POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

BADANIA OPERACYJNE I SYSTEMOWE: ŚRODOWISKO NATURALNE, PRZESTRZEŃ, OPTYMALIZACJA

Olgierd Hryniewicz,
Andrzej Straszak,
Jan Studziński
red.

BADANIA OPERACYJNE I SYSTEMOWE: ŚRODOWISKO NATURALNE, PRZESTRZEŃ, OPTYMALIZACJA

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH • POLSKA AKADEMIA NAUK

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 63

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2008

Olgierd Hryniewicz, Andrzej Straszak, Jan Studziński

BADANIA OPERACYJNE I SYSTEMOWE: ŚRODOWISKO NATURALNE, PRZESTRZEŃ, OPTYMALIZACJA

Publikacja była opiniowana do druku przez zespół recenzentów, którego skład podano w treści tomu

Opinie, wyrażone przez autorów w pracach, zawartych w niniejszym tomie, nie są oficjalnymi opiniami Instytutu Badań Systemowych PAN, ani Polskiego Towarzystwa Badań Operacyjnych i Systemowych.

ISBN 83-894-7519-7
EAN 9788389475190

Redakcja i opracowanie techniczne: Jan W. Owsiński, Aneta M. Pielak, Anna Gostyńska

Lista recenzentów
artykułów, wchodzących w skład tomów serii „Badania Systemowe” związanych z konferencją BOS 2008

Dr Paweł Bartoszczuk
Dr inż. Lucyna Bogdan
Dr hab. inż. Zbigniew Buchalski
Mgr inż. Hanna Bury
Prof. dr hab. Marian Chudy
Dr Jan Gadomski
Mgr Grażyna Grabowska
Mgr inż. Andrzej Jakubowski
Dr hab. inż. Ignacy Kaliszewski
Dr Andrzej Kałuszko
Dr hab. Leszek Klukowski
Dr hab. inż. Wiesław Krajewski
Dr inż. Lech Kruś
Dr hab. inż. Marek Libura
Dr Barbara Mażbic-Kulma
Dr inż. Edward Michalewski
Dr inż. Jan W. Owsiński
Dr inż. Grażyna Petriczek
Dr inż. Henryk Potrzebowski
Dr Maciej Romaniuk
Prof. dr hab. Piotr Sienkiewicz
Dr hab. Henryk Spustek
Prof. dr hab. Andrzej Straszak
Dr hab. inż. Jan Studziński
Prof. dr hab. Tomasz Szapiro
Mgr Anna Szediw
Dr inż. Grażyna Szkatuła
Dr hab. inż. Tadeusz Witkowski
Dr Irena Woroniecka-Leciejewicz
Dr hab. Sławomir Zadrożny
Dr inż. Andrzej Ziółkowski

Komitety Konferencji
Badania Operacyjne i Systemowe 2008
Rembertów, Akademia Obrony Narodowej

<u>Patronat honorowy</u>

Bogdan Klich, Minister Obrony Narodowej
Maciej Nowicki, Minister Środowiska i Zasobów Naturalnych

<u>Komitet Sterujący</u>

Janusz Kacprzyk, Prezes Polskiego Towarzystwa Badań Operacyjnych i Systemowych
Olgierd Hryniewicz, Dyrektor Instytutu Badań Systemowych
Janusz Kręcikij, Komendant Akademii Obrony Narodowej

<u>Komitet Programowy</u>

Piotr Sienkiewicz, *Przewodniczący*
Jacek Mercik, *Wiceprzewodniczący*

Tomasz Ambroziak
Marian Chudy
Olgierd Hryniewicz
Ignacy Kaliszewski
Piotr Kulczycki
Barbara Mażbic-Kulma
Włodzimierz Ogryczak
Andrzej Piegat
Honorata Sosnowska
Andrzej Straszak
Ryszard Tadeusiewicz
Jan Węglarz
Ryszard Budziński
Ludosław Drelichowski
Adam A. Janiak
Józef Korbicz
Małgorzata Łatuszyńska
Zbigniew Nahorski
Wojciech Olejniczak
Krzysztof Santarek
Henryk Spustek
Tomasz Szapiro
Eugeniusz Toczyłowski
Tadeusz Witkowski
Bogdan Zdrodowski
Wojciech Cellary
Jerzy Hołubiec
Jerzy Józefczyk
Maciej Krawczak
Marek J. Malarski
Andrzej Najgebauer
Jan W. Owsiński
Roman Słowiński
Jan Stachowicz
Andrzej Szymonik
Tadeusz Trzaskalik
Stanisław Zajas

<u>Komitet Organizacyjny</u>

Jan W. Owsiński, Andrzej Kałuszko, Mieczysław Pelc, Zbigniew Piątek

<u>Sekretariat</u>

Krystyna Warzywoda, Monika Majkut, Aneta M. Pielak, Krzysztof Sęp,
Anna Stachowiak, Halina Świeboda, Tadeusz Winiarski

<u>Redakcja wydawnictw</u>

Janusz Kacprzyk, Piotr Sienkiewicz, Andrzej Najgebauer,
Olgierd Hryniewicz, Andrzej Straszak, Jan Studziński,
Jan W. Owsiński, Zbigniew Nahorski, Tomasz Szapiro

Środowisko
i jego ochrona

ZASTOSOWANIE PARAMETRÓW ROZMYTYCH W WYCENIE INSTRUMENTÓW POCHODNYCH ZWIĄZANYCH Z PROTOKOŁEM Z KIOTO

Piotr Nowak*, Maciej Romaniuk*,**
* Instytut Badań Systemowych PAN, ul. Newelska 6, 01 – 447 Warszawa,
e-mail: pnowak@ibspan.waw.pl
** Katolicki Uniwersytet Lubelski, ul. Konstantynów 1 H, 20 – 708, Lublin,
e-mail: mroman@ibspan.waw.pl

Jednym z zamierzeń protokołu z Kioto jest redukcja ilości emitowanych szkodliwych gazów cieplarnianych. W tym celu protokół przewiduje możliwość handlu specjalnymi pozwoleniami na emisje określonych ilości gazów, wyrażonych w tonach CO_2. Pozwolenia takie możemy traktować jako rynek pewnego pierwotnego instrumentu finansowego. W celu usprawnienia działania rynku pierwotnego rozwinąć się może rynek wtórny, obejmujący handel dedykowanymi instrumentami pochodnymi (opcjami, kontraktami futures, kontraktami forward). Opis takiego rynku, ze względu na specyfikę instrumentu podstawowego, wymaga stworzenia odpowiednich modeli matematycznych. W modelach tych należy wziąć pod uwagę również niepewność i nieprecyzyjność, które charakteryzują rynek handlu pozwoleniami na emisję. W niniejszym artykule prezentujemy model stochastyczny dla opisu trajektorii ceny instrumentu podstawowego, którego parametry są liczbami rozmytymi. Protokół z Kioto jest inspiracją dla omawianego modelu. Skupimy się przede wszystkim na kwestii wyceny instrumentu pochodnego, a nie zagadnieniu modelowania rynku. W związku z tym prezentujemy klasyczny przypadek – wycenę europejskiej opcji call dla rozważanego modelu zachowania się rynku pozwoleń na emisję. Przedstawiamy również podejście symulacyjne, bazujące na metodzie Monte Carlo.

