POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Roman Kulikowski,
Marek Libura,
Leon Słomiński

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 21

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 1998

Roman KULIKOWSKI
Marek LIBURA
Leon SŁOMIŃSKI

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. Maria Podgórska
Doc. dr hab. Leszek S. Zaremba

Książka powstała w wyniku realizacji projektu badawczego finansowanego przez KOMITET BADAŃ NAUKOWYCH

ISBN 83-85847-09-X
ISSN 0208-8029

Część II.
Modelowanie dyskretne i optymalizacja w analizie portfelowej na rynku papierów dłużnych

centowania zmiennego jest zwykle stopa procentowa LIBOR, dla odpowiedniego okresu czasu (np. LIBOR dla jednego miesiąca). Możliwa jest więc sytuacja, w której każda ze stron zaciąga pożyczkę, o tej samej wartości, na rynku, na którym jej pozycja jest korzystniejsza, a następnie uzgadniają one warunki wymiany między sobą odsetek, tak aby wypadkowe obciążenie odsetkami było korzystne dla każdej ze stron. Potencjalne warunki dla takiej umowy mają miejsce wówczas, gdy zachodzi nierówność $(a - b) > 0$, gdzie a jest różnicą oprocentowania stałego, według którego strony mogą zaciągać kredyt, a b jest podobną różnicą dla rynku oprocentowania zmiennego. W przypadku kontraktu SWAP na waluty, strony umawiają się co do wymiany odsetek i kapitałów, od którego są one liczone, przy czym kapitał jest wyrażony w różnych walutach (np. w dolarach i jenach). Wymiana walut między stronami ma miejsce na początku i na końcu obowiązywania kontraktu.

W książce Hulla (1993) pokazano, że jeżeli można zaniedbać ryzyko niewypłacalności stron, to kontrakt SWAP na stopy procentowe (podobnie jak kontrakt na waluty) można zastąpić albo kombinacją pozycji długiej i pozycji krótkiej dla pewnej obligacji, albo jako kompozycję (portfel) kontraktów FORWARD. SWAP może mieć wbudowaną opcję polegającą na prawie do przedłużenia lub skrócenia kontraktu przez jedną ze stron. Rynki oferują także kontrakt SWAPTION, który jest opcją na kontrakt SWAP.

2. Strumień wpływów. Struktura stóp procentowych

Każda inwestycja może być traktowana jako bieżące wyrzeczenie (rezygnacja z wolnej od ryzyka konsumpcji obecnej) dla korzyści przyszłych, których wysokość jest niepewna (możliwa jest także strata). Wyrzekając się konsumpcji bieżącej, inwestor chce określonej zapłaty - wyrzeczenie ma swoją cenę. Tą ceną jest dla inwestora **stopa zwrotu** z inwestycji (pieniężny lub procentowy przyrost w odniesieniu do wartości czasu i subiektywnej oceny skali wyrzeczenia). Ta stopa zwrotu może mieć charakter stopy pożądanej lub prognozowanej. Inwestor może odstąpić od inwestycji, jeżeli prognozowana (możliwa do uzyskania) stopa zwrotu jest mniejsza od stopy pożądanej.

Przyjmuje się, że stopę zwrotu kształtują dwa zasadnicze czynniki: cena za upływ czasu i cena za ryzyko związane z inwestycją. W uproszczonym ujęciu teoretycznym stopa zwrotu jest kombinacją czterech składowych: **realnej stopy zwrotu** (wynikającej z rynkowej gry podaży i popytu dla pieniądza), **stopy inflacji** (bardzo ważnej dla gospodarek o niestabilnym i wysokim poziomie inflacji), **ceny za ryzyko** i wyróżnionej jego składowej - **ceny za płynność**. W przypadku rynku papierów dłużnych wpływ czasu i różnych postaci ryzyka na zwrot ma znaczenie szczególne. Obydwom tym zagadnieniom poświęcamy kolejne paragrafy.

2.1. Strumień wpływów

Inwestycja w papiery dłużne polega na zakupie instrumentów, które gwarantują zakontraktowany strumień wpływów $\mathbf{S}_T$, w okresie do zapadalności T. Dla pojedynczego papieru dłużnego, w najprostszym przypadku, strumień ten można przedstawić w postaci ciągu zakontraktowanych wpływów o wartości W_t: $\mathbf{S}_T = \{W_t, \mid t = 1,2,...,T\}$. Indeks t może odpowiadać różnym okresom czasu: tydzień, miesiąc, kwartał, rok - zależnie od ustalonej częstości wpływów.

Dla trzyletnich obligacji polskiego Skarbu Państwa, zmienne odsetki są wypłacane kwartalnie i ich wartość zależy od pewnego indeksu zbudowanego na cenie bonów skarbowych, a w terminie zapadalności inwestor otrzymuje ostatni kupon odsetkowy plus wartość nominalną obligacji. Dla obligacji stałoodsetkowych, wartość kuponu jest identyczna w kolejnych okresach.

Bon skarbowy ma tylko jedną wartość wpływu, W_T, równą swojej wartości nominalnej wypłacanej w terminie wykupu. Strumień wpływów z inwestycji w hipoteczne papiery dłużne i ich papiery pochodne (instrumenty oferowane w szerokim wyborze przez wyspecjalizowane agencje mające gwarancje skarbu U.S.A.) składa się z comiesięcznych odsetek o stałej lub zmiennej wartości o różnych proporcjach wpływu z amortyzacji kapitału i z odsetek.

