POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Roman Kulikowski,
Marek Libura,
Leon Słomiński

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 21

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 1998

Roman KULIKOWSKI
Marek LIBURA
Leon SŁOMIŃSKI

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. Maria Podgórska
Doc. dr hab. Leszek S. Zaremba

Książka powstała w wyniku realizacji projektu badawczego finansowanego przez KOMITET BADAŃ NAUKOWYCH

ISBN 83-85847-09-X
ISSN 0208-8029

Część I.
Podejmowanie decyzji na podstawie modeli użyteczności

Należy także zauważyć, że testy empiryczne modelu (6) prowadzą do rozbieżnych ocen. Chodzi tu zwłaszcza o ustalenie właściwych czynników tzn. indeksów (takich jak stopa inflacji, stopa procentowa, kurs wymiany walutowej, stopa wzrostu dochodu narodowego itp.), a także zbadanie, metodami analizy czynnikowej, które ze stosowanych czynników są istotne. S. Ross (1976) sugeruje, że tylko kilka (~ 5) czynników jest istotnych.

4. Efektywne metody konstruowania portfela inwestycyjnego

Podstawowy problem optymalizacyjny jaki występuje przy konstrukcji portfela złożonego z akcji można sformułować w sposób następujący. Należy znaleźć strategię $x_i = \hat{x}_i$, $i = 1,\dots,n$ (gdzie x_i reprezentują udziały nakładów na zakup akcji) taką, że dany wskaźnik jakości Q (lub użyteczności) osiąga maksimum, w zbiorze wartości dopuszczalnych Ω.

$$Q(\hat{x}) = \max_{x\in\Omega} Q(x) \tag{1}$$

Wskaźnikiem jakości może być zwłaszcza

$$Q(x) = \frac{R_p(x) - R_F}{\sigma_p(x)} \tag{2}$$

zaś zbiorem dopuszczalnym

$$\Omega = \left\{ x : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ \forall i \right\} \tag{3}$$

Trudności związane z efektywnym (numerycznym) rozwiązaniem problemu optymalizacji portfela polegają nie tylko na tym, że są to zagadnienia programowania nieliniowego (w prostym przypadku -

programowania kwadratowego) lecz również na tym, że wymiarowość n tych problemów (tzn. liczba akcji występująca na rynku) jest dosyć duża.

Istnieje w związku z tym zapotrzebowanie na proste techniki optymalizacyjne, umożliwiające inwestorowi giełdowemu na szybką konstrukcję lub rekonstrukcję portfela, a także - ciągłe zarządzanie walorami, jakie występują w jego portfelu.

4.1. Portfel z akcjami o stałej korelacji

Załóżmy, że inwestor chce maksymalizować wskaźnik (2) dla swego portfela. Gotów jest on też na krótką sprzedaż wobec czego na razie nie będziemy uwzględniać ograniczeń (3).

Warunki konieczne na optimum można zapisać (zgodnie z (11) z § 3.1, przy czym $Z_i = x_i\lambda$):

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i \sigma_{ik} = R_k - R_F, \quad k = 1,\dots,n \tag{4}$$

Przyjmiemy obecnie, jako założenie upraszczające, że korelacje wszystkich akcji z rynkiem, np. indeksem giełdowym, są stałe i równe ρ. Założenie to na wielu rynkach jest uzasadnione, zaś wartości ρ zawierają się w granicach 0,4÷0,6 (por. np. Elton i Gruber (1995)).

Opierając się na wspomnianej pracy, Elton i Gruber (1995), równania (4) zapisujemy

$$Z_i \sigma_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} Z_j \rho \sigma_i \sigma_j = R_i - R_F, \quad i = 1,\dots,n.$$

Dodając i odejmując w powyższym równaniu człon $Z_i \rho \sigma_i^2$ mamy:

$$Z_i(1-\rho)\sigma_i^2+\rho\sigma_i\sum_{j=1}^{n}Z_j\sigma_j=R_i-R_F,\quad i=1,\dots,n$$

Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymujemy

$$Z_i=\frac{1}{(1-\rho)\sigma_i}\left[\frac{R_i-R_F}{\sigma_i}-C^*\right],\quad i=1,\dots,n \tag{5}$$

gdzie

$$C^*=\rho\sum_{j=1}^{n}Z_j\sigma_j$$

Aby wyrazić C^* w znanych parametrach pomnóżmy (5) przez $\sigma_i\rho$ i dodajmy stronami. Otrzymujemy

$$C^*=\rho\sum_{j=1}^{n}Z_j\sigma_j=\frac{\rho}{1-\rho}\sum_{j=1}^{n}\frac{R_j-R_F}{\sigma_j}-\frac{n\rho C^*}{1-\rho}.$$

Rozwiązując powyższe równanie względem C^* mamy ostatecznie

$$C^*=\frac{\rho}{1-\rho+n\rho}\sum_{j=1}^{n}\frac{R_j-R_F}{\sigma_j}.^{*)} \tag{6}$$

Aby zademonstrować zastosowanie wzorów (5) (6) rozpatrzmy przykład zaczerpnięty z pracy Elton i Gruber (1995), który ilustruje Tabela 4. Przyjęto, że $R_F=5\%$, $\rho=0{,}5$, zaś poszczególne akcje uszeregowano zgodnie z malejącymi wartościami $(R_i-R_F):\sigma_i$.