1. Wprowadzenie

Wraz z wprowadzeniem w życie Protokołu z Kioto (por. *Protokół z Kioto*, 1997), handel pozwoleniami na emisję szkodliwych gazów cieplarnianych jest uznawany za jedno z narzędzi mających na celu redukcję ich emisji. Wspomniane pozwolenia na emisję, jako ściśle rynkowe instrumenty, staną się ważnym mechanizmem sprzyjającym ochronie środowiska (por. *A guide to Emissions Trading*, 2002), *International Emission Trading. From Concept to Reality*, 2001). Instrumenty podobnego typu były wykorzystywane już wcześniej (por. *A guide to Emissions Trading*, 2002), ale dopiero teraz są wprowadzane na szerszą skalę.

Wprowadzenie w życie Protokołu z Kioto spowoduje prawdopodobnie handel emisjami na rynkach o dwóch odmiennych skalach. Rynek o skali światowej obejmować będzie handel pomiędzy poszczególnymi krajami, a nawet całymi ich stowarzyszeniami (jak Unia Europejska) traktowanymi jako odrębne byty. Rynek o skali krajowej obejmować będzie raczej przedsiębiorstwa i instytucje na poziomie każdego kraju. Oba te rodzaje rynków potrzebować będą nowych mechanizmów finansowych zmniejszających ryzyko zaangażowanych w handel inwestorów, zwiększających płynność oraz tempo obrotu pozwoleniami na emisję. Takimi instrumentami finansowymi są powszechnie znane na klasycznych rynkach finansowych instrumenty pochodne (derywatywy), czyli np. opcje, kontrakty futures i forward. Niezbędne jest zaproponowanie odpowiedniej metodologii wyceny tego typu instrumentów dostosowanych jednak ściśle do rynku handlu pozwoleniami na emisję.

W niniejszej pracy proponujemy pewien model trajektorii ceny instrumentu podstawowego dla rynku finansowego oraz przedstawimy metodę wyceny instrumentów pochodnych związanych z tym instrumentem podstawowym na przykładzie europejskiej opcji call. Skupimy się przy tym na zagadnieniu wyceny, bez rozpatrywania szczegółów działania rynku pozwoleń. Zaproponowany przez nas model konstruowany jest w oparciu o analogie do innych tego typu rynków oraz ogólną wiedzę ekonomiczną. Podobnego typu modele były konstruowane w celu opisania rynku pozwoleń na emisję SO_2 w USA. Modele te były związane z klasycznym podejściem Blacka-Scholesa. Jednocześnie ze względu na mające następować kontrole limitów, w naszym modelu pojawiają się losowe skoki w regularnych odstępach czasowych. W celu ułatwienia analizy nie bierzemy pod uwagę niektórych innych uwarunkowań związanych z protokołem z Kioto. Ze względu na duży stopień nieprecyzyjności związany z rynkiem pozwoleń na emisję, do opisu parametrów modelu zostały wykorzystane liczby rozmyte. Zastosowanie liczb rozmytych umożliwia opis oparty na wiedzy eksperckiej, do czego w pełni nie wystarczy samo podejście stochastyczne, wymagające danych historycznych lub założeń probabilistycznych. Ponadto podejście rozmyte umożliwia modelowanie niepewności i nieprecyzyjności na innym poziomie niż modelowanie stochastyczne.

W części 2 pracy omawiamy ogólne reguły dotyczące rynku handlu pozwoleniami na emisję. Część 3 zawiera przedstawienie podstawowych oznaczeń, wykorzystywanych faktów i twierdzeń matematycznych, a także prezentację modelu stochastycznego wraz z dyskusją zastosowania metod numerycznych. Wyprowadzono wzór na cenę dla klasycznego przykładu instrumentu pochodnego – europejskiej opcji call i przedyskutowano problematykę wyceny bardziej skomplikowanych instrumentów pochodnych. W części 4 skupiono się na prezentacji wniosków oraz przyszłych możliwych kierunków badawczych.

Zagadnienia związane z tematyką protokołu z Kyoto oraz handlem pozwoleniami na emisję znaleźć można np. w Cason i Gangadharan (1998), Devlin i Grafion (1994), EPPA i in. (2000), Hagem i Westkog (1998), International… (2004), Leming (2003), Montero (1998), Nahorski i in. (2004), Nowak i Romaniuk (2007), Stavins (1995), Westkog (1996).

2. Rynek handlu pozwoleniami na emisję

Zasady handlu pozwoleniami na emisję zostały ustalone w 1997 roku w Protokole z Kioto (por. np. *International…*, 2001). Celem tego traktatu jest redukcja emisji gazów cieplarnianych poniżej pewnego ustalonego poziomu w porównaniu z rokiem 1990. Redukcje mają mieć miejsce w latach 2008 – 2012. Ze względu na kosztowność procesów, takich jak zmiana profilu produkcji wielu gałęzi przemysłu, wprowadzania nowych, bardziej ekologicznych rozwiązań technicznych, czy przeobrażenia gospodarek całych krajów, w protokole zaproponowano odpowiednie „mechanizmy rynkowe", w tym również handel pozwoleniami na emisję.

Handel pozwoleniami na emisję opierać się będzie na tych samych ogólnych zasadach, co inne, bardziej „klasyczne" rynki (por. np. *International Emission Trading. From Concept to Reality*, 2001). Najważniejszą różnicą będzie rodzaj „towaru", którym będą pozwolenia na emisję wyrażone w tonach CO_2. Kupcami takich pozwoleń będą przedsiębiorstwa (lub kraje w skali rynku międzynarodowego), dla których koszt odpowiednich redukcji emisji gazów będzie zbyt wysoki. Z kolei sprzedawcami będą jednostki, dla których koszt ten będzie niższy niż cena pozwolenia lub ogólna liczba przyznanych pozwoleń będzie większa niż niezbędna dla danego przedsiębiorstwa. W ten sposób realnie działający rynek ustali *cenę rynkową* dla pozwoleń na emisję przy pewnych standardowych założeniach, jak np. duża liczba podmiotów zaangażowanych w handel.

