



**POLSKA AKADEMIA NAUK**  
**Instytut Badań Systemowych**

**BADANIA OPERACYJNE I SYSTEMOWE:  
ŚRODOWISKO NATURALNE,  
PRZESTRZEŃ, OPTYMALIZACJA**

**Olgierd Hryniewicz,**  
**Andrzej Straszak,**  
**Jan Studziński**  
**red.**



**BADANIA OPERACYJNE  
I SYSTEMOWE:  
ŚRODOWISKO NATURALNE, PRZE-  
STRZEŃ, OPTYMALIZACJA**

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH • POLSKA AKADEMIA NAUK

**Seria: BADANIA SYSTEMOWE**  
**tom 63**

---

**Redaktor naukowy:**

**Prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum**

**Warszawa 2008**

**Olgierd Hryniewicz, Andrzej Straszak, Jan Studziński**

**BADANIA OPERACYJNE I SYSTEMOWE:  
ŚRODOWISKO NATURALNE, PRZESTRZEŃ,  
OPTIMALIZACJA**

Publikacja była opiniowana do druku przez zespół recenzentów, którego skład podano w treści tomu

Opinie, wyrażone przez autorów w pracach, zawartych w niniejszym tomie, nie są oficjalnymi opiniami Instytutu Badań Systemowych PAN, ani Polskiego Towarzystwa Badań Operacyjnych i Systemowych.

Copyright © by Instytut Badań Systemowych PAN & Polskie Towarzystwo Badań Operacyjnych i Systemowych  
Warszawa 2008

**ISBN 83-894-7519-7**  
**EAN 9788389475190**

Redakcja i opracowanie techniczne: Jan W. Owskiński, Aneta M. Pielak, Anna Gostyńska

**Lista recenzentów  
artykułów, wchodzących w skład tomów serii „Badania Systemowe”  
związanych z konferencją BOS 2008**

Dr Paweł Bartoszczuk  
Dr inż. Lucyna Bogdan  
Dr hab. inż. Zbigniew Buchalski  
Mgr inż. Hanna Bury  
Prof. dr hab. Marian Chudy  
Dr Jan Gadomski  
Mgr Grażyna Grabowska  
Mgr inż. Andrzej Jakubowski  
Dr hab. inż. Ignacy Kaliszewski  
Dr Andrzej Kałużko  
Dr hab. Leszek Klukowski  
Dr hab. inż. Wiesław Krajewski  
Dr inż. Lech Kruś  
Dr hab. inż. Marek Libura  
Dr Barbara Mażbic-Kulma  
Dr inż. Edward Michalewski  
Dr inż. Jan W. Owiński  
Dr inż. Grażyna Petriczek  
Dr inż. Henryk Potrzebowski  
Dr Maciej Romaniuk  
Prof. dr hab. Piotr Sienkiewicz  
Dr hab. Henryk Spustek  
Prof. dr hab. Andrzej Straszak  
Dr hab. inż. Jan Studziński  
Prof. dr hab. Tomasz Szapiro  
Mgr Anna Szediw  
Dr inż. Grażyna Szkatuła  
Dr hab. inż. Tadeusz Witkowski  
Dr Irena Woroniecka-Leciejewicz  
Dr hab. Sławomir Zadrożny  
Dr inż. Andrzej Ziółkowski

**Komitet Konferencji  
Badania Operacyjne i Systemowe 2008  
Rembertów, Akademia Obrony Narodowej**

Patronat honorowy

Bogdan Klich, Minister Obrony Narodowej  
Maciej Nowicki, Minister Środowiska i Zasobów Naturalnych

Komitet Sterujący

Janusz Kacprzyk, Prezes Polskiego Towarzystwa Badań Operacyjnych i Systemowych  
Olgierd Hryniewicz, Dyrektor Instytutu Badań Systemowych  
Janusz Kręcikij, Komendant Akademii Obrony Narodowej

Komitet Programowy

Piotr Sienkiewicz, *Przewodniczący*  
Jacek Mercik, *Wiceprzewodniczący*

<i>Tomasz Ambroziak</i>	<i>Ryszard Budziński</i>	<i>Wojciech Cellary</i>
<i>Marian Chudy</i>	<i>Ludostaw Drelichowski</i>	<i>Jerzy Hołubiec</i>
<i>Olgierd Hryniewicz</i>	<i>Adam A. Janiak</i>	<i>Jerzy Józefczyk</i>
<i>Ignacy Kaliszewski</i>	<i>Józef Korbicz</i>	<i>Maciej Krawczak</i>
<i>Piotr Kulczycki</i>	<i>Małgorzata Łatuszyńska</i>	<i>Marek J. Malarski</i>
<i>Barbara Mażbic-Kulma</i>	<i>Zbigniew Nahorski</i>	<i>Andrzej Najgebauer</i>
<i>Włodzimierz Ogryczak</i>	<i>Wojciech Olejniczak</i>	<i>Jan W. Owsiański</i>
<i>Andrzej Piegat</i>	<i>Krzysztof Santarek</i>	<i>Roman Słowiński</i>
<i>Honorata Sosnowska</i>	<i>Henryk Spustek</i>	<i>Jan Stachowicz</i>
<i>Andrzej Straszak</i>	<i>Tomasz Szapiro</i>	<i>Andrzej Szymonik</i>
<i>Ryszard Tadeusiewicz</i>	<i>Eugeniusz Toczyłowski</i>	<i>Tadeusz Trzaskalik</i>
<i>Jan Węglarz</i>	<i>Tadeusz Witkowski</i>	<i>Stanisław Zajas</i>
	<i>Bogdan Zdrodowski</i>	

Komitet Organizacyjny

Jan W. Owsiański, Andrzej Kałużko, Mieczysław Pelc, Zbigniew Piątek

Sekretariat

Krystyna Warzywoda, Monika Majkut, Aneta M. Pielak, Krzysztof Sep,  
Anna Stachowiak, Halina Świeboda, Tadeusz Winiarski

Redakcja wydawnictw

Janusz Kacprzyk, Piotr Sienkiewicz, Andrzej Najgebauer,  
Olgierd Hryniewicz, Andrzej Straszak, Jan Studziński,  
Jan W. Owsiański, Zbigniew Nahorski, Tomasz Szapiro

# **Przestrzeń i transport**



## **OCENA ROZWOJU JEDNOSTEK SAMORZĄDU TERYTORIALNEGO. UWAGI METODOLOGICZNE**

**Jan Gadomski**

Instytut Badań Systemowych PAN  
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa  
jan.gadomski@ibspan.waw.pl

Celem pracy jest analiza podstawowych metod budowy funkcji oceny jednostek samorządu terytorialnego (JST). To, jakie są własności ocen jest istotne zwłaszcza wtedy, gdy na ich podstawie podejmowane są decyzje finansowe. Podstawowym sposobem konstruowania takich funkcji jest założenie ich liniowości oraz dobór współczynników na podstawie oceny ekspertów. Wykazano, że gdy występują szczególne związki między zmiennymi funkcji oceny, funkcja oceny staje się nieadekwatna. W pracy przedstawione są alternatywne, obliczeniowo proste metody tworzenia funkcji ocen, które uwzględniają określony typ zależności między zmiennymi.

