennej niezależnej.

Zgodnie z zależnością (1.8), dla rozkładu opóźnienia $W_t$ oraz stałej stopy wzrostu $r$, współczynniki udziału, tzn. współczynniki rozkładu opóźnienia wynikowego $u_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,...$; są określone za pomocą następującego wzoru:

$$u_{t\,i} = \frac{v_{t\,i}\, x_{t-i}}{\sum_{j=0}^{\infty} v_{t\,j}\, x_{t-j}} = \frac{v_{t\,i}\, x_t(1+r)^{-i}}{\sum_{j=0}^{\infty} v_{t\,j}\, x_t(1+r)^{-j}} = \frac{v_{t\,i}\,(1+r)^{-i}}{\sum_{j=0}^{\infty} v_{t\,j}\,(1+r)^{-j}} = \frac{w_{t\,i}\,(1+r)^{-i}}{\sum_{j=0}^{\infty} w_{t\,j}\,(1+r)^{-j}},$$

$$i = 0, 1, 2,.. \quad (1.40)$$

z którego wynika, zgodnie z Lematem 1, że przy stopie wzrostu równej zero współczynniki udziału $u_{t\,i}$, , $i = 0, 1, 2,...$; są równe współczynnikom rozkładu opóźnienia $W_t$.

Poniżej przedstawione zostały twierdzenia, których dowody zamieszczono w Dodatku 1.

[9] Określony na danym odcinku rozkład liniowy ma wariancję mniejszą od rozkładu równomiernego określonego na tym samym odcinku.

Twierdzenie 1. O odchyleniu średniego łącznego opóźnienia $M(U_t)$ od wartości średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ przy stałej nieujemnej stopie wzrostu $r$ zmiennej niezależnej.

Założenia Istnieją rozkład opóźnienia $W_t$ i jego podstawowe parametry $M(W_t)$ i $D^2(W_t)$.

Teza Przy nieujemnej stopie wzrostu zmiennej niezależnej $r$, $r \geq 0$, średnia opóźnienia wynikowego $M(U_t)$ jest nie większa od średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$:

$$M(U_t) \leq M(W_t).$$

Z Twierdzenia 1 wynika, że odchylenie wartości średniej wynikowego rozkładu opóźnienia $M(U_t)$ od wartości średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ jest funkcją wartości stopy wzrostu $r$ zmiennej niezależnej. Tę samą tezę w nieco inny sposób można dowieść za pomocą twierdzenia o pochodnej $M(U_t)$.

Twierdzenie 2. O zależności wartości średniej wynikowego rozkładu opóźnienia $M(U_t)$ od stałej nieujemnej stopy wzrostu $r$ zmiennej niezależnej.

Założenia Istnieją rozkład opóźnienia $W_t$ i jego podstawowe parametry $M(W_t)$ i $D^2(W_t)$.

Teza Wartość średnia rozkładu opóźnienia wynikowego $M(U_t)$ jest malejącą funkcją stopy wzrostu $r$ zmiennej niezależnej.

Komentarz

Twierdzenie 1 i Twierdzenie 2 zostały dowiedzione dla dowolnych rozkładów opóźnień oraz dodatnich wartości stałej stopy wzrostu oraz skończonych wartości zmiennej niezależnej.

W przypadku ujemnych stóp wzrostu zmiennej niezależnej zależność odwrotna nie zawsze jest spełniona. Dla skończonych rozkładów opóźnienia $W_t$ istnienie wynikowego rozkładu opóźnienia $U_t$ jest zapewnione dla skończonej wartości największego znaczącego indeksu $i_g$. Dzięki temu przy ujemnej stopie wzrostu zmiennej niezależnej zachodzi relacja:

$$M(U_t) \geq M(W_t).$$

W przypadku rozkładów nieskończonych relacja ta może nie zachodzić. Jak pokazuje Przykład 1.4 i ilustrujący go rys.1, skończone wartości zmiennej niezależnej nie zawsze są warunkiem wystarczającym istnienia rozkładu wynikowego opóźnienia oraz jego podstawowych parametrów. Dla określonych wartości ujemnych[10] stóp wzrostu ($-\lambda \leq r < 0$ ) zmienna niezależna przyjmuje (w granicy) warto-

[10] Oznacza to spadek wartości zmiennej niezależnej od wartości nieskończonej w „zamierzchłej przeszłości" do skończonej wartości $x_t$ w okresie $t$ ze stałą stopą spadku $r$.

ści nieograniczone, a mimo to istnieje rozkład wynikowy opóźnienia. Gdy stopa wzrostu przyjmuje ujemne wartości z przedziału $-\lambda > r$, rozkład wynikowy rozkładu opóźnienia nie istnieje.

Opisana w Twierdzeniach 1 i 2 własność nie występuje w przypadku opóźnienia prostego, w którym wariancja wynikowego rozkładu opóźnienia, podobnie jak wariancja rozkładu opóźnienia, ma wartość zero (rozkład jednopunktowy).

Z powyższych rozważań można wyprowadzić następujący wniosek: wtedy, gdy celem badania jest ustalenie opóźnienia zmiennej zależnej względem zmiennej niezależnej, za miernik opóźnienia powinna być przyjmowana wartość średnia rozkładu opóźnienia wynikowego; wykorzystanie do tego celu wartości średniej rozkładu opóźnienia pociąga za sobą powstanie błędu, którego wielkość zależy od dynamiki zmiennej niezależnej.

Twierdzenie 3. Twierdzenie o zależności rozkładu wynikowego opóźnienia od stopy wzrostu zmiennej niezależnej

Założenia Rozważany jest model opóźnienia rozłożonego, w którym są określone podstawowe parametry rozkładu opóźnienia i w którym wartości zmiennej niezależnej wzrastają ze stałą stopą wzrostu $r$.

Teza Gdy stopa wzrostu $r$ zmiennej niezależnej $x$ rośnie do nieskończoności, rozkład opóźnienia wynikowego dąży do rozkładu jednopunktowego (opóźnienia prostego) o wartości średniej rozkładu opóźnienia wynikowego równej najmniejszej wartości indeksu znaczącego $i_d$, a wariancja rozkładu opóźnienia wynikowego dąży do zera.

Komentarz

Dowiedziona w Twierdzeniu 3 zbieżność rozkładu wynikowego opóźnienia do rozkładu jednopunktowego jest powolna. Wraz ze wzrostem wartości stopy wzrostu $r$, wartość średnia rozkładu opóźnienia wynikowego maleje monotonicznie do wartości $i_d$.

Spadkowi wartości średniej rozkładu opóźnienia wynikowego nie musi towarzyszyć monotoniczny spadek wartości wariancji rozkładu opóźnienia wynikowego. Jak wynika z Przykładu 1.4 przedstawionego w punkcie 1.5, można znaleźć takie rozkłady opóźnienia, dla których zwiększenie stopy wzrostu w pewnym przedziale wartości powoduje wzrost wariancji rozkładu wynikowego. Wypływa z tego wniosek, że przedział wartości stopy wzrostu, dla której zjawisko to daje się zaobserwować, jest ograniczony; dla każdego rozkładu opóźnienia tego rodzaju można znaleźć taką wielkość stopy wzrostu, od której dalszy jej wzrost powoduje spadek wariancji rozkładu opóźnienia wynikowego.

## 1.7. Średnia rozkładu opóźnienia wynikowego $M(U_t)$ jako miara opóźnienia (2)

Badanie własności średniej rozkładu opóźnienia wynikowego $M(U_t)$ rozpocznie analiza jej reakcji na zakłócenie stanu ustalonego przez zdefiniowaną w Punkcie 1.4 impulsową zmianę wartości zmiennej niezależnej w okresie $t_0$, wzór (1.22). Dla ustalenia uwagi analiza opierać się będzie na założeniu, że wielkość zakłócenia zmiennej niezależnej $\Delta x$ oraz wartość tej zmiennej w stanie ustalonym $x^*$ są dodatnie, rozkład opóźnienia nie jest jednopunktowy oraz określone są niezerowe wartości średnie i wariancje rozkładów opóźnienia i opóźnienia wynikowego.

Na podstawie wzorów (1.17), (1.22) i (1.23) uzyskujemy następujące zależności opisujące wartości współczynniki rozkładu opóźnienia wynikowego w kolejnych okresach, $t \geq t_0$:

$$u_{ti} = \begin{cases} \dfrac{w_{t,i}}{1+\dfrac{\Delta x}{x^*} w_{t,i}}, i \neq t-t_0; \\[2ex] \dfrac{(1+\dfrac{\Delta x}{x^*}) w_{t,i}}{1+\dfrac{\Delta x}{x^*} w_{t,t-t_0}}, i = t-t_0. \end{cases} \tag{1.41}$$

Ponieważ modele (1.15) i (1.8) mają ten sam rozkład opóźnienia, wzór (1.23) można zastosować do określenia wartości średniej rozkładu opóźnienia wynikowego w okresach $t \geq t_0$:

$$M(U_t) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i x^* w_{t\,i} + (t-t_0)\Delta x w_{t,t-t_0}}{x^* + \Delta x w_{t,t-t_0}},$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i\, w_{t\,i} + (t-t_0)\dfrac{\Delta x}{x^*} w_{t,t-t_0}}{1+\dfrac{\Delta x}{x^*} w_{t,t-t_0}},$$

$$= \frac{M(W_t) + (t-t_0)\dfrac{\Delta x}{x^*} w_{t,t-t_0}}{1+\dfrac{\Delta x}{x^*} w_{t,t-t_0}},$$

i wreszcie:

$$M(U_t) = M(W_t)\frac{1+\dfrac{\Delta x}{x^*}\dfrac{(t-t_0)}{M(W_t)}w_{t,t-t_0}}{1+\dfrac{\Delta x}{x^*}w_{t,t-t_0}}. \tag{1.42}$$

Jak wynika z zależności (1.42), w następstwie impulsowego zakłócenia stanu ustalonego w okresie $t_0$, wartość średnia wynikowego rozkładu opóźnienia $M(U_t)$ różna od wartości średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ pojawi się w okresie $t$, $t = t_0 + i_d$, przyjmując wartość[11]:

$$M(U_{t_0+i_d})=M(W_{t_0+i_d})\frac{1+\dfrac{\Delta x}{x^*}\dfrac{i_d}{M(W_{t_0+i_d})}w_{t_0+i_d,i_d}}{1+\dfrac{\Delta x}{x^*}w_{t_0+i_d,i_d}}, \tag{1.43}$$

która jest mniejsza od $M(W_{t_0+i_d})$, ponieważ z założenia rozkład opóźnienia nie jest jednopunktowy.

Ze wzoru (1.39) wynika, że reakcja wartości średniej rozkładu opóźnienia wynikowego pojawia się w okresie o numerze $t = t_0 + i_d$ w którym przyjmuje wartość mniejszą od $M(W_{t_0+i_d})$.

