



**POLSKA AKADEMIA NAUK**  
**Instytut Badań Systemowych**

**BADANIA OPERACYJNE I SYSTEMOWE:  
ŚRODOWISKO NATURALNE,  
PRZESTRZEŃ, OPTIMALIZACJA**

**Olgierd Hryniewicz,**  
**Andrzej Straszak,**  
**Jan Studziński**  
**red.**



**BADANIA OPERACYJNE  
I SYSTEMOWE:  
ŚRODOWISKO NATURALNE, PRZE-  
STRZEŃ, OPTYMALIZACJA**

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH • POLSKA AKADEMIA NAUK

**Seria: BADANIA SYSTEMOWE**  
**tom 63**

---

**Redaktor naukowy:**

**Prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum**

**Warszawa 2008**

**Olgierd Hryniewicz, Andrzej Straszak, Jan Studziński**

**BADANIA OPERACYJNE I SYSTEMOWE:  
ŚRODOWISKO NATURALNE, PRZESTRZEŃ,  
OPTYMALIZACJA**

Publikacja była opiniowana do druku przez zespół recenzentów, którego skład podano w treści tomu

Opinie, wyrażone przez autorów w pracach, zawartych w niniejszym tomie, nie są oficjalnymi opiniami Instytutu Badań Systemowych PAN, ani Polskiego Towarzystwa Badań Operacyjnych i Systemowych.

Copyright © by Instytut Badań Systemowych PAN & Polskie Towarzystwo Badań Operacyjnych i Systemowych  
Warszawa 2008

**ISBN 83-894-7519-7**  
**EAN 9788389475190**

Redakcja i opracowanie techniczne: Jan W. Owskiński, Aneta M. Pielak, Anna Gostyńska

**Lista recenzentów  
artykułów, wchodzących w skład tomów serii „Badania Systemowe”  
związanych z konferencją BOS 2008**

Dr Paweł Bartoszczuk  
Dr inż. Lucyna Bogdan  
Dr hab. inż. Zbigniew Buchalski  
Mgr inż. Hanna Bury  
Prof. dr hab. Marian Chudy  
Dr Jan Gadomski  
Mgr Grażyna Grabowska  
Mgr inż. Andrzej Jakubowski  
Dr hab. inż. Ignacy Kaliszewski  
Dr Andrzej Kałużko  
Dr hab. Leszek Klukowski  
Dr hab. inż. Wiesław Krajewski  
Dr inż. Lech Kruś  
Dr hab. inż. Marek Libura  
Dr Barbara Mażbic-Kulma  
Dr inż. Edward Michalewski  
Dr inż. Jan W. Owiński  
Dr inż. Grażyna Petriczek  
Dr inż. Henryk Potrzebowski  
Dr Maciej Romaniuk  
Prof. dr hab. Piotr Sienkiewicz  
Dr hab. Henryk Spustek  
Prof. dr hab. Andrzej Straszak  
Dr hab. inż. Jan Studziński  
Prof. dr hab. Tomasz Szapiro  
Mgr Anna Szediw  
Dr inż. Grażyna Szkatuła  
Dr hab. inż. Tadeusz Witkowski  
Dr Irena Woroniecka-Leciejewicz  
Dr hab. Sławomir Zadrozny  
Dr inż. Andrzej Ziółkowski

**Komitet Konferencji  
Badania Operacyjne i Systemowe 2008  
Rembertów, Akademia Obrony Narodowej**

Patronat honorowy

Bogdan Klich, Minister Obrony Narodowej  
Maciej Nowicki, Minister Środowiska i Zasobów Naturalnych

Komitet Sterujący

Janusz Kacprzyk, Prezes Polskiego Towarzystwa Badań Operacyjnych i Systemowych  
Olgierd Hryniewicz, Dyrektor Instytutu Badań Systemowych  
Janusz Kręcikij, Komendant Akademii Obrony Narodowej

Komitet Programowy

Piotr Sienkiewicz, *Przewodniczący*  
Jacek Mercik, *Wiceprzewodniczący*

<i>Tomasz Ambroziak</i>	<i>Ryszard Budziński</i>	<i>Wojciech Cellary</i>
<i>Marian Chudy</i>	<i>Ludostaw Drelichowski</i>	<i>Jerzy Hołubiec</i>
<i>Olgierd Hryniewicz</i>	<i>Adam A. Janiak</i>	<i>Jerzy Józefczyk</i>
<i>Ignacy Kaliszewski</i>	<i>Józef Korbicz</i>	<i>Maciej Krawczak</i>
<i>Piotr Kulczycki</i>	<i>Małgorzata Łatuszyńska</i>	<i>Marek J. Malarski</i>
<i>Barbara Mażbic-Kulma</i>	<i>Zbigniew Nahorski</i>	<i>Andrzej Najgebauer</i>
<i>Włodzimierz Ogryczak</i>	<i>Wojciech Olejniczak</i>	<i>Jan W. Owsiański</i>
<i>Andrzej Piegat</i>	<i>Krzysztof Santarek</i>	<i>Roman Słowiński</i>
<i>Honorata Sosnowska</i>	<i>Henryk Spustek</i>	<i>Jan Stachowicz</i>
<i>Andrzej Straszak</i>	<i>Tomasz Szapiro</i>	<i>Andrzej Szymonik</i>
<i>Ryszard Tadeusiewicz</i>	<i>Eugeniusz Toczyłowski</i>	<i>Tadeusz Trzaskalik</i>
<i>Jan Węglarz</i>	<i>Tadeusz Witkowski</i>	<i>Stanisław Zajas</i>
	<i>Bogdan Zdrodowski</i>	

Komitet Organizacyjny

Jan W. Owsiański, Andrzej Kałużko, Mieczysław Pelc, Zbigniew Piątek

Sekretariat

Krystyna Warzywoda, Monika Majkut, Aneta M. Pielak, Krzysztof Sep,  
Anna Stachowiak, Halina Świeboda, Tadeusz Winiarski