### 1. Wstęp

Rozwój, a w szczególności rozwój jednostek samorządu terytorialnego (JST) jest pojęciem złożonym, na który składają się rozwój społeczny, ekonomiczny, cywilizacyjny, ekologiczny, etc.; wielowymiarowość stanowi istotną okoliczność w przeprowadzeniu oceny rozwoju tych jednostek, Fajerek (1969), Jajuga (1982).

Funkcje oceny są wykorzystywane przy sporządzaniu różnego rodzaju rankingów. Przykładowymi zastosowaniami ocen są rankingi publikowane przez różne instytucje, takie jak np.: The Competitiveness Indexes, World Economic Forum (2007), Business Environment Rankings Methodology, Economist Intelligence Unit (2006) czy Ease of Doing Business, World Bank (2007). Do innych celów, lecz oparte na podobnej metodologii konstruowane są oceny przedsiębiorstw, Dębski (2005), Sierpińska (2004).

Trudności w tworzeniu funkcji oceny zaczynają się już na etapie kwantyfikacji poszczególnych cech rozwoju gospodarczego. Tradycja ekonomiczna każe przeprowadzać ocenę zarówno za pomocą zmiennych reprezentujących stany mierzone w punktach na skali czasu (takich, jak na przykład: długość dróg, długość linii kolejowych, środki trwałe / majątek, należności, rezerwy), strumienie reprezentujące przepływy w przedziałach czasu (w roku - urodzenia, zgony, migracje, przychody, dochody, wydatki konsumpcyjne) oraz zmiennych pochodnych, takich jak przeciętne wydajność pracy i produktywność kapitału, przeciętne wynagrodzenia i transfery per capita itp. Mamy tu problem porównań zmiennych będących strumieniami i zmiennych będących zasobami.

Nie mniej ważnym problemem jest wybór zmiennych, które najlepiej opisują JST. Dla zapewnienia porównywalności stosowane zmienne mają charakter względ-

ny, przeliczony na jednostkę odniesienia (zazwyczaj na osobę). Przy doborze zmiennych najczęściej zakłada się, że ocena wzrasta wraz z wartościami tych zmiennych według zasady: im więcej, tym lepiej.

Opracowanie oceny syntetycznej, w której poszczególne zmienne, wyrażone w różnych jednostkach, wywierają wpływ na łączną ocenę, jest zagadnieniem obliczeniowo prostym, lecz merytorycznie złożonym, wymagającym opracowania zestawu współczynników wagowych przypisanych odpowiednim zmiennym. Współczynniki te są uzyskiwane na podstawie ocen ekspertów. Jest to drugi aspekt tworzenia funkcji oceny, w którym elementem nieuniknionym jest arbitralna opinia eksperta, oparta na nie zawsze obiektywnie uzasadnionym poglądzie.

Ocena obiektów wieloatrybutowych, a takimi są JST, jest konieczna zwłaszcza wtedy, gdy badania są motywowane, obok celów poznawczych, również potrzebami polityki regionalnej, której decydenci zadają pytania dotyczące tego, które JST powinny, a które nie powinny i dlaczego, otrzymywać finansowe wsparcie. Ocena stanowi narzędzie umożliwiające analizę, porównanie oraz ustalenie rankingu obiektów. Ponieważ wyniki badania mogą stanowić podstawę decyzji o transferach środków finansowych, opracowane mierniki powinny cechować poprawność metodologiczną, przejrzystość zasad konstrukcyjnych i obiektywizm, który wymaga ograniczenia arbitralności do koniecznego minimum.

W wielu badaniach przewija się trudna do operacjonalizacji definicja rozwoju zrównoważonego (np. raport komisji Brundtlandt, UN Division for Sustainable Development, 2005, lub Preliminary List, 2004); zachodzi wtedy konieczność uwzględnienia tej kategorii w funkcji oceny. Inną istotną trudnością w budowie mierników rozwoju zrównoważonego jest często brak wzorca, który mógłby służyć jako punkt odniesienia (przykładem takich trudności jest porównywanie poziomu życia w krajach o różnych strukturach konsumpcji indywidualnej i zbiorowej). Problemem w ocenie rozwoju jest wielokryterialność; obok aspektu ekonomicznego ocena syntetyczna powinna uwzględniać również różne kryteria cząstkowe, takie jak: socjalne, zdrowotne, ekologiczne, cywilizacyjne. Z kolei każde kryterium cząstkowe jest określone przez różne, niekoniecznie rozłączne, zbiory czynników.

Procedura konstruowania ocen odpowiadających tym kryteriom jest zazwyczaj następująca. Wpierw następuje dobór zmiennych najlepiej charakteryzujących badany aspekt rozwoju. Dla zapewnienia porównywalności obiektów o różnych wielkościach uwzględniane zmienne mają najczęściej charakter względny, odniesiony do liczby osób/mieszkańców lub powierzchni, etc. Doborem tym zajmują się eksperci, mający wiedzę o badanej dziedzinie. Następnie eksperci wyznaczają wartości współczynników wagowych. Zmienne i współczynniki wagowe są elementami konstrukcyjnymi liniowych ocen odpowiednich kategorii rozwoju:

$$S^{(l)}(l) = S^{(l)}(x_{1l}, \dots, x_{nl}) = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_{jl}; \quad i = 1, \dots, m; \quad l = 1, \dots, k; \quad (1)$$

gdzie:

$x_{jl}$  – wartość  $j$ -tej cechy  $l$  – tego obiektu,  $l = 1, \dots, k$ ;

$n$  – liczba rozważanych zmiennych,

$m$  – liczba rozważanych kryteriów,

$k$  – liczba porównywanych obiektów,

$w_{ij}$  – współczynniki wagowe,  $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ .

Gdy wartość współczynnika wagowego  $w_{ij} = 0$ , wtedy  $j$ -ta zmienna nie ma wpływu na wartość oceny według  $i$  – tego kryterium.

Liniowość ocen cząstkowych pozwala na sformułowanie oceny syntetycznej jako sumy ocen cząstkowych:

$$S(x_{1l}, \dots, x_{nl}) = \sum_{i=1}^m S^{(i)}(x_{1l}, \dots, x_{nl}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} x_{jl}, \quad (2)$$

kötora jest równieź liniową funkcją zmiennych  $x_{jl}$ ,  $j = 1, \dots, n$ :

$$S(x_{1l}, \dots, x_{nl}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m w_{ij} x_{jl} = \sum_{j=1}^n v_j x_{jl}, \quad (3)$$

gdzie: 
$$v_j = \sum_{i=1}^m w_{ij}.$$

Konstrukcja ocen (1) i (2) jest najczęściej oparta na konwencji (nie ograniczającej w żaden sposób ogólności postępowania), według której współczynniki wagowe mają wartości nieujemne, zmienne przyjmują wartości dodatnie, a ich wzrost jest oceniany według zasady: „im więcej, tym lepiej”. Przykładami liniowych ocen są: The Competitiveness Indexes, opracowane przez World Economic Forum (2006), Business Environment Ranking, opracowany przez Economist Intelligence Unit (2006), czy Ease of Doing Business, World Bank (2007).

Do zalet liniowej oceny (1) i (2) przede wszystkim zaliczyć należy prostotę budowy i klarowność interpretacji. Z zależności:

$$\frac{\partial S^{(i)}}{\partial x_{jl}} = w_{ij}, \quad i=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, n; \quad (4)$$

wynika, że współczynniki  $w_{ij}$  można interpretować jako wzrost wartości  $i$ -tego wskaźnika wynikający ze wzrostu wartości zmiennej  $x_j$  o jednostkę.

Jeżeli dla każdego  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , spełniony jest warunek:

$$\frac{\partial S^{(i)}}{\partial x_{jl}} = v_j = w_{ij}, \quad j=1, \dots, n; \quad (5)$$

to zbiory zmiennych odpowiadających różnym kryteriom (miernikom) są rozłączne. Wynika to z faktu, że dla rozłącznych zbiorów zmiennych współczynniki wagowe przy zmiennej  $j$  mają wartość różną od zera tylko w jednej ocenie cząstkowej.

Przekształcenie zależności (4):

$$\frac{\partial S^{(i)}}{\partial x_{jl}} = w_{ij} \frac{S^{(i)}}{x_{jl}} \frac{x_{jl}}{S^{(i)}}, \quad i=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, n;$$

doprowadza do postaci:

$$\frac{\frac{\partial S^{(i)}}{\partial x_{jl}}}{\frac{S^{(i)}}{x_{jl}}} = \frac{w_{ij} x_{jl}}{S^{(i)}}, \quad i=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, n; \quad (6)$$

tj. współczynnik elastyczności krańcowej  $i$ -tego wskaźnika względem  $j$ -tej zmiennej (lewa strona) jest równy ważonemu udziałowi tej zmiennej w wartości wskaźnika.

Z przedstawionych wyżej zależności wynika, że ocena rozwoju oparta na funkcji liniowej ma prostą konstrukcję, bezpośrednią interpretację i analizę wrażliwości, co jest szczególnie istotne przy doborze współczynników wagowych. Jednakże oceny liniowe charakteryzują również własności, które w określonych przypadkach ograniczają ich stosowalność. Ponadto, w pewnych przypadkach własności oceny liniowej dyskwalifikują ją jako poprawną funkcję oceny rozwoju.

W następnym punkcie zbadamy związki pomiędzy zmiennymi rozwoju i ich wpływ na ograniczenia stosowalności ocen liniowych. Wprowadzimy pojęcia sybstitucyjności i komplementarności czynników/zmiennych, a następnie sformułowane zostaną warunki definiujące neoklasyczną funkcję oceny. Następnie przedstawimy przypadki, nazywane dalej nienieoklasycznymi, w których związki pomiędzy czynnikami/ zmiennymi charakteryzują ograniczone sybstitucyjność i komplementarność. Rozważymy przypadki, w których ocena zależy nie tylko od wartości poszczególnych zmiennych, ale również od kształtowania się proporcji pomiędzy tymi zmiennymi. Następstwem ich naruszenia, tzn. powstanie i pogłębienie się dysproporcji pomiędzy czynnikami, jest pogorszenie oceny badanych obiektów. Przedstawimy także rankingi rozwoju gmin w Polsce, w których podjęto próbę uwzględnienia kategorii wzrostu zrównoważonego. We wszystkich rozważaniach przyjmujemy założenie, że wszystkie zmienne i współczynniki wagowe są dodatnie.

## 2. Liniowa funkcja oceny i jej ograniczenia

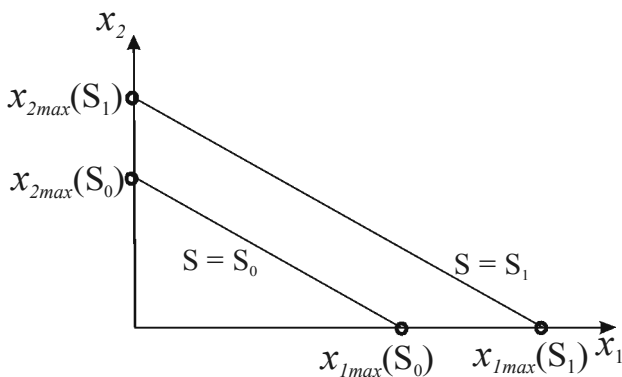
Niech do oceny zastosowana będzie funkcja liniowa<sup>15</sup>:

$$S = w_1 x_1 + w_2 x_2, \quad (7)$$

gdzie ocenę  $S$  można traktować jak ocenę cząstkową przy zmiennych  $x_1$  i  $x_2$  albo jak ocenę syntetyczną na podstawie dwóch ocen cząstkowych  $x_1$  i  $x_2$ . Zależność (7) przedstawiono na Rys.1.