Ze wzoru (1.37) wynika, że średnia rozkładu wynikowego opóźnienia $M(U_t)$ kształtuje się według schematu: w okresach, dla których $t - t_0 \leq M(W_t)$ jest nie większa od średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ oraz dla $t\text{-}t_0 > M(W_t)$ nie mniejsza od średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$, a ponadto, gdy $t \to\infty$, wtedy zbiega do wartości $M(W_t)$. Użycie w tym wypadku nieostrych relacji „nie mniejsza" i „nie większa" wynika z tego, że w ogólnym przypadku niezerowe współczynniki rozkładu opóźnienia mogą być poprzedzielane współczynnikami o zerowych wartościach; w takich przypadkach, ilekroć $w_{t\,i} = 0$ oraz $i = t - t_0$, wtedy wzór (1.37) ulega redukcji do równości:

$$M(U_t) = M(W_t).$$

O ile reakcja wartości średniej wynikowego rozkładu opóźnienia na mające postać impulsu zakłócenie stanu ustalonego przebiega dla wszystkich niejednopunktowych rozkładów opóźnienia według tego samego schematu, to w przypadku wariancji rozkładu opóźnienia wynikowego taka prawidłowość nie występuje. Problem ten jest zilustrowany za pomocą poniższego przykładu.

[11] Współczynnik $i_d$ zdefiniowany został w punkcie 1.1 jako najmniejszy indeks współczynnika opóźnienia nierównego zero.

Przykład 1.6

Rozważmy dwa rozkłady opóźnienia z Przykładu 1.5. Badamy kształtowanie się wartości średnich i wariancji w odpowiednich rozkładach opóźnienia wynikowego w następstwie zakłócenia stanu ustalonego impulsem $\Delta x = 1$ w okresie $t_0$. Niech ponadto $x^* = 1$. Współczynniki, wartości średnie i wariancje obu wynikowych rozkładów opóźnienia wynoszą odpowiednio w okresach $t_0$ i $t_0+1$ (w pozostałych przyjmują wartości równe odpowiednim parametrom rozkładu opóźnienia):

$$u^{(1)}_{t_0 0} = \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x^*}\right) w^{(1)}_{t_0 0}}{1+\frac{\Delta x}{x^*} w^{(1)}_{t_0 0}} = \frac{1}{2}, u^{(1)}_{t_0 1} = 1 - u^{(1)}_{t_0 0} = \frac{1}{2}; M(U_{t_0}^{(1)}) = u^{(1)}_{t_0 1} = \frac{1}{2}, D^2(U_{t_0}^{(1)}) = \frac{1}{4};$$

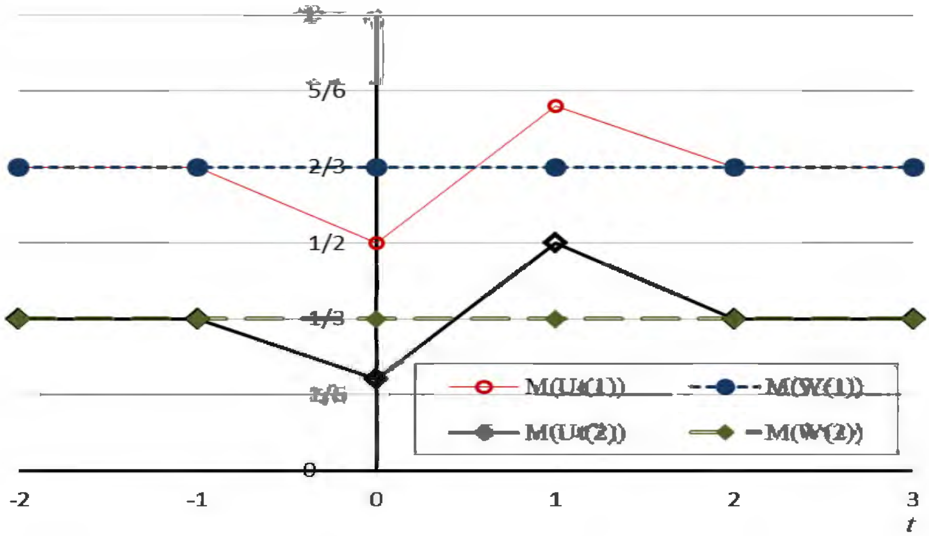
$$u^{(1)}_{t_0+1,0} = \frac{w^{(1)}_{t_0+1,0}}{1+\frac{\Delta x}{x^*} w^{(1)}_{t_0+1,0}} = \frac{1}{5}, u^{(1)}_{t_0+1,1} = 1 - u^{(1)}_{t_0+1,0} = \frac{4}{5}, M(U_{t_0+1}^{(1)}) = u^{(1)}_{t_0+1,1} = \frac{4}{5}, D^2(U_{t_0+1}^{(1)}) = \frac{1}{6};$$

oraz

$$u^{(2)}_{t_0 0} = \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x^*}\right) w^{(2)}_{t_0 0}}{1+\frac{\Delta x}{x^*} w^{(2)}_{t_0 0}} = \frac{4}{5},\ u^{(2)}_{t_0 1} = \frac{1}{5};\ M(U_{t_0}^{(2)}) = u^{(2)}_{t_0 1} = \frac{1}{5}, D^2(U_{t_0}^{(2)}) = \frac{4}{25};$$

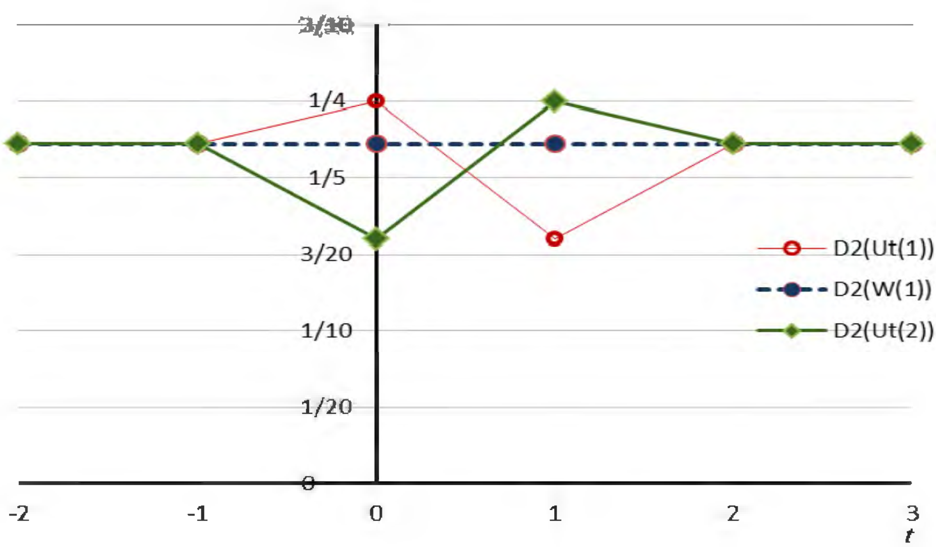
$$u^{(2)}_{t_0+1,0} = \frac{w^{(2)}_{t_0+1,0}}{1+\frac{\Delta x}{x^*} w^{(2)}_{t_0+1,0}} = \frac{1}{2},\ u^{(2)}_{t_0+1,1} = \frac{1}{2},\ M(U_{t_0+1}^{(2)}) = u^{(2)}_{t_0+1,1} = \frac{1}{2},\ D^2(U_{t_0+1}^{(2)}) = \frac{1}{4}.$$

Uzyskane wyniki są przedstawione na wykresach zamieszczonych na rys. 1.2, 1.3 i 1.4. Dla łatwiejszego ich odczytu przedstawione na tych wykresach punkty zostały połączone liniami.




Rys. 1.2. Wartości średnie rozkładów opóźnienia wynikowego $M(U_t^{(1)})$ i $M(U_t^{(2)})$ z Przykładu 1.6 po impulsowym zakłóceniu stanu ustalonego w chwili $t=0$.

Jak wynika z rys. 1.2, przebiegi wartości średnich obu rozważanych rozkładów opóźnienia wynikowego są bardzo podobne, wpierw przyjmują wartości niższe, następnie wyższe i wreszcie wartości równe odpowiednim średnim rozkładów opóźnienia.




Rys. 1.3. Wartości wariancji rozkładów wynikowych $D^2(U_t^{(1)})$ i $D^2(U_t^{(1)})$ z Przykładu 1.6 po impulsowym zakłóceniu stanu ustalonego w chwili $t=0$.

Przebieg wartości wariancji wynikowych rozkładów opóźnienia jest w obu rozważanych modelach inny, rys. 1.3. O ile w przypadku pierwszego rozkładu impulsowe zakłócenie powoduje wpierw wzrost, następnie spadek wariancji i wreszcie przywrócenie jej wartości wyjściowej, to w przypadku rozkładu drugiego impulsowe zakłócenie powoduje wpierw spadek, następnie wzrost wariancji i wreszcie przywrócenie jej wartości wyjściowej.

Dalsze badanie własności średniej wynikowego rozkładu opóźnienia $M(U_t)$ polegać będzie na analizie jej reakcji na zakłócenie w okresie $t_0$ stanu ustalonego przez zdefiniowaną w punkcie 1.4 schodkową zmianę wartości zmiennej niezależnej, wzory (1.24) i (1.25). Na podstawie Lematu 1 wiadomo, że dla $t < t_0$, model jest w stanie ustalonym, w związku z czym $M(U_t) = M(W_t)$, oraz $u_{t\,i} = w_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2, \dots$ .

Dla $t \geq t_0$ współczynniki udziału $u_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2, \dots;$ przyjmują, zgodnie ze wzorem (1.17) wartości:

$$u_{ti} = \begin{cases} \dfrac{(x^* + \Delta x) w_{ti}}{x^* + \Delta x \sum\limits_{j=0}^{t-t_0} w_{tj}}; & i \leq t - t_0 \\[2ex] \dfrac{x^* w_{ti}}{x^* + \Delta x \sum\limits_{j=0}^{t-t_0} w_{tj}} & i > t - t_0 \end{cases} \tag{1.44}$$

Zależność (1.44) ułatwia wyznaczenie średniej rozkładu opóźnienia wynikowego dla $t \geq t_0$:

$$M(U_t) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{t-t_0} i w_{ti}(x^* + \Delta x) + \sum\limits_{i=t-t_0+1}^{\infty} i w_{ti} x^*}{x^* + \Delta x \sum\limits_{i=0}^{t-t_0} w_{ti}} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{t-t_0} i w_{ti}(x^* + \Delta x) + \sum\limits_{i=t-t_0+1}^{\infty} i w_{ti} x^*}{x^* + \Delta x \sum\limits_{i=0}^{t-t_0} w_{ti}}$$

$$= \frac{x^* M(W_t) + \Delta x \sum\limits_{i=0}^{t-t_0} i w_{ti}}{x^* + \Delta x \sum\limits_{i=0}^{t-t_0} w_{ti}} = \frac{M(W_t) + \dfrac{\Delta x}{x^*} \sum\limits_{i=0}^{t-t_0} i w_{ti}}{1 + \dfrac{\Delta x}{x^*} \sum\limits_{i=0}^{t-t_0} w_{ti}}$$

i ostatecznie:

$$M(U_t) = M(W_t) \frac{1 + \dfrac{\Delta x}{x^*} \dfrac{\sum\limits_{i=0}^{t-t_0} i w_{ti}}{M(W_t)}}{1 + \dfrac{\Delta x}{x^*} \sum\limits_{i=0}^{t-t_0} w_{ti}} \tag{1.45}$$