Redakcja wydawnictw

Janusz Kacprzyk, Piotr Sienkiewicz, Andrzej Najgebauer,  
Olgierd Hryniewicz, Andrzej Straszak, Jan Studziński,  
Jan W. Owsiański, Zbigniew Nahorski, Tomasz Szapiro

**Metody:**  
**Optymalizacja, dane, analiza**



## **ALGORYTM ANALIZY BRAKU ROZWIĄZANIA ZADANIA OPTYMALIZACJI WSADU DO PIECÓW ODLEWNICZYCH**

**Eugeniusz Ziółkowski**

Akademia Górniczo-Hutnicza, ul. Reymonta 23, 30-059 Kraków

W artykule przedstawiono uogólniony model matematyczny zadania wyznaczania optymalnego (w sensie ekonomicznym) wsadu do pieców odlewniczych. Model ten zakłada uwzględnianie niepewnego składu chemicznego poszczególnych materiałów wsadowych. Z uwagi na złożoność układu warunków ograniczających w tym modelu i często występujący brak rozwiązania optymalnego, nie jest możliwe, nawet dla doświadczonego technologa prowadzącego wytop, jednoznaczne określenie przyczyn sprzeczności tego układu ograniczeń. Autor proponuje kilka modeli matematycznych analizy sprzeczności układu ograniczeń, które pozwalają precyzyjnie wskazać technologowi możliwości wprowadzenia właściwych zmian w tym układzie ograniczeń, aby zadanie było rozwiązywalne, a przez to możliwe do zastosowania w procesie produkcji ciekłego metalu w odlewni. Do rozwiązania zaproponowanych wersji zadania analizy sprzeczności układu ograniczeń użyto program zawierający algorytm programowania kwadratowego. Artykuł zawiera przykład obliczeniowy wraz z odpowiednią interpretacją technologiczną poszczególnych etapów tworzenia zadań optymalizacji rozmytej oraz dyskusją uzyskanych wyników obliczeń.

### 1. Wprowadzenie

Przygotowanie produkcji ciekłego metalu w piecu odlewniczym, bez względu na jego rozwiązanie konstrukcyjne i metodę topienia, wymaga wyznaczenia udziału masowego lub procentowego poszczególnych materiałów, z których zestawia się wsad do topienia. Jak podaje Ziółkowski (2007a) tak przygotowany wsad technologicznie nazywany jest namiarem. Parametrami wejściowymi do obliczenia namiaru wsadu są:

- liczba pierwiastków chemicznych  $M$ , przyjmowanych w obliczeniach,
- liczba materiałów wsadowych  $N$ , które mogą być użyte we wsadzie,
- skład chemiczny poszczególnych materiałów wsadowych,
- ewentualne wartości uzysku (lub zgaru), określające możliwość zmiany składu chemicznego wsadu i ciekłego metalu w procesie wytopu,
- dodatkowe założenia ograniczające udział masowy lub procentowy poszczególnych materiałów we wsadzie,
- masa wsadu lub masa ciekłego metalu (z uwzględnieniem zgaru metalurgicznego ogólnego), wyrażona w jednostkach masy lub jako 100%,
- skład chemiczny wsadu metalowego do pieca odlewniczego albo skład chemiczny ciekłego metalu po zakończeniu procesu wytopu,
- parametry (wskaźniki) określające preferencje wyboru składników wsadu w zadaniach optymalizacji, na przykład ceny jednostkowe zakupu materiałów,

ceny jednostkowe przygotowania do produkcji (uwzględniające koszt zakupu, transportu, magazynowania, wstępnego przygotowania przed użyciem, itd.).

Parametrem wyjściowym zadania jest zamiar, określający udział masowy lub procentowy poszczególnych materiałów we wsadzie.

Zgodnie z klasyfikacją podaną przez Ziółkowskiego (2007b) procedurę obliczania zamiaru wsadu można realizować następującymi metodami:

- graficznymi,
- analitycznymi,
- numerycznymi (komputerowymi), wśród których należy wymienić metody optymalizacji.

Pierwszy model matematyczny zadania obliczania zamiaru wsadu przedstawili w swoim opracowaniu Podrzucki i Kalata (1976). W przytoczonej literaturze przedstawiono zadanie minimalizacji, którego funkcja celu ma postać:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N c_j x_j \quad (1)$$

gdzie:

- $\mathbf{x}$  – wektor poszukiwanych zmiennych decyzyjnych, w tym przypadku udział każdego składnika we wsadzie, % (jeśli  $m_w=100\%$ ) lub w kg (jeśli  $m_w$  określone w kg),
- $N$  – liczba uwzględnianych w obliczeniach materiałów wsadowych,
- $M$  – liczba uwzględnianych pierwiastków chemicznych,
- $c_j$  – cena jednostkowa  $j$ -tego materiału wsadowego, w jednostkach ceny na jednostkę masy

Oznacza to poszukiwanie zamiaru wsadu o najniższym sumarycznym koszcie. Układ warunków ograniczających zdefiniowano w postaci

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j = b_i \cdot m_w \\ \sum_{j=1}^N x_j = m_w, \quad 0 \leq x_j \leq \bar{x}_j, \quad i = 1, 2, \dots, M; \quad j = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (2)$$

przy czym:

- $a_{ij}$  – zawartość  $i$ -tego pierwiastka chemicznego w  $j$ -tym składniku wsadu, %,
- $b_i$  – zawartość  $i$ -tego pierwiastka chemicznego we wsadzie, %,
- $m_w$  – masa wsadu, w kg albo równa 100%,
- $\bar{x}_j$  – ograniczenie górne udziału  $j$ -tego składnika we wsadzie, w kg lub %.

