POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Roman Kulikowski,
Marek Libura,
Leon Słomiński

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 21

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 1998

Roman KULIKOWSKI

Marek LIBURA

Leon SŁOMIŃSKI

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. Maria Podgórska
Doc. dr hab. Leszek S. Zaremba

Książka powstała w wyniku realizacji projektu badawczego finansowanego przez KOMITET BADAŃ NAUKOWYCH

ISBN 83-85847-09-X
ISSN 0208-8029

Część I.
Podejmowanie decyzji na podstawie modeli użyteczności

nachylenie prostej będzie również malało, jak to ilustruje Rys. 19. Jeśli istnieje jakaś akcja (oznaczona gwiazdką na Rys. 19) o parametrach (σ_h, R_h), która przy $p_1 = 1/2$ nie znajduje się w obszarze akceptacji, może ona być zaakceptowana przy odpowiednim wzroście p_1, tj. wzroście oczekiwań inwestora na zwiększenie zwrotu z tej akcji. Łatwo zauważyć, że wykres podobny do $R(\sigma)$ z Rys. 19 można także skonstruować w przypadku obligacji. Ważną rolę gra tu jednak stosunek trwałości D do okresu planistycznego q. Jeśli $D > q$ $(D < q)$ to przy wzroście p_1, tj. prawdopodobieństwa, że stopa procentowa obligacji wzrośnie, następuje wzrost (spadek) nachylenia prostej $R(p_1)$. W rezultacie obligacje, które były już w portfelu mogą stać się zbędnymi, czyli podlegać sprzedaży.

Reasumując można powiedzieć, iż aktywnie nastawiony inwestor winien w sposób ciągły analizować zarówno walory, które już znajdują się w jego portfelu, jak i te które są potencjalnymi kandydatami do portfela. Wszystkie walory istniejące w portfelu winny znajdować się w obszarach akceptacji.

O efektywności zarządzania takim portfelem będzie rzecz jasna decydowała informacja zewnętrzna która pozwoli inwestorowi sprecyzować prawdopodobieństwo p_1.

7. Modele inwestycji wspólnych

7.1. Warunki optymalności Pareto-Nasha

Modele podziału zasobów w przypadku wspólnych przedsięwzięć inwestycyjnych (tzw. joint venture) wymagają, ogólnie biorąc, dokonania wstępnych ustaleń (drogą negocjacji) określających zarówno podział nakładów inwestycyjnych, jak i przyszłych zwrotów (zysków) pomiędzy poszczególnymi partnerami.

W najprostszej sytuacji mamy do czynienia z dwoma partnerami o danych użytecznościach u_1, u_2, które należą do zbioru S, zwanego zbiorem przetargowym, na płaszczyźnie $u = (u_1, u_2)$. Każdemu punktowi u w tej płaszczyźnie odpowiadają użyteczności u_1, u_2 poszczególnych partnerów. Partnerzy mogą zrezygnować ze wspólnej inwestycji, tj. utrzymać swój „status quo”, któremu odpowiada punkt $u(0) = 0$. Zbiór przetargowy S musi więc obejmować początek (0,0) oraz musi on być ograniczony, zamknięty i wypukły (zbiór punktów jest zamknięty gdy zawiera on swoje granice, jest on wypukły gdy każdy odcinek łączący dwa punkty zbioru leży całkowicie wewnątrz tego zbioru).

Warto zauważyć, że wypukłość zbioru S umożliwia partnerom operowanie tzw. strategiami mieszanymi, tj. dla dwóch danych punktów $u_i^{'}$, $u_i^{''}$ i-ty partner może stosować strategię: $pu_i^{'} + (1-p)u_i^{''}$, gdzie p jest prawdopodobieństwem wyboru $u_i^{'}$, zaś $1-p$: prawdopodobieństwem wyboru $u_i^{''}$.

Podstawowym problemem, który pojawia się w targach (negocjacjach) jest wybór takiego punktu $\hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2) \in S$, który partnerzy uznają jako optymalny w danych warunkach, tzn. uznają oni iż nie istnieje inna strategia, różna od $\hat{u}$, która dawałaby im jednocześnie większe użyteczności.

Oznacza to, że rozwiązanie $\hat{u}$ musi spełniać warunki optymalności Pareto:

1. $\hat{u}$ należy do zbioru S,
2. $\hat{u}_1 \geq 0$, $\hat{u}_2 \geq 0$,
3. Nie istnieje punkt $u \neq \hat{u}$ w S, taki, że $u_1 \geq \hat{u}_1$ oraz $u_2 \geq \hat{u}_2$.

Warunki powyższe wymagają by rozwiązanie należało do dodatniej ćwiartki płaszczyzny (u_1, u_2). Musi ono być co najmniej tak dobre jak status quo dla obu partnerów oraz musi ono leżeć na „północno-wschodniej” granicy zbioru S.

Łatwo zauważyć, że warunki Pareto nie określają rozwiązania targu w sposób jednoznaczny. Aby uzyskać takie rozwiązanie na $\hat{u}$ muszą być nałożone w procesie negocjacji dodatkowe restrykcje.

Restrykcje takie, w celu rozwiązania problemu targu w sposób jednoznaczny, zostały zaproponowane przez Nasha w r. 1950, w postaci czterech następujących aksjomatów.