Z zamieszczonego w Dodatku 1 Lematu 2 wynika, że dla każdego $k \geq 0$ zachodzi nierówność:

$$\sum_{i=0}^{k} w_{ti} \geq \frac{\sum_{i=0}^{k} i\, w_{ti}}{M(W_t)} .$$

z której wynika, że przy zakłóceniu stanu ustalonego skokową zmianą wartości zmiennej niezależnej wartość ułamka we wzorze (1.45) jest zawsze mniejsza od jedności, a więc wartość średniej rozkładu opóźnienia wynikowego $M(U_t)$ jest zawsze niższa od wartości średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$. Ponieważ wartość tego ułamka dąży do jedności wraz z $t \to \infty$, zatem $M(U_t)$ zbiega do $M(W_t)$. Podobnie jak w przypadku zakłócenia stanu ustalonego impulsem, również w tym przypadku odchylenie $M(U_t)$ od $M(W_t)$ pojawia się w okresie $t_0+i_d$, kiedy średnia rozkładu opóźnienia wynikowego przyjmuje wartość:

$$M(U_{t_0+i_d}) = M(W_{t_0+i_d}) \frac{1 + \frac{\Delta x}{x^*} \frac{i_d\, w_{t_0+i_d, i_d}}{M(W_{t_0+i_d})}}{1 + \frac{\Delta x}{x^*} w_{t_0+i_d, i_d}} . \tag{1.46}$$

## 1.8. Wielomian operatorowy i funkcja tworząca

Operator opóźnienia i funkcja tworząca to pojęcia matematyczne wykorzystywane w wielu dziedzinach, a szczególnie w modelowaniu matematycznym systemów dynamicznych oraz probabilistyce. Zastosowanie ich w odniesieniu do modeli opóźnienia rozłożonego, wynikające z daleko idących podobieństw rozkładów prawdopodobieństwa i rozkładów opóźnienia, znacznie ułatwia analizę własności i przeprowadzenie wielu dowodów. Znacznie upraszczają zapis i zostaną wykorzystane w Części II poświęconej analizie własności złożonych modeli opóźnienia rozłożonego.

Operator opóźnienia $L$ jest przekształceniem[12] o następujących własnościach:

$$L\, x_t = x_{t-1} \tag{1.47}$$

[12] Symbol ***L*** (od angielskiego lag operator) został tu użyty za Dhrymes P. J. (1981): *Distributed Lags. Problems of Estimation and Formulation*, 2nd edition. North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford (1981), chociaż w literaturze stosowany jest również symbol ***B*** (od angielskiego: backward shift operator), jak na przykład w Pindyck, Rubinfeld (1998), a w literaturze związanej z techniką dominuje symbol $z^{-1}$, którym posługuje się również Griliches (1967).

$$L^2 x_t = L\,L\,x_t = L\,x_{t-1} = x_{t-2} \qquad (1.48)$$

$$L^k x_t = x_{t-k}\,; \qquad k= \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots; \qquad (1.49)$$

$$L^k L^l = L^{k+l}; \qquad k, l \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots; \qquad (1.50)$$

$$L^0 x_t = \mathbf{1}\, x_t = x_t \qquad (1.51)$$

$$L^k L^{-k} = L^{k-k} = L^0 = \mathbf{1}; \qquad k= \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots; \qquad (1.52)$$

$$(c_1 L^k + c_2 L^l)\, x_t = c_1\, x_{t-k} + c_2\, x_{t-l}; \quad k, l= \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots; \qquad (1.53)$$

gdzie:

$x_t$ – zmienna, liczba rzeczywista
$\mathbf{1}$ – operator jednostkowy, taki, że $\mathbf{1}\, x_t = x_t$
$c_1$ i $c_2$ – liczby rzeczywiste.

W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że operator opóźnienia $\mathbf{L}$ wpływa wyłącznie na zmienną niezależną, lecz nie na współczynniki stojące przy tych zmiennych. Z tego założenia wynikać będzie dalej, że współczynniki modelu opóźnienia zawierające indeks czasu są dane dla każdego okresu $t$. Założenie to z jednej strony znacznie upraszcza analizę, z drugiej zaś zmniejsza ogólność rozważań; będzie to wyjaśnione w dalszej części.

Wyrażenie o postaci:

$$C_t(L) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ti} L^i \,,$$

gdzie $c_{t\,i}$, $i= 0, 1, 2, \ldots;$ dane w okresie $t$ nieujemne współczynniki należące do zbioru liczb rzeczywistych, których wartość została określona w okresie $t$, nazywane będzie operatorem wielomianowym.

Ważne własności wiążą się z sumowaniem i mnożeniem operatorów wielomianowych. W przypadku sumowania dwóch operatorów wielomianowych zbudowanych na zbiorach współczynników odpowiednio $\left(c_{t0}^{(1)}, c_{t1}^{(1)}, c_{t2}^{(1)}, \ldots\right)$ i $\left(c_{t0}^{(2)}, c_{t1}^{(2)}, c_{t2}^{(2)}, \ldots\right)$, współczynniki operatora wielomianowego powstałego z sumowania dwóch operatorów wielomianowych są sumą występujących w wielomianach współczynników o tych samych indeksach związanych z potęgą operatora opóźnienia:

$$C_t(L) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ti} L^i = C_t^{(1)}(L) + C_t^{(2)}(L) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ti}^{(1)} L^i + \sum_{i=0}^{\infty} c_{ti}^{(2)} L^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(c_{ti}^{(1)} + c_{ti}^{(2)}\right) L^i \,. \qquad (1.54)$$

W przypadku mnożenia dwóch operatorów wielomianowych zbudowanych na zbiorach współczynników odpowiednio $\left(c_{t0}^{(1)}, c_{t1}^{(1)}, c_{t2}^{(1)}, \ldots\right)$ i $\left(c_{t0}^{(2)}, c_{t1}^{(2)}, c_{t2}^{(2)}, \ldots\right)$, współczynniki operatora wielomianowego $\sum_{i=0}^{\infty} c_{ti} L^i$ powstałego z mnożenia dwóch operatorów wielomianowych $\sum_{i=0}^{\infty} c_{ti}^{(1)} L^i$ i $\sum_{i=0}^{\infty} c_{ti}^{(2)} L^i$ :

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_{ti} L^i = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ti}^{(1)} L^i \sum_{i=0}^{\infty} c_{ti}^{(2)} L^i$$

tworzą splot:

$$c_{ti} = \sum_{j=0}^{i} c_{t,j}^{(1)} c_{t,i-j}^{(2)} \; ; \tag{1.55}$$

wartość *i*-tego współczynnika $c_{t\,i}$, $i=0,\ 1,\ 2,..$; jest sumą wszystkich iloczynów par współczynników należących odpowiednio do zbioru $\left(c_{t0}^{(1)}, c_{t1}^{(1)}, c_{t2}^{(1)}, ...\right)$ i zbioru $\left(c_{t0}^{(2)}, c_{t1}^{(2)}, c_{t2}^{(2)}, ...\right)$, których suma indeksów jest równa *i*; wynika to z faktu, że *i*-ty współczynnik modelu uzyskanego z superpozycji dwóch modeli opóźnienia rozłożonego stanowi sumę wszystkich iloczynów współczynników stojących przy operatorze $L^i$.

Istotną własnością iloczynu operatorów wielomianowych jest przemienność:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_{ti}^{(1)} L^i \sum_{i=0}^{\infty} c_{ti}^{(2)} L^i = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ti}^{(2)} L^i \sum_{i=0}^{\infty} c_{ti}^{(1)} L^i \; ;$$

wynik mnożenia operatorów wielomianowych zdefiniowanych jak wyżej nie zależy od ich kolejności. Własność przemienności jest następstwem założenia o niezależności wartości współczynników opóźnienia rozłożonego od operatorów opóźnienia. (Jeśliby współczynniki $c_{t\,i}$, $i=0,1,\ 2,..$; modelu opóźnienia rozłożonego podlegały działaniu operatora *L*, wtedy w ogólnym przypadku zachodziłaby relacja:

$\sum_{i=0}^{\infty} c_{ti}^{(1)} L^i \sum_{i=0}^{\infty} c_{ti}^{(2)} L^i \neq \sum_{i=0}^{\infty} c_{ti}^{(2)} L^i \sum_{i=0}^{\infty} c_{ti}^{(1)} L^i$ ).

Korzystając z zapisu operatorowego model (1.1) można przedstawić w następującej postaci:

$$y_t = V_t(L) x_t + e_t = \left( \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i} L^i \right) x_t + e_t , \tag{1.56}$$

gdzie wyrażenie $V_t(L) = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i} L^i$, nazywane operatorem wielomianowym opartym na strukturze $V_t$ jest operatorem powstałym z sumowania operatorów o postaci $v_{t\,i} L^i$, $i = 0,\ 1,\ 2,..$ .

Na strukturze opóźnienia można zawsze zbudować operator wielomianowy; zatem warto zauważyć, że każdemu operatorowi wielomianowemu zbudowanemu na nieujemnych indeksach i nieujemnych współczynnikach odpowiada pewna struktura opóźnienia.

Funkcją tworzącą $V_t(\theta)$ struktury opóźnienia $V_t$ nazywane będzie wyrażenie o następującej postaci:

$$V_t(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}\theta^i \tag{1.57}$$

gdzie: $v_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,..$; współczynniki struktury opóźnienia $V_t$, a zmienna $\theta$ należy do zbioru liczb rzeczywistych.

Funkcją tworzącą rozkładu opóźnienia $W_t$ nazywane będzie wyrażenie o następującej postaci:

$$W_t(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} w_{ti}\theta^i \tag{1.58}$$

gdzie: $w_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,..$; współczynniki rozkładu opóźnienia $W_t$, a zmienna $\theta$ zdefiniowana jak wyżej.

Dla dalszych rozważań przydatne będą następujące własności funkcji tworzącej:

– wartość funkcji tworzącej $W_t(\theta)$ rozkład opóźnienia $W_t$ w punkcie $\theta = 1$ jest równa:

$$W_t(1) = 1 \tag{1.59}$$

– $i$-ta pochodna funkcji $W_t(\theta)$ rozkład opóźnienia $W_t$ punkcie $\theta=1$ jest równa wartości $i$-tego współczynnika pomnożonej przez $i!$:

$$\frac{d^i W_t(1)}{d\theta^i} = i!\, w_{ti}\,,\ i=0,\ 1,\ ..... \tag{1.60}$$

(stąd $w_{ti} = \dfrac{d^i W_t(1)}{d\theta^i} / i!$, $i=0, 1, .....$;)

– wartość średnia $M(W_t)$ rozkładu opóźnienia $W_t$ jest równa:

$$M(W_t) = \frac{dW_t(1)}{d\theta} \tag{1.61}$$

– wariancja $D^2(W_t)$ rozkładu opóźnienia $W_t$ jest równa:

$$D^2(W_t) = \frac{d^2 W_t(1)}{d\theta^2} + \frac{dW_t(1)}{d\theta} - \left[\frac{dW_t(1)}{d\theta}\right]^2 = \frac{d^2 W_t(1)}{d\theta^2} + M(W_t) - \left[M(W_t)\right]^2. \tag{1.62}$$

## 1.9. Podstawowe stałe struktury/rozkłady opóźnienia rozłożonego

W tym rozdziale omówione zostaną podstawowe, spotykane w literaturze ekonomicznej stałe struktury/rozkłady opóźnienia rozłożonego w podziale na skończone i nieskończone. Wyczerpujący przegląd rozkładów statystycznych[13] można znaleźć na przykład w książce Johnson N. L., Kotz S., Kemp A. W. (1992)[14].