Opisane powyżej pozwolenia mogą być traktowane jako podstawowy instrument finansowy. Odpowiednie instrumenty pochodne będą użyteczne dla polepszenia płynności i zwiększenia stopnia zabezpieczenia przeciwko ryzyku, np. złej oceny możliwego stopnia redukcji emisji. Niezbędne jest wykorzystanie odpowiednich narzędzi matematyki finansowej w celu rozwiązania wielu problemów związanych z wyceną lub sprzedażą tego typu instrumentów. Wiele podobnych problemów zostało już rozwiązanych w zakresie bardziej „klasycznych" rynków.

W przypadku handlu pozwoleniami na emisję, musimy jednak wziąć pod uwagę pewne szczególne własności rynku tego typu, jak np. coroczne raporty dotyczące spełnienia wymogów redukcji emisji. W związku z tym, przed wykorzystaniem wspomnianych narzędzi matematyki finansowej, musimy zaproponować odpowiedni model dla trajektorii instrumentu podstawowego, który przedstawimy w rozdziale 3.3. Model ten powinien być dopasowany do właściwości rozpatrywanego rynku i w wystarczającym stopniu pozwalać na przewidywanie finansowych skutków decyzji w przyszłości. Dlatego też proponujemy uogólnienie szeroko znanego klasycznego modelu Blacka – Scholesa z dodatkowymi skokami losowymi w ustalonych chwilach roku. Skoki te odzwierciedlają możliwość nagłej zmiany trajektorii ceny pozwolenia na emisję w momencie, gdy odpowiednia agenda ogłosi raport dotyczący stopnia wypełnienia warunków protokołu z Kioto dla poszczególnych krajów.

Rozważany model musi brać pod uwagę również inne aspekty specyfiki rynku handlu pozwoleniami na emisję. Szczególnie dotyczy to wysokiego stopnia niepewności i nieprecyzyjności, który wydaje się charakteryzować ten rynek (Bartoszczuk i Horabik, 2007; Nahorski i Horabik, 2005). W związku z tym odpowiedni model stochastyczny zdecydowaliśmy się opisać poprzez parametry będące liczbami rozmytymi. Podejście takie umożliwia odzwierciedlenie w prosty sposób subiektywnych ocen uczestników rynku, np. bazujących na opiniach ekspertów.

3. Podstawowe definicje i fakty matematyczne

3.1 Semimartyngały, równoważna zmiana miary

Niech (Ω, F_t, P) będzie przestrzenią probabilistyczną z filtracją. Niech $T < \infty$. Proces stochastyczny $H = (H_t)_{t\in[0,T]}$ nazywamy procesem cadlag, jeżeli jego trajektorie są prawostronnie ciągłe i mają lewostronne granice. Proces stochastyczny cadlag H nazywamy semimartyngałem, jeżeli $H_t = A_t + M_t$, $t \in [0,T]$, gdzie $A = (A_t)_{t\in[0,T]}$ jest F_t-adaptowanym procesem stochastycznym cadlag o ograniczonej wariacji i $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ jest martyngałem lokalnym, tzn. istnieje ciąg F_t-momentów stopu $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ takich, że zastopowane procesy $M_t^{\tau_n} = M_{t\wedge\tau_n}$, $t \in [0,T]$ są martyngałami. Symbolem [t] będziemy oznaczać całkowitą część t.

Obecnie przedstawimy wybrane definicje i podstawowe fakty z pracy Shiryaev, Kruzhilin (1999). Niech $\varphi(x) = xI_{\{|x|\le 1\}}$ będzie funkcją obcinającą. Dla procesu stochastycznego $\breve{H}(\varphi)_t = \sum_{s\le t}[\Delta H_s - \varphi(\Delta H_s)]$, $H(\varphi)_t = H_t - \breve{H}(\varphi)_t$ jest semimartyngałem specjalnym z kanonicznym rozkładem

$$H(\varphi) = X_0 + M(\varphi) + B(\varphi),$$

gdzie $M(\varphi)$ jest martyngałem lokalnym a $B(\varphi)$ jest lokalnie całkowalnym, prognozowalnym procesem o ograniczonej wariacji.

Def. 1 *Charakterystykami H nazywamy trójkę $T = (B, C, \nu)$ składającą się z*

i. prognozowalnego procesu $B = B(\varphi)$ o ograniczonej wariacji;

ii. nieujemnego, ciągłego procesu $C = < H^c >$, gdzie H^c jest ciągłą częścią martyngałową H a $< H^c >$ jest jego nawiasem trójkątnym;

iii. prognozowalnej miary losowej ν na $B(T \times R)$ będącej kompensatorem miary związanej ze skokami H, tzn.

$$\mu^H(dt, dx) = \sum_s I_{\{\Delta H_s \neq 0\}} \varepsilon(dt, dx).$$

Def. 2 *Miara probabilistyczna $\widetilde{P}$ na (Ω, F) jest lokalnie bezwzględnie ciągła względem miary P, tzn. $\widetilde{P} \overset{loc}{<<} P$, jeżeli dla każdego $t \in [0,T]$ miara probabili-*

styczna $\widetilde{P}_t = \widetilde{P} \mid F_t$ *jest bezwzględnie ciągła względem* $P_t = P \mid F_t$. *Jeżeli* $\widetilde{P} \overset{loc}{<<} P$ *i* $P \overset{loc}{<<} \widetilde{P}$, *to miary są równoważne (* $\widetilde{P} \overset{loc}{\sim} P$ *).*

Niech $\widetilde{P} \overset{loc}{\sim} P$. Definiujemy proces stochastyczny $Z = (Z_t)_{t \in [0,T]}$ za pomocą formuły

$$Z_t = \frac{d\widetilde{P}_t}{dP_t}. \tag{1}$$

Definiujemy także proces $M = (M_t)_{t \in [0,T]}$ jak następuje:

$$M_t = \int_0^t \frac{dZ_s}{Z_{s-}}. \tag{2}$$

Niech

$$\beta = \frac{d\langle Z^c, H^c \rangle}{d\langle H^c, H^c \rangle} \cdot \frac{I(Z_- > 0)}{Z_-}, \tag{3}$$

$X = E^P_{\mu^H}\left(\frac{Z}{Z_-} I(Z_- > 0) \mid \widetilde{P} \right)$, gdzie $E^P_{\mu^H}$ jest wartością oczekiwaną względem miary $M^P_{\mu^H}$ na $F \otimes B(T) \otimes B(R)$ zdefiniowanej równością $W * M^P_{\mu^H} = E\left(W * \mu^H\right)$ dla wszystkich nieujemnych mierzalnych funkcji $W = W(\omega, t, x)$, a <.,.> jest nawiasem trójkątnym.