A.1. Inwariantność ze względu na transformacje liniowe użyteczności. Jeśli $\hat{u}$ jest rozwiązaniem problemu targu zaś $\hat{z}=(\hat{z}_1,\hat{z}_2)$ jest rozwiązaniem drugiego problemu, otrzymanego z poprzedniego drogą przemnożenia użyteczności u_1, u_2, odpowiednio przez stałe k_1, k_2 to $\hat{z}_1 = k_1\hat{u}_1$, $\hat{z}_2 = k_2\hat{u}_2$.

A.2. Strategia $\hat{u}$ spełnia warunki Pareto.

A.3. Niezależność alternatyw nieistotnych.

Niech R i S będą dwoma zbiorami przetargowymi, przy czym $R \subset S$, oraz niech $\hat{u}$ będzie rozwiązaniem dla S. Jeśli rozwiązanie $\hat{u} \in R$ to jest ono także rozwiązaniem dla R. Inaczej mówiąc jeśli rozwiązanie dla większego zbioru przetargowego (S) jest zawarte w zbiorze mniejszym (R) to musi ono być także rozwiązaniem dla zbioru mniejszego. Eliminując punkty inne niż rozwiązanie ze zbioru przetargowego nie zmieniamy tego rozwiązania.

A.4. Symetria.

Niech S będzie zbiorem symetrycznym tj. jeśli $(a,b) \in S$ to również $(b,a) \in S$. Wtedy rozwiązanie $\hat{u}=(\hat{u}_1,\hat{u}_2)$ spełnia warunek $\hat{u}_1 = \hat{u}_2$.

Łatwo zauważyć, że ostatni warunek eliminuje możliwość preferowania któregokolwiek partnera a priori. Jeśli partnerzy posiadają identyczne pozycje przetargowe, to winni oni uzyskiwać te same użyteczności. Nie oznacza to, rzecz jasna, iż symetria redukuje problem do przyrównania użyteczności partnerów.

Przy pomocy sformułowanych aksjomatów Nash udowodnił mianowicie następujące twierdzenie (Nash (1950)):

TWIERDZENIE. *Jedynym, jednoznacznym rozwiązaniem przy warunkach* A.1÷A.4 *jest punkt* $\hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ *zbioru* S *dla którego*

$$\hat{u}_1 \hat{u}_2 \geq u_1 u_2,$$

gdzie (u_1, u_2) *dowolny (dodatni) punkt zbioru* S.

Dowód tego twierdzenia pomijamy. Wypada jednak zauważyć, iż twierdzenie Nasha określa rozwiązanie problemu targu przy założeniu, iż partnerzy respektują warunki A.1÷A.4. Warunki te, mimo że prowadzą do rozwiązań nieegalitarnych, można traktować jako racjonalne, tzn. rozsądnie rozumujący partnerzy nie mają podstaw by je kwestionować.

7.2. Efektywne strategie dla inwestycji wspólnych

Zgodnie z twierdzeniem Nasha, dla wyznaczenia optymalnych strategii udziału partnerów we wspólnej inwestycji należy maksymalizować iloczyn funkcji użyteczności

$$\psi = u_1 u_2 \tag{1}$$

Kryterium to nie pozwala na efektywne wyznaczenie strategii podziału środków inwestycyjnych (x_i) jeśli nie są znane funkcje użyteczności $u_i(x_i)$.

Zgodnie z metodologią stosowaną w niniejszej pracy jako funkcję użyteczności partnerów przyjmujemy

$$u_i = \phi_i[Z_i(x_i), Y_i], \quad i = 1,2, \tag{2}$$

gdzie

$Z_i(x_i)$ = zwrot (monetarny) ze wspólnej inwestycji
Y_i = zwrot w najgorszym przypadku.

Przyjmiemy także, że koszt wspólnych nakładów inwestycyjnych w skali roku wynosi rI, i że koszt ten jest pokrywany udziałami (x_i) przez partnerów, tj. $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Zwroty netto poszczególnych partnerów

$$Z_i(x_i) = P_i R_i \left(1 - \frac{Ir}{P_i R_i} x_i\right), \tag{3}$$

winny być dodatnie zaś ich zwroty Y_i (najgorszego przypadku):

$$Y_i = P_i R_i A_i \,, \tag{4}$$

gdzie współczynniki pewności (A_i) wyrażone są znanymi wzorami:

$$A_i = 1 - \kappa_i \frac{\sigma_i}{R_i}, \quad i = 1,2\,.$$

Oznaczając efektywność inwestycji dla partnera i-tego

$$e_i = \frac{P_i R_i}{Ir}, \quad i = 1,2$$

możemy przedstawić funkcje użyteczności w postaci równoważnej do (2):

$$u_i = P_i R_i A_i \, F_i(y_i), \quad y_i = \frac{1 - x_i / e_i}{A_i}, \quad i = 1,2\ . \tag{5}$$

gdzie $F_i(\cdot)$ są to funkcje rosnące ściśle wklęsłe, $y_i > 0$, $F_i(y_i) > 0$.

Ponieważ $x_2 = 1 - x_1$, problem maksymalizacji funkcji (1):

$$\psi(x_1) = u_1(x_1) u_2(1 - x_1)$$

sprowadza się[1] do rozwiązania równania $\overline{\psi}'(x_1) = \dfrac{\psi'(x_1)}{P_1 P_2 R_1 R_2 A_1 A_2} = 0$,

czyli

$$\overline{\psi}'(x_1) = \{F_1[y_1(x_1)]F_2[y_2(1-x_1)]\}' =$$
$$= F_1(y_1)F_2(y_2)\left\{-\frac{1}{e_1 A_1}\delta F_1 + \frac{1}{e_2 A_2}\delta F_2\right\} = 0,$$

gdzie $\delta F_1 = F_1'(y_1) : F_1(y_1)$,
$\delta F_2 = F_2'(y_2) : F_2(y_2)$.