Strumień pieniężny inicjuje emitent oferując na rynku papiery dłużne o określonych parametrach. Jeżeli $W_t = W = const$, dla $t = 1,2,...,T\text{-}1$, jak ma to miejsce dla obligacji stałoodsetkowych, to mówimy o strumieniu jednorodnym. Jeżeli strumień może ustać przed okresem zapadalności T, jak to ma miejsce dla obligacji z opcją wykupu, to mówimy o strumieniu z zanikiem. Dla odróżnienia strumieni o tym samym okresie zapadalności T, ale o różnych W_t, będziemy używać indeksu i: $\mathbf{S}_{iT} = \{W_{it}, | \, i = 1,2,...,I; \, t = 1,2,...,T\}$.

Nabywca papierów - inwestor nabywa papiery na rynku pierwotnym lub na rynku wtórnym. Te okoliczności oraz obecny i przewidywany stan rynku decydują o cenie instrumentu. Gwarancje emitenta dotyczą terminów i wartości wpływów. Inwestor ponosi ryzyko związane ze sprzedażą papieru przed terminem wykupu oraz z reinwestycją poszczególnych składowych strumienia. Parametry gwarantowane przez emitenta będziemy nazywać parametrami pierwotnymi. Inwestor, dla własnej wyceny wartości inwestycji jak również dla oceny ryzyka i spodziewanego lub rzeczywistego zysku, posługuję się wieloma miernikami mającymi charakter parametrów wtórnych - korzystających z parametrów pierwotnych i oddziaływań rynku.

Papiery nabyte przez inwestora tworzą portfel inwestycyjny - obiekt zarządzania ukierunkowany na uzyskanie założonych celów. Strumień wpływów z portfela jest liniową superpozycją wpływów z tworzących go instrumentów. Parametry portfela są addytywne względem parametrów poszczególnych instrumentów, co ułatwia obliczenia.

Strumień $\mathbf{S}_T = \{W_t, | t = 1,2,...,T\}$ można przedstawić jako zbiór T-wymiarowych wektorów, z których każdy ma postać: $\mathbf{W_t} = W_t \times \mathbf{E_t}$, gdzie $\mathbf{E_t}$ jest wektorem o składowej równej 1 na pozycji t, oraz wartościach równych 0 dla pozostałych składowych. Taki zabieg formalny pozwala dekomponować obligację kuponową na zbiór obligacji bezkuponowych, przy czym każda obligacja w zbiorze może być dyskontowana niezależnie, według stopy procentowej stosownej dla okresu zapadalności – terminu płatności kuponu.

Dekompozycja formalna jest stosowana do analizy warunków arbitrażu dla instrumentów, do konstruowania funkcji czasowej stóp procentowych oraz do innych celów analitycznych. Jednocześnie mechanizm dekompozycji strumienia wpływów dał impuls do wprowadzenia na rynek papierów dłużnych, instrumentów o ogólnej nazwie „strips" - papiery rozwarstwione, ich składowe będziemy nazywać **dekomponentami**.

Regularny obrót papierami rozwarstwionymi zapoczątkowały banki *Merrill Lynch* i *Salomon Brothers*, wprowadzając w 1982 roku, na rynku amerykańskim, dekomponenty obligacji skarbowych nadając im dźwięczne skróty - TIGRs (*Treasury Income Growth Receipts*) i CATS (*Certificates of Accrual on Treasury Securities*). Mechanizm polegał na zdeponowaniu zakupionych obligacji skarbowych na rachunku powierniczym. Następnie banki wyemitowały świadectwa reprezentujące odrębne prawa do każdego kuponu i do nominału odpowiedniej obligacji. Nowość spotkała się z ogromnym zainteresowaniem i rynek osiągnął dużą płynność.

W 1985 roku do gry włączył się Skarb Federalny wprowadzając oficjalny program STRIPS - *Separate Trading of Registered Interest and Principal Securities*. Wszystkie nowe emisje kuponowych obligacji skarbowych, o czasie zapadalności większym od 10 lat, są dopuszczone do obrotu w postaci dekomponentów. Od początku lat dziewięćdziesiątych dekomponenty pojawiły się na giełdach europejskich (Francja - 1991, Belgia - 1992, Holandia - 1993).

Podamy przykłady strumieni wpływów dla najważniejszych instrumentów rynku papierów dłużnych: obligacji i instrumentów hipotecznych.

Przykłady strumieni wpływów z obligacji.

Oznaczenia:

N - wartość nominalna obligacji,

C_t - wartość kuponu, $t = 1,2, ...,T$,

T - liczba lat do zapadalności,

y - stopa dochodu w okresie do zapadalności.

Obligacja bezkuponowa (bon skarbowy). W tym przypadku $C_t = 0$ dla wszystkich t. Cena obligacji w chwili emisji

$$P = \frac{N}{(1+y)^T} \tag{11}$$

Obligacja wieczysta. Jeżeli C jest wartością strumienia otrzymywanego przez inwestora w regularnych odstępach czasu, zaś y jest stałą stopą dochodu, to wartość obligacji przedstawia wzór

$$P = C/y \tag{12}$$

Obligacja prosta (bezopcyjna). $C_t = C$, dla wszystkich t. Cena obligacji

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+y)^t} + \frac{N}{(1+y)^T} = C\left[\frac{1 - \frac{1}{(1+y)^T}}{y}\right] + \frac{N}{(1+y)^T} \tag{13}$$

Strumień pieniężny ma na ogół większą częstość wpływów niż jeden raz w roku. Dla przykładu, na północnoamerykańskim rynku obligacji skarbowych standardem jest wypłata kuponu dwa razy w roku, w odstępie półrocznym. Należy wyraźnie odróżnić dwa sposoby postępowania przy dokonywaniu zamiany rocznej stopy dochodu y na stopę y_m, która odpowiada m-krotnej kapitalizacji odsetek (kuponów) w roku. Pierwszy sposób, nie całkiem poprawny z punktu widzenia teorii, ale dominujący wśród praktyków, polega na tym, że w mianowniku wzoru (13) zamiast y występuje stopa dochodu y_m obowiązująca dla m-tej części roku, a wartość stopy dochodu w skali roku $y = my_m$. Drugi sposób uwzględnia efekt procentu składanego dla reinwestycji odsetek otrzymywanych częściej niż raz w roku, dając w rezultacie stopę zwrotu (w skali roku) $y' > y$, (szczegóły można znaleźć w pracach Jajugi i Jajugi (1996) oraz *The Handbook* (1995)). W przypadkach dotyczących praktyki rynku obligacji będziemy się posługiwać sposobem pierwszym.