Następujące twierdzenie (por. Jacod, Shiryaev, 1987) nazywane jest twierdzeniem Girsanova dla semimartyngałów:

Tw. 3 Załóżmy, że $\widetilde{P} \overset{loc}{<<} P$. Niech Z, β i X będą zdefiniowane jak wyżej. Wtedy $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$ i $\widetilde{\nu}$, zdefiniowane równościami

$$\widetilde{B} = B + \beta C + \varphi(x)(X-1) * \nu, \ \widetilde{C} = C \ \text{i} \ \widetilde{\nu} = X\nu$$

tworzą trójkę charakterystyk H ze względu na $\widetilde{P}$.

3.2 Liczby rozmyte

Niech X będzie zbiorem, a $\widetilde{A}$ będzie rozmytym zbiorem w X. Przez $\mu_{\widetilde{A}}$ oznaczać będziemy funkcję przynależności zbioru rozmytego, a przez $\widetilde{A}_\alpha = \{x : \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ oznaczać będziemy α-cięcie dla $\widetilde{A}$. W artykule zakładać będziemy, że X jest zbiorem liczb rzeczywistych.

Niech $\widetilde{a}$ będzie liczbą rozmytą, tzn. zbiorem rozmytym w X spełniającym warunki, t.ż. $\sup_{x\in X}\mu_{\widetilde{a}}(x)=1$, każde α-cięcie $\widetilde{a}_\alpha$ dla $\alpha\in(0,1]$ jest domkniętym przedziałem, który możemy oznaczyć przez $\widetilde{a}_\alpha=\left[\widetilde{a}_\alpha^L,\widetilde{a}_\alpha^U\right]$ (por. Zadeh, 1965) i nośnik $\widetilde{a}$ jest ograniczony.

Wprowadzimy teraz arytmetykę liczb rozmytych. Niech $\widetilde{\bullet}$ będzie binarnym operatorem pomiędzy dwiema liczbami rozmytymi $\widetilde{a}$ i $\widetilde{b}$, przy czym przez $\widetilde{+}$ będziemy oznaczać odpowiednik operatora dodawania, przez $\widetilde{/}$ odpowiednik dzielenia, itd., zgodnie z zasadą rozszerzania (por. Zadeh, 1965). W ten sposób funkcja przynależności $\widetilde{a}\,\widetilde{\bullet}\,\widetilde{b}$ dana jest wzorem

$$\mu_{\widetilde{a}\widetilde{\bullet}\widetilde{b}}=\sup_{(x,y):x\bullet y=z}\min\{\mu_{\widetilde{a}}(x),\mu_{\widetilde{b}}(x)\},$$

a α-cięcia dane są przez

$$\left(\widetilde{a}\,\widetilde{+}\,\widetilde{b}\right)_\alpha=\left[\widetilde{a}_\alpha^L+\widetilde{b}_\alpha^L,\widetilde{a}_\alpha^U+\widetilde{b}_\alpha^U\right],\ \left(\widetilde{a}\simeq\widetilde{b}\right)_\alpha=\left[\widetilde{a}_\alpha^L-\widetilde{b}_\alpha^U,\widetilde{a}_\alpha^U-\widetilde{b}_\alpha^L\right],$$

$$\left(\widetilde{a}\,\widetilde{*}\,\widetilde{b}\right)_\alpha=\left[\min\left\{\widetilde{a}_\alpha^L\widetilde{b}_\alpha^L,\widetilde{a}_\alpha^L\widetilde{b}_\alpha^U,\widetilde{a}_\alpha^U\widetilde{b}_\alpha^L,\widetilde{a}_\alpha^U\widetilde{b}_\alpha^U\right\},\max\left\{\widetilde{a}_\alpha^L\widetilde{b}_\alpha^L,\widetilde{a}_\alpha^L\widetilde{b}_\alpha^U,\widetilde{a}_\alpha^U\widetilde{b}_\alpha^L,\widetilde{a}_\alpha^U\widetilde{b}_\alpha^U\right\}\right]$$

oraz, jeśli zero nie należy do nośnika $\widetilde{b}$, to

$$\left(\widetilde{a}\,\widetilde{/}\,\widetilde{b}\right)_\alpha=\left[\min\left\{\widetilde{a}_\alpha^L/\widetilde{b}_\alpha^L,\widetilde{a}_\alpha^L/\widetilde{b}_\alpha^U,\widetilde{a}_\alpha^U/\widetilde{b}_\alpha^L,\widetilde{a}_\alpha^U/\widetilde{b}_\alpha^U\right\},\right.$$
$$\left.\max\left\{\widetilde{a}_\alpha^L/\widetilde{b}_\alpha^L,\widetilde{a}_\alpha^L/\widetilde{b}_\alpha^U,\widetilde{a}_\alpha^U/\widetilde{b}_\alpha^L,\widetilde{a}_\alpha^U/\widetilde{b}_\alpha^U\right\}\right].$$

W dalszych rozważaniach stosować będziemy zasadę rozszerzenia dla liczb rozmytych, ale dla celów obliczeniowych i interpretacyjnych niezbędne okaże się wykorzystanie równoważnego podejścia poprzez α-cięcia.

Tw. 4 Niech $f:R\to R$ będzie funkcją, $F(R)$ będzie rodziną wszystkich rozmytych podzbiorów dla R i $\widetilde{\Lambda}\in F(R)$. Załóżmy, że funkcja przynależności $\mu_{\widetilde{\Lambda}}$ będzie półciągła z góry i dla wszystkich y zbiór $\{x:f(x)=y\}$ jest zwarty. Funkcja $f(x)$ indukuje funkcję $\widetilde{f}:F(R)\to F(R)$ zgodnie z zasadą rozszerzania. Wtedy $\widetilde{f}\left(\widetilde{\Lambda}\right)_\alpha=\left\{f(x):x\in\widetilde{\Lambda}_\alpha\right\}$.

Dowód powyższego twierdzenia znaleźć można w Wu (2004). Twierdzenie to zastosujemy w 3.5 do wyceny opcji dla modelu z rozmytymi parametrami.