Zadanie optymalizacji funkcji celu (1) z warunkami ograniczającymi (2) jest zadaniem optymalizacji liniowej, gdyż zarówno funkcja (1), jak i układ warunków ograniczających (2) mają postać funkcji liniowych. Do rozwiązania tak zdefiniowa-

nego zadania można posłużyć się na przykład metodą sympleksów, opisaną między innymi w pracach Findeisena i in. (1980), Gassa (1980), czy Nykowskiego (1984).

Zadanie optymalizacji (1÷2) nie zawiera dodatkowych założeń technologicznych, natomiast stwarza pewne problemy numeryczne. W układzie warunków (2) nie występują dolne ograniczenia udziału każdego z uwzględnianych materiałów wsadowych, które często są przyjmowane przez technologów opracowujących proces topienia metalu. Przyjęcie ściśle określonego składu chemicznego wsadu, w postaci wartości  $b_i$  dla  $i=1,2,\dots,M$  powoduje, że błędy zaokrągleń, wynikających z dokładności obliczeń realizowanych przez komputery, bardzo często uniemożliwiają wyznaczenie wartości wektora  $\mathbf{x}$ , co jest sygnalizowane przez program jako brak rozwiązania zadania optymalizacji. W celu wyeliminowania wyżej wymienionych niedogodności, Ziółkowski (2004) uważa, że korzystniej jest przyjąć układ warunków ograniczających w postaci

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{b}_i m_w \leq \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j \leq \bar{b}_i m_w \quad i = 1, 2, \dots, M \\ 0 \leq \underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j \leq m_w, \quad j = 1, 2, \dots, N \\ \sum_{j=1}^N x_j = m_w \end{array} \right. \quad (3)$$

gdzie:

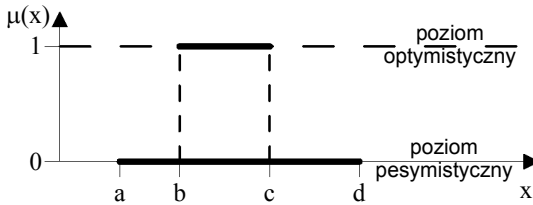
- $\underline{b}_i, \bar{b}_i$  - odpowiednio dolna i górna granica przedziału zawartości  $i$ -tego pierwiastka chemicznego we wsadzie, %,
- $\underline{x}_j, \bar{x}_j$  - odpowiednio dolne i górne ograniczenia udziału  $j$ -tego materiału wsadowego, wyrażone w tych samych jednostkach co  $x_j$ .

Zadanie obliczania namiaru wsadu polega wówczas na poszukiwaniu takiego zbioru wartości wektora  $\mathbf{x}$ , aby zminimalizować wartość funkcji (1) przy ograniczeniach (3). To zadanie jest nadal zadaniem optymalizacji liniowej.

W praktyce odlewniczej skład chemiczny materiałów wsadowych określany jako precyzyjna zawartość każdego pierwiastka chemicznego jest dużym uproszczeniem. Szczególnie wszelkiego rodzaju złom stalowy lub żeliwny, kupowany przez odlewnię od różnych dostawców, charakteryzuje się dość dużym rozrzutem zawartości poszczególnych pierwiastków chemicznych. Dlatego zamiast klasycznego, deterministycznego zadania wyznaczania optymalnego namiaru wsadu, korzystniej jest przeprowadzić optymalizację namiaru wsadu z uwzględnieniem rozmytego składu chemicznego materiałów wsadowych.

Na podstawie analizy teorii zbiorów rozmytych, zawartej na przykład w pracy Piegata (1999). W monografii Ziółkowski (2007b) przedstawiono dyskusję opisu niepewnego składu chemicznego materiałów wsadowych w zadaniach optymalizacji namiarowania. Z punktu widzenia technologii przygotowania procesu topienia w piecach odlewniczych, Ziółkowski zaproponował opis rozmytego składu chemicz-

nego poprzez funkcję przynależności w postaci trapezu nierównoramiennego. Na rysunku 1 przedstawiono graficzną interpretację parametrów tej funkcji. Przyjęto, że na poziomie „pesymistycznym”, czyli dla  $\mu(x)=0$ , zawartość danego pierwiastka mieści się w przedziale  $[a; d]$ , natomiast na poziomie optymistycznym, czyli dla  $\mu(x)=1$ , zawartość tego pierwiastka określona jest w przedziale  $[b; c]$ . Nazwy poziomów zaczerpnięto z pracy Banaś (2002). Tak zdefiniowana postać funkcji przynależności jest łatwa do zrozumienia i zastosowania przez technologów przygotowujących wsad do pieca odlewniczego. Postać trapezu asymetrycznego zawiera niejako w sobie pozostałe kształty funkcji przynależności, utworzone z odcinków liniowych, a mianowicie funkcje: prostokątną ( $a=b$  i  $c=d$ ) i trójkątną ( $b=c$ ). W dalszych rozważaniach każda liczba rozmyta zostanie przedstawiona w postaci  $(a;b;c;d)$ . Dla przykładu, jeżeli zawartość pierwiastka C (węglą) zostanie zapisana w formie  $C=(3.4;3.7;3.9;4.2)$  to oznacza to, że zawartość węgla na poziomie pesymistycznym mieści się w przedziale  $3.4\div 4.2\%$ , natomiast na poziomie „optymistycznym” zawartość tego pierwiastka znajduje się w przedziale  $3.7\div 3.9\%$



Rys. 1. Graficzna interpretacja przedziałów zawartości pierwiastka chemicznego na poziomach:  $\mu(x)=0$  („pesymistycznym”) i  $\mu(x)=1$  („optymistycznym”) dla funkcji przynależności w postaci trapezu asymetrycznego