### 1.9.1. Skończone struktury/rozkłady opóźnienia

#### *1.9.1.1. Liniowa struktura opóźnienia*

W liniowej strukturze opóźnienia rzędu $n$ jej współczynniki są liniową funkcją numeru indeksu:

$$v_i = \begin{cases} 0 & , \quad i < 0; \\ v_0 + \dfrac{v_n - v_0}{n} i, & i = 0, 1, 2, \dots, n; \\ 0 & , \quad i > n; \end{cases} \tag{1.63}$$

gdzie $v_0$ i $v_n$ stałe współczynniki oznaczające odpowiednio współczynnik pierwszy (o indeksie 0) i $n$-ty spełniające warunki:

$$v_0 \geq 0\,, \; v_n > 0\,,$$

zapewniające nieujemność współczynników i zachowanie rzędu opóźnienia.

Mnożnik długookresowy liniowej struktury opóźnienia wyraża się wzorem:

$$a = (n+1)\frac{v_0 + v_n}{2}\,.$$

Monotoniczny rozkład opóźnienia

Najczęściej spotykaną liniową strukturą opóźnienia jest struktura odpowiadająca monotonicznemu rozkładowi opóźnienia, tj. taka, w której współczynniki struktury opóźnienia:

$$v_0 = v_1 = \dots = v_n\,,$$

a więc współczynniki rozkładu opóźnienia są opisane w następujący sposób:

---

[13] Ponieważ każdy rozkład prawdopodobieństwa jednej zmiennej losowej może być rozkładem opóźnienia.

[14] Johnson N. L., Kotz S., Kemp A. W.; *Univariate Discrete Distributions*, III wydanie, John Wiley&Sons, INC. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore; 1992.

$$w_i = \frac{1}{n+1}, \; i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Nietrudno zauważyć, że w modelu opóźnienia z monotonicznym rozkładem opóźnienia, zmienna pomocnicza $y'_t$ jest zwykłą średnią arytmetyczną $n+1$ wartości zmiennej niezależnej $x_t, x_{t-1}, \ldots, x_{t-n}$.

Wartość średnia i wariancja rozkładu monotonicznego mają odpowiednio następujące wartości:

$$M(W) = \frac{n}{2},$$

$$D^2(W) = \frac{n(n+2)}{12} = M(W)\frac{(n+2)}{6}.$$

W modelu opóźnienia z wagami równomiernymi współczynniki $R(j\omega, n)$ i $\psi(j\omega, n)$ przyjmują następujące wartości:

$$R(j\omega, n) = \frac{1}{n+1}\sqrt{\frac{1-\cos[(n+1)\cdot j\omega]}{1-\cos(j\omega)}},$$

$$\psi(j\omega, n) = \frac{nj\omega}{2}.$$

Rozkład opóźnienia Fishera

Rozkład ten, Fisher (1937), jest odmianą liniowego rozkładu opóźnienia, w którym współczynniki maleją, przyjmując największą wartość dla indeksu $i=0$, najmniejszą niezerową dla $i=n$, oraz zerowe dla $i=n+1, n+2, \ldots$ . Celem Fishera było opracowanie prostego modelu, w którym waga przypisana obserwacji malałaby wraz z wiekiem tej obserwacji.

W strukturze opóźnienia Fishera:

$$v_i = \begin{cases} 0, & i < 0; \\ v_0\left(1 - \frac{i}{n+1}\right), & i = 0, 1, 2, \ldots, n; \\ 0, & i \geq n+1. \end{cases} \tag{1.64}$$

Podstawowe parametry rozkładu Fishera są następujące:

$$M(W) = \frac{n}{3},$$

$$D^2(W) = \frac{n(n+3)}{18} = M(W)\frac{(n+3)}{6}.$$

$$R(j\omega,n)=\frac{1}{(n+1)(n+2)cos^2(\frac{j\omega}{2})}\cdot$$
$$\cdot\sqrt{\{(n+1)cos(j\omega)+cos[(n+1)\cdot j\omega]-(n+2)\}^2+\{sin[(n+1)\cdot j\omega]-(n+1)sin(j\omega)\}^2},$$

oraz

$$\psi(j\omega,n)=arctg\left\{\frac{(n+1)sin(j\omega)-sin[(n+1)j\omega]}{(n+2)-(n+1)cos(j\omega)-cos[(n+1)j\omega]}\right\}.$$

Przykładem zastosowania rozkładu Fishera jest model zależności między ceną mięsa a ceną żywca wieprzowego w Polsce zaproponowany przez T. Warchalskiego, Warchalski (2014).

### 1.9.1.2. *Model Almon*

Struktura opóźnienia w modelu Almon rzędu $n$, Almon (1965), ma duże znaczenie w badaniach empirycznych ze względu na łatwość estymacji współczynników oraz elastyczność wyrażającą się dużym zróżnicowaniem kształtu wykresu współczynników struktury opóźnienia. Współczynniki struktury opóźnienia w modelu Almon rzędu $n$ przedstawia poniższa formuła:

$$v_i=\begin{cases}0, & i<0;\\ \delta_0+\delta_1 i+\delta_2 i^2+...+\delta_l i^l, & i=0,1,2,...,n;\\ 0, & i\geq n+1.\end{cases} \tag{1.65}$$

gdzie liczba naturalna $l$, $l<n$, oznacza stopień wielomianu. Wartości średnia i wariancja rozkładu opóźnienia opartego na strukturze opóźnienia (1.65) zależą od stałych współczynników $\delta_0,\delta_1,\ldots,\delta_l$, których wartości są estymowane dla różnych wartości $l$.

Istotną własnością tego modelu jest możliwość przedstawienia go w postaci wygodnej w estymacji:

$$y_t=\delta_0\left(\sum_{i=0}^{l}x_{t-i}\right)+\delta_1\left(\sum_{i=1}^{l}ix_{t-i}\right)+\delta_2\left(\sum_{i=1}^{l}i^2x_{t-i}\right)+...+\delta_l\left(\sum_{i=1}^{l}i^lx_{t-i}\right)+\varepsilon_t.$$

Jak wskazano powyżej, każdy model opóźnienia rozłożonego można przedstawić jako sumę modeli opóźnienia tej samej zmiennej niezależnej o jednopunktowych strukturach opóźnienia. Przykładem złożenia modeli opóźnienia jest model rzędu $n$ ($n$ nieparzysta liczba naturalna, $n>1$) ze strukturą opóźnienia mającą kształt odwróconej litery V, DeLeeuw (1962), której współczynniki są opisane za pomocą poniższego wzoru:

$$v_i = \begin{cases} 0 \quad , & i < 0; \\ i\delta, & i \le \dfrac{n+1}{2}; \\ (n+1-i)\delta, & \dfrac{n+1}{2} \le i \le n+1; \\ 0 \quad , & i \ge n+1; \end{cases} \tag{1.67}$$

gdzie współczynnik $\delta$ jest skończoną liczbą dodatnią.

Podstawowe parametry rozkładu opóźnienia modelu DeLeeuwa są następujące:

$$M(W) = \frac{n+1}{2},$$

$$D^2(W) = \frac{(n-1)(n+3)}{24},$$

$$R(j\omega, n) = 4\frac{\sin^2\left[\frac{1}{4}(n+1)\cdot j\omega\right]}{(n+1)^4\cos^2(\frac{j\omega}{2})}\cdot$$

$$\cdot\left\{(n+1)^2\cos\left[\frac{1}{2}(n+1)\cdot j\omega\right] + 4\frac{\sin^2\left[\frac{1}{4}(n+1)\cdot j\omega\right]\sin^2\left[\frac{1}{2}(n+1)\cdot j\omega\right]}{\cos^2(\frac{j\omega}{2})}\right\},$$

oraz

$$\psi(j\omega, n) = \frac{1}{2}(n+1)j\omega.$$

Nietrudno zauważyć, na podstawie wzoru (1.67), że dla indeksów *0, 1, ... , (n+1)/2*, współczynniki struktury opóźnienia mogą być opisane za pomocą liniowej struktury opóźnienia (1.63) z dodatnim współczynnikiem kierunkowym, a dla indeksów *1+(n+1)/2, ... , (n+1),* również za pomocą liniowej struktury opóźnienia, ale z ujemnym współczynnikiem kierunkowym.

Model DeLeeuwa pokazuje, że pewne rozkłady opóźnienia można uzyskać przez odpowiednie połączenie innych rozkładów. Wiele modeli opóźnienia ma rozkłady, które są wynikiem złożenia różnych rozkładów opóźnienia operacjami sumowania oraz superpozycji. Operacje te są omawiane w Rozdziale II.

## 1.9.2 Nieskończone struktury opóźnienia

### *1.9.2.1 Rozkład Pascala-Solowa*

Współczynniki rozkładu Pascala-Solowa, Solow (1960), są opisane wzorem:

$$w_i = \begin{cases} 0 \quad , & i < 0; \\ \binom{m-1+i}{i} \lambda^m (1-\lambda)^i, & i \geq 0; \end{cases} \tag{1.68}$$

gdzie $m$, liczba naturalna, oznacza tzw. stopień rozkładu Pascala (nazywany czasem rzędem, lecz termin ten wydaje się niefortunny ze względu na kolizję z pojęciem rzędu opóźnienia skończonego).

Wartości średnia i wariancja rozkładu Pascala wynoszą odpowiednio:

$$M(W) = m\frac{1-\lambda}{\lambda},$$

$$D^2(W) = m\frac{1-\lambda}{\lambda^2} = \frac{M(W)}{\lambda}.$$

W rozkładzie Pascala-Solowa współczynniki $R(j\omega, m)$ i $\psi(j\omega, m)$ przyjmują następujące wartości:

$$R(j\omega, m) = \lambda^m \sqrt{\left[1 - 2(1-\lambda)\cos(j\omega) + (1-\lambda)^2\right]^{-m}},$$

$$\psi(j\omega, m) = arctg\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}(-1)^i(1-\lambda)^i \sin(i\cdot j\omega)}{1+\sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}(-1)^i(1-\lambda)^i \cos(i\cdot j\omega)}\right\}.$$

Szczególnym przypadkiem rozkładu Pascala-Solowa jest rozkład stopnia $m=1$, noszący nazwę rozkładu geometrycznego, znany w literaturze ekonomicznej z modelu Koycka, Koyck (1954), modelu oczekiwań adaptacyjnych, Cagan (1956), czy modelu dostosowania cząstkowego, Nerlove (1958). Model opóźnienia z rozkładem geometrycznym został wykorzystany w Przykładach 1.3 i 1.4.