Ponieważ dla strategii dopuszczalnych $F_1(y_1)F_2(y_2) > 0$, warunkiem koniecznym optymalności jest:

$$\delta F_1 / \delta F_2 = e_1 A_1 / e_2 A_2 \tag{6}$$

Warto zauważyć, że $\psi(x_1)$ jest funkcją ściśle wklęsłą. Przy braku ograniczeń warunek (6) jest więc warunkiem koniecznym i dostatecznym optymalności. Wyrażenie (6) można nazwać *zasadą podziału we wspólnych inwestycjach. Mówi ona, że stosunek przyrostów użyteczności* $\delta u_1 / \delta u_2 = \delta F_1 / \delta F_2$ *winien być równy stosunkowi* $e_1 A_1 / e_2 A_2$ *(iloczynów efektywności inwestycji* e_1 / e_2 *przez ich pewności* A_1 / A_2*).*

Jeśli przyjmiemy jako funkcje użyteczności partnerów wyrażenie

$$F_1(y_i) = const(y_i)^{\beta_i}, \quad 0 < \beta_i < 1, \quad i = 1,2,$$

rozwiązanie (6) jest możliwe w jawnej formie. Uzyskujemy bowiem

---

[1] Przy chwilowym ignorowaniu ograniczeń nierównościowych $x_i \geq 0$, $i = 1,2$.

$$\frac{\delta F_1}{\delta F_2} = \frac{\beta_1 y_2}{y_1 \beta_2} = \frac{e_1 A_1}{e_2 A_2} \tag{7}$$

oraz, ostatecznie[2]

$$\hat{x}_1 = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} e_1 + \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}(1 - e_2), \tag{8}$$

$$\hat{x}_2 = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} e_2 + \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}(1 - e_1). \tag{9}$$

W przypadku szczególnym, gdy partnerzy mają podobne funkcje użyteczności i można przyjąć $\beta_1 = \beta_2$ mamy

$$\hat{x}_1 = \frac{1}{2}(1 + e_1 - e_2) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{P_1 R_1 - P_2 R_2}{Ir}\right) \tag{10}$$

Ze wzoru (10) widać, iż przy $P_1 R_1 = P_2 R_2$ obaj partnerzy pokrywają wspólną inwestycję po połowie. Gdy jeden z nich, np. 1, uzyskuje nadwyżkę zwrotu, tj. $(P_1 R_1 - P_2 R_2) : Ir > 0$, winien on partycypować w większym stopniu w kosztach inwestycyjnych niż jego partner.

Na koszty partycypacji ma też wpływ parametr β. Na przykład, dla $e_1 + e_2 > 1$, mamy $d\hat{x}_1 / d\beta_2 = \beta_1(\beta_1 + \beta_2)^{-2}(1 - e_1 - e_2) < 0$. Zatem wzrost β_2 w stosunku do β_1 zmniejsza obciążenie kosztami partnera pierwszego.

Warto zauważyć, że strategia podziału kosztów (8,9) nie zależy od ryzyka wyrażonego parametrami A_1, A_2 pod warunkiem iż obaj partnerzy akceptują wspólną inwestycję. Zanim bowiem przystąpią do

[2] Rozwiązanie to spełnia ograniczenia nierównościowe $x_i \geq 0$, gdy $B = \beta_1 e_2 - \beta_2 e_1$ spełnia warunek: $-\beta_2 \leq B \leq \beta_1$. Gdy $B > \beta_1$ rozwiązaniem jest $\hat{x}_1 = 0, \hat{x}_2 = 1$; gdy $B < -\beta_2$ – $\hat{x}_1 = 1, \hat{x}_2 = 0$.

tej inwestycji zechcą niewątpliwie sprawdzić czy jest ona dla nich akceptowalna z uwzględnieniem przewidywanego ryzyka.

Typowym warunkiem akceptowalności jest spełnienie nierówności:

$$R_i - \kappa_i \sigma_i \geq R_F ,$$

gdzie R_F - zwrot na inwestycji bez ryzyka.

Uwzględniając koszty inwestycji Irx_i warunek ten można zapisać jako

$$P_i[R_i - \kappa_i \sigma_i - R_F] \geq IRx_i .$$

Wynika stąd, że graniczna wartość udziału i-tego partnera we wspólnej inwestycji $\bar{x}_i$ wynosi

$$\bar{x}_i = \frac{P_i[R_i - \kappa_i \sigma_i - R_F]}{Ir} = e_i\left(A_i - \frac{R_F}{R_i} \right), \quad i = 1, 2. \tag{11}$$

Istnieje tu także możliwość wykorzystania bardziej ogólnego warunku akceptowalności (por. (8) z § 4.2.1). Wtedy

$$\bar{x}_i = \frac{P_i}{Ir}(R_i - R_F A_i^{\beta-1}), \quad i = 1, 2.$$

Istnienie wartości granicznych $\bar{x}_i$ ogranicza zakres zmienności dla strategii $\hat{x}_i$:

$$1 - \bar{x}_2 \leq \hat{x}_1 \leq \bar{x}_1 , \tag{12}$$

$$1 - \bar{x}_1 \leq \hat{x}_2 \leq \bar{x}_2 . \tag{13}$$

Wzory (8) (9) należy zatem stosować w przypadku gdy $\hat{x}_1 \in [1 - \bar{x}_2, \bar{x}_1]$, $\hat{x}_2 \in [1 - \bar{x}_1, \bar{x}_2]$. Przedziały te nie mogą być puste tj. $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 > 1$. Gdy pierwszy partner wchodzi na swe górne ograniczenie to $\hat{x}_1 = \bar{x}_1$. Resztę kosztów musi wtedy pokryć partner 2 (pod warunkiem że $1-\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2$). W przeciwnym przypadku wspólna inwestycja nie dochodzi do skutku. Sytuacja taka może zajść, gdy ryzyko wspólnej inwestycji dla drugiego partnera jest duże i konsekwentnie A_2 oraz $\bar{x}_2$ maleją.