Trójkątną liczbę rozmytą $\widetilde{a}$ definiujemy poprzez jej funkcję przynależności

$$\mu_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & dla\ a_1\le x\le a_2\\ \dfrac{x-a_3}{a_2-a_3} & dla\ a_2<x\le a_3\\ 0 & w\,p.p.\end{cases}$$

gdzie $[a_1,a_3]$ jest przedziałem, a funkcja przynależności ma swoje maksimum w punkcie a_2.

Rozmyte liczby L-R są uogólnieniem trójkątnych liczb rozmytych (Bardossy i Duckstein, 1995; Dubois i Prade, 1980), w których liniowe funkcje wykorzystane w definicji liczb trójkątnych zostały zastąpione funkcjami monotonicznymi, tzn.

$$\mu_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}L\left(\dfrac{a_1-x}{a_2-a_1}\right) & dla\ a_1\le x\le a_2\\ R\left(\dfrac{x-a_3}{a_2-a_3}\right) & dla\ a_2<x\le a_3\\ 0 & w\,p.p.\end{cases},$$

gdzie L i R są ciągłymi, ściśle malejącymi funkcjami określonymi na przedziale [0;1], o wartościach w przedziale [0;1]. Liczbę L-R można zapisać w postaci $(a_1,a_2,a_3)_{LR}$.

Omówimy teraz estymację liczb rozmytych wykorzystującą podejście statystyczne (por. Buckley, 2004). Przypuśćmy, że X jest zmienną losową o rozkładzie zadanym gęstością $f_\theta(.)$. Załóżmy, że parametr θ jest nieznany i ma być estymowany na podstawie próbki $X_1,X_2,\ldots,X_n$ poprzez użycie statystyki $\hat{\theta}$. Wtedy, dla ustalonego poziomu ufności β możemy skonstruować przedział ufności $[\theta_L(\beta),\theta_R(\beta)]$. Jeśli założymy, że $[\theta_L(0),\theta_R(0)]=[\hat{\theta},\hat{\theta}]$, to możemy skonstruować liczbę rozmytą $\tilde{\theta}$ bazując na przedziałach ufności. W tym celu „ustawiamy" na sobie kolejne przedziały ufności, które tworzą rozmytą liczbę L-R. Poszczególne α-cięcia odpowiadają przedziałom ufności na poziomie ufności $\beta=1-\alpha$. W ten sposób otrzymujemy $\tilde{\theta}_\alpha=[\theta_L(1-\alpha),\theta_R(1-\alpha)]$ np. dla $0{,}01\le\alpha\le 1$. W celu dokończenia konstrukcji liczby rozmytej możemy np. przedłużyć α-cięcia dla $\alpha=0{,}01$ liniami prostymi do $\alpha=0$.

3.3 Model instrumentu pierwotnego

Niech (Ω,F_t,P) będzie przestrzenią probabilistyczną z filtracją. Niech $T<\infty$. Cena instrumentu podstawowego jest procesem $S=(S_t)_{t\in[0,T]}$ danym wzorem $S_t=S_0\exp(Y_t)$, gdzie

$$Y_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{i=0}^{[t]} \xi_i \ , \tag{4}$$

W_t jest ruchem Browna, $\sigma > 0$, $\mu \in R$ i $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie

$$\rho(dx) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{2} e^{-\lambda_1 x} & dla \quad x \geq 0 \\ \dfrac{\lambda_2}{2} e^{\lambda_2 x} & dla \quad x < 0 \end{cases} ,$$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Zakładamy, że Y_t jest F_t - adaptowany.

3.4 Martyngałowa metoda wyceny opcji

Niech r będzie stałą, wolną od ryzyka stopą procentową i niech

$$Z_t = e^{-rt} S_t \tag{5}$$

będzie zdyskontowanym procesem ceny podstawowego instrumentu . Naszym celem jest znalezienie miary $\widetilde{P}$, lokalnie równoważnej P, dla której Z_t jest martyngałem. Kolejnym krokiem jest znalezienie postaci procesu S_t względem nowej miary $\widetilde{P}$. Cena instrumentu pochodnego z funkcją wypłaty f dana jest wzorem:

$$C_t = \exp(-r(T-t)) E^{\widetilde{P}}(f(S) \mid F_t), \quad t \in [0,T] \tag{6}$$

Zastosujemy następujący rezultat (por. Shiryaev i Kruzhilin, 1999, s. 21). Zachowamy przy tym notację z podrozdziału 3.1.

Tw. 5 Załóżmy, że Z_t jest dodatnim martyngałem, będącym rozwiązaniem równania stochastycznego $dZ_t = Z_{t-} dM_t$, gdzie proces M jest dany wzorem:

$$M_t = M_0 + \int_0^t \beta_s dH_s^C + \int_0^t \int_R W(.,s,x) d(\mu - \nu), \tag{7}$$

β i W spełniają odpowiednie warunki całkowalności (por. Jacod i Shiryaev, 1987) oraz W jest procesem danym wzorem $W = X - 1 + \dfrac{\hat{X} - a}{1-a} I(a<1)$, gdzie $a = a_t(\omega) = \nu(\omega, \{t\} \times R)$, $\hat{X}_t = \int_R X(\omega, s, x) \nu(\omega, \{t\} \times dx)$. Załóżmy ponadto, że $E \mid Z_t \mid = 1$. Wówczas w przypadku, gdy $\nu(\omega, \{t\} \times R) \in \{0,1\}$, warunek

$$K_t + \int_0^t \beta_s d\left\langle H^C \right\rangle_s + \int_0^t \int_R (X-1)(e^x - 1) d\nu = 0, \quad t \leq T, \tag{8}$$

gdzie $K_t = B_t + \frac{1}{2}\left\langle H^C \right\rangle_t + \int_0^t \int_R \left(e^x - 1 - \varphi(x)\right) d\nu$, implikuje istnienie miary $\widetilde{P}_T$, skonstruowanej jak wyżej, równoważnej mierze P_T, dla której proces Z jest martyngałem lokalnym.

