BADANIA OPERACYJNE I SYSTEMOWE: ŚRODOWISKO NATURALNE, PRZESTRZEŃ, OPTYMALIZACJA

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH • POLSKA AKADEMIA NAUK

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 63

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2008

Olgierd Hryniewicz, Andrzej Straszak, Jan Studziński

BADANIA OPERACYJNE I SYSTEMOWE: ŚRODOWISKO NATURALNE, PRZESTRZEŃ, OPTYMALIZACJA

Publikacja była opiniowana do druku przez zespół recenzentów, którego skład podano w treści tomu

Opinie, wyrażone przez autorów w pracach, zawartych w niniejszym tomie, nie są oficjalnymi opiniami Instytutu Badań Systemowych PAN, ani Polskiego Towarzystwa Badań Operacyjnych i Systemowych.

ISBN 83-894-7519-7
EAN 9788389475190

Redakcja i opracowanie techniczne: Jan W. Owsiński, Aneta M. Pielak, Anna Gostyńska

Lista recenzentów
artykułów, wchodzących w skład tomów serii „Badania Systemowe” związanych z konferencją BOS 2008

Dr Paweł Bartoszczuk
Dr inż. Lucyna Bogdan
Dr hab. inż. Zbigniew Buchalski
Mgr inż. Hanna Bury
Prof. dr hab. Marian Chudy
Dr Jan Gadomski
Mgr Grażyna Grabowska
Mgr inż. Andrzej Jakubowski
Dr hab. inż. Ignacy Kaliszewski
Dr Andrzej Kałuszko
Dr hab. Leszek Klukowski
Dr hab. inż. Wiesław Krajewski
Dr inż. Lech Kruś
Dr hab. inż. Marek Libura
Dr Barbara Mażbic-Kulma
Dr inż. Edward Michalewski
Dr inż. Jan W. Owsiński
Dr inż. Grażyna Petriczek
Dr inż. Henryk Potrzebowski
Dr Maciej Romaniuk
Prof. dr hab. Piotr Sienkiewicz
Dr hab. Henryk Spustek
Prof. dr hab. Andrzej Straszak
Dr hab. inż. Jan Studziński
Prof. dr hab. Tomasz Szapiro
Mgr Anna Szediw
Dr inż. Grażyna Szkatuła
Dr hab. inż. Tadeusz Witkowski
Dr Irena Woroniecka-Leciejewicz
Dr hab. Sławomir Zadrożny
Dr inż. Andrzej Ziółkowski

Komitety Konferencji
Badania Operacyjne i Systemowe 2008
Rembertów, Akademia Obrony Narodowej

Patronat honorowy

Bogdan Klich, Minister Obrony Narodowej
Maciej Nowicki, Minister Środowiska i Zasobów Naturalnych

Komitet Sterujący

Janusz Kacprzyk, Prezes Polskiego Towarzystwa Badań Operacyjnych i Systemowych
Olgierd Hryniewicz, Dyrektor Instytutu Badań Systemowych
Janusz Kręcikij, Komendant Akademii Obrony Narodowej

Komitet Programowy

Piotr Sienkiewicz, *Przewodniczący*
Jacek Mercik, *Wiceprzewodniczący*

Tomasz Ambroziak
Marian Chudy
Olgierd Hryniewicz
Ignacy Kaliszewski
Piotr Kulczycki
Barbara Mażbic-Kulma
Włodzimierz Ogryczak
Andrzej Piegat
Honorata Sosnowska
Andrzej Straszak
Ryszard Tadeusiewicz
Jan Węglarz
Ryszard Budziński
Ludosław Drelichowski
Adam A. Janiak
Józef Korbicz
Małgorzata Łatuszyńska
Zbigniew Nahorski
Wojciech Olejniczak
Krzysztof Santarek
Henryk Spustek
Tomasz Szapiro
Eugeniusz Toczyłowski
Tadeusz Witkowski
Bogdan Zdrodowski
Wojciech Cellary
Jerzy Hołubiec
Jerzy Józefczyk
Maciej Krawczak
Marek J. Malarski
Andrzej Najgebauer
Jan W. Owsiński
Roman Słowiński
Jan Stachowicz
Andrzej Szymonik
Tadeusz Trzaskalik
Stanisław Zajas

Komitet Organizacyjny

Jan W. Owsiński, Andrzej Kałuszko, Mieczysław Pelc, Zbigniew Piątek

Sekretariat

Krystyna Warzywoda, Monika Majkut, Aneta M. Pielak, Krzysztof Sęp,
Anna Stachowiak, Halina Świeboda, Tadeusz Winiarski

Redakcja wydawnictw

Janusz Kacprzyk, Piotr Sienkiewicz, Andrzej Najgebauer,
Olgierd Hryniewicz, Andrzej Straszak, Jan Studziński,
Jan W. Owsiński, Zbigniew Nahorski, Tomasz Szapiro

POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

BADANIA OPERACYJNE I SYSTEMOWE: ŚRODOWISKO NATURALNE, PRZESTRZEŃ, OPTYMALIZACJA

Olgierd Hryniewicz,
Andrzej Straszak,
Jan Studziński
red.