Warto zauważyć, iż ryzyko w rozważanym modelu nie wpływa na podział kosztów inwestycji, o ile strategia (8,9) nie wchodzi na ograniczenia $\bar{x}_i$. Natomiast ograniczenia zależą w istotny sposób od ryzyka (A_i) i ograniczają obszar opłacalnych, wspólnych działań inwestycyjnych.

Podobnie jak w przypadku twierdzenia Nasha optymalna strategia podziału nakładów inwestycyjnych (8,9) jest strategią sugerowanych, racjonalnych działań w przypadku negocjacji kosztów. Zależy ona także od subiektywnych parametrów funkcji użyteczności partnerów (β_i), których w wielu sytuacjach negocjacyjnych nie można ignorować.

7.3. Przykład inwestycji wspólnych w kapitał ludzki

Oprócz inwestycji czysto kapitałowych (finansowych) w wielu programach rozwojowych firm i przedsiębiorstw oraz organizacji państwowych występuje problem inwestycji w kapitał ludzki.

Warto tu zauważyć, iż inwestycje w obie formy kapitału (monetarny i ludzki) winny iść w parze, jako że zainwestowane środki w kosztowne urządzenia techniczne bez podniesienia kwalifikacji pracowników obsługujących te urządzenia może narazić przedsiębiorstwo na duże straty materialne.

Inwestycje w kapitał ludzki mają to do siebie, iż pozwalają uzyskać zwroty nakładów zarówno przez właściciela firmy, w postaci zwiększonej wydajności pracy, jak i przez pracownika, w formie zwiększonych zarobków, wynikających z nabytych kwalifikacji drogą szkolenia.

Program edukacji pracowników firmy można zatem traktować jako wspólną inwestycję pracowników i właściciela tej firmy. Właściciel może partycypować w kosztach tej inwestycji przez opłacanie kosztów szkolenia, zwalnianie pracowników z pracy na zajęcia dydaktyczne itp., zaś pracownik może partycypować w kosztach przez przeznaczanie swego wolnego czasu na zajęcia dydaktyczne, zakup pomocy naukowych itp.

Powstaje zatem problem udziału obu partnerów, tj. pracownika i właściciela firmy, we wspólnych kosztach inwestycji (szkolenia). Można przyjąć, iż obaj partnerzy dążą, na przykład w drodze negocjacji, do maksymalizacji swoich użyteczności oraz do minimalizacji własnych nakładów pracy i kapitału.

Celem naszej analizy jest natomiast wspomaganie tych negocjacji w oparciu o sugerowane rozwiązanie optymalne, będące wyrazem racjonalnego konsensusu, opartego na wzorach (8) (9) (lub - przy warunku że $\beta_1 = \beta_2$ - (10)), a także na analizie warunków ograniczających (12) (13).

Analizę tę zilustrujemy przy pomocy przykładu liczbowego.

Przykład

Przedsiębiorstwo planuje zorganizowanie dla swoich pracowników 3-letniego zaocznego, wyższego szkolenia zawodowego. Ukończenie tego szkolenia spowoduje oczekiwany zwrot nakładów przedsiębiorstwa $R_1 = 0{,}4$.

Uzyskanie dyplomu ukończenia szkolenia przez pracownika spowoduje oczekiwany wzrost płacy o 25%, tj. $R_2 = 0{,}25$. Na całkowite roczne koszty szkolenia pracownika składają się:

1. Koszt zajęć dydaktycznych

$K_d = 2000$ zł

2. Koszt czasu studiów (poniesiony i oceniany przez pracownika)

   $K_s = 1200$ zł

3. Koszt utrzymania, transportu, pomocy naukowych itp.

   $K_a = 800$ zł

Zatem całkowite roczne koszty $Ir = 4000$ zł.

Właściciel ocenia swój współczynnik pewności A_1 (że szkolenie zapewni mu uzyskanie oczekiwanych zwrotów R_1) na 0,85.

W podobny sposób pracownicy oceniają współczynnik A_2 (że uzyskają dyplom ukończenia i oczekiwany zwrot w postaci płacy R_2) na $A_2 = 0{,}9$.

Przyjmując dla uproszczenia, że $\beta_1 = \beta_2$ oraz $P_1 = P_2 = 1000$ zł, ze wzoru (10) znajdujemy optymalny udział nakładów na szkolenie dla przedsiębiorstwa

$$\hat{x}_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{P_1 R_1 - P_2 R_2}{Ir}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{10000}{4000}(0{,}4 - 0{,}25)\right] = 0{,}687$$

oraz dla pracownika

$$\hat{x}_2 = 1 - \hat{x}_1 = 0{,}313$$

Możemy teraz sprawdzić czy optymalne udziały spełniają ograniczenia akceptacyjne (12) (13).