Zadanie wyznaczania optymalnego namiaru wsadu, z uwzględnieniem rozmytego składu chemicznego materiałów wsadowych, posiada funkcję celu (1), natomiast układ warunków ograniczających, dla trapezowej postaci funkcji przynależności, przyjmuje postać:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N a_{ij0} x_j \geq \underline{b}_{i0} \cdot m_w, & \sum_{j=1}^N a_{ij1} x_j \geq \underline{b}_{i1} \cdot m_w, \\ \sum_{j=1}^N \bar{a}_{ij0} x_j \leq \bar{b}_{i0} \cdot m_w, & \sum_{j=1}^N \bar{a}_{ij1} x_j \leq \bar{b}_{i1} \cdot m_w, \\ 0 \leq \underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j \leq m_w, & \sum_{j=1}^N x_j = m_w \end{cases} \quad (4)$$

gdzie:

$\underline{a}_{ij0}, \bar{a}_{ij0}$  - określona na poziomie „pesymistycznym” odpowiednio dolna i górna zawartość  $i$ -tego pierwiastka chemicznego w  $j$ -tym składniku wsadu, %,

$a_{ij1}, \bar{a}_{ij1}$  - określona na poziomie „optymistycznym” odpowiednio dolna i górna zawartość  $i$ -tego pierwiastka chemicznego w  $j$ -tym składniku wsadu, %,

$b_{i0}, \bar{b}_{i0}$  - zakładana przez technologa na poziomie „pesymistycznym” odpowiednio dolna i górna zawartość  $i$ -tego pierwiastka chemicznego we wsadzie, %,

$b_{i1}, \bar{b}_{i1}$  - zakładana przez technologa na poziomie „optymistycznym” odpowiednio dolna i górna zawartość  $i$ -tego pierwiastka chemicznego we wsadzie, %.

Zadanie minimalizacji funkcji celu (1) z układem warunków ograniczających (4) jest zadaniem programowania matematycznego liniowego i może być rozwiązane na przykład za pomocą sympleksów.

W dalszej części artykułu zostanie omówione zagadnienie braku rozwiązania powyższego zadania optymalizacji.

## 2. Przyczyny braku rozwiązania zadania optymalizacji

Analizując układ warunków ograniczających (4) można zauważyć, że pierwsze cztery wiersze tego układu określają założenia związane z bilansem pierwiastków chemicznych w wyznaczanym wsadzie, wiersz piąty określa ograniczenia ilościowe poszczególnych składników wsadu, natomiast wiersz ostatni wyraża bilans masowy materiałów wsadowych.

Brak rozwiązania zadania optymalizacji, jeśli wystąpi, to wynika z wewnętrznej sprzeczności układu warunków ograniczających (4). Sprzeczność ta może być spowodowana:

- brakiem możliwości spełnienia niektórych nierówności bilansu pierwiastków chemicznych. Skład chemiczny materiałów wsadowych nie pozwala na uzyskanie wymaganego składu chemicznego wsadu,
- niewłaściwym założeniem przedziału dopuszczalnego udziału każdego składnika we wsadzie.

Wielość uwzględnianych w obliczeniach pierwiastków chemicznych i materiałów wsadowych, zwłaszcza o rozmytym składzie chemicznym, powoduje, że tworząc lub analizując układ ograniczeń, technolog często nie jest w stanie wskazać, które założenia powodują sprzeczność tego układu. Istnieje jednak podejście matematyczne, które umożliwia otrzymanie jednoznacznie sprecyzowanej odpowiedzi, dlaczego zamiaru wsadu nie można wyznaczyć. Układ warunków ograniczających jest sprzeczny, gdy dopuszczalne wartości poszukiwanych zmiennych decyzyjnych, występujących po jednej stronie każdego równania lub nierówności, uniemożliwiają spełnienie zależności po drugiej stronie. Wystarczy zatem zbudować model matematyczny zadania optymalizacji, pozwalający znaleźć rozwiązanie najbliższe zakładanemu w układzie warunków ograniczających. Analiza tego rozwiązania pozwala na dość ścisłą odpowiedź, dlaczego zamiaru wsadu nie można było wyznaczyć.

Budowa odpowiedniego modelu matematycznego analizy braku rozwiązania zadania wyznaczania zamiaru wsadu jest uzależniona przede wszystkim od tego, jakim algorytmem programowania matematycznego dysponujemy. W przypadku stosowania wyłącznie procedury programowania liniowego, na przykład metody sympleksów, można zdefiniować dwa modele matematyczne, które wyznaczają rozwiązanie najbliższe zakładanemu:

- w sensie minimum największego absolutnego odchylenia od wartości założonej,
- w sensie minimum sumy odchyłeń absolutnych od wartości założonych.

Dysponując algorytmem programowania kwadratowego można zbudować model matematyczny zadania minimalizującego sumę kwadratów odchyłeń absolutnych. Rozwiązanie tego zadania wymaga użycia algorytmu optymalizacji kwadratowej, na przykład opisanego w pracach Findeisena i in. (1980)

Jeżeli algorytm programowania kwadratowego dopuszcza istnienie zerowej macierzy, definiującej współczynniki występujące przy iloczynach zmiennych decyzyjnych, to można nim dokonać analizy braku rozwiązań według wszystkich (trzech) wyżej wymienionych kryteriów minimalizacji. W dalszej części zostanie szczegółowo przedstawiony model matematyczny zadania minimalizacji sumy kwadratów odchyłeń absolutnych.