Dla $m=1$ powyższe wzory upraszczają się:

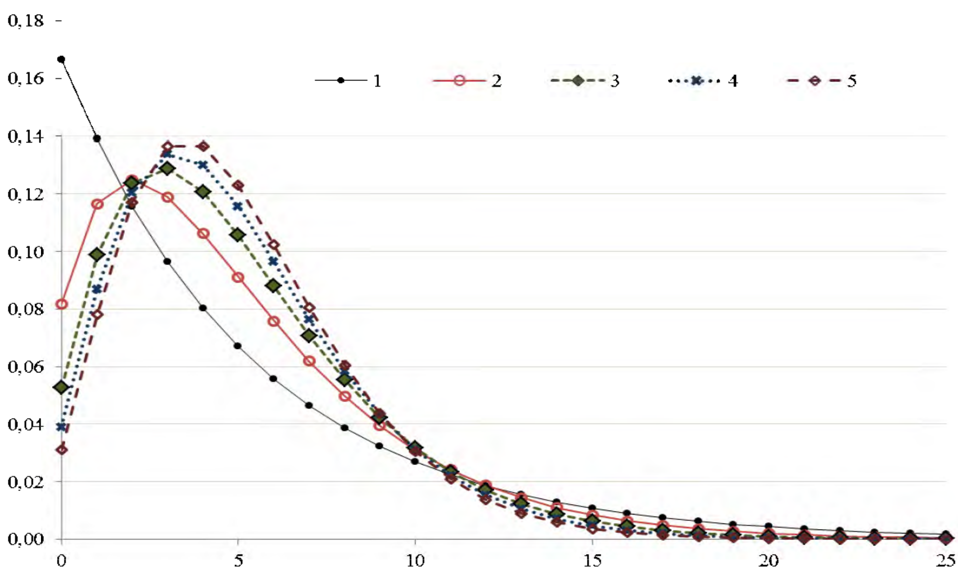
$$M(W)=\frac{1-\lambda}{\lambda},$$

$$D^2(W)=\frac{1-\lambda}{\lambda^2}=\frac{M(W)}{\lambda},$$

$$R(j\omega,1)=\frac{\lambda}{\sqrt{\left[1-2(1-\lambda)\cos(j\omega)+(1-\lambda)^2\right]}},$$

$$\psi(j\omega,1)=arctg\left\lfloor\frac{(1-\lambda)\sin(j\omega)}{1-(1-\lambda)\cos(j\omega)}\right\rfloor.$$

Wykresy współczynników rozkładu Pascala-Solowa przy różnych wartościach stopnia $m$ zostały przedstawione na rys. 1.4.




Rys. 1.4. Rozkłady Pascala-Solowa o tej samej wartości średniej równej M(W)= 5 przy wartościach parametru m równych opdpowiednio: *1, 2, 3, 4, 5*.

Model dostosowania cząstkowego, Nerlove (1958), opisuje zachowanie podejmujących decyzję o wielkości zmiennej zależnej $y_t$ na podstawie porównania z ustaloną na okres $t$ wielkością pożądaną $x_t$ tej zmiennej zgodnie ze wzorem:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda \cdot (x_t - y_{t-1}) + \varepsilon_t ,$$

gdzie $\lambda$ to współczynnik, $\lambda \in [0, 1]$, nazywany współczynnikiem dostosowania (*adjustment coefficient*). Nietrudno zauważyć, że dla $\lambda = 0$ zmienna $y_t$ przyjmuje wartość z poprzedzającego okresu bez względu na wartość pożądaną tej zmiennej, a dla $\lambda = 1$ nie ma opóźnienia w dostosowaniu zmiennej $y_t$ do jej wartości pożądanej $x_t$. Dla pozostałych wartości parametru $\lambda$ z przedziału $[0, 1]$ rozwiązanie powyższego równania ma następującą postać:

$$y_t = \lambda \cdot \sum_{i=0}^{\infty}(1-\lambda)^i x_{t-i} + \left[\varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty}(1-\lambda)^i \varepsilon_{t-i}\right],$$

a więc modelu opóźnienia rozłożonego z geometrycznym (Pascala-Solowa stopnia $m=1$) rozkładem opóźnienia. Istotną własnością tego modelu jest stała, $a=1$, wartość mnożnika długookresowego.

Model oczekiwań adaptacyjnych, Cagan (1956), opisuje proces prostego przewidywania, w którym oczekiwana w okresie $t$ wartość $y_t$ zmiennej $x_t$ jest ustalana przy uwzględnieniu odchylenia w okresie $t-1$ wartości zmiennej $x_{t-1}$ od jej przewidywanej w okresie $t-2$ wartości $y_{t-1}$:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda \cdot (x_{t-1} - y_{t-1}) + \varepsilon_t .$$

Model oczekiwań adaptacyjnych jest również modelem opóźnienia rozłożonego z geometrycznym rozkładem opóźnienia przesuniętym w prawo o jednostkę. Oznacza to złożenie, co pełniej zostanie omówione w Rozdziale II, dwóch modeli opóźnienia: z rozkładem geometrycznym i jednopunktowym (prostym) opóźnieniem o jeden okres.

### *1.9.2.2 Model Tsurumi*

W artykule Tsurumi (1971) autor zaproponował użycie struktury opóźnienia opartej na zmodyfikowanym ciągłym rozkładzie gamma:

$$v_i = \begin{cases} 0 \quad , & i < 0; \\ \delta(i+1)^{m-1} e^{-\lambda i}, & i \geq 0, \end{cases} \tag{1.69}$$

gdzie: $m$ – stopień rozkładu, $\lambda$ - stała, $0<\lambda<1$, $\delta$ – dodatnia stała, przy czym:

$$\delta = \left[\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)^{m-1} e^{-\lambda i}\right]^{-1} .$$

Parametry zmodyfikowanego jak w (1.52) rozkładu gamma są opisane dla konkretnych wartości współczynników $m$ i $\lambda$.

Wykres struktury opóźnienia, której współczynniki są opisane za pomocą zależności (1.69) jest podobny do rozkładu Pascala-Solowa. Rozkład gamma zastosowali m. in. Schmidt (1974), Alston *et al*. (2010), Baranyi (2010).

### *1.9.2.3 Model z rozkładem Poissona*

W niektórych analizach spotykane są modele opóźnienia rozłożonego z rozkładem Poissona, jak np.: Friedrich (1982), Frick (1986), Agarwal V, Paelink J. H. P., Reinert K. A., Stough R. R. (2008), Wang Cuicui, Chen Renjie, Kuang Xingya, Duan Xiaoli, Kan Haidong (2014).

Współczynniki rozkładu Poissona opisane są za pomocą wzoru:

$$w_i(\lambda) = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}.$$

Wartości średnia i wariancja rozkładu Poissona wynoszą odpowiednio:

$$M(W) = \lambda,$$

$$D^2(W) = \lambda.$$

W rozkładzie Poissona współczynniki $R(j\omega, \lambda)$ i $\psi(j\omega, \lambda)$ przyjmują następujące wartości:

$$R(j\omega, \lambda) = \sqrt{e^{-2\lambda[1-cos(j\omega)]}},$$

$$\psi(j\omega, \lambda) = \lambda sin(j\omega).$$

### *1.9.2.4 Model Jorgensena*

Model Jorgensena, Jorgensen (1966), jest wśród nieskończonych modeli opóźnienia tym, czym model Almon wśród modeli skończonych i znajduje zastosowanie w badaniach empirycznych, gdy rozkład opóźnienia nie jest znany. Model ten ma następującą postać:

$$y_t = V(L)\mathrm{x}_t + e_t = \frac{A(L)}{B(L)}\mathrm{x}_t + e_t, \tag{1.70}$$

gdzie:

*L* - operator przesunięcia,
*V(L)* - operatory wielomianowe względem operatora przesunięcia *L*
*A(L)*, *B(L)* - operatory wielomianowe skończonego stopnia względem operatora przesunięcia *L*,

takie, że:

$$V(L)=\frac{A(L)}{B(L)};$$

$e_t$ - składnik losowy.

Zależność (1.70) jest postacią zredukowaną modelu:

$$B(L)y_t = A(L)x_t + \varepsilon_t,$$

przy czym

$$e_t = \frac{1}{B(L)}\varepsilon_t,$$

gdzie $\varepsilon_t$ to nieskorelowany składnik losowy o zerowej wartości oczekiwanej, stałej i ograniczonej wariancji. Powyższy wzór wyjaśnia autoregresję składnika losowego $e_t$ w przypadku, gdy $B(L)\neq \boldsymbol{1}$.

Model Jorgensena jest szczególnym przypadkiem często stosowanego modelu ekonometrycznego ADL (*Autoregressive Distributed Lag*) z jedną zmienną objaśniającą i bez wyrazu wolnego, Hendry, Pagan, Sargan (1984), o postaci:

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \ldots + \beta_{m_1} y_{t-m_1} + \alpha_0 x_t + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \ldots + \alpha_{m_2} x_{t-m_2} + \varepsilon_t,$$

lub

$$y_t = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \ldots + \alpha_{m_1} L^{m_1}}{1-\left(\beta_1 L + \beta_2 L^2 + \ldots + \beta_{m_2} L^{m_2}\right)} x_t + \frac{1}{1-\left(\beta_1 L + \beta_2 L^2 + \ldots + \beta_{m_1} L^{m_2}\right)}\varepsilon_t$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m_1}$ i $\beta_0, \beta_1, +\beta_2, \ldots, \beta_{m_2}$ współczynniki, oraz $m_1$ i $m_2$ stopnie operatorów wielomianowych odpowiednio *A(L)* i *B(L)*.

W badaniach ekonometrycznych ważnym przykładem zastosowania modelu Jorgensena jest model korekty błędem (*Error Correction Model*) opisujący mechanizm, w którym o zmianie wartości zmiennej zależnej decyduje nie tylko, jak to ma miejsce w omówionym wyżej modelu dostosowania adaptacyjnego, odchylenie od wartości zmiennej niezależnej, lecz również wartość bieżącego odchylenia wartości zmiennej zależnej od jej poziomu w równowadze długookresowej. Model wyjściowy ma następującą postać:

$$y_t = \gamma + \alpha_1 y_{t-1} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \varepsilon_t,$$

lub, po prostych przekształceniach:

$$y_t - y_{t-1} = \beta_0(x_t - x_{t-1}) + (\beta_0 + \beta_1)x_{t-1} + \gamma + (\alpha_1 - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$= \beta_0(x_t - x_{t-1}) + (1-\alpha_1)\left[\left(\frac{\beta_0 + \beta_1}{1-\alpha_1}x_{t-1} + \frac{\gamma}{1-\alpha_1}\right) - y_{t-1}\right] + \varepsilon_t \quad ,$$

przy czym w stanie równowagi długookresowej (w stanie ustalonym), gdy dla wszystkich $t$, $x_t = x^*$, zachodzi zależność:

$$y^* = \frac{\beta_0 + \beta_1}{1-\alpha_1}x^* + \frac{\gamma}{1-\alpha_1} \, .$$

Przykładem wykorzystania modelu korekty błędem jest badanie wykonane przez Philipa Hansa Frances'a i Bjorna Vroomen'a, Frances Philip H., Vroomen Björn (2006), służące określeniu opóźnienia między nakładami na reklamę, a sprzedażą. (W pracy tej miarą wielkości opóźnienia jest mediana rozkładu opóźnienia).