<sup>15</sup> Dla uproszczenia zapisu indeks oznaczający numer obiektu został pominięty.

Zasadniczą własnością funkcji oceny (7) jest to, że ustaloną wartość  $S_0$  można uzyskać dzięki działaniu tylko jednego czynnika; ma to miejsce, gdy  $x_1 = x_{1max}(S_0)$  oraz  $x_2 = 0$  lub, gdy  $x_2 = x_{2max}(S_0)$  oraz  $x_1 = 0$ . Oznacza to, że zmienne te są doskonale zamienne / substytucyjne; poziom oceny  $S_0$  może zostać osiągnięty, gdy pierwsza zmienna przyjmuje wartość  $x_{1max}(S_0)$  przy zerowej wartości drugiej zmiennej, gdy druga zmienna przyjmuje wartość  $x_{2max}(S_0)$ , a zmienna pierwsza wartość zero, lub, gdy zmienne te przyjmują wartości będące współrzędnymi punktów leżących na przedstawionej na rys. 1 prostej łączącej punkty  $x_{1max}(S_0)$  i  $x_{2max}(S_0)$ .



Rys. 1. Liniowa funkcja oceny. Poziomice funkcji dla poziomu  $S_0$  i  $S_1$ ,  $S_0 < S_1$ .

Jeśli by, na przykład, poziom rozwoju mierzyć za pomocą kaloryczności diety składającej się tylko z kartofli i zbóż, to ustalony poziom może zostać osiągnięty przy różnych kombinacjach ilości kartofli i zboża, Rys.1.

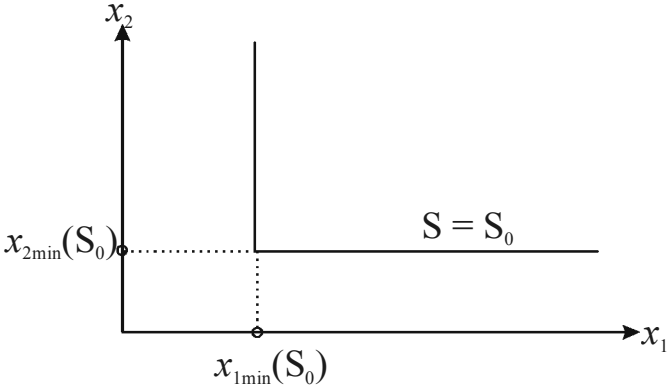
Oceniając wiele zjawisk mamy często świadomość, że pomiędzy atrybutami tych zjawisk mogą zachodzić zależności bardziej złożone od tych, które daje się przedstawić za pomocą zależności liniowej. Przykładem zależności diametralnie różnej od liniowej jest doskonała komplementarność zmiennych, gdy dla osiągnięcia ustalonego poziomu oceny jest konieczne, aby obie zmienne przyjęły wartości większe od pewnych minimów. Przykładem może tu być próba mierzenia rozwoju za pomocą liczby butów prawych i lewych, Rys. 2.

Osiągnięcie poziomu oceny  $S_0$  wymaga uzyskania wartości przynajmniej  $x_{1min}(S_0)$  pierwszej zmiennej i przynajmniej  $x_{2min}(S_0)$  wartości drugiej zmiennej (można ponadto założyć, że liczba butów prawych i butów lewych koniecznych dla osiągnięcia  $S_0$  powinna być sobie równa:  $x_{1min}(S_0) = x_{2min}(S_0)$ ). Rozważany przypadek charakteryzuje jeszcze jedna szczególna własność: względny nadmiar lub względny deficyt jednej zmiennej.

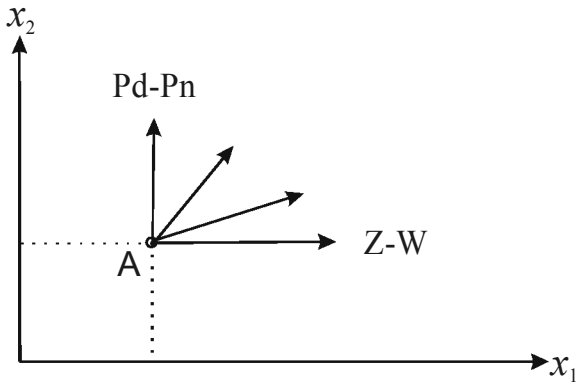
Względny nadmiar lub względny deficyt wartości jednej zmiennej nie występują w punkcie  $(x_{1min}(S_0), x_{2min}(S_0))$ . Jeśli by, startując z tego punktu, zwiększać wyłącznie zmienną  $x_1$ , to jednostronny („jednoznaczny”) wzrost liczby butów nie spowoduje wzrostu oceny, lecz pogłębi względny nadmiar wartości pierwszej zmiennej równy  $x_1 - x_{1min}(S_0)$ ; wzrost oceny następuje wyłącznie wtedy, gdy wzrasta wartość

obu zmiennych (tzn., gdy liczby butów prawych i lewych równocześnie rosną), lub, gdy wzrasta liczba butów będących we względnym deficycie.

Osobom zaznajomionym z funkcjami produkcji powyższy przykład doskonałej komplementarności zmiennych funkcji oceny powinien skojarzyć się z dwuczynnikową funkcją produkcji Leontiewa o postaci:  $S = \min [ c_1 x_1 , c_2 x_2 ]$ , gdzie  $c_1$  i  $c_2$  oznaczają wydajności odpowiednio pierwszego i drugiego czynnika produkcji.



Rys. 2. Poziomice funkcji oceny w przypadku zmiennych doskonale komplementarnych.



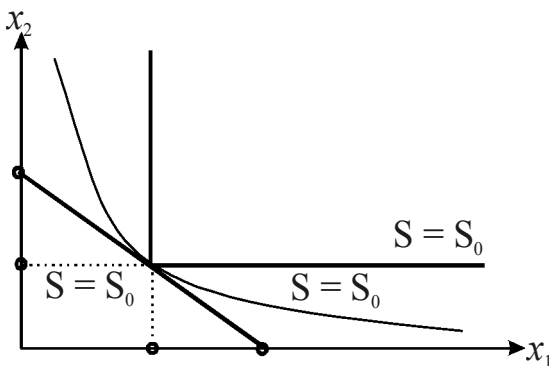
Rys. 3. Kierunki wzrostu oceny, neoklasyczna funkcja oceny.