Metody:
Optymalizacja, dane, analiza

OSZACOWANIE BŁĘDU W OBLICZENIACH Z ROZMYTYMI DANYMI

Marian Chudy
Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Cybernetyki,
00-908 Warszawa, ul. Kaliskiego 2

W pracy rozpatrzono model obliczeń, w którym na wejście układu obliczającego podawane są dane mające charakter danych rozmytych. Układ obliczający nie zawiera reguł rozmytych. Istotą problemu jest oszacowanie wielkości błędu jaki powstaje na wyjściu układu obliczającego, przetwarzającego dane wejściowe o takim charakterze.

1. Wprowadzenie

W literaturze spotykamy wiele rozważań dotyczących działania układów sterowania zawierających formuły rozmyte, na których wejście podawane są dane rozmyte. Bogaty, teoretyczny opis tych zagadnień znajdujemy np. w pracach: Kacprzyk (2001), Piegut (1999). Inżynierskie podejście do problemu zawiera praca Szymczaka i Kwiatkowskiego (1997).

Z praktycznego punktu widzenia wydaje interesujące postawie następującego pytania: jak oszacować błąd na wyjściu układu nie zawierającego formuł rozmytych. gdy na wejście tego układu podawane są dane rozmyte. Dla udzielenia odpowiedzi na to pytanie musimy wprowadzić pewne pojęcia pomocnicze.

Dany jest zbiór D zawarty w pewnej przestrzeni X, zwany zbiorem danych zadania. Niech Y będzie przestrzenią metryczną z metryką ρ. Przestrzeń Y zawiera elementy, które nazwiemy wynikami i które otrzymujemy podając dane wejściowe pewnemu układowi obliczającemu (algorytmowi).

Układ obliczający (algorytm, zadanie) S można zatem zdefiniować następująco:

$$S: D \rightarrow Y \qquad (1.1)$$

Wprowadzimy następujący operator:

$$I: D \rightarrow Z \qquad (1.2)$$

gdzie Z - zadana przestrzeń.

Operator I nazywać będziemy operatorem informacji, natomiast jego wartość $I(x)$ nazwiemy informacją o danej x.

Dla potrzeb dalszych rozważań wprowadzimy jeszcze dwa określenia.

Określenie1.1. *Średnicą zbioru $A \subset Y$* nazywamy wielkość

$$d(A) = \sup_{y_1, y_2 \in A} \rho(y_1, y_2) \cdot \qquad (1.3)$$

W przypadku gdy metryka ρ zadana jest przez normę otrzymamy

$$d(A)=\sup_{y_1,y_2\in A}\|y_1-y_2\| \,. \tag{1.4}$$

Określenie 1.2. *Promieniem zbioru $A\subset Y$* nazywamy wielkość

$$r(A)=\inf_{y\in Y}\ \sup_{y_1\in A}\ \rho(y,y_1)\,. \tag{1.5}$$

W przypadku gdy metryka ρ zadana jest przez normę otrzymamy

$$r(A)=\inf_{y\in Y}\ \sup_{y_1\in A}\|y-y_1\|\,. \tag{1.6}$$

Zachodzi zależność

$$r(A)\le d(A)\le 2r(A)\,. \tag{1.7}$$

Powyższe obiekty w wersji ograniczonej do przestrzeni unormowanej są opisane w pracy Chudy (2006).

2. Model danych i model obliczeń

Przyjmiemy, że dane, którymi dysponujemy są nieprecyzyjne, a możliwym do zaakceptowania ich modelem są zbiory rozmyte. Nawiązując do wprowadzonych pojęć zauważmy, że funkcja przynależności zbioru rozmytego może być dobrym przykładem operatora informacji I.