[*)] Można także pokazać, że w przypadku gdy krótka sprzedaż nie występuje, liczbę n trzeba zamienić na i. Wtedy odpowiednio C^* zależy od i, co wymaga zamiany C^* na C_i.

Tabela 4. Ilustracja przykładu liczbowego

i	R_i	σ_i	$\frac{R_i - R_F}{\sigma_i}$	$\frac{\rho}{1-\rho+i\rho}$	$\sum_{j=1}^{i} \frac{R_i - R_F}{\sigma_i}$	C_i
1	29	3	8,0	0,500	8	4
2	19	2	7,0	0,333	15	5
3	29	4	6,0	0,250	21	5,25
4	35	6	5,0	0,20	26	5,20
5	14	2	4,5	0,167	30,5	5,08
6	21	4	4,0	0,143	34,5	4,93

Widać tu, że jedynie akcje z numerami 1, 2, 3 posiadają wartości $(R_i - R_F):\sigma_i > C_i$ i tylko one gwarantują $Z_i \geq 0$. Wartości te obliczone ze wzoru (5) wyniosą:

$$Z_1 = \frac{1}{1{,}5}[8 - 5{,}25] = 1{,}833$$

$$Z_2 = \frac{1}{2}[7 - 5{,}25] = 1{,}75$$

$$Z_3 = \frac{1}{2}[6 - 5{,}25] = 0{,}375$$

Możemy teraz wyznaczyć udziały optymalne $\hat{x}_i = \frac{Z_i}{\sum_i Z_i}$

$$\hat{x}_1 = 0{,}463, \quad \hat{x}_2 = 0{,}442, \quad \hat{x}_3 = 0{,}095.$$

Rozpatrzony przykład wskazuje na fakt, iż tylko niektóre akcje, o dostatecznie dużych wartościach $(R_i - R_F):\sigma_i$, wchodzą do optymalizowanego portfela.

Warto też zauważyć, iż Elton i Gruber (1995) podają podobną procedurę rankingu oraz akceptacji do portfela najlepszych, (w sensie $(R_i - R_F):\beta_i$) akcji opracowaną dla ogólnego przypadku walorów z różnymi korelacjami.

4.2. Metoda oparta na zasadach akceptacji i alokacji

Metoda konstrukcji portfela rozpatrzona w § 4.1 wskazuje na fakt iż portfel optymalny dla przypadku, gdy nie występuje krótka sprzedaż może być faktycznie skonstruowany bez konieczności uwzględniania w rankingu wszystkich akcji, a zwłaszcza tych, które charakteryzują się niskimi wartościami $(R_i - R_F):\sigma_i$. Obserwacja ta pozwala podejść do problemu konstrukcji optymalnego portfela w sposób dwuetapowy. W etapie pierwszym wybieramy te akcje, które plasują się wysoko w rankingu w stosunku do pewnego ustalonego poziomu (np. C^* we wzorze (5)).

Podobny efekt otrzymujemy, gdy inwestor kieruje się pojęciem linii rozdzielającej omówionym w § 2.5. Wszystkie walory o danych (R_i, σ_i), które plasują się powyżej linii o równaniu $R_i = R_F + \kappa_f \sigma_i$, czyli $\frac{R_i - R_F}{\sigma_i} > \kappa_f$, są przez inwestora preferowane (akceptowane).

Widać, że problem akceptacji określonego waloru do portfela sprowadza się w obu przypadkach do porównania pewnej funkcji parametrów waloru z danym poziomem odniesienia (np. C^* lub κ_F). Z chwilą gdy takie porównanie zostało dokonane inwestor uzyskuje zbiór walorów, które są kandydatami do portfela. Jednak nie wie on jeszcze w jakich proporcjach winny one uczestniczyć w portfelu. Problem wyznaczenia tych proporcji związany jest z optymalizacją funkcji celu (użyteczności) względem zmiennych x_i, $\forall i$. Optymalne rozwiązanie określa też alokację zasobów inwestycyjnych na poszczególne walory, której dokonuje się w etapie drugim.

W związku z powyższymi uwagami sformułujemy poniżej dwie ogólne zasady, które dotyczą akceptacji - w etapie pierwszym, oraz - w etapie drugim - alokacji zasobów inwestora.