Wartość stałokuponowej obligacji prostej w miesiącu między momentami wypłaty kuponu (kupon płatny dwa razy w roku):

$$P_{mk} = \left(1+\frac{y}{2}\right)^{-\frac{k}{6}}\left(P_{m-1}+\frac{C}{2}\right) \tag{14}$$

gdzie:

$$P_{m-1} = \frac{C}{y}\left[1-\left(1-\frac{y}{2}\right)^{-(m-1)}\right]+N\left(1+\frac{y}{2}\right)^{-(m-1)} \tag{14a}$$

$m = 2T,\ k = 1,\ldots,5$. Wzór jest prawdziwy przy założeniu, że obligacja została nabyta dokładnie k miesięcy przed terminem wypłaty pierwszego kuponu.

Obligacja o zmiennym kuponie. Podamy wzór na wartość obecną strumienia obligacji zmiennokuponowej w postaci wygodnej do użycia zarówno dla obligacji o stałym i zmiennym kuponie, jak i uwzględniający zmianę wartości obligacji wynikającej z kumulowania się odsetek od kuponu, narastających w okresie między wypłatami. Skumulowana cena obligacji ma postać $P = P' + fC$, gdzie P' jest ceną „czystą" - bez odsetek od kuponu, narosłych od ostatniej jego wypłaty, a f jest stosunkiem czasu, który upłynął od ostatniej wypłaty do czasu między kolejnymi wypłatami (przyjmujemy, że odsetki narastają liniowo w funkcji czasu). W tej konwencji fC jest wartością odsetek od kuponu narosłych od ostatniej wypłaty do danego momentu czasu. Symbolem y_s oznaczymy skorygowaną stopę dochodu w okresie do zapadalności, uwzględniającą narastające odsetki w strumieniu pieniężnym obligacji; gdy narastające odsetki nie są uwzględniane to $y_s = y$. Przy tych założeniach wartość obligacji między kolejnymi wypłatami kuponu przyjmie postać:

$$P = \sum_{i=1}^{T} \frac{C}{\left(1+y_s\right)^{(i-f)}} + \frac{N}{\left(1+y_s\right)^{(T-f)}} \tag{15}$$

Obligacja opcyjna. Rozważania ograniczymy do najczęściej spotykanej sytuacji, gdy obligacja ma dołączoną opcję wcześniejszego wykupu. Jeżeli przyjmiemy za podstawę obligację o stałym kuponie z opcją wykupu, to strumień wpływów ma postać: $\mathbf{S}_T = \{W_t = C \mid t = 1,2,\ldots,T_W\}$ i $\mathbf{S}_T = \{W_t = N' + C \mid t = T_W;\ W_t = 0 \mid t > T_w\}$, gdzie $T_w \geq T_{min}$ jest terminem ewentualnego wykupu, T_{min} jest najwcześniejszym możliwym terminem wykupu, przewidzianym w warunkach emisji, a N' jest wartością, którą płaci emitent przy wykupie (często N' jest równe wartości nominalnej obligacji). Rzeczywisty wykup zależy od relacji między stopą dochodu i stopą oprocentowania w terminie możliwym dla wykupu.

Przykład strumienia wpływów z papierów długu hipotecznego. Strumień wpływów dla klasycznego dłużnego instrumentu hipotecznego ma postać: $W_t = W$ dla wszystkich wartości t, przy czym standardem jest wpływ comiesięczny. Jeżeli r oznacza stopę dochodu dla okresu jednego roku, to miesięczna stopa dochodu wynosi $r/12$ i wartość strumienia określa wzór

$$P = W \sum_{t=1}^{12T} \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-t} \tag{16}$$

W literaturze (np. Bierwag (1987)), wzór (16) ma często następującą postać:

$$P = W \frac{12}{r} \left[1 - \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-12T} \right] = AW \tag{17}$$

gdzie współczynnik A to znana funkcja finansowa

$$A = \frac{12}{r} \left[1 - \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-12T} \right] = \frac{P}{W} \tag{18}$$

Przykłady innych typów papierów długu hipotecznego, odpowiednie definicje strumienia i wzory na obliczanie wartości zdyskontowanej można znaleźć w Bierwag (1987), Fabozzi (1993).

2.2. Stopy procentowe

Przypomnijmy ważniejsze stopy dochodu rozpatrywane w kontekście ich użycia do dyskontowania strumienia pieniężnego. Niech będzie dany strumień pieniężny W_t, $t = 1,2,...,T$, który wpłynie do inwestora w wyniku zakupu określonego papieru dłużnego.

Stopa dochodu w okresie do zapadalności (wewnętrzna stopa dochodu) jest to wartość y, która zapewnia równość sumy wartości zdyskontowanych składowych strumienia z jego wartością obecną. Stopę tę znajdujemy rozwiązując równanie:

$$W_{ob} = \sum_{t=1}^{T} W_t (1+y)^{-t}.$$

Mimo znanych niedostatków, wewnętrzna stopa dochodu jest, w praktyce, najpowszechniej stosowana do dyskontowania wpływów.