Przyjmując wartość zwrotu bez ryzyka $R_F = 0{,}05$ znajdujemy

$$\bar{x}_1 = e_1\left(A_1 - \frac{R_F}{R_1}\right) = \frac{10000 \cdot 0{,}4}{4000}\left(0{,}85 - \frac{0{,}05}{0{,}4}\right) = 0{,}725$$

$$\bar{x}_2 = e_2\left(A_2 - \frac{R_F}{R_2}\right) = \frac{10000 \cdot 0{,}25}{4000}\left(0{,}9 - \frac{0{,}05}{0{,}25}\right) = 0{,}437$$

Ponieważ

$$1-0{,}437=0{,}562<0{,}687<0{,}725 \qquad (14)$$

$$1-0{,}725=0{,}275<0{,}313<0{,}437 \qquad (15)$$

ograniczenia akceptacyjne nie są naruszone i rozwiązanie $\hat{x}_1=0{,}687$, $\hat{x}_2=0{,}313$ może być sugerowane obu partnerom jako rozwiązanie konsensualne. Wynika z niego, że jeśli przedsiębiorstwo pokryje koszt zajęć dydaktycznych oraz utrzymania czyli $\widetilde{x}_1=\frac{2800}{4000}=0{,}7$, zaś pracownik - koszt czasu studiów $\widetilde{x}_2=\frac{1200}{4000}=0{,}3$, znajdą się oni blisko rozwiązania optymalnego.

Warto zauważyć, że rozwiązanie uzyskane zależy w istotny sposób od przyjętych wartości współczynników pewności. Gdyby, dla przykładu, pewność pracownika co do uzyskania przyrostu wynagrodzenia (czyli zwrotu R_2) uległa obniżeniu, np. z wartości $A_2=0.9$, do $A_2^{'}=0.6$; to $x_2^{'}=0.25$. W takiej sytuacji właściciel musiałby pokryć 75% kosztów, to zaś przekracza jego akceptowalny poziom $\overline{x}_1=0.725$. Wynika stąd iż optymalne, akceptowalne wspólne działanie inwestycyjne jest w tym przypadku nierealne, tzn. partnerzy nie będą mieli dostatecznej motywacji dla organizacji szkolenia.

Rozpatrzony przykład wskazuje na rolę ryzyka i zaufania partnerów w negocjacjach dotyczących wspólnych inwestycji. Jeśli efektywności e_i są niewielkie i istnieją duże ryzyka, tj. małe współczynniki pewności (zaufania) A_i, istnieją małe szanse na spełnienie warunków akceptowalności (12) (13) i w takich sytuacjach prowadzenie negocjacji traci sens. Przeprowadzenie analizy wstępnej projektu wspólnego inwestowania z uwzględnieniem ryzyka i akceptowalności, winno poprzedzać każdy proces negocjacyjny. Analiza taka może być także przeprowadzona przy analizie racjonalnej reformy studiów, w których partycypuje z jednej strony budżet państwa a z drugiej - studenci. Sytuacja, w której całe koszty studiów ponosi albo państwo (w uczelniach państwowych) albo student (uczelnie prywatne) staje się w obecnych czasach anormalną. Reforma studiów mogłaby ustalić racjonalne zasady podziału kosztów z uwzględnieniem oczekiwanych zwrotów i ryzyka w różnych specjalnościach zawodowych.

7.4. Wspólne inwestycje z wieloma partnerami

Inwestycje wspólne mogą być dokonywane, ogólnie biorąc, przez wielu ($n > 2$) inwestorów. Dla przykładu, planowanie budżetu na inwestycje w dużych aglomeracjach miejskich, takich jak m.st. Warszawa, wymaga uzyskania dotacji, na które składają się poszczególne gminy oraz budżet centralny. Tworzenie takiego budżetu jest trudne w sytuacjach, gdy nie są określone zasady udziału poszczególnych partnerów we wspólnych inwestycjach, oraz odpowiednie procedury negocjacyjne. Chodzi tu zwłaszcza o określenie korzyści, jakie wspólna inwestycja przynosi poszczególnym partnerom, a także uwzględnienie poziomu zamożności partnerów. Chodzi także o zwroty z zainwestowanego kapitału oraz ryzyko uzyskania tych zwrotów przez poszczególnych partnerów. Stosowane nieraz naciski administracyjne na partnerów wspólnej inwestycji, aby ponieśli koszty, które nie są przez nich akceptowane prowadzi do konfliktów o których często pisze prasa. Rozwiązanie tych konfliktów wymaga nie tylko prowadzenia negocjacji. Potrzebna jest też odpowiednia metodologia wspierająca procesy negocjacyjne. Rozpatrując, dla przykładu, inwestycje w nowe trasy komunikacyjne lub środki transportu (np. metro) można przyjąć iż projekt inwestycyjny przynosi oszczędności (liczone czasem przejazdu) Δ_{ti} zł/rok dla statystycznego mieszkańca gminy i-tej. Jednocześnie wzrost hałasu i zanieczyszczeń powietrza powodują straty w jakości środowiska Δ_{si} zł/rok. Straty te ponoszą zwłaszcza właściciele mieszkań na skutek spadku ceny wynajmu tych mieszkań (spowodowanego uciążliwością nowej trasy komunikacyjnej). W rezultacie oczekiwany przyrost korzyści z projektu

$$R_i = \frac{\Delta_i}{\overline{P}_i}, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

gdzie $\Delta_i = \Delta_{ti} - \Delta_{si}$, $\overline{P}_i$ = średni dochód na mieszkańca gminy i-tej w skali rocznej.
Jeśli L_i = liczba mieszkańców i-tej gminy, to oczekiwany przez gminę przyrost korzyści z projektu inwestycyjnego wyniesie $P_i R_i$ ($P_i = \overline{P}_i L_i$).

