POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Roman Kulikowski,
Marek Libura,
Leon Słomiński

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 21

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 1998

Roman KULIKOWSKI
Marek LIBURA
Leon SŁOMIŃSKI

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. Maria Podgórska
Doc. dr hab. Leszek S. Zaremba

Książka powstała w wyniku realizacji projektu badawczego finansowanego przez KOMITET BADAŃ NAUKOWYCH

ISBN 83-85847-09-X
ISSN 0208-8029

Część III.
Metody optymalizacyjne dla potrzeb wspomagania decyzji inwestycyjnych

szczególnie trudnych. W przypadku zadań programowania liniowego ciągłego pakiet taki dostarcza również mechanizmów umożliwiających zrealizowanie ostatniej fazy rozwiązywania problemu, to znaczy fazy analizy rozwiązania, polegającej na zbadaniu wpływu zaburzeń danych zadania na otrzymane rozwiązania (patrz np. Nemhauser i in. (1989)). W przypadku zadań ze zmiennymi dyskretnymi możliwości takiej analizy są nadal ograniczone (patrz Libura (1993)).

Wymienione fazy rozwiązywania problemu optymalizacyjnego są ze sobą ściśle powiązane i często proces rozwiązywnia problemu nie przebiega sekwencyjnie przez wymienione fazy, ale wymaga wielokrotnych nawrotów. Na przykład niemożliwość doboru efektywnej metody rozwiązania zadania może powodować potrzebę jego przeformułowania. Podobnie, wynik analizy otrzymanych rozwiązań może prowadzić do konieczności weryfikacji samego sformułowania problemu optymalizacyjnego.

3. Zadania programowania liniowego ciągłego

Zadania programowania liniowego ciągłego są obecnie najczęściej używaną klasą zadań optymalizacyjnych w praktycznych zastosowaniach dotyczących wspomagania decyzji na rynku finansowym (patrz np. Konno, Yamazaki (1991), Speranza (1993, 1994), Zenios (1993)). Wynika to zarówno z łatwości modelowania jak i dostępności dobrych komercyjnych pakietów, pozwalających na rozwiązywanie takich zadań dla wielu tysięcy zmiennych i ograniczeń.

W Części II omówione są liczne klasy problemów, prowadzące w naturalny sposób do zadań programowania liniowego ciągłego. Ze względu na bardzo bogatą literaturę dotyczącą modelowania w postaci zadań progamowania liniowego ciągłego oraz fakt, że omówienie narzędzi do rozwiązywania tych zadań zostanie dokonane przy okazji zadań programowania liniowego mieszanego, w niniejszym punkcie ograniczymy się jedynie do przedstawienia mniej typowych zagadnień dotyczących modeli liniowych. Pokażemy mianowicie przykłady zadań, które w naturalnym sformułowaniu nie są zadaniami programowania liniowego, ale w łatwy sposób dają się do nich sprowadzić. Są przy tym ważne ze względu na zastosowania będące przedmiotem niniejszej monografii.

Ogólny zapis zadania programowania liniowego ciągłego jest następujący:

$$\max \text{ (albo min) } \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \sim b_j, \quad j=1,\dots,m \tag{PL}$$

$$l_i \le x_i \le u_i, \qquad i=1,\dots,n,$$

gdzie, jak poprzednio, $\sim$ oznacza jeden z warunków $\le, =, \ge$, natomiast c_i, l_i, u_i, a_{ij}, b_j są danymi liczbami rzeczywistymi dla $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m$.

Zadanie powyższe jest szczególnym przypadkiem ogólnego zadania programowania matematycznego (2) z wektorem zmiennych $x=(x_1,\dots,x_n)^T$ dla $c(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$,

$$g_j(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i, \quad X = \{(x_1,\dots,x_n)^T \in \mathbb{R}^n : l_i \le x_i \le u_i, \quad i=1,\dots,n\}.$$

Wielkości l_i, u_i noszą nazwy odpowiednio, *ograniczeń dolnych* i *ograniczeń górnych* zmiennych x_i, $i=1,\dots,n$. Wydzielenie warunków $l_i \le x_i \le u_i$ spośród pozostałych ograniczeń zadania jest podyktowane tym, że są one zazwyczaj w szczególny sposób traktowane przez algorytmy rozwiązywania zadania (PL).