### 3. Wyznaczanie rozwiązania najbliższego zakładanemu dla kryterium minimum sumy kwadratów odchyłeń

Suma kwadratów odchyłeń wartości osiągniętych od zakładanych jest miarą ich odległości w hiperprzestrzeni wyznaczonej przez układ warunków ograniczających. Minimalizacja tej odległości jest jednym z najlepszych, jeśli nie najlepszym, kryteriów analizy braku możliwości wyznaczenia zamiaru wsadu. W tym modelu zadanie polega na znalezieniu takich wartości wektora  $\mathbf{x}$ , aby uzyskać

$$\min_{\mathbf{x}} \left[ \sum_{i=1}^{k \cdot M} (z_{ik}^* + z_{ik}^{**})^2 \right] \quad (5)$$

przy ograniczeniach

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N \frac{a_{ijk} + \bar{a}_{ijk}}{2} x_j + z_{ik}^* - z_{ik}^{**} = b_i^* \cdot m_w, & \sum_{j=1}^N x_j = m_w, \\ 0 \leq \underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j \leq m_w, & z_{ik}^* \geq 0, \quad z_{ik}^{**} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2 \cdot M, \quad k = 0, 1 \end{cases} \quad (6)$$

gdzie:  $k$  - numer poziomu przynależności; dla poziomu „pesymistycznego”  $k=0$ , natomiast dla poziomu „optymistycznego”  $k=1$ ,

$z_{ik}^*, z_{ik}^{**}$  - dodatkowe nieujemne zmienne sztuczne, z których dla tego samego  $i$  oraz  $k$  jedna z tych zmiennych jest równa zero, natomiast druga informuje ile wynosi odchyłka od wartości zakładanej.

Wartość  $b_i^*$  można wyznaczyć dla dowolnych kształtów funkcji przynależności, opisującej rozmytość wybranego parametru, jako współrzędną odciętą (na osi poziomej) funkcji  $\mu(b)$  z zależności

$$b_i^* = \frac{\int_{\underline{b}_{i0}}^{\bar{b}_{i0}} b_i \mu(b_i) db_i}{\int_{\underline{b}_{i0}}^{\bar{b}_{i0}} \mu(b_i) db_i} \quad (7)$$

Dla trapezowej funkcji przynależności zależność (7) można zastąpić wzorem

$$b_i^* = \frac{\bar{b}_{i0}^2 + \bar{b}_{i1}^2 - \underline{b}_{i0}^2 - \underline{b}_{i1}^2 + \bar{b}_{i0}\bar{b}_{i1} - \underline{b}_{i0}\underline{b}_{i1}}{3(\bar{b}_{i0} + \bar{b}_{i1} - \underline{b}_{i0} - \underline{b}_{i1})} \quad (8)$$

Zadanie minimalizacji kwadratowej funkcji celu (5) przy liniowych ograniczeniach (6) jest zadaniem programowania kwadratowego. Szczegółowy opis algorytmu optymalizacji kwadratowej podano na przykład u Kręglewskiego i in. (1984).

Jak wspomniano wyżej, technolog definiując założenia dla zadania optymalizacji zamiaru wsadu, nie wie, w której części układu ograniczeń występuje jego sprzeczność. Dlatego można zaproponować rozszerzoną analizę braku rozwiązań, polegającą na dwuetapowym postępowaniu. W etapie pierwszym wykonywana jest analiza dla pełnego układu warunków ograniczających. W etapie drugim przeprowadzana jest analiza dla układu ograniczeń, z którego usunięto ograniczenia udziału wszystkich składników wsadowych. Niejawnie nadal pozostają warunki nieujemnego udziału każdego składnika wsadu. Takie postępowanie można zinterpretować następująco. W etapie pierwszym technolog uzyskuje informacje „jak odległy” jest skład chemiczny najbliższego (w sensie kryterium minimum sumy kwadratów odchyleń) zamiaru wsadu od zakładanego. W etapie drugim można uzyskać informację, czy z posiadanych materiałów wsadowych w ogóle można uzyskać wsad o zakładanym składzie chemicznym.

W następnym punkcie zostanie przedstawiony przykład obliczeniowy, wyjaśniający omawiane powyżej modele matematyczne analizy braku rozwiązania zadania wyznaczania najtańszego zamiaru wsadu dla pieca odlewniczego.

#### 4. Przykład obliczeniowy i interpretacja uzyskanych wyników

Do sformułowania zadania obliczania zamiaru wsadu przyjęto skład chemiczny i ceny jednostkowe materiałów wsadowych zgodnie z Tabelą 1, w której podano także zakładany skład chemiczny wsadu.

Tabela 1. Skład chemiczny i ceny jednostkowe materiałów wsadowych oraz zakładany skład chemiczny wsadu

Składnik wsadowy	Skład chemiczny, %			Cena zł/t
	C	Si	Mn	
$x_1$	(0.12;0.14;0.16;0.19)	0.16;0.19;0.21;0.25	0.08;0.1;0.12;0.15	3.00
$x_2$	(0.5;0.6;0.9;1.0)	1.0;1.4;1.6;1.8	0.6;0.7;0.8;0.9	2.40
$x_3$	(3.4;3.7;3.9;4.2)	0.6;0.8;0.9;1.1	0.4;0.5;0.6;0.8	3.40
$x_4$	(2.8;3.0;3.2;3.3)	1.3;1.4;1.7;1.9	0.25;0.3;0.45;0.55	2.50
<b>WSAD</b>	<b>2.5;2.6;2.9;3.1</b>	<b>0.7;0.8;1.0;1.2</b>	<b>0.25;0.35;0.5;0.7</b>	

Dodatkowo założono następujące ograniczenia udziału każdego składnika we wsadzie, wyrażone w % (przyjęto  $m_w=100\%$ )

$$\{10 \leq x_1 \leq 20, 15 \leq x_2 \leq 35, 25 \leq x_3 \leq 45, 10 \leq x_4 \leq 35. \quad (9)$$