Natychmiastowa t-okresowa stopa dochodu jest to stopa dochodu dla inwestycji dokonanej dzisiaj, polegającej na zakupie strumienia, który pojawi się po t okresach czasu. Innymi słowy, t-letnia stopa natychmiastowa jest to stopa obowiązująca dla inwestycji dokonanej w danej chwili na okres t lat, i w międzyczasie nie pojawi się żaden inny wpływ. Klasycznym przykładem natychmiastowej, obserwowanej stopy procentowej jest stopa dla prostego (bezopcyjnego), zdyskontowanego (bezkuponowego) papieru dłużnego.

Odsunięta (***terminowa***) ***stopa dochodu***[3] jest to stopa dla inwestycji, o której zadecydowano dzisiaj (zwykle przyjmuje się, że jest to początek osi czasu), że zostanie uruchomiona τ lat później i która wygaśnie po następnych j okresach. Odsunięta stopa dochodu jest implikowana bezpośrednio przez stopę natychmiastową.

Między tymi stopami zachodzą związki, ilustrowane przez poniższe wzory, w których $r_{\tau+j}$ jest natychmiastową stopą procentową dla przedziału czasu $[0,\tau+j]$, a $f_{\tau,j}$ jest stopą odsuniętą obowiązującą dla przedziału czasu $[\tau,\tau+j]$:

$$f_{\tau,j} = \left[\frac{(1+r_{\tau+j})^{\tau+j}}{(1+r_\tau)^{\tau}}\right]^{1/j} - 1 \qquad (19)$$

---

[3] W literaturze polskiej dotyczącej tematyki stóp procentowych najczęściej posługuje się nazwą "*terminowa stopa zwrotu*". Nam ta nazwa wydaje się niezbyt adekwatna do istoty problemu: chodzi o stopę, która ma obowiązywać od pewnego przyszłego momentu czasu. Nazwa: "*odsunięta stopa zwrotu*" jest propozycją, która będzie stosowana zamiennie.

Niech r będzie stopą natychmiastową obowiązującą dla *T*-letniej inwestycji, a r^* - stopą natychmiastową dla inwestycji T^*-letniej, $T^* > T$. Odsuniętą stopę dochodu f_{T,T^*}, dla przedziału czasu $[T, T^*]$ i procentu składanego w sposób ciągły, określa wzór:

$$f_{T,T^*} = \frac{r^*T^* - rT}{T^* - T} \tag{20}$$

Wzór ten zapiszemy w nieco innej postaci:

$$f_{T,T^*} = r^* + (r^* - r)\frac{T}{T^* - T} \tag{21}$$

W granicy, gdy T zmierza do T^* (r^* zmierza do r) otrzymamy ***chwilową stopę dochodu*** dla momentu T: $r + T(\delta r/\delta T)$. Łatwo zauważymy, że między stopami procentowymi odsuniętymi oraz stopami natychmiastowymi instrumentów prostych bezkuponowych i kuponowych zachodzą ogólne relacje, które pokazuje Rysunek 6. Zależności między stopami natychmiastowymi i odsuniętymi możemy nadać jeszcze inną, wygodną w praktyce, zależność:

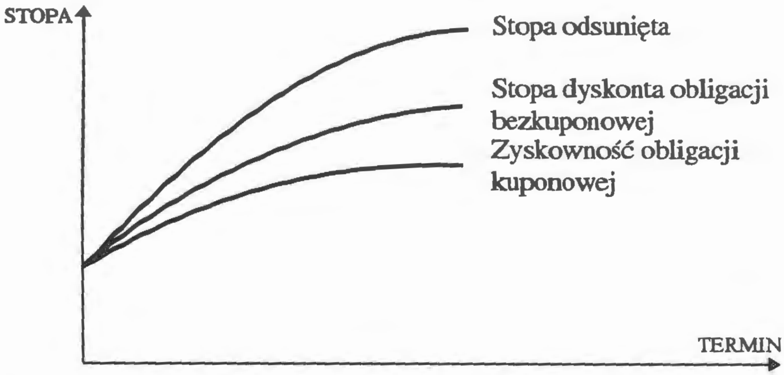
$$\begin{aligned}(1 + r_T)^T &= (1 + r_{T-j})^{T-j}(1 + f_{T-j,j}) = \\ &= (1 + r_1) \times (1 + f_1) \times (1 + f_{1,2}) \times \ldots \times (1 + f_{1,T-1})\end{aligned} \tag{22}$$

gdzie:

r_T - jest T - okresową stopą natychmiastową,

$f_{T-j,\,j}$ - jest stopą odsuniętą obowiązującą w przedziale czasu $[T-j, T]$.

Stopa dochodu w okresie do zapadalności dla obligacji kuponowej pozostaje w oczywistym związku ze stopami: natychmiastową i odsuniętą. Zadając stopy natychmiastowe lub stopy odsunięte, stopę dochodu w okresie do zapadalności możemy obliczyć jednoznacznie.



Rys. 6. Relacja między stopami dochodu dla stóp rosnących

W Tabeli 1 podajemy przykład obliczonych wartości obecnych strumieni, przy założeniu wartości stóp natychmiastowych w czasie, dla dwóch obligacji o różnych kuponach, ale identycznych okresach do zapadalności, wraz z odpowiednimi, do wartości zdyskontowanych, stopami dochodu w okresie do zapadalności.

Tabela 1. Stopa dochodu w okresie do zapadalności dla zadanych wartości stopy natychmiastowej

Rok	Stopa natychmiastowa	Wpływ z obligacji o 10% kuponie		Wpływ z obligacji o 15% kuponie	
		Wartość przyszła	Wartość obecna	Wartość przyszła	Wartość obecna
1	10%	$ 10,00	$ 9,09	$ 15	$ 13,64
2	11%	10,00	8,12	15	12,17
3	12%	10,00	7,12	15	10,68
4	13%	110,00	64,47	115	70,53
		$ 91,80			$107,02

Stopa dochodu w okresie do zapadalności dla obligacji o 10% kuponie = 12,75%

Stopa dochodu w okresie do zapadalności dla obligacji o 15% kuponie = 12,66%

Zauważmy, że stopa w okresie do zapadalności nie jest wartością średnią stóp natychmiastowych, oraz że stopy dochodu w okresie do zapadalności są różne dla tych samych okresów zapadalności.