Niech $\gamma > \frac{1}{2}$ i

$$\widetilde{\rho}(dx) = \begin{cases} \dfrac{\gamma + \frac{3}{2}}{2} e^{-\left(\gamma + \frac{3}{2}\right)x} & dla \quad x \geq 0 \\ \dfrac{\gamma - \frac{1}{2}}{2} e^{\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)x} & dla \quad x < 0 \end{cases}.$$

Tw. 6 Dla europejskiej opcji kupna z funkcją wypłaty $f(x) = (x - K)_+$, $K > 0$ mamy

$$C_0 = \exp(-rT) \int_{\ln K - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}^{\infty} \left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + x} - K \right) dG^{[T]}(x)$$

dla $G^{[T]}(x) = G * \overbrace{F * \ldots * F}^{[T]}(x)$, gdzie G i F są odpowiednio, dystrybuantami rozkładu normalnego $N\left(0, \sigma\sqrt{T}\right)$ i $\widetilde{\rho}$. $G^{[T]}$ ma gęstość $g^{[T]}$ i powyższa formuła może być zapisana w następujący sposób:

$$C_0 = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T} \int_{\ln\frac{K}{S_0} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}^{\infty} e^x g^{[T]}(x)dx - e^{-rT} K \left(1 - G^{[T]}\left(\ln\frac{K}{S_0} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)T \right) \right).$$

Dowód. Charakterystyki B i C procesu $H_t = Y_t - rt$ mają postać $B_t = (\mu - r)t + [t]\int_R \varphi(x)\rho(dx)$ i $C_t = \sigma^2 t$. Ponieważ H jest procesem o przyrostach niezależnych, wzór (7) przedstawia dekompozycję M. Wszystkie założenia ***Tw. 5*** są spełnione. Ponieważ

$$K_t = (\mu - r)t + [t]\int_R \varphi(x)\rho(dx) + \frac{1}{2}\sigma^2 t + [t]\int_R \left(e^x - 1 - \varphi(x)\right)\rho(dx),$$

równanie (8) jest równoważne

$$\left(\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma^2 \int_0^t \beta_s ds + [t]\left(\int_R X(\omega, 1, x)\left(e^x - 1\right)\rho(dx) \right) = 0, \quad t \leq T. \qquad (9)$$

Ponieważ suma $I_1 = \left(\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma^2 \int_0^t \beta_s ds$ jest ciągła jako funkcja t i $I_2 = [t]\int_R X(\omega,1,x)(e^x - 1)\rho(dx) = 0$ ma skoki dla $t = 1,2,\ldots,$ równanie (9) jest równoważne

$$\begin{cases} I_1(t) = 0, & t \le T \\ I_2(t) = 0 \end{cases}.$$

Układ równań jest spełniony dla $\beta = -\frac{(\mu - r)}{\sigma^2} - \frac{1}{2}$ i

$$X(\omega,t,x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\left(-\frac{3}{2}-\gamma+\lambda_1\right)x}}{R_1} & dla \quad t \in N \quad i \quad x \ge 0 \\ \dfrac{e^{\left(-\frac{1}{2}+\gamma+\lambda_2\right)x}}{R_2} & dla \quad t \in N \quad i \quad x < 0 \\ 1 & dla \quad t \notin N \quad i \quad x \in R \end{cases}$$

dla $R_1 = \frac{1}{2} E e^{\left(-\frac{3}{2}-\gamma+\lambda_1\right)\xi_1} I_{\{\xi_1 \ge 0\}}$ i $R_2 = \frac{1}{2} E e^{\left(-\frac{1}{2}+\gamma+\lambda_2\right)\xi_1} I_{\{\xi_1 < 0\}}$. Korzystając z ***Tw. 3*** dla charakterystyk procesu H względem $\widetilde{P}_T$, otrzymujemy charakterystyki Y względem $\widetilde{P}_T$ o postaci $\widetilde{B}_t^Y = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + [t]\int_R \varphi(x) X(\omega,1,x)\rho(dx)$, $\widetilde{C}_t^Y = \sigma^2 t$, $\widetilde{\nu}^Y(\omega,(0,t]\times dx) = [t]X(\omega,1,x)\rho(dx)$. Wynika stąd, że proces Y względem $\widetilde{P}_T$ opisuje formuła:

$$Y_t = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma \widetilde{W}_t + \sum_{i=0}^{[t]} \widetilde{\xi}_i, \tag{9}$$

gdzie $\widetilde{W}_t$ jest ruchem Browna, $\left\{\widetilde{\xi}_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ są niezależnymi zmienymi losowymi o jednakowym rozkładzie $\widetilde{\rho}(dx) = X(\omega,1,x)\rho(dx)$. Jeżeli $F(x) = \rho((-\infty, x])$ jest dystrybuantą $\widetilde{\xi}_i$ i $F^n(x) = \overbrace{F * \ldots * F}^{[T]}(x)$, to $G^{[T]}(x) = G * \overbrace{F * \ldots * F}^{[T]}(x)$ jest dystrybuantą zmiennej losowej $Y_T - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T$. Stąd $Y_T - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T$ ma gęstość $g^{[T]}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y - x) dF^{[T]}(x)$. Zgodnie z (6)

$$C_0 = \exp(-rT)E^{\widetilde{P}} f(S_T) = \exp(-rT)\left[E^{\widetilde{P}} S_T I_{S_T > K} - K\widetilde{P}(S_T > K)\right] = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T} \int_{\ln\frac{K}{S_0} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}^{\infty} e^x g^{[T]}(x)dx - e^{-rT} K\left(1 - G^{[T]}\left(\ln\frac{K}{S_0} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)\right). \tag{10}$$

3.5. Podejście rozmyte

Załóżmy, że parametry $r', \sigma', \lambda_1', \lambda_2'$ są rozmytymi wersjami parametrów opisujących proces (4). Przyjmijmy, że liczby te są liczbami L-R, które zostały podane przez eksperta lub wyestymowane dzięki wykorzystaniu podejścia statystycznego (patrz 3.2). Wtedy proces stochastyczny po zmianie miary (9) przyjmuje odpowiednią postać rozmytą

$$Y_t = \left(r' \,\widetilde{-}\, \frac{1}{2} \,\widetilde{*}\, \sigma' \,\widetilde{*}\, \sigma'\right) \widetilde{*}\, t \,\widetilde{+}\, \sigma' * \widetilde{W}_t \,\widetilde{+} \sum_{i=0}^{[t]} \widetilde{\xi}_i, \tag{11}$$

który zastosować można do obliczeń metodami symulacyjnymi (patrz 3.6).