Zadanie wyznaczania namiaru wsadu polega na znalezieniu takich wartości udziałów składników wsadu, aby uzyskać minimalny koszt wsadu określony funkcją

$$f = 3.00x_1 + 2.40x_2 + 3.40x_3 + 2.50x_4 \quad (10)$$

przy ograniczeniach

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.12x_1 + 0.5x_2 + 3.4x_3 + 2.8x_4 \geq 3.0 \cdot 100 \\ 0.14x_1 + 0.6x_2 + 3.7x_3 + 3x_4 \geq 3.1 \cdot 100 \\ 0.16x_1 + 0.8x_2 + 3.9x_3 + 3.2x_4 \leq 3.2 \cdot 100 \\ 0.19x_1 + 1.0x_2 + 4.2x_3 + 3.3x_4 \leq 3.4 \cdot 100 \\ 0.16x_1 + 1.0x_2 + 0.6x_3 + 1.3x_4 \geq 0.7 \cdot 100 \\ 0.19x_1 + 1.4x_2 + 0.8x_3 + 1.4x_4 \geq 0.8 \cdot 100 \\ 0.21x_1 + 1.6x_2 + 0.9x_3 + 1.7x_4 \leq 1.0 \cdot 100 \\ 0.25x_1 + 1.8x_2 + 1.1x_3 + 1.9x_4 \leq 1.1 \cdot 100 \\ 0.08x_1 + 0.6x_2 + 0.4x_3 + 0.25x_4 \geq 0.4 \cdot 100 \\ 0.1x_1 + 0.7x_2 + 0.5x_3 + 0.3x_4 \geq 0.54 \cdot 100 \\ 0.12x_1 + 0.8x_2 + 0.6x_3 + 0.45x_4 \leq 0.6 \cdot 100 \\ 0.15x_1 + 0.9x_2 + 0.8x_3 + 0.55x_4 \leq 0.7 \cdot 100 \\ 10 \leq x_1 \leq 20, 15 \leq x_2 \leq 35, 25 \leq x_3 \leq 45, 10 \leq x_4 \leq 35, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \end{array} \right. \quad (11)$$

Po wprowadzeniu wszystkich danych wejściowych do programu komputerowego i uruchomieniu procedury optymalizacyjnej uzyskano informację, że namiar wsadu nie jest możliwy do wyznaczenia. Oznacza to, że układ warunków ograniczających (11) jest sprzeczny, przez co nie ma możliwości określenia zbioru rozwiązań dopuszczalnych, a zatem także optymalnych z punktu widzenia funkcji celu (10).



Przystępując do etapu I analizy braku rozwiązań zadania wyznaczania optymalnego namiaru wsadu należy najpierw obliczyć zgodnie z zależnością (8) wartości współczynników  $b_1^*$ ,  $b_2^*$  i  $b_3^*$  (tutaj z dokładnością do dwóch miejsc dziesiętnych):

$$\begin{cases} b_1^* = \frac{3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 9^2 - 2 \cdot 5^2 - 2 \cdot 6^2 + 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 9 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 6}{3(3 \cdot 1 + 2 \cdot 9 - 2 \cdot 5 - 2 \cdot 6)} = 2.78 \\ b_2^* = \frac{1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 0^2 - 0 \cdot 7^2 - 0 \cdot 8^2 + 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 7 \cdot 0 \cdot 8}{3(1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 - 0 \cdot 7 - 0 \cdot 8)} = 0.93 \\ b_3^* = \frac{0 \cdot 7^2 + 0 \cdot 5^2 - 0 \cdot 25^2 - 0 \cdot 35^2 + 0 \cdot 7 \cdot 0 \cdot 5 - 0 \cdot 25 \cdot 0 \cdot 35}{3(0 \cdot 7 + 0 \cdot 5 - 0 \cdot 25 - 0 \cdot 35)} = 0.45 \end{cases} \quad (12)$$

Funkcję celu w tym etapie można sformułować następująco

$$f = (x_5 + x_6)^2 + (x_7 + x_8)^2 + (x_9 + x_{10})^2 + (x_{11} + x_{12})^2 + (x_{13} + x_{14})^2 + (x_{15} + x_{16})^2, \quad (13)$$

natomiast układ ograniczeń przyjmie postać

$$\begin{cases} \frac{0.12+0.19}{2} x_1 + \frac{0.5+1.0}{2} x_2 + \frac{3.4+4.2}{2} x_3 + \frac{2.8+3.3}{2} x_4 + x_5 - x_6 = 2.78 \cdot 100 \\ \frac{0.14+0.16}{2} x_1 + \frac{0.6+0.8}{2} x_2 + \frac{3.7+3.9}{2} x_3 + \frac{3.0+3.2}{2} x_4 + x_7 - x_8 = 2.78 \cdot 100 \\ \frac{0.16+0.25}{2} x_1 + \frac{1.0+1.8}{2} x_2 + \frac{0.6+1.1}{2} x_3 + \frac{1.3+1.9}{2} x_4 + x_9 - x_{10} = 0.93 \cdot 100 \\ \frac{0.19+0.21}{2} x_1 + \frac{1.4+1.6}{2} x_2 + \frac{0.8+0.9}{2} x_3 + \frac{1.4+1.7}{2} x_4 + x_{11} - x_{12} = 0.93 \cdot 100 \\ \frac{0.08+0.15}{2} x_1 + \frac{0.6+0.9}{2} x_2 + \frac{0.4+0.8}{2} x_3 + \frac{0.25+0.55}{2} x_4 + x_{13} - x_{14} = 0.45 \cdot 100 \\ \frac{0.1+0.12}{2} x_1 + \frac{0.7+0.8}{2} x_2 + \frac{0.5+0.6}{2} x_3 + \frac{0.3+0.45}{2} x_4 + x_{15} - x_{16} = 0.45 \cdot 100 \\ 10 \leq x_1 \leq 20, \quad 15 \leq x_2 \leq 35, \quad 25 \leq x_3 \leq 45, \quad 10 \leq x_4 \leq 35 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100, \quad x_5, \dots, x_{16} \geq 0 \end{cases} \quad (14)$$

W powyższym zadaniu optymalizacji występuje 16 zmiennych decyzyjnych, z czego 12 zmiennych sztucznych.