Wypada także zauważyć, iż uzyskanie dochodu $P_i R_i$ jest obarczone ryzykiem σ_i, zaś współczynnik pewności dla i-tej gminy

$$A_i = 1 - \kappa_i \frac{\sigma_i}{R_i},$$

gdzie κ_i - cena ryzyka dla i-tego decydenta.

Jeśli przyjmiemy, że roczny koszt inwestycji rI jest dany, powstaje problem znalezienia strategii $\hat{x} \in \Omega$, gdzie

$$\Omega = \left\{ x : \sum_{i}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,n \right\},$$

która gwarantuje (zgodnie z uogólnionym na n partnerów twierdzeniem Nasha) maksymalną wartością iloczynu indywidualnych użyteczności decydentów $u_i(x_i)$:

$$u = \prod_{i=1}^{n} u_i(x_i),$$

Podobnie jak w § 7.2 przyjmiemy

$$u_i(x_i) = P_i R_i A_i F_i(y_i), \quad y_i = \frac{1 - \frac{x_i}{e_i}}{A_i}, \quad e_i = \frac{P_i R_i}{rI}, \quad y_i > 0,$$

oraz

$$F_i(y_i) = const\ y_i^{\beta_i}, \quad 0 < \beta_i < 1.$$

Problem, przed którym obecnie stoimy, polega na maksymalizacji funkcji

$$\psi(x) = \prod_{i=1}^{n} (e_i - x_i)^{\beta_i}, \tag{16}$$

przy warunku $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$[3]. Problem ten można sprowadzić do optymalizacji funkcji

$$\psi = \left(e_1 - 1 + \sum_{j=2}^{n} x_j \right)^{\beta_1} \prod_{j=2}^{n} (e_j - x_j)^{\beta_j}$$

nie zawierającej (w jawnej formie) zmiennej x_1.

Zakładając iż $\psi(x) \neq 0$, warunki konieczne optymalności zapiszemy w postaci $n-1$ równań:

$$\frac{d\psi}{dx_j} = \psi \left\{ \frac{\beta_1}{e_1 - x_1} - \frac{\beta_j}{e_j - x_j} \right\} = 0, \quad j = 2,3,\ldots,n,$$

lub

$$\beta_1(e_j - x_j) - \beta_j(e_1 - x_1) = 0, \quad j = 2,3,\ldots,n. \tag{17}$$

[3] Podobnie jak w §7.2 ignorujemy chwilowo ograniczenia $x_i \geq 0, \forall i$.

Równania (17), wraz z $\sum_{i=1}^{n} x_j = 1$, tworzą układ n równań liniowych:

$$\beta_j x_1 - \beta_1 x_j = \beta_j e_1 - \beta_1 e_j, \quad j = 2,\dots,n,$$

$$x_1 + x_2 + \cdots x_n = 1.$$

Rozwiązanie powyższego układu równań można wyrazić w postaci:[4]

$$\hat{x}_i = \frac{\sum_{j \neq i}^{n} \beta_j}{\beta} e_i + \frac{\beta_i}{\beta}\left(1 - \sum_{j \neq i}^{n} e_j\right), \quad \forall i, \tag{18}$$

gdzie $\beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$.

W przypadku gdy $\beta_i = const, \forall i$, rozwiązanie przyjmuje postać

$$\hat{x}_i = \frac{1}{n}\left[1 + (n-1)e_i - \sum_{j \neq i}^{n} e_j\right], \quad \forall i \tag{19}$$

Rozwiązanie (18, 19) może być zaakceptowane gdy, zgodnie we wzorem (11) z § 7.2, mamy

$$\hat{x}_i \leq \bar{x}_i, \quad i = 1,\dots,n, \tag{20}$$

gdzie $\bar{x}_i = e_i(A_i - a_i), a_i = R_F / R_i$.

Z nierówności (20) wynika także, iż

$$-\hat{x}_i \geq -\bar{x}_i, \quad \forall i,$$

[4] Rozwiązanie to spełnia ograniczenia $x_i \geq 0$, gdy $B_i = \beta_i \sum_{j \neq i} e_j - e_i \sum_{j \neq i} \beta_j \leq \beta_i, \forall i$. Gdy dla jakiegoś i mamy $B_i > \beta_i$ to $\hat{x}_i = 0$.

oraz

$$\hat{x}_i = 1 - \sum_{j \neq i}^{n} \hat{x}_j \geq 1 - \sum_{j \neq i}^{n} \bar{x}_j ,$$

czyli

$$1 - \sum_{j \neq i}^{n} \bar{x}_j \leq \hat{x}_i \leq \bar{x}_i, \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{21}$$

Z chwilą gdy określone rozwiązanie $\hat{x}_i$ wchodzi na ograniczenie $\bar{x}_i$ musimy przyjąć

$$\hat{x}_i = \bar{x}_i . \tag{22}$$

W przeciwnym przypadku, tj. $\hat{x}_i > \bar{x}_i$, i-ty inwestor występuje z koalicji inwestorów realizujących wspólny projekt.

W konsekwencji (22) składka i-tego inwestora $Ir\bar{x}_i$ staje się ustaloną. Winna ona być odjęta od Ir. Pozostaje następnie do rozwiązania problem alokacji $Ir = I(1-\bar{x}_i)r$ pomiędzy $n-1$ inwestorami, tj. inwestorami, z których wyłączono inwestora i-tego.