Wspomniana metoda ma zastosowanie zwłaszcza w sytuacjach, gdy nie jest możliwe przedstawienie krótkiego i zwartego wzoru opisującego cenę pochodnego instrumentu finansowego. Formuła wyceny europejskiej opcji kupna z ***Tw. 6*** zapisana jest w zamkniętej postaci analitycznej. Można zatem przedstawić ją w wersji rozmytej, zastępując parametry liczbowe ich odpowiednikami rozmytymi, a operacje arytmetyczne operacjami $\widetilde{+}$, $\widetilde{-}$, $\widetilde{*}$ i $\widetilde{/}$. Dla całki $I(z) = \int_z^{\infty} e^x g^{[T]}(x)dx$ oraz dystrybuanty $G^{[T]}$ stosujemy ***Tw. 4***, z uwagi na fakt, iż całki te możemy przedstawić jako funkcje pierwotne o wartościach liczbowych i bezpośrednio zastosować zasadę rozszerzenia. Obliczenia można wykonywać z zastosowaniem α-cięć. W procesie obliczeń, z uwagi na skomplikowaną postać formuły wyceny, potrzebne jest również zastosowanie metod numerycznych.

Podejście rozmyte z zastosowaniem α-cięć (dla wartości α bliskich *1)* do wyceny instrumentów pochodnych pozwala uzyskiwać przedziały cenowe, do których można mieć wysoki stopień zaufania.

3.6. Zastosowanie metod symulacyjnych

Ze względu na skomplikowanie postaci wzoru (10), jego bezpośrednie obliczenie bez zastosowania procedur numerycznych wydaje się niemożliwe. Należy podkreślić, że tak złożony wzór otrzymujemy już dla ceny jednego z najprostszych i najbardziej klasycznych instrumentów pochodnych. Zarazem, zastosowanie rozmytych liczb dla opisu procesu stochastycznego dodatkowo pogłębia ten problem.

Dla bardziej skomplikowanych instrumentów pochodnych wzór na cenę może nie zostać otrzymany w zamkniętej, analitycznej formie. Dlatego niezbędne jest zastosowanie podejścia numerycznego lub symulacyjnego. Odpowiednią metodą może być wykorzystanie symulacji Monte Carlo, których zaletami są elastyczność i skuteczność zwłaszcza w przypadku dużych portfeli instrumentów finansowych. Dodatkowo symulacje mogą być użyteczne w przypadku instytucji, które rozważają różne pakiety strategii mających na celu redukcję emisji, z zastosowaniem odmiennych rodzajów instrumentów, tzn. nie tylko finansowych, ale także np. ewentualnych zmian profilu produkcji, zastosowania nowych technik redukcji emisji, itd. W takim przypadku symulowanie możliwych przyszłych scenariuszy zdarzeń jest naturalnym sposobem łączenia różnych strategii finansowo – inżynieryjnych.

W przypadku symulacji Monte Carlo znajdujemy cenę instrumentu pochodnego wykorzystując formułę

$$\hat{C}_0 = \exp(-rT)E\left(FV\left(f(S_t)\right)\right) , \tag{12}$$

co odpowiada zdyskontowanej wartości przyszłego strumienia płatności dla funkcji wypłaty *f(.)* derywatywy bazującej na pewnym instrumencie podstawowym. Trajektoria cen wspomnianego instrumentu podstawowego opisana jest za pomocą przyjętego przez nas procesu stochastycznego. Aby obliczyć (12), musimy wygenerować *n* trajektorii $S_t^{(1)}, S_t^{(2)}, \ldots, S_t^{(n)}$, gdzie *n* jest nazywane *liczbą trajektorii.*

Przy założeniu odpowiedniego poziomu α, znajdujemy α-cięcia dla parametrów $r', \sigma', \lambda_1', \lambda_2'$ charakteryzujących nasz model. W zastosowanym podejściu symulacyjnym odpowiednie α-cięcia traktujemy jako przedziały, z których dla każdej trajektorii $S_t^{(j)}$ losujemy niezależnie wartości parametrów wykorzystując rozkład jednostajny na każdym z przedziałów. Otrzymane wartości parametrów podstawiamy do iteracyjnej wersji równania (9) o postaci

$$S_{t_{j+1}}^{(i)} = S_{t_j}^{(i)} \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t_j + \sigma N_{i,j}\Delta t_j + \lfloor \Delta t_j \rfloor P_{i,j}\right) , \tag{13}$$

gdzie przedział czasowy *[0,T]* został podzielony na *m* równych kroków $t_0 = 0, t_1, \ldots, t_m = T$, $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, zaś $N_{i,j}$ są zmiennymi *iid* z *N(0;1)*, a $P_{i,j}$ – zmiennymi *iid* o rozkładzie $\widetilde{\rho}(dx) = X(\omega, 1, x)\rho(dx).$, $\lfloor \Delta t_j \rfloor$ jest liczbą skoków w przedziale Δt_j określonym przez proces stochastyczny, tzn. $\lfloor \Delta t_j \rfloor := [t]_{[\Delta t_j]}$.

Równanie (13) jest uogólnieniem schematu Eulera, które pozwala na wygenerowanie odpowiednich kroków $S_{t_0}^{(i)}, S_{t_1}^{(i)}, \ldots, S_{t_m}^{(i)}$ dla dowolnej trajektorii $S_t^{(i)}$. Otrzymane wartości podstawiamy do klasycznego estymatora (12), np. dla ceny europejskiej opcji call będzie miał on postać $\hat{C}_0 = \exp(-rT)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(S_T^{(i)} - K\right)_+$. W podobny sposób możemy otrzymać estymatory dla innych typów derywatyw.

Otrzymany wynik jest przybliżeniem rozmytej ceny dla rozważanego instrumentu pochodnego przy ustalonym poziomie α. Należy podkreślić, że z praktycznego punktu widzenia, cena taka może być traktowana jako przedział o ustalonym poziomie zaufania α, wyznaczonym wcześniej przez analityka finansowego (np. $\alpha = 0{,}95$.

4. Podsumowanie

W artykule omówiliśmy kwestie wynikające z wprowadzenia handlu pozwoleniami na emisję, zaproponowanego w Protokole z Kioto. Rozwój pochodnych instrumentów finansowych, takich jak opcje, kontrakty futures i forward, może zmniejszyć ryzyko finansowe i zwiększyć płynność rynku handlu pozwoleniami na emisje. Efekty takie znane są dla klasycznych rynków finansowych (por. np. Hull, 1997).

Wspomniane pochodne instrumenty finansowe dla handlu pozwoleniami na emisje są uogólnieniem analogicznych derywatyw znanych z klasycznych rynków finansowych. Jak można jednak zauważyć, istnieją pewne różnice, wynikające przede wszystkim ze sposobu modelowania trajektorii ceny dla instrumentu podstawowego. W artykule zaproponowaliśmy model będący uogólnieniem klasycznego modelu Blacka–Scholesa. Model ten został wzbogacony poprzez podejście rozmyte.