Ponieważ przypadki doskonałej sybystytucyjności i komplementarności zmiennych są przeciwnymi skrajnościami, można przyjąć, że dominują przypadki, w których między zmiennymi zachodzą związki, w których współwystępują zarówno sybystytucyjność jak i komplementarność, mieszczące się pomiędzy skrajnościami: doskonałymi sybystytucyjnością i komplementarnością zmiennych. Funkcje oceny, które są adekwatne dla tej klasy przypadków, można nazwać neoklasycznymi, ze

względem na daleko idące podobieństwo własności do funkcji użyteczności i neoklasycznych funkcji produkcji. Własności te są opisywane przez następujące warunki:

$$\frac{\partial S^{(i)}}{\partial x_{jl}} \geq 0, \frac{\partial^2 S^{(i)}}{\partial x_{jl}^2} \leq 0, i=1, \dots, m; j=1, \dots, n; . \quad (8)$$

Graficzną interpretację zależności (8) przedstawiono na Rys. 3. Przedstawione na tym rysunku strzałki wychodzące z punktu A reprezentują kierunki wzrostu zmiennych, dla których funkcja oceny jest niemalejąca. Kierunki te zawierają się w przedziale określonym przez kierunki graniczne: zachód-wschód Z-W (poziomy zwrócony w prawo) oraz południe-północ Pd-Pn (pionowy zwrócony w górę). Ruch wzdłuż pozostałych kierunków powoduje zmniejszenie wartości funkcji oceny.



Rys.4. Poziomice neoklasycznych funkcji oceny.

Reasumując, neoklasyczne funkcje oceny charakteryzuje to, że ich poziomicie zawierają się pomiędzy poziomiami skrajnych funkcji oceny: doskonałej sybystytucyjności i doskonałej komplementarności zmiennych, Rys. 4.

### 3. Nieneoklasyczne funkcje oceny i pojęcie zrównowazenia

Neoklasyczna funkcja oceny, której poziomicie przedstawiono na rys.4, dobrze spełnia zadanie, gdy wpływ zmiennych na ocenę zawiera się pomiędzy doskonałą sybystytucyjnością a doskonałą komplementarnością zmiennych. Jednakże można wskazać przypadki, dla których założenia neoklasyczne są nieadekwatne.

Istnieją przypadki, gdy na ocenę wpływ mają nie tylko wartości bezwzględne zmiennych, ale również proporcje między tymi czynnikami. Pod tym względem zachodzi tu daleko idąca analogia do teorii produkcji<sup>16</sup>. Oceny niespełniające założeń neoklasycznych funkcji oceny nazywane będą dalej nieneoklasycznymi funkcjami oceny.

<sup>16</sup> Jest to element dorobku szkoły marginalnej. Na gruncie ekonomii głównym reprezentantem tego podejścia jest Ragnar Frisch (Frisch, 1965); w literaturze polskiej podejście to można znaleźć m. in. w Nasiłowski (1996).

Oceny, co do których założenia neoklasyczne nie są adekwatne można hasłowo opisać w następujący sposób: „więcej nie musi znaczyć lepiej”. O ile w odniesieniu do pojedynczego czynnika lub oceny cząstkowej zachowana zostaje zasada „im więcej tym lepiej”, to na ocenę wpływ wywierają nie tylko wartości bezwzględne czynników/ kryteriów cząstkowych, lecz również ich proporcje.

Niech wyrażenie  $x_2/x_1$  określa proporcje między dwoma czynnikami/ocenami cząstkowymi. Przy konstruowaniu funkcji oceny elementem niezbędnym staje się ustalenie, które wartości wyrażenia  $x_2/x_1$  są uznawane za właściwe (poprawne, preferowane, etc.), a które za niewłaściwe. Wydaje się, że celowe jest rozważanie dwóch podstawowych (ze względu na ewentualne zastosowania) rodzin funkcji ocen: dwu- i trójprzedziałowych.

Podstawowym wyróżnikiem grupy proporcji rozwoju jest zależność funkcji oceny od proporcji/relacji między zmiennymi; przy wyróżnieniu przedziału wartości relacji tych zmiennych uznanego za zachowujących proporcje. Oznacza to, że zasada „im więcej, tym lepiej” obowiązuje, jeśli wzrost wartości zmiennych nie pogarsza właściwych proporcji między zmiennymi. Wzrost wartości zmiennych pogarszających proporcje może nie tylko nie zwiększyć oceny, ale wręcz doprowadzić do jej zmniejszenia.

Wśród różnych możliwych odmian funkcji oceny należących do grupy proporcji rozwoju celowe wydaje się wyróżnienie dwóch rodzajów: dwuprzędziałowych i trójprzedziałowych funkcji oceny. W celu uproszczenia prezentacji tych funkcji oceny w dalszym ciągu przyjęte zostanie założenie o stałości granic przedziału relacji zmiennych definiujących rozwój proporcjonalny.

Dwuprzędziałowe funkcje oceny znajdują zastosowanie, gdy istnieją przesłanki dla określenia wartości granicznej relacji zmiennych  $u^*$ ,  $u^* = x_2/x_1$ . Wartość graniczna  $u^*$  określa dwa przedziały relacji zmiennych: właściwych oraz niewłaściwych proporcji. Poziomicę dwuprzędziałowej funkcji oceny pokazuje Rys. 5.

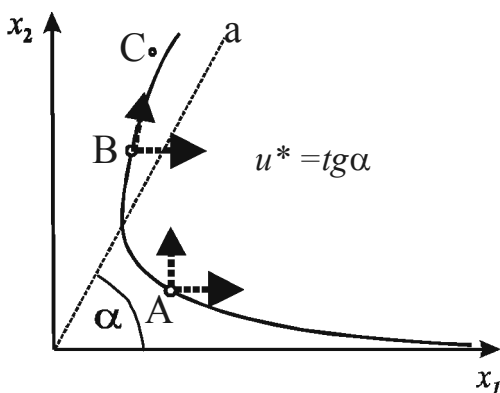
Zgodnie z Rys. 6, tj. wykresem poziomicę dwuprzędziałowej funkcji oceny<sup>17</sup>, prosta  $a$ , wychodząca z początku układu współrzędnych pod kątem  $\alpha = \arctg(u^*)$ , dzieli obszar na dwa podobszary: właściwych proporcji leżących poniżej linii  $a$  oraz niewłaściwych proporcji znajdujących się nad linią  $a$ . W obszarze właściwych proporcji wszystkie kierunki wzrostu obu zmiennych zapewniają wzrost oceny, co ilustruje przykład punktu A na Rys. 6. W obszarze niewłaściwych proporcji poprawę zapewniają tylko kierunki zawierające się pomiędzy kierunkiem wzrostu wyłącznie zmiennej  $x_1$  (kierunek poziomy) a kierunkiem wyznaczonym przez styczną do poziomicę funkcji oceny, jak w punkcie B.