Warto przy okazji zauważyć iż ograniczenie (20):

$$\hat{x}_i \leq e_i(A_i - a_i) ,$$

gdzie $A_i \leq 1$, $a_i > 0$, powoduje, że $e_i - \hat{x}_i > 0$, $\forall i$.
Zatem założenie, że $\psi(\hat{x}) \neq 0$, jest w pełni uzasadnione. Ze względu na ścisłą wklęsłość funkcji (16) uzyskane rozwiązanie (18) jest jednoznaczne.

Możemy obecnie przystąpić do omówienia przykładu, który zilustruje procedurę alokacji składek zgodnie z omówioną teorią.

Przykład

Rozważmy problem stojący przed trzema inwestorami, którzy przystępują do sfinansowania wspólnej inwestycji o koszcie rocznym rI. Przyjmiemy $R_F = 0{,}1$ oraz $\kappa_i = 1$, $\beta_i = const$, $i = 1{,}2{,}3$.

Każdy inwestor podaje swoje wartości R_i, σ_i, P_i / rI, które pozwalają obliczyć:

- współczynniki pewności $A_i = 1 - \sigma_i / R_i$,
- współczynniki efektywności $e_i = \frac{P_i}{rI} \cdot R_i$
- współczynniki $a_i = \frac{R_F}{R_i}$,
- ograniczenia akceptacyjne $\bar{x}_i = e_i(A_i - a_i)$.

Obliczenia te zawarte są w poniższej Tablicy.

Tabela 5. Zestawienie obliczeń dla przykładu liczbowego

n	R_i	σ_i	P_i / rI	A_i	e_i	a_i	$\bar{x}_i$
1	0,500	0,050	2,200	0,9	1,1	0,2	0,77
2	0,333	0,066	3,000	0,8	1,0	0,3	0,50
3	0,500	0,250	1,600	0,5	0,8	0,4	0,08

W oparciu o dane z Tablicy 5 możemy wyrazić warunki akceptacyjne (21) w postaci:

$$1 - 0{,}5 - 0{,}08 = 0{,}42 \le \hat{x}_1 \le 0{,}77$$

$$1 - 0{,}77 - 0{,}08 = 0{,}15 \le \hat{x}_2 \le 0{,}50$$

$$1 - 0{,}77 - 0{,}5 = -0{,}27 \le \hat{x}_3 \le 0{,}08$$

Znajdujemy także strategie $\hat{x}_i$ ze wzoru (19)

$$\hat{x}_1 = \frac{1}{3}[1 + 2e_1 - e_2 - e_3] = 0{,}467$$

$$\hat{x}_2 = \frac{1}{3}[1 + 2e_2 - e_1 - e_3] = 0{,}367$$

$$\hat{x}_3 = \frac{1}{3}[1 + 2e_3 - e_1 - e_2] = 0{,}166$$

Widać tu, że $\hat{x}_3 = 0{,}166$ nie spełnia warunku akceptacyjnego. Przyjmujemy zatem

$$\hat{x}_3 = \bar{x}_3 = 0{,}08\,,$$

oraz, w kolejnym (drugim) etapie rozdzielamy $I'r = 0{,}92\,Ir$ na pozostałych, dwóch inwestorów.

Aby obliczyć nowe strategie $(\hat{x}_1^{'}, \hat{x}_2^{'})$ dla tych inwestorów obliczamy najpierw nowe wartości

$$e_1^{'} = \frac{P_1R_1}{I'r} = 0{,}087 e_1 = 1{,}196$$

$$e_2^{'} = \frac{P_2R_2}{I'r} = 0{,}087 e_2 = 1{,}087$$

Znajdujemy z kolei nowe ograniczenia akceptacyjne

$$\bar{x}_1^{'} = 1{,}087 \cdot \bar{x}_1 = 0{,}837\,,$$

$$\bar{x}_2^{'} = 1{,}087 \cdot \bar{x}_2 = 0{,}546\,,$$

oraz warunki akceptacyjne:

$$1 - 0{,}546 = 0{,}454 \le \hat{x}_1^{'} \le 0{,}837\,,$$

$$1-0{,}837=0{,}163\leq \hat{x}_2^{'}\leq 0{,}546.$$

Optymalne strategie $\hat{x}_i^{'}$ wyniosą

$$\hat{x}_1^{'}=\frac{1}{2}(1+e_1^{'}-e_2^{'})=0{,}555,$$

$$\hat{x}_2^{'}=\frac{1}{2}(1+e_2^{'}-e_1^{'})=0{,}455.$$

Widać tu, że $\hat{x}_1^{'},\hat{x}_2^{'}$ spełniają warunki akceptacyjne. Ostatecznie optymalna strategia (podziału Ir na trzech partnerów) wyniesie:

$$\hat{x}_1=\frac{0{,}555}{1{,}087}=0{,}511;\quad \hat{x}_2=\frac{0{,}445}{1{,}087}=0{,}409;\quad \hat{x}_3=0{,}08.$$

Warto podkreślić, że wyznaczoną w omawiany sposób strategię $\hat{x}$, należy traktować jako strategię sugerowaną, która może być pomocna w negocjacjach mających na celu ustalenie akceptowanych przez partnerów udziałów we wspólnej inwestycji. Strategię sugerowaną może tu proponować firma konsultingowa lub niezależny mediator.