Ze względu na możliwość zastąpienia ograniczeń równościowych $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i = b_j$ parą warunków $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \le b_j$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \ge b_j$, oraz możliwość zmiany kierunku nierówności poprzez przemnożenie obu jej stron przez -1, można przyjąć, że w zapisie zadania (PL) wszystkie warunki ~ są postaci $\le$. Pozwala to na przedstawienie zadania (PL) w często spotykanej postaci macierzowej

$$\max\ (\text{albo } \min)\ c^T x$$

$$Ax \le b \qquad (3)$$

$$l \le x \le u$$

gdzie $c = (c_1,\dots,c_n)^T$, $b = (b_1,\dots,b_m)^T$, $l = (l_1,\dots,l_n)^T$, $u = (u_1,\dots,u_n^T)$, a symbol T oznacza transpozycję wektora.

Macierz A o współczynniku a_{ij} w j-tym wierszu i i-tej kolumnie nosi nazwę *macierzy ograniczeń*, a wektor b jest nazywany *wektorem prawych stron*. Wektor c bywa nazywany *wektorem kosztów* lub *wektorem współczynników funkcji celu*.

Zadanie programowania liniowego ma bogatą teorię i bardzo dobrze rozwinięte metody obliczeniowe (patrz np. Nemhauser i in. (1989)). W punkcie 4.2.2 podany jest opis komercyjnego pakietu obliczeniowego CPLEX 3.0, pozwalającego na efektywne rozwiązywanie zadań programowania liniowego dla dużych m i n. Praktycznym ograniczeniem na maksymalny rozmiar rozwiązywanego zadania jest zwykle pojemność pamięci komputera, a nie czas obliczeń.

Zadanie (3) ma ponadto dobrze rozwinięte metody analizy pooptymalizacyjnej, pozwalające na badanie wpływu zmian elementów wektora kosztów oraz wektora prawych stron na uzyskane już rozwiązanie. Z tego względu zadanie (3) jest bardzo atrakcyjnym modelem obliczeniowym.

W następnym punkcie przedstawimy dwa typy zadań, które pierwotnie nie są formułowane jako zadania programowania liniowego, ale dają się sprowadzić do takiej postaci. Podamy również przykłady zastosowań takich zadań w analizie portfelowej. W przypadku obu zadań mamy do czynienia z nieliniową funkcją celu i, takimi jak w zadaniu (3), liniowymi ograniczeniami.

3.1. Zadania sprowadzalne do zadań programowania liniowego

3.1.1. Zadanie z kryterium minimaksowym

Rozważymy zadanie, w którym należy minimalizować największą spośród wartości K funkcji liniowych przy liniowych ograniczeniach, to znaczy zadanie w postaci

$$\min\ f(x)$$

$$Ax \le b \tag{4}$$

$$l \le x \le u,$$

gdzie $f(x) = \max\{(c^k)^T x,\ k = 1,\dots,K\}$, $c^k \in \mathbb{R}^n$ dla $k = 1,\dots,K$.

Zadanie takie w łatwy sposób daje się przekształcić do postaci (3). Wprowadźmy mianowicie dodatkową zmienną ciągłą $y \in \mathbb{R}$ i rozważmy następujące zadanie:

$$\min\ y$$

$$(c^k)^T x \le y \quad \text{dla} \quad k = 1,\dots,K$$

$$Ax \le b \tag{5}$$

$$l \leq x \leq u$$

$$y \in \mathbb{R}.$$

Łatwo pokazać, że rozwiązanie optymalne $(y^0, (x^0)^T)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ zadania (5) daje również rozwiązanie optymalne x^0 zadania (4). Ponadto y^0 jest wartością optymalną zadania (4), tzn. $f(x^0) = y^0$. A zatem zadanie (4) można rozwiązać poprzez rozwiązanie równoważnego zadania programowania liniowego z jedną dodatkową zmienną i K dodatkowymi ograniczeniami.

Zauważmy, że w podobny sposób można przekształcić zadanie, w którym funkcja celu ma następującą postać:

$$f(x) = \sum_{t=1}^{L} \max\{(c^{kt})^T x,\ k = 1,\dots,K_t\}, \tag{6}$$

gdzie $c^{kt} \in \mathbb{R}^n$ dla $t = 1,\dots,L$, $k = 1,\dots,K_t$.

Należy wówczas wprowadzić L dodatkowych zmiennych ciągłych $y_1,\dots,y_L$, i dla każdego $t = 1,\dots,L$, dołączyć do zadania układ dodatkowych K_t ograniczeń

$$(c^{kt})^T x \leq y_t,\ k = 1,\dots,K_t. \tag{7}$$

Funkcja celu w przekształconym zadaniu przyjmuje wówczas postać

$$\min \sum_{t=1}^{L} y_t.$$

Poniższy przykład ilustruje użycie takiej transformacji dla zadania konstrukcji portfela akcji.