Warto zwrócić uwagę na model ADL z $n$ zmiennymi objaśniającymi, $n>1$, $x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \ldots, x_t^{(n)}$, o postaci:

$$y_t = \gamma +$$
$$\frac{\alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)}L + \ldots + \alpha_{n1}^{(1)}L^{n1}}{1-\left(\beta_1 L + \beta_2 L^2 + \ldots + \beta_{n0}L^{n0}\right)}x_t^{(1)} + \frac{\alpha_0^{(2)} + \alpha_1^{(2)}L + \ldots + \alpha_{n2}^{(2)}L^{n2}}{1-\left(\beta_1 L + \beta_2 L^2 + \ldots + \beta_{n0}L^{n0}\right)}x_t^{(2)} + \ldots + \frac{\alpha_0^{(n)} + \alpha_1^{(n)}L + \ldots + \alpha_{n_n}^{(n)}L^{n_n}}{1-\left(\beta_1 L + \beta_2 L^2 + \ldots + \beta_{n0}L^{n0}\right)}x_t^{(m)} +$$
$$+ \frac{1}{1-\left(\beta_1 L + \beta_2 L^2 + \ldots + \beta_{n0}L^{n0}\right)}\varepsilon_t ,$$

gdzie:

$\alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_{n_1}^{(1)}$; $\alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)}, \ldots, \alpha_{n_2}^{(2)}$ ; … , $\alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_{n_n}^{(n)}$; współczynniki operatorów wielomianowych $A^{(1)}(L), A^{(2)}(L), \ldots, A^{(n)}(L)$, stojących odpowiednio przy zmiennych objaśniających $x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \ldots, x_t^{(n)}$, przy czym:

$$A^{(i)}(L) = \alpha_0^{(i)} + \alpha_1^{(i)}L + \ldots + \alpha_{n1}^{(i)}L^{n_i} \, ;$$

$n_0$ - stopień operatora wielomianowego $B(L)$:

$$B(L) = 1 - \left(\beta_1 L + \beta_2 L^2 + \ldots + \beta_{n0}L^{n0}\right);$$

$n_1, n_2, \ldots, n_n$ – stopnie operatorów wielomianowych $A^{(1)}(L), A^{(2)}(L), \ldots, A^{(n)}(L)$ stojących odpowiednio przy zmiennych objaśniających $x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \ldots, x_t^{(n)}$; $n_1, n_2, \ldots, n_n < \infty$;

$\gamma$ - wyraz wolny.

Powyższy wzór można zapisać w innej postaci:

$$y_t = \gamma + V^{(1)}(L)x_t^{(1)} + V^{(2)}(L)x_t^{(2)} + \ldots + V^{(n)}(L)x_t^{(n)} + \frac{1}{B(L)}\varepsilon_t,$$

gdzie

$$V^{(i)}(L) = \frac{A^{(i)}(L)}{B(L)},\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Nietrudno zauważyć, że przedstawiony powyżej model ADL z $n$ zmiennymi niezależnymi jest w istocie sumą $n$ modeli opóźnienia rozłożonego $n$ różnych zmiennych niezależnych $x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \ldots, x_t^{(n)}$, wyrazu wolnego.

## 1.10. Źródła zmienności struktur opóźnienia.

Aman Ullah i Baldev Raj w książce pt. *Econometrics. A Varying Coefficient Approach* (Ullah, Raj (2011)), strona 4, reprezentującą klasyczny nurt modelowania ekonometrycznego, wyróżnili następujące przyczyny zmienności współczynników w modelach ekonometrycznych:

– pominięcie istotnej zmiennej
– wykorzystanie zmiennych typu *proxy*
– niewłaściwa postać funkcji określającej wartości współczynników
– zależność współczynników od innych zmiennych (w oryginale *policy variables*)
– agregacja.

Przyjmując ogólniejsze podejście do modelowania, do podstawowych czynników zmienności struktur opóźnienia modeli opóźnienia rozłożonego można zaliczyć:

– czynnik losowy
– sezonowość
– skokowa/jakościowa zmiana struktury opisywanego systemu
– ewolucyjna zmiana struktury opisywanego systemu.

Wpływ czynnika losowego, np. Hildreth, Houck (1968), Froelich (1973), Ullah, Raj (1980), na strukturę opóźnienia w modelu opóźnienia rozłożonego ujmuje wyżej przedstawiona zależność (1.1b):

$$y_t = \sum_{i=0}^{n} v_{t\,i}\, x_{t-i},$$

w której

$$v_{t\,i} = v_i + \vartheta_{t\,i}\ ,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

gdzie $v_i$ oznacza wartość oczekiwaną *i*-tego współczynnika struktury opóźnienia, $v_i = E(v_{t\,i})$, $\vartheta_{t\,i}$ to składnik losowy zakłócający obserwację *i*-tego współczynnika opóźnienia.

Różnica między zależnościami (1.1a) i (1.1b) jest istotna, zwłaszcza w nieomawianym w tej pracy zagadnieniu estymacji współczynników modelu, ze względu na własności składnika losowego $\varepsilon_t$, który w wariancie (1.1b) ma złożoną strukturę:

$$\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{n} \vartheta_{t\,i} x_{t-i}\ ,$$

ponieważ

$$y_t = \sum_{i=0}^{n} v_i\, x_{t-i} + \sum_{i=0}^{n} \vartheta_{t\,i} x_{t-i}\ .$$

Warto zauważyć, że specyfikacja Hildretha i Houcka, Hildreth, Houck (1968), dotyczy skończonych modeli opóźnienia; wynika to z konieczności zapewnienia skończonej wariancji składnika losowego przy standardowych założeniach o składnikach losowych $\vartheta_{t\,i}$ , *i= 1, 2, ..., n*; (zerowa wartość oczekiwana i skończona wariancja).

Gdy czynnikiem kształtującym wartości współczynników struktury opóźnienia jest sezonowość, wtedy współczynniki te opisują zależności:

$$v_{t,i} = v_{t+kT,\,i}\ ,\ i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ;\ k = \ldots\ ,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ;$$

gdzie liczba naturalna *T* oznacza okres wahań sezonowych.

Pierwszą publikacją, w której współczynniki modelu opóźnienia podlegają wahaniom sezonowym był artykuł Pesando (1972), opisujący model kwartalny, w którym wykorzystanie kredytu zależy od numeru kwartału, w którym został przyznany. Model ten ma następującą postać (zachowane oryginalne oznaczenia):

$$D_t = \sum_{i=0}^{n} w(i) NC_{t-i}\ ,$$

gdzie

$$w(i) = c_i + S_{1,i} D_{1,t-i} + S_{2,i} D_{2,t-i} + S_{3,i} D_{3,t-i}\ ,$$

oraz

$D_t$ - wykorzystanie kredytu w okresie o kolejnym numerze *t*,

$NC_t$ - kredyt przyznany w okresie *t*,

$D_{j,t-i}$ - zmienna sztuczna przyjmująca wartość *1* w *j*-tym kwartale, *j= 1, 2, 3*; i *0* w kwartałach pozostałych,

$S_{j,t-i}$ - wartość *i*-tego współczynnika w kwartale *j*.

Model Pesando można zaliczyć do tzw. modeli opóźnień w systemach przepływów, które są omawiane w Rozdziale III.

Sezonowość w modelach opóźnienia rozłożonego może być również ujęta w modelach, w których zmiany rozkładu zależą od wartości pewnej ustalonej zmiennej. Do takich modeli zaliczyć można omawiany poniżej model (1.54), lub model (3.22) z Rozdziału III z cyklicznie zmieniającymi się parametrami $\lambda_t$ i $\rho_t$. Wahania sezonowe są uwzględnione w wielu ekonometrycznych modelach *ADL*.

Skokowa zmiana struktury opóźnienia modelu jest następstwem zmiany mechanizmu opóźnienia. Za przykład może tu posłużyć model opisany w pracy Dahl, Kulaksizoglu (2006), w którym struktura opóźnienia w budownictwie w USA ulega zmianie wraz ze zmianą koniunktury; w recesji wartość średnia rozkładu opóźnienia jest mniejsza od wartości średniej w ekspansji. W artykule pt. „Crude Oil and Gasoline Prices: An Asymmetric Relationship?", Balke, N. S., Brown, S. P. A. and Yücel, M. K. (1998), przedmiotem badania jest zależność ceny benzyny w USA od ceny ropy naftowej. Przeglądy ekonometrycznych modeli asymetrycznej transmisji cen zostały przedstawione m.in. w artykułach: Meyer Jochen, von Cramon-Taubadel Stephan (2004), oraz Manera Matteo, Frey Giliola (2005). Natomiast Kim Hyeyoung i Ronald W. Ward w artykule: Kim, Ward (2013) w analizie transmisji zmian cen w systemie dystrybucji żywności w USA zaobserwowali różne struktury opóźnienia zależne od kierunku zmian cen - inne dla wzrostów i spadków.

O treści ważnego artykułu jednoznacznie mówi jego tytuł: Price Transmission, Threshold Behavior, And Asymmetric Adjustment in the U.S. Pork Sector, Goodwin Barry K., Harper Daniel C. (2000)

W modelu K. Leszkiewicz-Kedzior i A. Welfe opisującym niesymetryczne dostosowanie cen na rynku paliw, Leszkiewicz-Kedzior, Welfe (2014), zastosowany został model korekty błędem (*Error Correction Model*), w którym występują dwie struktury opóźnienia; jedna dla odchylenia od trendu długookresowego mniejszego od wartości progowej, druga dla odchylenia od trendu długookresowego większego od wartości progowej.

W opracowanym w IBS PAN modelu gospodarki polskiej, Gutenbaum et al. (1998), wpływ czynników kształtujących produkcję w wyróżnionych sektorach ma inną strukturę opóźnienia przy wzrostach i spadkach produkcji.

Przyczynami zmienności struktury opóźnienia są, między innymi, zmiany struktury modelu (złożone struktury są omawiane a Części II) spowodowane przez zmiany jakościowe opisywanego systemu, jego struktury wewnętrznej, czy preferencji.

Inną przyczyną zmiany struktury opóźnienia jest zmiana czynników egzogenicznych wpływających na mechanizm opóźnienia[15].

Zmienność mechanizmu opóźnienia zostanie omówiona na przykładzie przedstawionego wyżej modelu dostosowania cząstkowego, mającego pierwotnie stały współczynnik dostosowania $\lambda$:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda \cdot (x_t - y_{t-1}) + \varepsilon_t .$$

Szczególne znaczenie tego modelu wynika z licznych zastosowań (wspomniane wyżej dostosowanie cząstkowe, oczekiwania adaptacyjne). Jego dynamizacja wiąże się z dopuszczeniem zmienności współczynnika $\lambda$, gdy zmienność ta jest znacząca i związana z dającą się zidentyfikować przyczyną.

Uchylając założenie o stałości $\lambda$ i przyjmując $0 \le \lambda_t \le 1$, powyższą zależność można zapisać w następującej postaci:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda_t \cdot (x_t - y_{t-1}) + \varepsilon_t . \tag{1.71}$$

Zmienność współczynnika $\lambda_t$ można przypisać dowolnej z wymienionych wyżej przyczyn.