Reasumując rozważania niniejszego podrozdziału można powiedzieć iż w przypadku wspólnych inwestycji, podobnie jak to miało miejsce w przypadku pojedyńczego inwestora, można stosować dwie zasady. Pierwsza dotyczy akceptacji projektu inwestycyjnego, druga - alokacji wkładów, które muszą ponieść poszczególni partnerzy.

Jeśli chodzi o zasadę akceptacji, to po zsumowaniu obu stron nierówności (20) widzimy iż projekt może być akceptowany, jeśli suma ograniczeń jest nie mniejsza od jedności:

$$\sum_{1}^{n}\hat{x}_i=1\leq\sum_{1}^{n}\bar{x}_i$$

czyli

$$\sum_{i=1}^{n} e_i(A_i - a_i) \geq 1. \tag{23}$$

Warunek ten wymaga, by zarówno współczynniki efektywności $e_i = \frac{P_i R_i}{Ir}$, jak i współczynniki pewności A_i, określające postawę poszczególnych parametrów wobec ryzyka, były dostatecznie duże. W przeciwnym przypadku maksymalne udziały $\bar{x}_i$, jakie są w stanie wnieść partnerzy wspólnej inwestycji, nie będą w stanie pokryć kosztów tej inwestycji (Ir).

Jeśli chodzi o alokację wkładów ponoszonych przez inwestorów na podstawie wzoru (19), to widać, iż w przypadku $e_j = const, \forall j$, $\hat{x}_i = \frac{1}{n}, \forall i$. W przypadku gdy e_j są różne, większy (mniejszy) wkład winien być poniesiony przez inwestora którego współczynnik efektywności e_i jest większy (mniejszy) od przeciętnej efektywności pozostałych partnerów tj. $\frac{1}{n-1}\sum_{j \neq i}^{n} e_j$. Inwestor ten będzie skłonny wnieść ten wkład pod warunkiem, że $\hat{x}_i \leq e_i(A_i - a_i)$, a więc dla e_i i A_i odpowiednio dużych.

Wynika stąd, iż rozpatrując określone projekty inwestycyjne pod kątem widzenia wspólnego finansowania przez różnych inwestorów, należy przede wszystkim sprawdzić czy spełniona jest zasada akceptacji (22). W przeciwnym przypadku nie należy liczyć na akceptację projektu i sukces w ewentualnych negocjacjach z partnerami. Należy także zauważyć, iż model rozpatrywany zakłada, że koszt Ir nie zależy od liczby inwestorów. Nie będzie to założenie słuszne w sytuacjach, gdzie Ir wzrasta wraz z liczbą inwestorów partycypujących w projekcie. W takiej sytuacji korzyści z dołączenia najmniej efektywnego partnera do już istniejącego zbioru inwestorów nie mogą być niższe od przyrostu kosztów projektu.

8. Opcje

Opcje są kontraktami kupna lub sprzedaży konkretnego waloru o ustalonej cenie w określonym przyszłym terminie lub przed jego upływem. Dają one właścicielowi prawo (a nie obowiązek) sprzedaży lub kupna waloru.

Istnieją dwie podstawowe opcje: „call" i „put".

- Call jest opcją kupna. Jej właściciel ma prawo kupić np. 100 określonych akcji za z góry określoną cenę kontraktową (*contract, exercise or striking price*) w danym (np. 3 miesięcznym) terminie.
- Put jest opcją sprzedaży. Jej właściciel ma prawo pozbyć się np. 100 określonych akcji za z góry określoną cenę kontraktową w danym terminie.

Nabywca opcji płaci sprzedawcy (który wystawia opcję) tzw. premię (*premium*) za nabycie praw opcyjnych.

Istnieją dwie kategorie opcji. Tak zwana opcja europejska winna być realizowana w terminie (dniu) wygaśnięcia tej opcji. Opcja amerykańska może być realizowana w dowolnym dniu aż do terminu wygaśnięcia opcji. Podobnie jak akcje opcje mogą być odsprzedawane na rynku wtórnym przed terminem wygaśnięcia. Opcje niezrealizowane w terminie wygaśnięcia tracą swoją ważność i stają się bezwartościowe.

W krajach o zorganizowanym rynku opcji są one łatwo nabywalne i zbywalne, czyli posiadają dużą płynność. W krajach tych istnieją wyspecjalizowane giełdy, takie jak np. Chicago Board of Options Exchange (CBOE). Kursy opcji są systematycznie cytowane w prasie (np. w „Wall Street Journal") natomiast transakcje kupna i

Wspomaganie decyzji inwestycyjn

Roman Kulikowski,
Marek Libura,
Leon Słomiński

W książce omawiane są zagadnienia z obszaru analizy finansowej i teorii portfela inwestycyjnego z wykorzystaniem komputerowej metodologii wspomagającej podejmowanie decyzji.

Książka może być przedmiotem zainteresowania zarówno decydentów, podejmujących decyzje finansowe, jak i inwestorów giełdowych i doradców finansowych oraz studentów i doktorantów.

Monografia pozwoli głębiej i pełniej zrozumieć złożoną problematykę finansów i inwestycji, z uwzględnieniem różnych form ryzyka i podejmować w działalności praktycznej decyzje optymalne.

Rozważane są zasady konstruowania modeli matematycznych opisujących rynki kapitałowe – kształtowanie się cen oraz oczekiwanych zwrotów nakładów inwestycyjnych – jak również modeli działalności inwestora w postaci tzw. funkcji użyteczności.

ISBN 83-85847-09-X

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 37-35-78 w. 241 e-mail: kotuszew@ibspan.waw.pl