2.3. Funkcje czasowe stóp procentowych

Poprawna wycena wszelkich, rozłożonych w czasie, strumieni wpływów wynikających z zakupu papierów dłużnych nie jest możliwa bez znajomości wartości stopy dyskonta, lub stopy dochodu, dla wszystkich momentów czasu, które definiują strumień. Jest wiele powodów, dla których zarówno praktycy jak i teoretycy, zajmujący się problematyką uwarunkowań, obserwacji i prognozowania zachowania się stóp procentowych, w horyzoncie czasu przekraczającym dziesięciolecia, nie mogą uważać, że problem znalazł zadawalające rozwiązanie. Inwestorzy mogą mówić o wymaganej stopie dochodu (tj. stopie poniżej, której inwestor nie chce inwestować), o oczekiwanej (spodziewanej) stopie dochodu z inwestycji, o obserwowanej na rynku stopie dochodu itp. Z punktu widzenia praktyki, najbardziej interesująca jest ta ostatnia.

Z poprzedniego paragrafu wnioskujemy, że funkcja czasowa stóp procentowych może być definiowana na podstawie stóp dochodu w okresie do zapadalności, stóp natychmiastowych lub stóp odsuniętych.

Niedostatki funkcji opartej na stopach dochodu w okresie do zapadalności są oczywiste. Wartość obecna P obligacji stałokuponowej jest związana z jej wartością nominalną N, wartością kuponu C, płaconego przez T okresów czasu, i stopą dochodu do zapadalności y, następującą zależnością:

$$P=\sum_{t=1}^{T}\frac{C}{(1+y)^t}+\frac{N}{(1+y)^T}=C\left[\frac{1-\frac{1}{(1+y)^T}}{y}\right]+\frac{N}{(1+y)^T} \tag{23}$$

lub jej postacią równoważną, wygodniejszą do obliczeń z użyciem kalkulatora:

$$P=\frac{C}{y}\left[1-(1-y)^{-T}\right]+N(1+y)^{-T} \tag{24}$$

Obserwując obligacje, ponumerujemy je indeksem $i=1,2,...$, o różnych okresach do zapadalności T_i, możemy znaleźć (rozwiązując numerycznie powyższe równanie) odpowiednie wartości y_i, otrzymując funkcję dochodu reprezentowaną stopami dochodu w okresie do zapadalności. W tym przypadku:

1. Dla danej obligacji stopa dochodu jest identyczna dla wszystkich momentów płacenia kuponu;

2. Dla tego samego okresu do zapadalności, obligacje o różnych kuponach dadzą różne wartości stopy dochodu y_i.

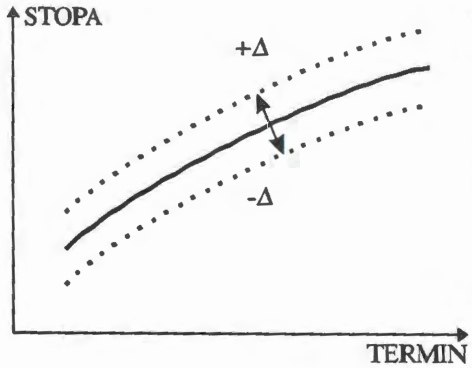
Z tego powodu znacznie wygodniejsze są stopy natychmiastowe. Szczególną uwagę skupiają inwestorzy na stopach natychmiastowych dla płynnych papierów skarbowych. Wynika to z oczywistego dążenia do obserwacji stóp dochodu zależnych wyłącznie od upływu czasu. Natychmiastowe stopy procentowe dla skarbowych papierów dłużnych stanowią odniesienie dla stóp procentowych instrumentów nieskarbowych i instrumentów opcyjnych

Zbiór funkcji $r(t,T)$, z których każda odwzorowuje zachowanie się natychmiastowych stóp dochodu dla wolnych od ryzyka niewypłacalności skarbowych papierów dłużnych, w funkcji czasu kalendarzowego t i okresu do zapadalności T, nazywać będziemy ***strukturą czasową stóp procentowych***. Na osi t odkładany jest czas kalendarzowy, na osi T - czas do zapadalności, zaś na osi r odkładane są wartości natychmiastowej stopy procentowej dla przedziału czasu do zapadalności. W każdym punkcie $t = const$, będzie tyle funkcji $r(t = const, T)$ ile jest w tym czasie na rynku, papierów, dla których $T > 0$.

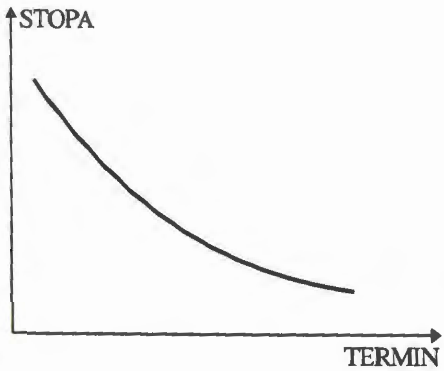
Niech $d_t = [1 + r(0,t)]^{-t}$, będzie funkcją dyskonta dla strumienia W_t, $t = 1,2,...,T$, gdzie $r(0,t)$ jest natychmiastową stopą procentową dla okresu czasu $[0, t]$ dyskontującą W_t. Zbiór wartości: $r(0,1)$, $r(0,2)$, ..., $r(0,t)$, reprezentuje funkcję czasową natychmiastowych stóp procentowych. Jeżeli $r(0,t) > r(0,t\text{-}1)$ dla wszystkich t, to mamy funkcję wklęsłą (Rysunek 7a). Jeżeli $r(0,t) < r(0,t\text{-}1)$ dla wszystkich t, to funkcja jest funkcją wypukłą (mówi się też o niej funkcja odwrócona, Rysunek 7b). Jeżeli $r(0,t) = r(0,t\text{-}1)$ dla wszystkich t, to funkcja stóp procentowych jest tzw. funkcją płaską (Rysunek 7c), co oznacza, że $r(0,t) = y$, dla wszystkich t. Możliwe są wszelkie inne kształty funkcji stóp, w tym często spotykana funkcja tzw. wygięta (Rysunek 7d).