---

<sup>17</sup> Analizując Rys. 6 pamiętajmy, że kolejność obszarów jest następstwem konwencji ich numerowania.

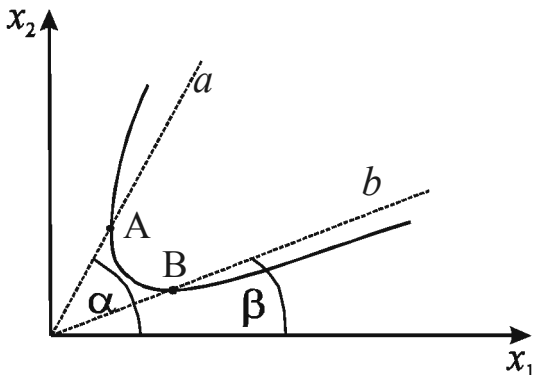


Dwuprzędziałowa funkcja oceny ma tę własność, że poniżej linii  $a$  (tzn. dla wartości relacji  $x_2/x_1$  należących do przedziału  $[0, u^*]$ ) zachowuje się jak funkcja neoklasyczna (zgodnie z zasadą „im więcej, tym lepiej”), natomiast powyżej tej linii (tzn. dla wartości relacji  $x_2/x_1$  należących do przedziału  $[u^*, \infty]$ ) dla niektórych kierunków zachodzi zależność: „im więcej, tym gorzej”. Przykładem niekorzystnego kierunku jest na Rys. 6 pionowy ruch w górę od punktu B, powodujący obniżenie oceny mimo wzrostu współrzędnych. Ulokowanie punktów B i C względem poziomici funkcji oceny wskazuje na to, że ocena dla punktu C jest niższa od oceny dla punktu B.



Rys. 5. Poziomica dwuprzędziałowej nieneoklasycznej funkcji oceny.

Reasumując można stwierdzić, że w dwuprzędziałowej funkcji oceny niekorzystny jest względny nadmiar wartości jednej lub niedobór wartości drugiej zmiennej; w przypadku ilustrowanym na Rys. 6 zmienną tą jest  $x_2$ , natomiast nie występuje zjawisko nadmiaru zmiennej  $x_1$ . W przypadku niewłaściwych proporcji dla dwuprzędziałowej funkcji oceny, jak to ma miejsce w punkcie C, przywrócenie właściwych proporcji może nastąpić przez zmniejszenie wartości zmiennej  $x_2$ , lub wzrost wartości zmiennej  $x_1$ .



Rys. 7. Poziomica trójprzędziałowej funkcji oceny.

Przedstawione własności dwuprzędziałowej funkcji oceny czynią ją odpowiednim narzędziem oceny, od którego oczekuje się, że uwzględni wielkość poszczególnych zmiennych oraz odpowiedni opis proporcji badanych obiektów.

Trójprzedziałowe funkcje oceny mają zastosowanie wtedy, gdy istnieją przesłanki dla określenia granic przedziału  $[u^{**}, u^*]$  zmienności relacji zmiennych  $x_2/x_1$ , wewnątrz którego relacje te uznane są za właściwe, a zarazem przedziałów  $[0, u^{**})$  oraz  $(u^*, \infty)$ , w których relacje te uznawane są za niewłaściwe. Poziomicę trójprzedziałowej funkcji oceny przedstawiono na Rys. 7.

Trójprzedziałowa funkcja oceny ma tę własność, że w obszarze poniżej linii  $a$  oraz powyżej linii  $b$  (tzn. dla wartości relacji  $x_1/x_2$  należących do przedziału  $[u^{**}, u^*]$ ) zachowuje się jak funkcja neoklasyczna (zgodnie z zasadą „im więcej, tym lepiej”), natomiast poza tym przedziałem (tzn. dla wartości relacji  $x_2/x_1$  należących do przedziałów  $(u^*, \infty)$  i  $[0, u^{**})$ ) dla niektórych kierunków zachodzi zależność: „im więcej, tym gorzej”. Przykładem niekorzystnego kierunku jest na rys. 7 ruch z punktu B pionowo w górę lub ruch z punktu A poziomo w prawo, powodujący obniżenie ocen mimo wzrostu współrzędnych.

Reasumując można stwierdzić, że w trójprzedziałowej funkcji oceny względny nadmiar obu zmiennych może być niekorzystny. Własności trójprzedziałowej funkcji oceny czynią ją przydatnym narzędziem oceny, od którego oczekuje się, że uwzględnia się nie tylko wielkość poszczególnych zmiennych, ale też specyficzny sposób określenia ich proporcji.

#### 4. Zastosowanie nieneoklasycznych funkcji oceny do rankingu gmin

W przeprowadzonym badaniu celem było ustalenie rankingu rozwoju gmin opisywanych za pomocą dwóch zmiennych: stopnia rozwoju cywilizacyjnego  $x_c$  i stopnia rozwoju ekonomicznego  $x_e$ , z uwzględnieniem stopnia zrównoważenia rozwoju rozumianego jako rozwój, w którym nie dochodzi do pojawienia się dysproporcji rozwojowych.

Do konstrukcji funkcji oceny wykorzystana została funkcja produkcji opracowana do analizy gospodarki nieefektywnie wykorzystującej zasoby, Gadomski (2000). Funkcja ta ma następującą postać:

$$S = x_c \frac{x_e}{u^*} \exp \left( \left( 1 - \frac{x_e}{u^*} \right)^\gamma \right), \quad (9)$$

gdzie współczynnik  $\gamma$  określa skalę substytucji między zmiennymi, przy czym dla  $0 < \gamma < 1$ , funkcja oceny jest dwuprzędziałowa, a dla  $\gamma \geq 1$  funkcja staje się trójprzedziałowa, a ponadto zachodzi zależność:  $u^{**} = u^*(\gamma - 1)/\gamma$ .