Stosując kolejne podstawianie zmiennych $y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, \ldots ;$ uzyskujemy następujące rozwiązanie równania różnicowego (1.71):

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i} x_{t-i} + e_t ;\ i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots ;$$

w którym:

$$v_{t,i} = \frac{\lambda_{t-i}}{1 - \lambda_{t-i}} \prod_{j=0}^{i} (1 - \lambda_{t-j}) , \tag{1.72}$$

oraz:

[15] Przykład ilustrujący ten przypadek jest omówiony w Części III.

$$e_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{t-i} \prod_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda_{t-j}). \tag{1.73}$$

Z powyższych wzorów wynika, że zależność (1.71) jest modelem opóźnienia rozłożonego ze zmiennymi w czasie współczynnikami struktury opóźnienia opisanymi wzorem (1.72) oraz składnikiem losowym w postaci przedstawionej we wzorze (1.73). Wzór (1.72) pokazuje, że wartość *i*-tego współczynnika struktury opóźnienia w okresie *t* zależy od wartości współczynników dostosowania $\lambda_t, \lambda_{t-1}, \ldots, \lambda_{t-i+1}, \lambda_{t-i}$.

Model opóźnienia rozłożonego, będący rozwiązaniem zależności (1.71) ma szereg szczególnych własności. Na podstawie definicji mnożnika długookresowego $a_t$ oraz wartości średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ wielkości te dla omawianego modelu przyjmują odpowiednio następujące postaci:

$$a_t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_{t-i}}{1 - \lambda_{t-i}} \prod_{j=0}^{i} (1 - \lambda_{t-j}) = \lambda_t + \lambda_{t-1}(1 - \lambda_t) + \lambda_{t-2}(1 - \lambda_t)(1 - \lambda_{t-1}) + \ldots, \tag{1.74}$$

oraz:

$$M(W_t) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \left[ i \cdot \frac{\lambda_{t-i}}{1 - \lambda_{t-i}} \prod_{j=0}^{i} (1 - \lambda_{t-j}) \right]}{a_t}. \tag{1.75}$$

Na podstawie prostych przekształceń można uzyskać następujące zależności:

$$a_t = \lambda_t + (1 - \lambda_t) a_{t-1}, \tag{1.76}$$

oraz

$$M(W_t) = (1 - \lambda_t) \frac{a_{t-1}}{\lambda_t + (1 - \lambda_t) a_{t-1}} \left[ M(W_{t-1}) + 1 \right]. \tag{1.77}$$

Wyprowadzenie zależności (1.77) zamieszczono w Dodatku.

Zauważmy, że jeśli $\lambda_t = 1$, to $v_{t0} = 1, v_{t1} = 0, v_{t2} = 0, v_{t3} = 0, \ldots$ ; wtedy również $a_t = 1$, bez względu na wcześniejsze wartości, a wartość średnia rozkładu opóźnienia $M(W_t) = 0$. Jeśli $\lambda_t = 0$, wtedy mnożnik długookresowy $a_t$ przyjmuje wartość z poprzedniego okresu $a_t = a_{t-1}$, a wartość średnia rozkładu opóźnienia $M(W_t) = M(W_{t-1}) + 1$ (dlatego, że w przypadku tego modelu przy $v_{t0} = 0$, rozkład opóźnienia $W_t$ powstaje przez przesunięcie rozkładu $W_{t-1}$ w prawo o jedną pozycję).

Jakie wartości przyjmuje mnożnik długookresowy? Na podstawie powyższego wywodu wiemy, że mnożnik długookresowy $a_t$ przyjmuje wartość $1$, gdy $\lambda_t = 1$, a również wtedy, gdy współczynnik dostosowania jest stały $\lambda_t = \lambda^* = const.$, a jego wartość mieści się w granicach: $\lambda^* \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$, $\lambda_{min}, \lambda_{max} \in (0,1]$, $\lambda_{min} < \lambda_{max}$, (ponieważ $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^* (1-\lambda^*)^i = 1$).

Załóżmy, że współczynnik dostosowania $\lambda_t$ przyjmuje zmienne wartości z przedziału $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$, $\lambda_{min}, \lambda_{max} \in (0,1]$. Korzystając ze wzoru (1.74), wartość mnożnika długookresowego można oszacować od dołu:

$$\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_{min}}{1-\lambda_{max}} \left(1-\lambda_{max}\right)^{i+1} \le \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_{t-i}}{1-\lambda_{t-i}} \prod_{j=0}^{i} (1-\lambda_{t-j}) \le a_t ,$$

i od góry

$$a_t \le \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_{t-i}}{1-\lambda_{t-i}} \prod_{j=0}^{i} (1-\lambda_{t-j}) \le \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_{max}}{1-\lambda_{min}} \left(1-\lambda_{min}\right)^{i+1} = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} .$$

Przedstawione wyżej wartości dolnego i górnego ograniczenia są skończone, przy czym ograniczenie dolne jest mniejsze od $1$, a górne większe od $1$.

Mnożnik długookresowy $a_t$ można przedstawić w następującej postaci:

$$a_t = 1 + c_t ,$$

gdzie $c_t$ jest odchyleniem wartości mnożnika długookresowego od wartości $1$. Z tego, że wartości $a_{t-i}$, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ; są ograniczone wynika, że również wartości $c_{t-i}$ $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ; są ograniczone. Przekształcając (1.76) uzyskujemy:

$$c_t = (1-\lambda_t) c_{t-1} ,$$

oraz w wyniku kolejnych $k$-$1$ podstawień:

$$c_t = c_{t-k} \prod_{i=0}^{k-1} (1-\lambda_{t-i}) ,\ k=1, 2, 3, \ldots .$$

Odchylenie $c_t$ od wartości mnożnika długookresowego można, na podstawie powyższej zależności, oszacować w następujący sposób:

$$(1-\lambda_{max})^k c_{t-k} \le c_t \le c_{t-k} (1-\lambda_{min})^k .$$

Ponieważ wszystkie wartości odchylenia $c_{t-k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ ; są z założenia ograniczone, a ponadto prawa i lewa nierówność w powyższej relacji dążą do zera, wynika z tego, że $c_t = 0$, a zatem $a_t = 1$.

Powyższe rozważania wskazują, że jeśli współczynnik $\lambda_t$ spełnia dwa warunki, mianowicie przyjmuje wartości z przedziału $(0,1]$, a ponadto jego wartości nie dążą do $0$, mnożnik długookresowy $a_t$ przyjmuje wartość $1$. Można jednak wskazać przypadki, kiedy mnożnik ten uzyskuje wartość różną od $1$; jeśli ciąg współczynników $\lambda_{t-i}$, $i= 0, 1, 2,...$ ; szybko dąży do $0$, jak na przykład dla $\lambda_{t-i} = \dfrac{1}{1+(i+1)!}$, $i= 0, 1, 2,...$ , mnożnik długookresowy $a_t$ przyjmuje wartość $a_t = 0{,}72842$.

W przypadku spełnienia dwóch wyżej wymienionych warunków dla współczynnika $\lambda_t$, mnożnik długookresowy $a_t$ przyjmuje wartość $1$, a wzory (1.75) i (1.77) ulegają uproszczeniu:

$$M(W_t) = \sum_{i=1}^{\infty}\left[ i \cdot \lambda_{t-i} \prod_{j=0}^{i-1}(1-\lambda_{t-j})\right], \tag{1.78}$$

oraz

$$M(W_t) = (1-\lambda_t)[M(W_{t-1})+1]. \tag{1.79}$$

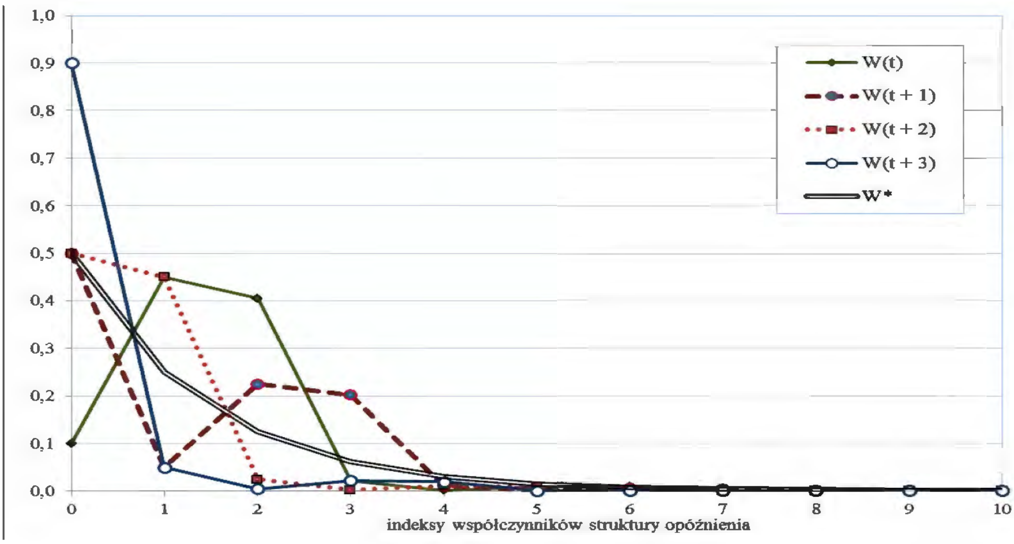
Rozważmy teraz dwa przypadki zmiennych rozkładów opóźnienia spowodowanych przez dwie różne przyczyny. W pierwszym, zmiana rozkładu opóźnienia jest spowodowana sezonową zmianą współczynnika dostosowania $\lambda_t$ w modelu (1.71), w drugim przez skokową zmianę wartości współczynnika dostosowania $\lambda_t$ w modelu opóźnienia (1.71).

Przykład 1.6

W tym przykładzie wartość współczynnika dostosowania $\lambda_t$ oscyluje wokół wartości $\lambda = 0{,}5$ z okresem wahań równym czterem jednostkom (na przykład wahania kwartalne przy danych miesięcznych), zgodnie ze wzorem:

$$\lambda_t = 0{,}5 + 0{,}4 \sin \frac{2\pi}{4} t \,.$$

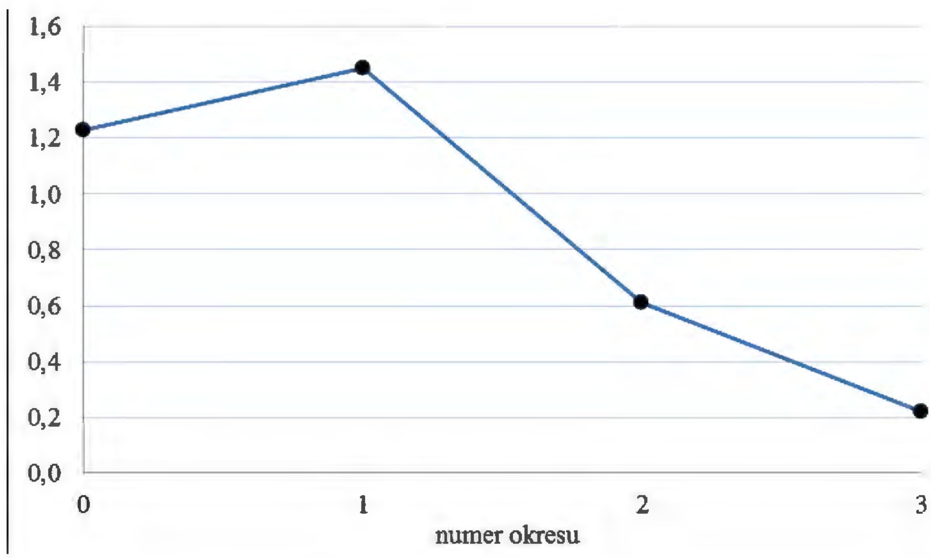
Przedstawione na rys. 1.5 wykresy przedstawiają współczynniki stałego rozkładu modelu opóźnienia dla $\lambda = 0{,}5$ oraz współczynniki rozkładów z okresów $t= 0, 1, 2, 3$.