Przyszłe kierunki badań obejmują m.in. porównanie wyników otrzymanych dla przedstawionego w pracy modelu z rynkami realnymi.

Literatura

A guide to Emissions Trading (2002) United Nations Environment Programme, Division of Technology, Industry and Economics.

Bardossy A., Duckstein L., red., (1995) *Fuzzy Rule-Based Modeling with Applications to Geophysical, Biological and Engineering Systems*, CRC – Press.

Bartoszczuk P., Horabik J. (2007) Tradable permit systems: considering uncertainty in emission estimates. *Water Air and Soil Pollution: Focus*, **7**.

Buckley J.J. (2004) *Fuzzy Statistics*. Springer.

Buhlmann H., Delbaen F., Embrechts P., Shiryaev A.N. (1996) No-arbitrage, change of measure and conditional Esscher transforms. *CWI Quarterly*, **9**, 4.

Cason T.N., Gangadharan L. (1998) An experimental study of electronic bulletin board trading for emission permits. *Journal of Regulatory Economics*, **14**, 1, 55 – 73.

Davis M. (2001) Mathematics of financial markets. W: Engquist B., Schmid W. *Mathematics Unlimited – 2001 & Beyond*. Springer Berlin.

Devlin R. A., Grafton R. Q. (1994) Tradable Permits, Missing Markets and Technology. *Environmental and Resource Economics*, **4**, 171 – 186.

Dubois D., Prade H. (1980) *Fuzzy Sets and Systems – Theory and Applications*. Academic Press, New York

Duffie D., Glynn P. (1997) Efficient Monte Carlo Simulation for Security Prices. *Annals of Applied Probability*, **5**.

EPPA, http://web.mit.edu/globalchange/www/eppa.html

Ermoliev Y., Michalevich M., et al. (2000) Markets for Tradable Emissions and Ambient Permits: A Dynamic Approach. *Environmental and Resource Economics*, **15**, 1, 39–56.

Hagem C., Westkog H. (1998) The Design of a Dynamic Tradable Quota System under Market Imperfections. *Journal of Environmental Economics and Management*, **36**, 1, 89 – 107.

Hull J.C. (1997) *Options, Futures and Other Derivatives*. Presntice Hall.

International Emission Trading. From Concept to Reality (2001) International Energy Agency.

International Workshop on Uncertainty in Greenhouse Gas Inventories: Verification, Compliance & Trading (2004) Workshop Proceedings, Warsaw, Poland, 24-25 September.

Jackwerth J.C., Rubinstein M. (1996) Recovering Probability Distributions from Option Prices. *Journal of Finance*, **51**.

Jacod J., Shiryaev A.N. (1987) *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer Verlag.

Karatzas I. (1998) *Methods of Mathematical Finance*. New York, Springer.

Korn R., Korn E. (2001) *Option Pricing and Portfolio Optimization*. American Mathematical Society.

Lemming J. (2003) Financial Risks for Green Electricity Investors and Producers in a Tradable Green Certificate Market. *Energy Policy*, **31**, 1, 21 – 32.

Montero J.P. (1998) Marketable Pollution Permits with Uncertainty and Transactions Costs. *Resource and Energy Economics*, **20**, 1, 27 – 50.

Nahorski Z., Horabik J., Jonas M. (2004) Greenhouse gas emission uncertainty in compliance proving and emission trading, W: *International Workshop on Uncertainty in Greenhouse Gas Inventories: Verification, Compliance & Trading*. Workshop Proceedings, Warsaw, Poland, 24-25 September, 116 – 125.

Nahorski Z., Horabik J. (2005) Fuzzy approximations in determining trading rules for highly uncertain emissions of pollutants. W: P. Grzegorzewski, M Krawczak, S. Zadrożny, red., *Issues in soft computing. Theory and applications*, EXIT, Warszawa..

Nowak P., Nycz P., Romaniuk M. (2002) Dobór optymalnego modelu stochastycznego w wycenie opcji metodami Monte Carlo. W: J. Kacprzyk, J. Weglarz, red., *Modelowanie i optymalizacja – Metody i zastosowania*, EXIT, Warszawa.

Nowak P., Romaniuk M. (2007) Pricing financial instruments derivatives inspired by Kyoto protocol. W: O. Hryniewicz, J. Studziński, M. Romaniuk, red., *Enviromental informatics and systems research. Vol. 1: Plenary and sesion papers - EnviroInfo 2007*, Shaker Verlag.

Protokół z Kioto (1997) http://www.biomasa.org/zrodla/swiat/protokol_z_kioto.

Robert C.P., Casella G. (1999) *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer Verlag.

Rubinstein M. (1994) Implied Binomial Trees. *Journal of Finance*, **49**.

Shimko D. (1993) Bounds of Probability. *Risk*, **6**.

Shiryaev A.N., Kruzhilin N. (1999) *Essential of Stochastic Finance*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Stavins R.N. (1995) Transaction Costs and Tradable Permits. *Journal of Environmental Economics and Management*, **29**, 2, 133 – 148.

Westkog H. (1996) Market Power in a System of Tradable CO2 Quotas. *The Energy Journal*, **17**, 85 – 103.

Wu H.C. (2004) Pricing European options based on the fuzzy pattern of Black-Scholes formula. *Computers & Operations Research*, **31**, 1069 – 1081.

Zadeh L.A. (1965) Fuzzy sets. *Information and Control*, **8**, 338 – 353.

Olgierd Hryniewicz, Andrzej Straszak, Jan Studziński
red.

BADANIA OPERACYJNE I SYSTEMOWE: ŚRODOWISKO NATURALNE, PRZESTRZEŃ, OPTYMALIZACJA

Książka składa się z artykułów przedstawiających wyniki prac z dziedziny badań operacyjnych i systemowych, poświęconych środowisku naturalnemu i zarządzaniu nim, zwłaszcza w zakresie ochrony atmosfery, globalnego ocieplenia i walki z nim, jakości i zaopatrzenia w wodę. Tematyka ta jest rozszerzona o aspekty przestrzenne, regionalne i samorządowe, a także planowanie i funkcjonowanie infrastruktury. Tom zamykają prace metodyczne, dostarczające technik, będących podstawą prezentowanych zastosowań.

ISBN 83-894-7519-7
EAN 9788389475190

Instytut Badań Systemowych PAN
tel. (4822) 3810241 / 3810273 e-mail: biblioteka@ibspan.waw.pl