Oznaczmy przez $F(D)$ rodzinę zbiorów rozmytych określonych na zbiorze $D\subset X$. Przyjmiemy, że dane rozmyte będą miały postać zbiorów rozmytych $A\in F(D)$ o funkcjach przynależności

$$\mu_A(x)\ge 0 \quad dla\ x\in D \quad oraz \quad \mu_A(x)=0 \quad dla\ x\notin D\,. \tag{2.1}$$

Wartość funkcji $I_A(x)=\mu_A(x)$ jest informacją o danej x w kontekście naszej nieprecyzyjnej wiedzy o danej wymaganej do obliczeń przedstawionej w postaci zbioru rozmytego A. Na przykład: jeśli nasza możliwość oszacowania wielkości danej do obliczeń ogranicza się do podania liczby rozmytej A = „ około 3”, to wartość funkcji $\mu_A(x)$ oznacza stopień spełnienia przez liczbę nierozmytą x własności bycia właściwą daną do obliczeń, która to dana jest pewnym elementem zbioru D i należy do dziedziny funkcji $\mu_A(x)$. Zauważmy, że dla wielu postaci funkcji $\mu_A(x)$ informacja o wielu elementach zbioru D jest taka sama i łatwo potrafimy wyznaczyć zbiory tych elementów $x'\in D$, o których informacja jest taka sama jak o elemencie $x\in D$. Powstaje ważne pytanie: jak należy rozumieć i realizować podanie na wejście układu obliczającego danej w postaci rozmytego zbioru A ?

Założymy, że układ obliczający działa w oparciu o formułę (1.1) i dziedziną odwzorowania S jest zbiór nierozmyty D, co oznacza, że dla danych $x\in D$ układ wyznacza wartości $S(x)\in Y$.

Jeśli użytkownik dysponuje daną, która ma postać zbioru rozmytego A o funkcji przynależności $\mu_A(x)$, to istnieje potrzeba zastosowania pewnej operacji defuzyfikacji tej danej. Przyjmiemy w naszych rozważaniach, że nie znając dokładnej danej $\overline{x} \in D$, ale posiadając daną rozmytą A, podamy na wejście układu obliczającego S pewien element $x' \in D$ taki, że $\mu_A(x')>0$. Otrzymamy w ten sposób wielkość $S(x')$, być może różną od właściwej wielkości $S(\overline{x})$. Ta różnica będzie zależała przede wszystkim od postaci funkcji $\mu_A(x)$.

3. Oszacowanie błędu

Przyjmując taką postać defuzyfikacji danych powinniśmy rozważyć kwestię wielkości błędu jaki popełniamy stosując ten model obliczeń.

Niech dana rozmyta A ma funkcję przynależności $\mu_A(x) = I_A(x)$. Wprowadzimy dwie pomocnicze wielkości:

$$V_A(x) = \left\{x' \in X : I_A(x') = I_A(x) = \mu_A(x)\right\} \text{ dla } x \in D \tag{3.1}$$

czyli zbiór tych elementów zbioru D, o których informacja jest taka sama jak o elemencie $x \in D$; zbiór $V_A(x)$ nie jest zbiorem pustym, gdyż zawiera element x, oraz

$$U_A(x) = \left\{S(x') \in Y : x' \in V_A(x)\right\} \text{ dla } x \in D \tag{3.2}$$

czyli zbiór wyników działania odwzorowania S dla danych nierozmytych $x' \in D$, o których informacja jest taka sama jak o danej x.

Zastosujmy teraz dla zadanego zbioru rozmytego A o funkcji przynależności $\mu_A(x)$ oraz zadanego odwzorowania S: $D \to Y$ zasadę rozszerzania Zadeha. Zasada ta jest dobrze opisana w pracach Grzegorzewskiego (2006) i Piegata (1999). Otrzymamy wówczas rozmyty zbiór $S\{A\}$, którego funkcja przynależności ma postać:

$$\mu_{S\{A\}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in \{x' : y = S(x')\}} \mu_A(x) & gdy \;\; S^{-1}(y) \neq 0 \\ 0 & gdy \;\; S^{-1}(y) = 0 \end{cases} . \tag{3.3}$$

Jest to funkcja przynależności, której dziedzina składa się z punktów $y \in \{y' \in Y: y' = S(x), x \in D\}$.

Zdefiniujmy teraz algorytm α:

$$\alpha(I_A(x)) = S(x') \quad dla\ pewnego\ \ x' \in V_A(x) \quad x \in D \tag{3.4}$$

określający wartości odwzorowania S dla wszystkich elementów zbioru D, po operacji defuzyfikacji w wyżej opisanym sensie. Zauważmy, że dla wszystkich punktów

$x'' \in V_A(x)$ wartość odwzorowania jest taka sama i wynosi $S(x')$. Błędem algorytmu α nazwiemy wielkość

$$e(\alpha) = \sup_{x \in D} \rho(\alpha(I_A(x)), S(x)) \quad \text{gdy } Y \text{ to przestrzeń metryczna} \tag{3.5}$$

lub

$$e(\alpha) = \sup_{x \in D} \left\| \alpha(I_A(x)) - S(x) \right\| \tag{3.6}$$

gdy metryka ρ jest wyznaczona przez normę.