Rysunki 7a i 7c pokazują funkcje stóp procentowych przesunięte równolegle (linie przerywane) o Δ punktów bazowych (p.b, punkt bazowy = 10^{-4}), w górę i w dół, w stosunku do funkcji początkowej (linia ciągła). Jest to jedno z najprostszych założeń o zachowaniu się funkcji stóp procentowych, bardzo ułatwiające analizę zmian wartości instrumentów zależnych od stóp procentowych. Przyjęcie do analizy stopy dochodu w okresie do zapadalności oznacza przyjęcie założenia o płaskości funkcji stóp procentowych w czasie.

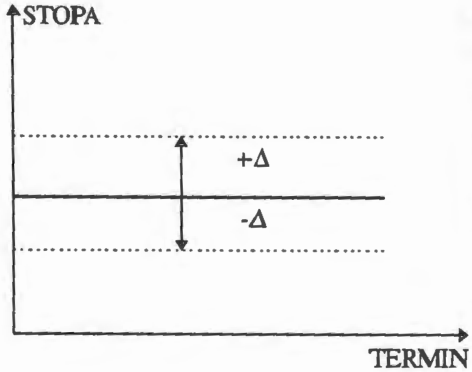
Referencyjną funkcją czasową natychmiastowych stóp procentowych będziemy nazywać funkcję $r(t{=}const, T)$, przedstawiającą, dla *danego momentu czasu* t, zależność natychmiastowej stopy procentowej r od okresu do zapadalności T i obowiązującą dla **bezkuponowych** skarbowych papierów dłużnych. Funkcja ta odgrywa zasadniczą rolę w procesie wyceny i analizy przydatności papierów w portfelu inwestora, jak również w podejmowaniu (przede wszystkim) długofalowych decyzji inwestycyjnych.



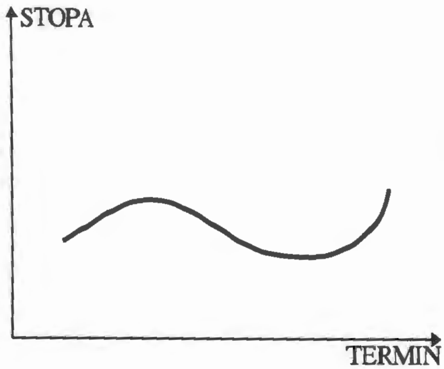
Rys. 7a. Funkcja wklęsła stóp procentowych, równoległe przesunięcie



Rys 7b. Odwrócona funkcja stóp procentowych



Rys. 7c. Funkcja płaska, równoległe przesunięcie



Rys. 7d. Zmienna funkcja stóp procentowych

Trudności z wyznaczaniem funkcji referencyjnej dla stóp procentowych wynikają z faktu, że bezkuponowe papiery dłużne (bony skarbowe i obligacje zdyskontowane) są zasadniczo dostępne dla terminów zapadalności do jednego roku.

2.4. Metoda dekomponentów. Obliczona funkcja stóp procentowych

Jednym ze sposobów ominięcia trudności wynikających z ograniczonego przedziału czasowego dostępnych na rynku zdyskontowanych skarbowych papierów dłużnych jest wykorzystanie dekompozycji bezopcyjnych kuponowych obligacji skarbowych na składowe bezkuponowe i konstrukcja tzw. ***wyliczonej (teoretycznej) krzywej stóp natychmiastowych*** (*Theoretical spot - yield curve*).

Przedstawimy metodę obliczania takiej funkcji - metodę „*samowyciągania*", nazywaną w literaturze anglosaskiej *bootstrapping method*[4]. U podstaw metody leży założenie o rynku wolnym od arbitrażu, co pozwala zakładać równość cen obligacji kuponowej i jej zdekomponowanego odpowiednika. W praktyce do konstrukcji omawianej funkcji brana jest pod uwagę rentowność bonów skarbowych z najnowszych aukcji i dostępne na rynku instrumenty skarbowe o terminie zapadalności większym od jednego roku, np. instrumenty typu STRIPS, o których była mowa w punkcie 2.1.

Użyjemy oznaczeń:

P_T - cena skarbowej obligacji kuponowej o T okresach do zapadalności, której wartość nominalna wynosi N;

C - wartość kuponu wypłacanego na koniec każdego okresu;

r_T - wartość (szukana) natychmiastowej stopy dochodu, przy założeniu znajomości r_t dla $t = 1,2, ..., T$-1.