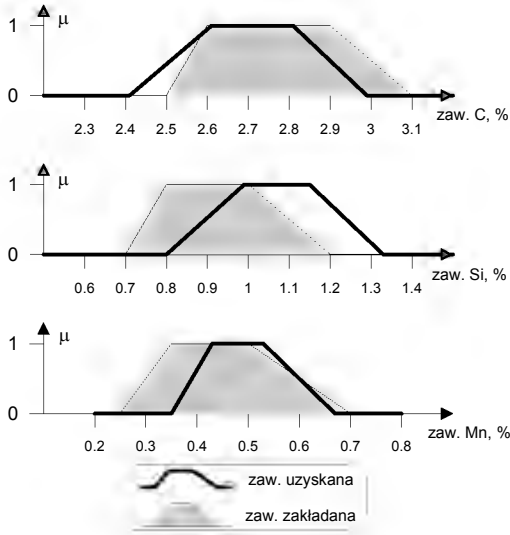
Po wprowadzeniu wszystkich danych wejściowych do programu komputerowego i uruchomieniu obliczeń uzyskano następujące wartości wektora  $\mathbf{x}$ :

$$\begin{cases} x_1 = 11.91, \quad x_2 = 15.0, \quad x_3 = 45.0, \quad x_4 = 28.09 \\ x_5 = 3.89, \quad x_6 = 0, \quad x_7 = 10.23, \quad x_8 = 0, \quad x_9 = 0, \quad x_{10} = 16.67, \\ x_{11} = 0, \quad x_{12} = 11.63, \quad x_{13} = 0, \quad x_{14} = 5.34, \quad x_{15} = 0, \quad x_{16} = 3.36 \end{cases} \quad (15)$$

Skład chemiczny wsadu dla namiaru z (15) jest następujący: C=(2.41; 2.61; 2.81; 2.99), Si=(0.80; 0.99; 1.15; 1.33), Mn=(0.35; 0.43; 0.53; 0.67). Graficzne porównanie otrzymanego składu chemicznego przedstawiono na Rys. 2.

Jak wynika z Rys. 2, najbliższy zakładanemu wsad charakteryzowałby się mniejszą od wymaganej zawartością węgla na poziomie „pesymistycznym” oraz zawyżoną zawartością krzemu zarówno na poziomie „pesymistycznym”, jak i „optymistycznym”. Zawartość manganu na poziomie „optymistycznym” jest minimalnie zawyżona w porównaniu do zakładanej.

W etapie II analizy zostanie dokonane sprawdzenie, czy ograniczenia udziału ilościowego poszczególnych składników wsadu nie powodują sprzeczności układu warunków ograniczających (11). W tym celu zmianie ulega układ ograniczeń i przyjmuje postać



Rys. 2. Graficzne porównanie zawartości C, Si i Mn dla zamiaru wsadu będącego rozwiązaniem zadania optymalizacji funkcji celu (13) przy ograniczeniach (14)

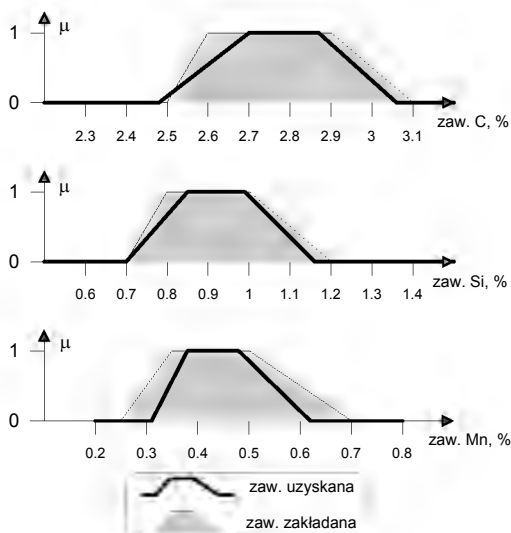
$$\begin{cases}
 \frac{0.12+0.19}{2} x_1 + \frac{0.5+1.0}{2} x_2 + \frac{3.4+4.2}{2} x_3 + \frac{2.8+3.3}{2} x_4 + x_5 - x_6 = 2.78 \cdot 100 \\
 \frac{0.14+0.16}{2} x_1 + \frac{0.6+0.8}{2} x_2 + \frac{3.7+3.9}{2} x_3 + \frac{3.0+3.2}{2} x_4 + x_7 - x_8 = 2.78 \cdot 100 \\
 \frac{0.16+0.25}{2} x_1 + \frac{1.0+1.8}{2} x_2 + \frac{0.6+1.1}{2} x_3 + \frac{1.3+1.9}{2} x_4 + x_9 - x_{10} = 0.93 \cdot 100 \\
 \frac{0.19+0.21}{2} x_1 + \frac{1.4+1.6}{2} x_2 + \frac{0.8+0.9}{2} x_3 + \frac{1.4+1.7}{2} x_4 + x_{11} - x_{12} = 0.93 \cdot 100 \\
 \frac{0.08+0.15}{2} x_1 + \frac{0.6+0.9}{2} x_2 + \frac{0.4+0.8}{2} x_3 + \frac{0.25+0.55}{2} x_4 + x_{13} - x_{14} = 0.45 \cdot 100 \\
 \frac{0.14+0.12}{2} x_1 + \frac{0.7+0.8}{2} x_2 + \frac{0.5+0.6}{2} x_3 + \frac{0.3+0.45}{2} x_4 + x_{15} - x_{16} = 0.45 \cdot 100 \\
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100, \quad x_5, \dots, x_{16} \geq 0
 \end{cases} \quad (16)$$

Funkcja celu w tym etapie pozostaje bez zmian i jest określona zależnością (13). Efektem obliczeń przeprowadzonych w tym etapie jest zbiór wartości wektora  $x$  w postaci

$$\begin{cases}
 x_1 = 19.43, \quad x_2 = 4.72, \quad x_3 = 52.12, \quad x_4 = 23.73 \\
 x_5 = 0, \quad x_6 = 3.07, \quad x_7 = 3.02, \quad x_8 = 0, \quad x_9 = 0, \quad x_{10} = 2.04, \\
 x_{11} = 2.15, \quad x_{12} = 0, \quad x_{13} = 0, \quad x_{14} = 0.74, \quad x_{15} = 0.96, \quad x_{16} = 0
 \end{cases} \quad (17)$$

Skład chemiczny wsadu dla zamiaru z (17) jest następujący: C=(2.48; 2.70; 2.87; 3.06), Si=(0.70; 0.85; 0.99; 1.16), Mn=(0.31; 0.38; 0.48; 0.62). Na rysunku 3

pokazano rozmieszczenie obszarów zakładanych i uzyskanych zawartości poszczególnych pierwiastków chemicznych we wsadzie.