Źródło: obliczenia własne

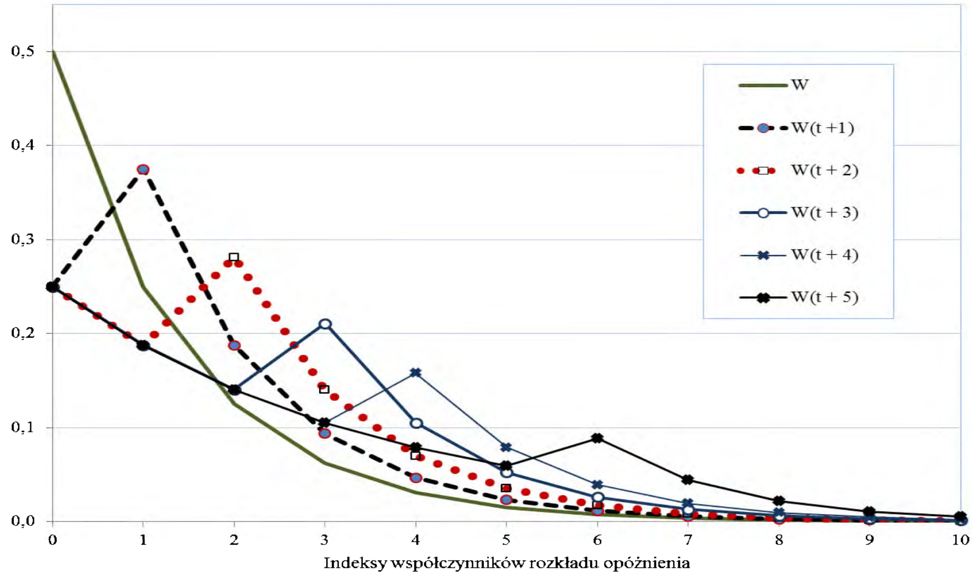
Rys. 1.5. Przykład 1.6. Współczynniki rozkładów opóźnienia: stałego, linia podwójna ciągła, oraz rozkładów w okresach $t = 0, 1, 2, 3$.

Towarzyszące zmianom współczynnika dostosowania $\lambda_t$ zmiany wartości średniej rozkładu opóźnienia przedstawiono na rys. 1.6.




Źródło: obliczenia własne

Rys. 1.6. Przykład 1.6. Wartości średnie $M(W_t)$ rozkładu opóźnienia $W_t$ w okresach $t = 0, 1, 2, 3$.




Źródło: obliczenia własne

Rys. 1.7. Przykład 1.7. Wartości współczynniki rozkładów opóźnienia w okresach $t = 0, 1, 2, 3$.

Zmiany wartości średnich rozkładów opóźnienia spowodowane przez skokową zmianę wartości współczynnika dostosowania zostały przedstawione na rys. 1.8.

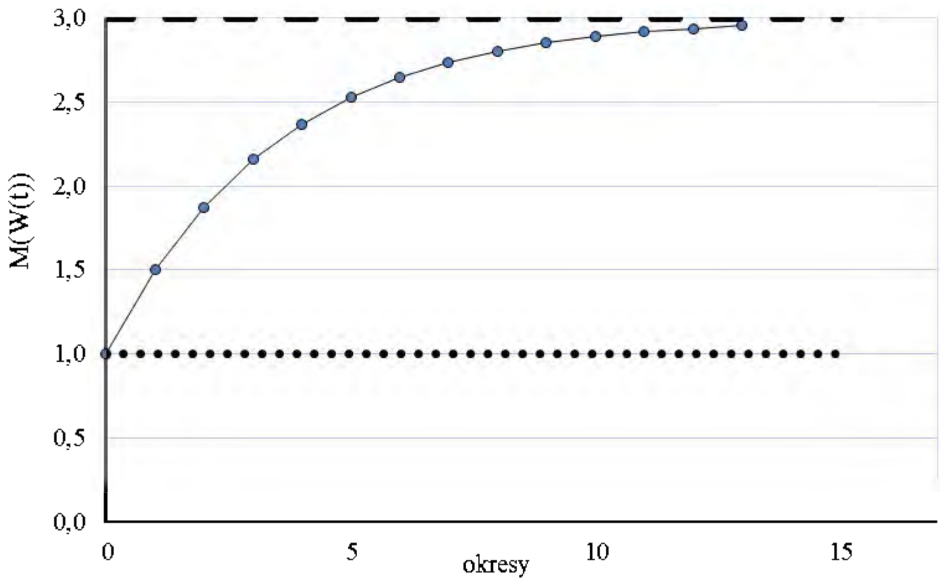
Z wykresów przedstawionych na rys. 1.5 wynika, że w pewnych przypadkach nieskomplikowany deterministyczny mechanizm opóźnienia nietrudno pomylić z losowym mechanizmem zmian rozkładu opóźnienia.

Przykład 1.7

W tym przykładzie wartość współczynnika dostosowania $\lambda_t$ ulega zmianie w okresie $t=1$ i zmniejsza się od $0,5$ do $0,25$ (wydłużenie czasu reakcji), czego następstwem jest ewolucja rozkładu opóźnienia ze zmieniającą się wartością średnią rozkładu opóźnienia.

Na rys. 1.7. przedstawiono ewolucję współczynników rozkładów opóźnienia w okresach $t = 0, 1, 2, 3$.

Na rys. 1.8. przedstawiono wartości średnie rozkładów opóźnienia w okresach $t = 0, 1, \ \ , 15$.




Źródło: obliczenia własne

Rys. 1.8. Przykład 1.7. Ewolucja wartości średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ (linia ciągła) w następstwie zmiany wartości współczynnika $\lambda_t$ z *0,5* (linia kropkowana) na *0,25* (linia przerywana).

Omawiany przykład pokazuje, jak skokowa zmiana współczynnika dostosowania powoduje ewolucję rozkładu opóźnienia, ale również wartości średniej kolejnych rozkładów opóźnienia, rys. 1.8. Nietrudno zauważyć, że proces dostosowania jest nieskończony, jednak już w okresie $t=14$ praktycznie pokrywa się z wartością graniczną równą *3*.

Na pytanie o czas trwania przedstawionego w tym przykładzie procesu dostosowania można odpowiedzieć podając dwie wielkości: wartość średnią trwania procesu oraz medianę. Drugą z omawianych wartości łatwo odczytać z wykresu: jest ona większa od *2* i mniejsza od *3*.

Średni czas $M$ trwania procesu można oszacować ważąc względnymi odchyleniami od wartości granicznej czas trwania odchylenia:

$$M = \sum_{t=0}^{\infty} t \frac{M(W_{t=\infty}) - M(W_t)}{\sum_{i=0}^{\infty}\left[M(W_{t=\infty}) - M(W_i)\right]} = 3,69.$$

## Podsumowanie Części I

W Części I wprowadzone zostały podstawowe pojęcia opisujące modele opóźnienia rozłożonego: zmienne niezależna i zależna, struktura opóźnienia, składnik losowy, model skończony i nieskończony. Zdefiniowany został rozkład opóźnienia oraz określono warunki jego istnienia, a ponadto wyprowadzono pojęcia: mnożnik długookresowy i podstawowe parametry tego rozkładu opóźnienia: wartość średnią, wariancję i medianę rozkładu opóźnienia. W dalszej części zaproponowane zostało pojęcie wynikowego rozkładu opóźnienia oraz jego parametry: wartość średnia, wariancja i mediana.

Przedstawione zostały podstawowe sposoby analizy dynamiki związane ze zmianą wartości zmiennej niezależnej: impulsową, skokową, a następnie z wpływem okresowych wahań zmiennej niezależnej na zmienną zależną. Przedstawiono problemy wiążące się z niejednoznacznością pojęcia opóźnienia. Ukazana została różnica między własnościami mechanizmu opóźnienia a opóźnieniem, na które wpływ wywierają, poza samym mechanizmem opóźnienia, również wartości zmiennej niezależnej. Pojęcia te znajdują zastosowanie w ocenie opóźnienia i w wyborze odpowiedniej jego miary.

W kolejnych rozdziałach tej części przedstawiono najczęściej spotykane skończone i nieskończone modele opóźnienia rozłożonego oraz odpowiadające im rozkłady opóźnienia. Omówiono podstawowe źródła zmienności struktur opóźnienia. Rozważania te są zilustrowane przykładem modelu dostosowania częściowego ze zmiennym współczynnikiem dostosowania. Dla modelu tego zostały podane warunki, dla których mnożnik długookresowy ma wartość jeden, a ponadto wyprowadzone zostały wzory pozwalające na obliczanie w kolejnym okresie wartości mnożnika długoterminowego i wartości średniej rozkładu opóźnienia na podstawie bieżącej wartości współczynnika dostosowania oraz wartości tych wielkości z poprzedniego okresu.

Praca jest poświęcona modelom opóźnienia rozłożonego, stosowanym w modelowaniu zjawisk ekonomicznych. Część pierwsza pracy zawiera wprowadzenie, przedstawiające znane z literatury sposoby formułowania modeli opóźnienia, ich podstawowe własności i sposoby analizy, a ponadto sposoby pomiaru wielkości ogólnie nazywanej przeciętnym opóźnieniem. Część ta zawiera również przegląd spotykanych w literaturze modeli opóźnienia. Część druga opisuje własności modeli opóźnienia rozłożonego, utworzonych za pomocą operacji sumowania (łączenia równoległego) oraz superpozycji (łączenia szeregowego). Część trzecia jest poświęcona odrębnej podkategorii modeli opóźnienia rozłożonego, opisującej systemy przepływów. W Dodatku zamieszczone zostały dowody własności, których względna zawiłość mogłaby przeszkadzać w lekturze głównej części pracy.

W monografii przedstawiono następujące nowe elementy. Po pierwsze: próbę uogólnienia własności modeli opóźnienia rozłożonego ze zmiennymi współczynnikami. Po drugie: propozycję zmiany podejścia do problemu oceny tzw. przeciętnego opóźnienia. Rzecz polega na odróżnieniu opóźnienia, będącego wynikiem mechanizmu opóźnienia, od opóźnienia rzeczywistego, uwzględniającego dynamikę zmiennej niezależnej. To drugie jest ujęte w rozkładzie nazwanym wynikowym rozkładem opóźnienia. Kolejną nowością jest analiza złożonych modeli opóźnienia rozłożonego, powstałych przez łączenie równoległe lub szeregowe skończonej liczby $n$ składowych modeli opóźnienia rozłożonego. I wreszcie, nowością jest wyodrębnienie podkategorii modeli opóźnienia rozłożonego w systemach przepływów oraz analiza ich własności. W literaturze ekonomicznej do tej pory tego podejścia nie można było spotykać, chociaż do tej podkategorii modeli opóźnienia rozłożonego należy wiele modeli (niekoniecznie skupionych w przestrzeni).

ISSN 0208-8029
ISBN 83-894-7559-6

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK
tel.: (+48) 22 3810246 / 22 3810277 / 22 3810241 / 22 3810273
e-mail: biblioteka@ibspan.waw.pl