Rozwiązując równanie:

$$P_T = C\sum_{t=1}^{T-1}\frac{1}{(1+r_t)^t}+\frac{C+N}{(1+r_T)^T}, \qquad (25)$$

---

[4] W charakterze ciekawostki zauważmy, że w radiotechnice nieliniowej - więc w zupełnie innym kontekście - ten sam termin jest używany do opisu procesu wzbudzania się drgań w układach.

względem nieznanej wartości r_T, otrzymamy:

$$r_T = \left(\frac{C+N}{P_T - C \sum_{t=1}^{T-1} \frac{1}{(1+r_t)^t}} \right)^{1/T} - 1 \qquad (26)$$

Należy zwrócić uwagę, że ten prosty sposób napotyka w praktyce na trudności spowodowane m.in.: horyzontem terminów wykupu dla bonów skarbowych, ograniczonym w zasadzie do jednego roku; mniejszą, w porównaniu do obligacji kuponowych, płynnością rynku dekomponentów; możliwym nierównomiernym pokryciem całego interesującego nas przedziału terminów do zapadalności i innymi zaburzeniami w obrocie instrumentów zdekomponowanych, co może powodować istotną rozbieżność między obliczoną a rzeczywistą funkcją czasową natychmiastowych stóp procentowych.

Przykład obliczenia teoretycznej funkcji natychmiastowych stóp procentowych obliczonej metodą „samowyciągania". Dane do tych obliczeń są hipotetyczne. Wartości w ostatniej kolumnie to teoretyczne natychmiastowe stopy dochodu, obliczone według wyżej opisanego sposobu postępowania, z wykorzystaniem wzoru (26).

Tabela 2. Dane do obliczenia i otrzymane wartości natychmiastowej stopy dochodu.

Nr	Okres do zapadalności	Stopa odsetkowa	Wewnętrzna stopa dochodu[5]	Natychmiastowa stopa dochodu	Cena rynkowa
1	0,50 roku	0,0000	0,080	0,08000	96,15
2	1,00	0,0000	0,083	0,08300	92,19
3	1,50	0,0850	0,089	0,08930	99,45
4	2,00	0,0900	0,092	0,09247	99,64
5	2,50	0,1100	0,094	0,09468	103,49
6	3,00	0,0950	0,097	0,09787	99,49

Obliczenia.

1. Pierwsze dwa instrumenty - bony skarbowe, traktujemy jak krótkoterminowe, zerokuponowe obligacje. Natychmiastowe stopy dochodu (rentowności), odpowiadające ich okresom zapadalności, oblicza się w sposób standardowy. Niech r oznacza rentowność równoważną w skali roku. Mamy zatem:

   $r = \frac{(N - P)}{P}\frac{360}{m}$ = 0,0400x2 = 0,08000, dla pierwszego instrumentu

   i $r = \frac{(N - P)}{P}\frac{360}{365}$ = 0,083555, dla - drugiego; gdzie m jest liczbą dni do zapadalności ($1 \leq m \leq 360$). Zatem: 8% i 8,3% to odpowiednio - półroczna (w skali roku) i roczna natychmiastowe stopy procentowe.

2. Cena obligacji 1,5 rocznej powinna być równa zdyskontowanej wartości obecnej strumienia jej wpływów: $w_i = (0{,}085/2)100 = 4{,}25$

[5] Pierwsze dwa instrumenty to bony skarbowe, ich wewnętrzne stopy dochodu to równoważne dla obligacji stopy rentowności obliczone zgodnie z dość powszechnie obowiązującym standardem (360 dni w roku do obliczenia stopy rentowności i 365 dni w roku do obliczenia stopy równoważnej).

dla $i = 1, 2$ (po pół roku i po roku) oraz $w_3 = (0{,}085/2)+100 = 104{,}25$ (po 1,5 roku). Równanie wiążące zdyskontowany strumień z ceną obligacji ma postać

$$\frac{4{,}25}{(1+0{,}0400)^1}+\frac{4{,}25}{(1+0{,}0415)^2}+\frac{104{,}25}{(1+r'_{sz})^3}=96{,}15$$

gdzie: 0,0400 i 0,0415 to połowy, odpowiednio, półrocznej (w skali roku) i rocznej natychmiastowej stopy dochodu, zaś r'_{sz} to połowa szukanej 1,5-rocznej, wyrażonej w skali roku, natychmiastowej stopy dochodu. Rozwiązując równanie otrzymamy: $r'_{sz} = 0{,}04465$. Mnożąc ostatnią wartość przez 2 otrzymamy $r_{sz} = 0{,}0893$, lub 8,93% - stopę dochodu równoważną dla obligacji, która jest, w tym przypadku, teoretyczną półtoraroczną natychmiastową stopą dochodu.

3. Obliczenia dla kolejnych obligacji kuponowych przebiegają w sposób podobny do podanego wyżej.

   a) Obligacja dwuletnia.

   Strumień wpływów: $w_i = (0{,}090/2)100 = 4{,}50$ dla $i = 1, 2, 3$ oraz $w_4 = 104{,}50$. Odpowiednie, podzielone przez dwa, wartości stóp dochodu w okresie do zapadalności, to: 0,0400, 0,0415, 0,04465, oraz szukane r'_{sz}. Równanie dla wyznaczenia r'_{sz} przedstawia się jak niżej

$$\frac{4{,}5}{(1{,}0400)^1}+\frac{4{,}5}{(1{,}0415)^2}+\frac{4{,}5}{(1{,}04465)^3}+\frac{104{,}5}{(1+r'_{sz})^4}=99{,}64$$

   Rozwiązanie: $r'_{sz} = 0{,}046235$, $r_{sz} = 2r'_{sz} = 0{,}09247$ lub 9,247%, w skali roku.

   b). Obligacja 2,5-letnia. $r_{sz} = 2r'_{sz} = 0{,}09468$ lub 9,468 %, w skali roku.

   c). Obligacja 3-letnia. $r_{sz} = 2\,r'_{sz} = 0{,}09787$ lub 9,787 %, w skali roku.

Zaprezentowana metoda odznacza się prostotą i dla krótkich oraz średnich terminów (do 10 lat) daje dobre wyniki, *The Handbook* ... (1995). Dokładność metody rośnie ze wzrostem podaży i płynności zdyskontowanych bonów skarbowych i skarbowych obligacji o stałym kuponie. Metoda może mieć zastosowanie również dla rynku polskiego (do 5-7 lat).