Rys. 3. Graficzne porównanie zawartości C, Si i Mn dla zamiaru wsadu będącego rozwiązaniem zadania optymalizacji funkcji celu (13) przy ograniczeniach (16)

Jak wynika z Rys. 3 obszar uzyskanej zawartości każdego pierwiastka chemicznego mieści się w obszarze zakładanym, co oznacza, że zamiar wsadu jest możliwy do wyznaczenia. Można zatem wnioskować, że zamiar wsadu dlatego nie mógł być wyznaczony, gdyż nieprawidłowo przyjęto ograniczenia udziału poszczególnych materiałów wsadowych, opisane zależnością (9).

#### 4. Podsumowanie

Wyznaczanie zamiaru wsadu dla pieców odlewniczych może być realizowane zarówno dla ściśle określonego jak i niepewnego (rozmytego) składu chemicznego materiałów wsadowych, uwzględnianych w obliczeniach. W przypadku braku możliwości uzyskania rozwiązania optymalnego, istnieje możliwość przeprowadzenia numerycznej analizy przyczyn sprzeczności układu warunków ograniczających. Analizę tą najlepiej podzielić na dwa etapy, w których wyznacza się zamiar wsadu możliwie najbliższy zakładanemu. Analiza odstępstwa składu chemicznego dla zamiaru wyznaczonego od zakładanego składu chemicznego wsadu pozwala ocenić, czy prawidłowo dobrano materiały wsadowe, albo czy poprawnie określono ograniczenia udziału ilościowego każdego składnika wsadu.

Ponieważ oba etapy analizy nie istnienia optymalnego zamiaru wsadu polegają na zdefiniowaniu kwadratowej funkcji celu oraz układu liniowych ograniczeń, stąd do przeprowadzenia obliczeń numerycznych w tych etapach, należy zastosować metodę programowania kwadratowego.

Przedstawione modele matematyczne analizy braku rozwiązania zadania wyznaczania optymalnego zamiaru wsadu można zastosować w złożonych systemach sterowania procesami wytwarzania ciekłego metalu w odlewniach. Istotnie rozszerzają one funkcjonalność programów wspomagających dobór wsadu dla pieców odlewniczych.

### Podziękowanie

*Praca wykonana w ramach umowy AGH nr 10.10.170.314.*

### Literatura

- Banaś J. (2002) Nowe podejście do rozmytego wielokryterialnego programowania liniowego. *Badania operacyjne i systemowe wobec wyzwań XXI wieku. Metody i techniki analizy informacji i wspomaganie decyzji*. EXIT, Warszawa, II, 9-20.
- Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A. (1980) *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*. Wyd. 2, PWN, Warszawa.
- Gass S.I. (1980) *Programowanie liniowe. Metody i zastosowania*. Wyd. 4, PWN, Warszawa.
- Kręglewski T., Rogowski T., Rusczyński A., Szymanowski J. (1984) *Metody optymalizacji w języku FORTRAN*. PWN, Warszawa.
- Nykowski I. (1984) *Programowanie liniowe*. Wyd. 2, PWE, Warszawa.
- Piegat A. (1999) *Modelowanie i sterowanie rozmyte*. EXIT, Warszawa.
- Podrzucki C., Kalata C. (1976) *Metalurgia i odlewnictwo żeliwa*. Wyd. 2, Śląsk, Katowice.
- Ziółkowski E. (2004) *Zastosowanie algorytmów optymalizacji rozmytej do określania zamiaru wsadu dla pieców odlewniczych*. BOS 2004, EXIT, Warszawa, 291-301.
- Ziółkowski E. (2007a) Algorithms of Furnace Charge Burden Optimisation in Foundries. *Archives of Metallurgy and Materials*, **52**, 3. Polish Academy of Sciences, Committee of Metallurgy, Institute of Metallurgy and Materials Science. Warszawa-Kraków, 487-495.
- Ziółkowski E. (2007b) *Modelowanie namiarowania wsadu do pieców odlewniczych z uwzględnieniem materiałów wsadowych o rozmytych parametrach*. Rozprawy-Monografie, **169**, AGH, Kraków.

IBS PAN *Konf.*

46003

Bibl. podręczna

**Olgierd Hryniewicz, Andrzej Straszak, Jan Studziński  
red.**

**BADANIA OPERACYJNE I SYSTEMOWE:  
ŚRODOWISKO NATURALNE, PRZESTRZEŃ,  
OPTYMALIZACJA**

Książka składa się z artykułów przedstawiających wyniki prac z dziedziny badań operacyjnych i systemowych, poświęconych środowisku naturalnemu i zarządzaniu nim, zwłaszcza w zakresie ochrony atmosfery, globalnego ocieplenia i walki z nim, jakości i zaopatrzenia w wodę. Tematyka ta jest rozszerzona o aspekty przestrzenne, regionalne i samorządowe, a także planowanie i funkcjonowanie infrastruktury. Tom zamykają prace metodyczne, dostarczające technik, będących podstawą prezentowanych zastosowań.

**ISBN 83-894-7519-7  
EAN 9788389475190**

---

---

**Instytut Badań Systemowych PAN**  
tel. (4822) 3810241 / 3810273 e-mail: [biblioteka@ibspan.waw.pl](mailto:biblioteka@ibspan.waw.pl)