Przykład 2. Załóżmy, że rozważamy inwestycję w n możliwych papierów i zmienna $x_i \geq 0$ oznacza udział papieru i-tego, $i = 1,\dots,n$, w portfelu. Ponadto przyjmijmy, że dysponujemy obserwacjami zwrotów z poszczególnych papierów w okresach $t = 1,\dots,L$. Niech r_{it} oznacza stopę zwrotu z papieru i, zaobserwowaną w okresie t i niech $\bar{r}_i = \frac{1}{L}\sum_{t=1}^{L} r_{it}$ będzie wartością średnią stopy zwrotu z papieru i w całym obserwowanym przedziale czasu. Przyjmijmy ponadto, że ryzyko związane z portfelem mierzymy wartością średnią odchylenia w dół wartości portfela od jego wartości średniej dla wszystkich obserwowanych okresów. Oznacza to, że miarą ryzyka portfela wyznaczonego przez wektor $x = (x_1,\dots,x_n)$, gdzie $x_i \geq 0$, $i=1,\dots,n$, oraz $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, jest wartość $R(x)$ obliczona następująco:

$$R(x) = \frac{1}{L}\sum_{t=1}^{L} \max\left\{0, \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i - r_{it})x_i\right\}. \tag{8}$$

Zadanie konstrukcji portfela o minimalnym ryzyku i zadanej średniej stopie zwrotu r ma więc postać

$$\begin{aligned}
&\min R(x) \\
&\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
&\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i = r \\
&x_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{9}$$

Zauważmy, że mamy tu do czynienia z zadaniem, w którym funkcja celu ma postać (6), przy czym $K_t = 2$ dla $t = 1,\dots,L$, oraz $c^{1t} = 0$, $c^{2t} = ((\bar{r}_1 - r_{1t}),\dots,(\bar{r}_n - r_{nt}))^T$. Zatem układ ograniczeń (7) dla każdego $t = 1,\dots,L$, jest tu szczególnie prosty, bowiem ograniczenie $(c^{1t})^T x \leq y_t$ jest po prostu warunkiem nieujemności zmiennej y_t, tzn.

$$0 \leq y_t, \quad t = 1,\dots,L. \tag{10}$$

Natomiast drugie z ograniczeń dla $t=1,\ldots,L$, ma postać

$$\sum_{i=1}^{n}(\bar{r}_i - r_{it})x_i \leq y_t .$$

Pełne zadanie konstrukcji portfela, równoważne zadaniu (9), jest więc następujące:

$$\begin{aligned}
&\rho(r) = \min \frac{1}{L}\sum_{t=1}^{L} y_i \\
&\sum_{i=1}^{n}(\bar{r}_i - r_{it})x_i \leq y_t, \quad t=1,\ldots,L \\
&\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
&\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i = r \\
&x_i \geq 0, \quad i=1,\ldots,n \\
&y_t \geq 0, \quad t=1,\ldots,L.
\end{aligned} \tag{11}$$

Otrzymaliśmy więc zadanie programowania liniowego ciągłego, mające $L+2$ ograniczenia i $n+L$ zmiennych ciągłych. Zadania tego typu są rozpatrywane (patrz np. Konno, Yamazaki (1991), Speranza (1993, 1994), Takekara (1993)) jako atrakcyjna obliczeniowo alternatywa dla klasycznego modelu z minimalizacją wariancji portfela, wprowadzonego przez Markowitza (patrz Część I oraz Markowitz i in. (1993)).

Pokazuje się, że portfele otrzymywane obydwoma metodami są zbliżone (patrz Konno, Yamazaki (1991), Speranza (1993)). Przy tym rozwiązywanie zadania (11) jest znacznie prostsze niż rozwiązywanie zadania programowania kwadratowego w klasycznym podejściu Markowitza.