2.5. Metody empiryczne: estymacja funkcji stóp procentowych

W literaturze poświęconej problematyce doświadczalnego podejścia do funkcji czasowych stóp procentowych można znaleźć wiele interesujących propozycji. Typowe podejścia obejmują: metody regresji dla estymacji szukanej funkcji, wykorzystujące posiadane obserwacje, w tym: estymację z użyciem funkcji wielomianowych; estymację przy pomocy funkcji wielomianowych lub wykładniczych; metody regresji wieloczynnikowej; modele matematyczne stóp procentowych, wywodzące się z teorii rynku kapitałowego.

Poniższy model matematyczny jest interesującym przykładem zastosowania optymalizacji do estymacji funkcji czasowej stóp procentowych.

Przyjmijmy oznaczenia:

P_i - cena rynkowa obligacji i,

P_i^* - cena estymowana dla obligacji i,

y_t - natychmiastowa stopa dochodu dla obligacji bezkuponowej o terminie zapadalności t,

d_t - czynnik dyskontujący dla obligacji o terminie zapadalności t,

f_t - implikowana stopa odsunięta dla przedziału czasu $[t, t+1]$

α - wektor parametrów modelu.

Podkreślenia i kreski górne oznaczają wartości dolne i górne estymowanych parametrów α, d_t, y_t, f_t.

Z definicji mamy związek między funkcją dyskonta i stopą natychmiastową oraz między stopą odsuniętą i stopą natychmiastową obligacji zerokuponowej:

$$d_t = (1+y_t)^{-1}, \quad f_t = \frac{(1+y_{t+1})^{t+1}}{(1+y_t)^t} - 1 \tag{27}$$

Dla znanych wartości stóp natychmiastowych zdyskontowana cena i-tej obligacji kuponowej o strumieniu W_{it} i okresie do zapadalności T jest dana (przy założeniu, że rynek jest bez arbitrażu) wzorem:

$$P_i^* = \sum_{t \in T} W_{it} d_t \tag{28}$$

Jak wiadomo, funkcję stóp procentowych można zadać równoważnie przez stopy dyskonta, stopy natychmiastowe lub stopy odsunięte. Model opisywany przedstawia tę funkcję przez funkcję: $d_t = g(t,\alpha)$, gdzie $g(.,.)$ jest funkcją użytą do estymacji (np. wykładnicza funkcja splinowa). Przyjmując kryterium optymalizacji w postaci minimalizacji sumy kwadratów odchyleń cen obserwowanych i estymowanych otrzymujemy zadanie:

$$\min_{a} \sum_{i} (P_i - P_i^*) \tag{29a}$$

przy ograniczeniach:

$$d_t = g(t,\alpha)$$

$$P_i^* = \sum_{i} C_{it} d_i$$

$$y_t = d_t^{-1/t} - 1$$

$$f_t = \frac{(1+y_{t+1})^{t+1}}{(1+y_t)^t} - 1 \tag{29b}$$

$$\underline{\alpha} \le \alpha \le \overline{\alpha}$$

$$\underline{d}_t \le d_t \le \overline{d}_t$$

$$\underline{y}_t \le y_t \le \overline{y}_t$$

$$\underline{f}_t \le f_t \le \overline{f}_t$$

Znajomość funkcji stóp procentowych, w każdym momencie czasu i dla całego horyzontu czasowego inwestycji, ma kluczowe znaczenie dla poprawnej wyceny wartości strumienia wpływów, oraz dla ustalenia przedsięwzięć osłonowych, dla portfela instrumentów zależnych od stóp procentowych, adekwatnych do rozwoju sytuacji na rynku. Ograniczone ramy tej monografii i jej ukierunkowanie tematyczne sprawiają, że tę problematykę jedynie zasygnalizowaliśmy.

3. Parametry strumienia i ryzyko inwestycji

3.1. Parametry strumienia pieniądza

Strumień wpływów pieniężnych wynikający z posiadania papierów dłużnych jest określony warunkami emisji. Jego wartość obecna i przyszła zależą od aktualnej i oczekiwanej funkcji czasowej stóp procentowych i od innych warunków rynkowych mających wpływ na poziom składowych wektora ryzyka. We wcześniejszych rozdziałach dawaliśmy przykłady instrumentów dłużnych i przypisanych im parametrów takich jak: wartość nominalna, okres do zapadalności, wartość i częstość wypłaty kuponu, warunki wcześniejszego wykupu itp. Są to parametry typowe dla bonów skarbowych i obligacji różnych typów. Instrumenty pochodne papierów dłużnych (opcje na obligacje,

Wspomaganie decyzji inwestycyjn

Roman Kulikowski,
Marek Libura,
Leon Słomiński

W książce omawiane są zagadnienia z obszaru analizy finansowej i teorii portfela inwestycyjnego z wykorzystaniem komputerowej metodologii wspomagającej podejmowanie decyzji.
Książka może być przedmiotem zainteresowania zarówno decydentów, podejmujących decyzje finansowe, jak i inwestorów giełdowych i doradców finansowych oraz studentów i doktorantów.
Monografia pozwoli głębiej i pełniej zrozumieć złożoną problematykę finansów i inwestycji, z uwzględnieniem różnych form ryzyka i podejmować w działalności praktycznej decyzje optymalne.
Rozważane są zasady konstruowania modeli matematycznych opisujących rynki kapitałowe – kształtowanie się cen oraz oczekiwanych zwrotów nakładów inwestycyjnych – jak również modeli działalności inwestora w postaci tzw. funkcji użyteczności.

ISBN 83-85847-09-X

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 37-35-78 w. 241 e-mail: kotuszew@ibspan.waw.pl