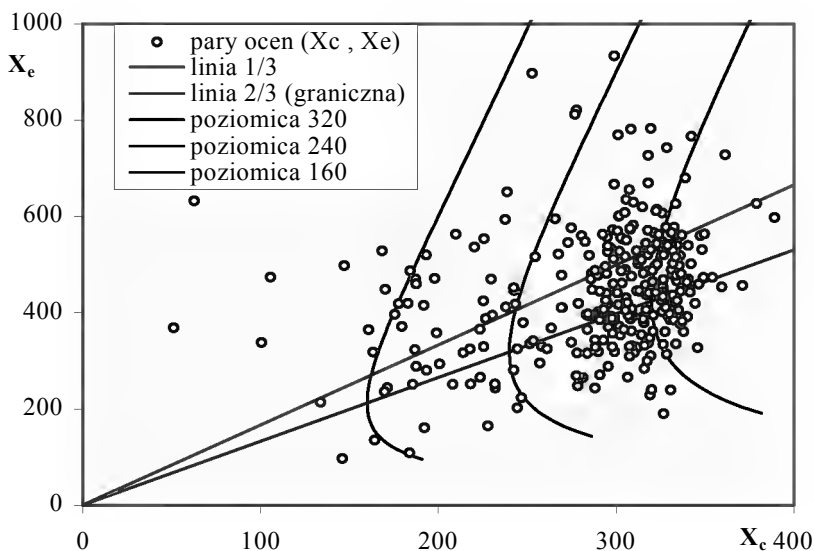
Dane do badania zostały zaczerpnięte z prac: Sobczak (2007) oraz Sobczak, Bielak (2006), w których zastosowano liniową funkcję oceny zbudowaną na dwóch podzbiórach zmiennych:

1. wydatki inwestycyjne per capita, % wydatków inwestycyjnych w budżecie, liczba pracujących na 1000, liczba bezrobotnych na 1000, liczba podmiotów gosp. na 1000, saldo ruchu ludności, liczba absolwentów ;
2. wydatki na transport i łączność, % wydatków na transport i łączność w budżecie, odsetek objętych siecią wodociągową, odsetek objętych siecią kanalizacji, odsetek obsługiwanych przez oczyszczalnie ścieków.

Funkcję oceny wykorzystaną w cytowanych pracach podzielono na oceny zgodnie z przedstawionym wyżej podziałem. Wartość oceny związana z pierwszym podzbiorem zmiennych nazwana została zmienną ekonomiczną  $x_e$  określającą poziom rozwoju ekonomicznego, zaś związana z drugim podzbiorem zmiennych nazwana została zmienną cywilizacyjną  $x_c$  określającą poziom rozwoju infrastruktury.

Opracowano dwa rankingi gmin miejskich oparte na ocenie dwuprzędziałowej i ocenie trójprzędziałowej.

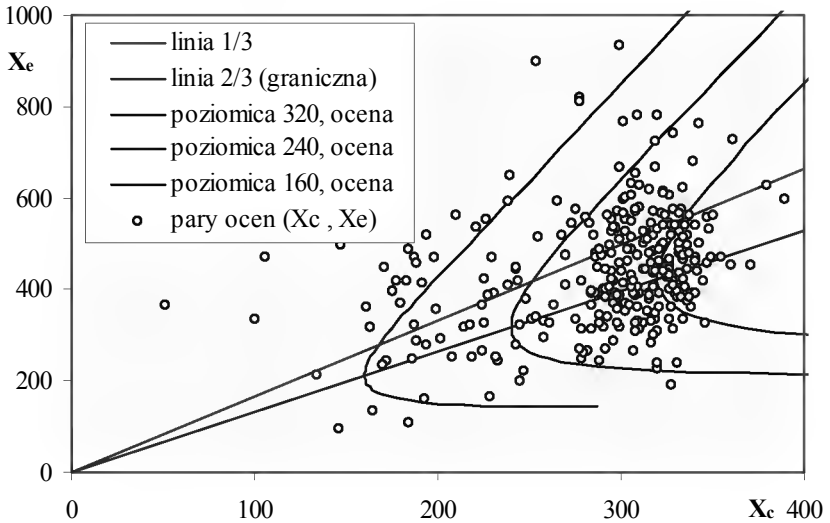
W ocenie dwuprzędziałowej założono (na podstawie ocen ekspertów), że w obszarze właściwych proporcji znajduje się 1/3 gmin. Uszeregowanie gmin według wartości relacji  $x_e/x_c$  (1/3 obiektów poniżej linii  $a$ ) pozwoliło na oszacowanie wartości parametru  $u^* = 1,33$ . Wartość parametru  $\gamma$  przyjęto na poziomie  $\gamma = 1/2$ . Wykres trzech poziomic dwuprzędziałowej funkcji oceny oraz linii dzielących populację gmin na tercyle (ze względu na wartość relacji  $x_e/x_c$ ) przedstawiono na Rys. 8.



Rys. 8. Gminy miejskie, dwuprzędziałowa funkcja oceny i jej trzy poziomicie: 160, 240 i 360; oraz linie podziału co 1/3 populacji.

Źródło: obliczenia własne na podstawie Sobczak (2007)

Przed przystąpieniem do obliczeń związanych z określeniem oceny trójprzedziałowej przyjęto założenie analogiczne do przyjętego w określeniu oceny dwuprzędziałowej, że w obszarze właściwych proporcji znajduje się 1/3 gmin. Uszeregowanie gmin według wartości relacji  $x_e/x_c$  (1/3 obiektów poniżej linii  $b$  i 1/3 obiektów powyżej linii  $a$ ) pozwoliło na oszacowanie wartości parametrów  $u^{**}$  i  $u^*$  odpowiednio na poziomach  $u^{**}= 1,33$  i  $u^*= 1,66$ . (W przypadku oceny trójprzedziałowej wartość parametru  $\gamma$  jest wielkością wynikową). Wykres trzech poziomic trójprzedziałowej funkcji oceny oraz linii dzielących populację gmin na tercyle (ze względu na wartość relacji  $x_e/x_c$ ) przedstawiono na Rys. 9.



Rys. 9. Gminy miejskie, trójprzedziałowa funkcja oceny i jej trzy poziomicę: 160, 240 i 360; oraz linie podziału co 1/3 populacji.