To, że portfel jest konstruowany poprzez rozwiązanie zadania programowania liniowego (11), pozwala na wyciąganie pewnych wniosków, wynikających ze znanych faktów w teorii programowania liniowego. Łatwo na przykład pokazać, że istnieje portfel optymalny, będący rozwiązaniem zadania (11), który zawiera co najwyżej $L+2$ różnych rodzajów akcji. Jest to bezpośredni wniosek z faktu, że jeśli istnieje rozwiązanie optymalne zadania (11), to istnieje również tak zwane rozwiązanie optymalne bazowe (patrz np. Garfinkel, Nemhauser i in. (1989), Zorychta, Ogryczak (1981)), a takie rozwiązanie nie może mieć więcej elementów niezerowych niż liczba ograniczeń zadania (równa właśnie $L+2$ w przypadku zadania (11)).

Zadanie (11) można traktować jako zadanie parametryczne z jednym parametrem r. Wartość optymalna zadania, oznaczona przez $\rho(r)$, jest funkcją stopy zwrotu r. Wartość tej funkcji dla argumentu r jest równa minimalnemu ryzyku portfela, który gwarantuje średnią stopę zwrotu równą r. Ze znanych właściwości zadań programowania liniowego wynika, że ρ jest niemalejącą i wypukłą funkcją odcinkowo liniową zmiennej r.

W Dodatku 5.1 podana jest pełna postać omawianego tu zadania konstrukcji portfela wraz z jego rozwiązaniem dla przykładowych danych.

□

3.1.2. Zadania z ilorazową funkcją celu

Rozważmy zadanie z liniowymi ograniczeniami i funkcją celu będącą ilorazem dwóch funkcji liniowych, to znaczy zadanie o postaci

$$\begin{aligned} &\min \frac{(c')^T x}{(c'')^T x} \\ &Ax \le b \\ &l \le x \le u, \end{aligned} \tag{12}$$

gdzie $c', c'' \in \mathbb{R}^n$. Załóżmy ponadto, że $(c'')^T x > 0$ dla rozwiązań dopuszczalnych zadania.

Zadanie (12) można sprowadzić do zadania programowania liniowego poprzez prostą zamianę zmiennych. Wprowadźmy mianowicie dodatkową zmienną $v \geq 0$ i rozważmy następujące zadanie:

$$\begin{aligned} \min\ & (c')^T w \\ & (c'')^T w = 1 \\ & Aw \leq bv \\ & lv \leq w \leq uv \\ & v \geq 0, \end{aligned} \tag{13}$$

gdzie

$$w = x \cdot v\,. \tag{14}$$

Można pokazać, że rozwiązanie optymalne $(w^0, v^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $v^0 > 0$, daje równocześnie rozwiązanie optymalne

$$x^0 = \frac{w^o}{v^0} \tag{15}$$

zadania (12), oraz że wartości optymalne obu zadań są sobie równe. Zastąpienie nieliniowego zadania (12) przez zadanie programowania liniowego (13) jest więc dokonywane poprzez wprowadzenie jednej dodatkowej zmiennej i jednego dodatkowego ograniczenia. Poniższy przykład ilustruje użycie zadania (12) w problemie konstrukcji optymalnego portfela.

Przykład 3. Rozważmy problem wyboru portfela z n możliwych papierów. Podobnie, jak w Przykładzie 2, $x_i \geq 0$ oznacza udział papieru i w portfelu. Załóżmy ponadto, że dysponujemy takimi jak poprzednio obserwacjami stóp zwrotów z poszczególnych papierów w okresach $t = 1,\dots,L$, tzn. r_{it} jest stopą zwrotu z papieru i w okresie t i $\bar{r}_i = \frac{1}{L}\sum_{t=1}^{L} r_{it}$ jest średnią wartością stopy zwrotu w całym obserwowanym przedziale czasu. Tak samo mierzymy również ryzyko portfela wyznaczonego przez wektor $x = (x_1,\dots,x_n)$, to znaczy miarą ryzyka jest wartość funkcji $R(x) = \frac{1}{L}\sum_{t=1}^{L} \max\left\{0, \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i - r_{it})x_i\right\}$. Inna jest natomiast funkcja celu. Chcemy mianowicie minimalizować iloraz ryzyka portfela przez średnią stopę zwrotu z portfela. Przyjęcie takiej funkcji celu prowadzi do konstrukcji tak zwanego *portfela stycznego* (patrz np. Zenios (1993)). Załóżmy ponadto, że interesują nas tylko portfele o dodatniej średniej stopie zwrotu. Zadanie optymalizacji ma więc postać następującą:

$$
\begin{aligned}
&\min \; R(x) / \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i \\
&\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
&\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i > 0 \\
&\qquad x_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,n.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Mamy więc tu do czynienia z zadaniem z dwoma liniowymi ograniczeniami i nieliniową funkcją celu, będącą ilorazem dwóch funkcji: nieliniowej funkcji $R(x)$ i liniowej funkcji, wyrażającej średni zwrot z portfela. Zauważmy, że jeśli $\bar{r}_i > 0$ dla $i = 1,\dots,n$, to drugie ograniczenie zadania może być pominięte. Zadanie (16) może być sprowadzone do zadania programowania liniowego w dwóch krokach. Pierwszy polega na usunięciu nieliniowości związanych z funkcją $R(x)$ w taki sam sposób, jak to zrobiono z zadaniem (9). Należy w tym celu wprowadzić L dodatkowych zmiennych $y_t \geq 0$, $t = 1,...,L$, i zastąpić zadanie (16) równoważnym zadaniem (17):

$$\min \frac{\frac{1}{L}\sum_{t=1}^{L} y_t}{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i - x_{it}) x_i \leq y_t, \quad t = 1,...,L \\
&\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
&\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i > 0 \\
&\quad x_i \geq 0, \quad i = 1,...,n \\
&\quad y_i \geq 0, \quad t = 1,...,L.
\end{aligned} \tag{17}$$

Następny krok polega na przekształceniu zadania (17) do zadania programowania liniowego w taki sam sposób, jak zrobiono to z zadaniem (12) otrzymując zadanie (13). Należy w tym celu wprowadzić dodatkową zmienną ciągłą $v \geq 0$ i dokonać opisanej wyżej zamiany zmiennych zgodnie z zależnościami

$$\begin{aligned}
w_i &= x_i \cdot v, \quad i = 1,...,n, \\
s_t &= y_t \cdot v, \quad t = 1,...,L.
\end{aligned} \tag{18}$$

W wyniku tych operacji otrzymujemy zadanie programowania liniowego (19), które jest równoważne zadaniu (16).

$$
\begin{aligned}
&\min \frac{1}{L}\sum_{t=1}^{L} s_t \\
&\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i w_i = 1 \\
&\sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i - r_{it}) w_i \le s_t, \quad t = 1,\dots,L \\
&\sum_{i=1}^{n} w_i = v \\
&w_i \ge 0, \quad i = 1,\dots,n \\
&s_t \ge 0, \quad t = 1,\dots,L \\
&v \ge 0.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Zauważmy, że na skutek wprowadzenia warunku $\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i w_i = 1$, ograniczenie $\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i w_i > 0$, otrzymywane z przekształcania nierówności $\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i > 0$, może być w powyższym zadaniu pominięte.

Wartości optymalne zadań (16) i (19) są równe. Mając rozwiązanie optymalne zadania (19), tzn. wartości w_i^0, $i=1,\dots,n$, s_t^0, $t=1,\dots,L$, oraz $v^0 > 0$, możemy wyznaczyć optymalny skład portfela dla zadania (16) zgodnie z zależnościami

$$
x_i^0 = w_i^0 / v^0 \quad \text{dla} \quad i = 1,\dots,n. \tag{20}
$$

Zmienne s_t, $t = 1,\dots,L$, są, jak poprzednio, zmiennymi pomocniczymi. Ich wartości optymalne są potrzebne jedynie do wyznaczenia optymalnej wartości funkcji celu.

W Dodatku 5.2 zamieszczone są wydruki sformułowania oraz rozwiązania omawianego tu zadania dla przykładowych danych.

□

IBS Seria

44006

Wspomaganie decyzji inwestycyjn

Roman Kulikowski,
Marek Libura,
Leon Słomiński

W książce omawiane są zagadnienia z obszaru analizy finansowej i teorii portfela inwestycyjnego z wykorzystaniem komputerowej metodologii wspomagającej podejmowanie decyzji.

Książka może być przedmiotem zainteresowania zarówno decydentów, podejmujących decyzje finansowe, jak i inwestorów giełdowych i doradców finansowych oraz studentów i doktorantów.

Monografia pozwoli głębiej i pełniej zrozumieć złożoną problematykę finansów i inwestycji, z uwzględnieniem różnych form ryzyka i podejmować w działalności praktycznej decyzje optymalne.

Rozważane są zasady konstruowania modeli matematycznych opisujących rynki kapitałowe – kształtowanie się cen oraz oczekiwanych zwrotów nakładów inwestycyjnych – jak również modeli działalności inwestora w postaci tzw. funkcji użyteczności.

ISBN 83-85847-09-X

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 37-35-78 w. 241 e-mail: kotuszew@ibspan.waw.pl