Korzystając z Twierdzenia 1.2, zamieszczonego w pracy Chudy (2006), można wyznaczyć następujące oszacowanie błędu algorytmu α

$$e(\alpha) \geq \sup_{x \in D} r(U_A(x)) \tag{3.7}$$

gdzie $r(U_A(x))$ to promień zbioru $U_A(x)$ dla zadanego zbioru rozmytego A oraz funkcji przynależności (3.3) generowanej przez odwzorowanie S i funkcję przynależności $\mu_A(x)$.

Z przyjętego sposobu defuzyfikacji danych, wyrażenia (3.4) oraz Twierdzenia 1.4 z pracy Chudy (2006) wynika, że można wyznaczyć również ograniczenie górne błędu. Mamy zatem

$$\sup_{x \in D} r(U_A(x)) \leq e(\alpha) \leq 2 \sup_{x \in D} r(U_A(x)) \cdot \tag{3.8}$$

<u>Przykład</u>

Zbiór danych jest przedziałem domkniętym w zbiorze liczb rzeczywistych $D = [1,5] \subset R$. Układ obliczający działa w oparciu o formułę $S(x) = ax$, $x \in R$, $a>0$.

Dana rozmyta jest liczbą rozmytą A = ”około 3” o trapezowej funkcji przynależności zadanej wektorem $(a_1,a_2,a_3,a_4) = (1,2,4,5)$. Funkcja przynależności (3.3) liczby rozmytej $S\{A\}$, uzyskana po zastosowaniu zasady rozszerzania z wykorzystaniem odwzorowania $S(x) = ax$ ma postać trapezową o parametrach $(aa_1,aa_2,aa_3,aa_4) = (a1,a2,a4,a5)$ i równych (2,4,8,10) dla $a = 2$.

Zbiory $U_A(x)$ mają postać

$$U_A(x) = \begin{cases} \{ax, a(6-x)\} & dla \quad x \in [1, 2] \\ [4, 8] & dla \quad x \in [2, 4] \\ \{ax, 4 - a(x-4)\} & dla \quad x \in [4, 5] \end{cases} \tag{3.9}$$

stąd

$$\sup_{x \in D} r(U_A(x)) = 4 \cdot \tag{3.10}$$

4. Wnioski

1. Opisane rozważania potwierdzają intuicyjne przypuszczenie, że nieprecyzyjne dane wprowadzone do nierozmytego układu obliczającego prowadzą do nieprecyzyjnych wyników.
2. Dla przyjętego sposobu defuzyfikacji danych i przyjętego algorytmu obliczeń (3.4) możliwe jest uzyskanie oszacowania dolnego i górnego błędu obliczeń.
3. Wielkość błędu silnie zależy od postaci funkcji przynależności opisującej dane rozmyte. Ma ona wpływ na wielkość promienia zbioru $U_A(x)$.
4. Uzyskane wyniki potwierdzają, że dla niektórych przypadków dokładnie zdefiniowanych modeli obliczeń można uzyskać analityczne oszacowania wielkości błędu w sytuacji korzystania z nieprecyzyjnych danych.

Literatura

Chudy M. (2006) *Elementy teoretycznych podstaw informatyki*. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa.

Grzegorzewski P. (2006) *Wspomaganie decyzji w warunkach niepewności. Metody statystyczne dla nieprecyzyjnych danych*. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa.

Kacprzyk J. (2001) *Wieloetapowe sterowanie rozmyte*. WNT, Warszawa.

Piegat A. (1999) *Modelowanie i sterowanie rozmyte*. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa.

Szymczak M., Kwiatkowski W. (1997) Przykład zastosowania regulatorów rozmytych w dwupoziomowym układzie sterowania. *Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki WAT*, 5, Warszawa.

Olgierd Hryniewicz, Andrzej Straszak, Jan Studziński
red.

BADANIA OPERACYJNE I SYSTEMOWE: ŚRODOWISKO NATURALNE, PRZESTRZEŃ, OPTYMALIZACJA

Książka składa się z artykułów przedstawiających wyniki prac z dziedziny badań operacyjnych i systemowych, poświęconych środowisku naturalnemu i zarządzaniu nim, zwłaszcza w zakresie ochrony atmosfery, globalnego ocieplenia i walki z nim, jakości i zaopatrzenia w wodę. Tematyka ta jest rozszerzona o aspekty przestrzenne, regionalne i samorządowe, a także planowanie i funkcjonowanie infrastruktury. Tom zamykają prace metodyczne, dostarczające technik, będących podstawą prezentowanych zastosowań.

ISBN 83-894-7519-7
EAN 9788389475190

Instytut Badań Systemowych PAN
tel. (4822) 3810241 / 3810273 e-mail: biblioteka@ibspan.waw.pl