Źródło: obliczenia własne na podstawie Sobczak (2007)

## 5. Wnioski końcowe

Z przedstawionych rozważań wynika, że dobór funkcji oceny ma podstawowe znaczenie przy opracowywaniu porównań grup obiektów. Funkcja ta powinna właściwie odzwierciedlać wiedzę na temat badanej dziedziny i analizowanych obiektów. Przy jej wyborze wpływ powinny mieć następujące elementy: cząstkowe zależności oceny od wartości poszczególnych zmiennych oraz wzajemne związki pomiędzy zmiennymi.

Najpopularniejszą funkcją oceny jest liniowa funkcja oceny, której zalety wynikają z prostej postaci matematycznej. Funkcja ta znajduje zastosowanie wtedy, gdy ocena opiera się na zasadzie „im więcej, tym lepiej”, zmienne są niezależne, tzn. gdy relacje między nimi nie mają wpływu na ocenę. Ten rodzaj funkcji oceny cha-

rakteryzuje doskonała substytucyjność zmiennych o stałym współczynniku krańcowej substytucji.

W przypadku komplementarności zmiennych liniowa funkcja oceny staje się nieadekwatna i staje się konieczne wybranie jednej z dwóch opcji. Pierwsza opcja to próba ograniczenia komplementarności poprzez usunięcie ze zbioru zmiennych najsilniej (skorelowanych) odpowiedzialnych za zjawisko komplementarności.

Opcja druga to poszukiwanie odpowiedniej funkcji wśród tzw. funkcji neoklasycznych, obejmujących kontinuum przypadków zawartych między całkowitym brakiem komplementarności (funkcja liniowa) i doskonałą komplementarnością (funkcja Leontiewa). W ramach tej opcji najprostszym rozwiązaniem jest zastąpienie w liniowej funkcji oceny – gdy to możliwe – stosowanych zmiennych wartościami logarytmów tych zmiennych. W rozwiązaniu tym współczynniki wagowe zyskują przydatną interpretację – krańcowej elastyczności oceny względem odpowiedniej zmiennej.

I wreszcie opcja trzecia. W przypadku funkcji neoklasycznych wpływ proporcji na ocenę wyraża się zmienną wartością krańcowej stopy substytucji oraz, w niektórych przypadkach, tym, że osiągnięcie określonego poziomu oceny wymaga osiągnięcia odpowiedniej minimalnej wielkości przynajmniej jednej ze zmiennych. We wszystkich przypadkach opisywanych przez neoklasyczne funkcje oceny wzrost wartości zmiennej nie obniża wartości oceny.

Funkcje neoklasyczne są nieadekwatne w tych przypadkach, w których zmiana proporcji między zmiennymi może prowadzić do spadku oceny, mimo bezwzględnego wzrostu wartości zmiennych. Oznacza to, że dla takich przypadków celowe jest wyróżnienie właściwych i niewłaściwych proporcji wielkości zmiennych, odejście od bezwzględnej zasady: „im więcej, tym lepiej” na rzecz zasady: „im więcej, tym lepiej, lecz pod warunkiem zachowania właściwych proporcji”. Podejście to wydaje się odpowiednie przy badaniu zarówno zaawansowania jak i stanu zrównoważenia obiektów.

### Literatura

- Dębski W. (2005) *Teoretyczne i praktyczne aspekty zarządzania finansami przedsiębiorstwa*. PWN, Warszawa.
- Fajferek A. (1969) Mierniki i metody badań statystycznych w zakresie stanu i rozwoju regionów. W: *Mierniki rozwoju regionów. Biblioteka Wiadomości Statystycznych*, 9, GUS, Warszawa.
- Frisch R. (1965) *Theory of Production*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- Gadomski J. (1990) Wybrane czynniki kształtujące import rudy żelaza oraz efektywność produkcji i zużycie stali w Polsce. *Ekonomia*, 54, Wydawnictwa UW.
- Jajuga K. (1982) *Metody analizy wielowymiarowej w ilościowych badaniach przestrzennych*. AE Wrocław.
- Nasiłowski M. (1996) *System rynkowy. Podstawy mikro i makroekonomii*. Wydawnictwo Key Text, Warszawa.

- Raport komisji Brundtlandt (2005) UN Division for Sustainable Development, 2005. Preliminary List, 2004.
- Sierpińska M., Jacha T. (2004) *Ocena przedsiębiorstw według standardów światowych*. PWN, Warszawa.
- Sobczak E. (2007) Zróżnicowanie poziomu rozwoju gmin województwa mazowieckiego. Kolegium Nauk Społecznych i Administracji Politechniki Warszawskiej, Zeszyt 25, Warszawa.
- Sobczak, E., J. Bielak (2006) Rozwój społeczno-ekonomiczny regionów w świetle polityki spójności Unii Europejskiej. Kolegium Nauk Społecznych i Administracji Politechniki Warszawskiej, Zeszyt 24, Warszawa.
- Lopez-Claros A., Altinger L., Blanke J., Drzeniek M., Mia I. (2007) *The Competitiveness Indexes*. World Economic Forum.
- Business Environment Rankings Methodology* (2006) The Economist Intelligence Unit.
- Ease of Doing Business* (2007) World Bank.

IBS PAN *Konf.*

46003

Bibl. podręczna

**Olgierd Hryniewicz, Andrzej Straszak, Jan Studziński  
red.**

**BADANIA OPERACYJNE I SYSTEMOWE:  
ŚRODOWISKO NATURALNE, PRZESTRZEŃ,  
OPTYMALIZACJA**

Książka składa się z artykułów przedstawiających wyniki prac z dziedziny badań operacyjnych i systemowych, poświęconych środowisku naturalnemu i zarządzaniu nim, zwłaszcza w zakresie ochrony atmosfery, globalnego ocieplenia i walki z nim, jakości i zaopatrzenia w wodę. Tematyka ta jest rozszerzona o aspekty przestrzenne, regionalne i samorządowe, a także planowanie i funkcjonowanie infrastruktury. Tom zamykają prace metodyczne, dostarczające technik, będących podstawą prezentowanych zastosowań.

**ISBN 83-894-7519-7  
EAN 9788389475190**

---

---

**Instytut Badań Systemowych PAN**  
tel. (4822) 3810241 / 3810273 e-mail: [biblioteka@ibspan.waw.pl](mailto:biblioteka@ibspan.waw.pl)