4.2.1. Akceptacja walorów z ryzykiem

Przystępując do sformułowania zasady akceptacji założymy, iż znane są parametry R_i, σ_i poszczególnych walorów, zwrot na walorze bez ryzyka R_F, a także - iż inwestor posiada funkcję użyteczności $P_i R_i A_i$ $F(x_i / A_i)$, którą charakteryzują współczynniki pewności

$$A_i = 1 - \kappa_f \; \sigma_i / R_i, \quad \text{z danymi } \kappa_f .$$

Ze wzoru (5) z § 2.5 wynika, iż akceptacja waloru n-tego następuje gdy

$$R_i \geq R_F \varphi(\kappa_f, A_i),$$

gdzie

$$\varphi(\kappa_f, A_i) = \frac{F(1)}{A_i F(1/A_i)}.$$

Zasada Akceptacji

Walor scharakteryzowany przez $\{R_i, A_i\}$ *winien być akceptowany przez inwestora gdy*

$$R_i \geq R_F \, \varphi(\kappa_f, A_i) \tag{7}$$

oraz odrzucany przy zmianie znaku nierówności w (7) na przeciwny.

Ponieważ jawna postać funkcji φ we wzorze (7) nie jest znana, możliwe jest zastosowanie aproksymacji φ przez funkcję potęgową, zgodnie z (6) z § 2.5, tj.

$$R_i \geq R_F A_i^{\beta-1}, \tag{8}$$

Przy $\beta = 0$ warunek powyższy redukuje się do

$$R_i \geq R_F / A_i$$

lub

$$R_i \geq R_F + \kappa_f \sigma_i .$$

Warunek ten odpowiada prostemu kryterium akceptacji, jakie było już rozważane w § 2.4 wzór (11).

Zasada akceptacji (7) pozwala inwestorowi oceniać poszczególne walory w odniesieniu do waloru bez ryzyka. Inny wariant tej zasady otrzymamy porównując walory o parametrach $\{R_i, A_i\}$ względem innego wybranego waloru. Walorem takim może zwłaszcza być posiadany już portfel inwestora o parametrach R_0, A_0. Akceptacja może tu nastąpić gdy

$$R_i \geq R_0 \varphi(\kappa_f, A_i), \text{ gdzie } \varphi(\kappa_f, A_i) = A_0 F(1/A_0) : A_i F(1/A_i).$$

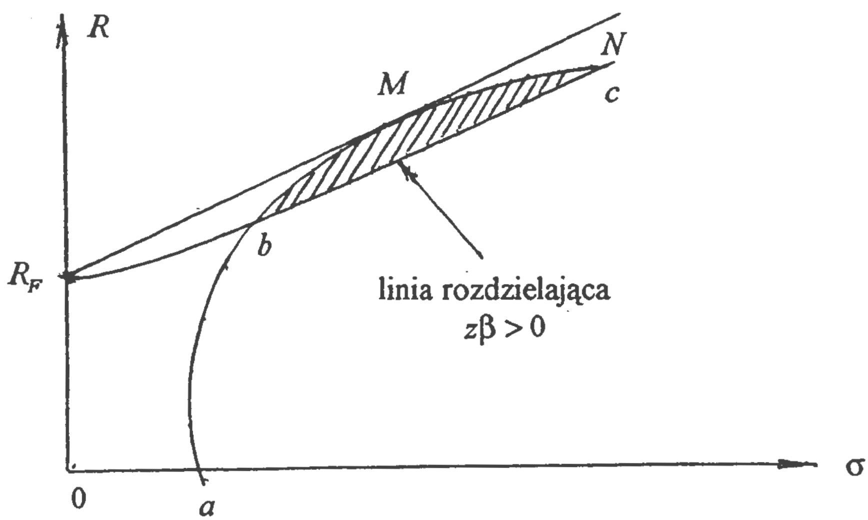
Przy aproksymacji φ przez funkcję potęgową otrzymujemy tu

$$R_i \geq R_0 (A_0 / A_i)^{1-\beta}. \tag{9}$$

Ze wzoru powyższego wynika, iż akceptowane mogą być również walory o niskich zwrotach $(R_i < R_0)$ jeśli tylko stosunek współczynników pewności A_i / A_0 jest liczbą odpowiednio dużą.

Jak widać wyrażenie (9) określa prostą procedurę dla akceptacji (odrzucenia), a także - rankingu różnorodnych walorów. Procedura ta ma jednak zindywidualizowany charakter, jako że opiera się na subiektywnych postawach wobec ryzyka, wyrażonych przez parametry $A_i(\kappa_f)$, β funkcji użyteczności inwestora.

Warto zwrócić uwagę na ilustrację graficzną zasady akceptacji przedstawioną na płaszczyźnie $\{\sigma, R\}$, Rys. 12. Na rysunku tym ukazano granicę efektywną (abc) oraz linię rynku kapitałowego $R_F MN$, która jest styczną do granicy efektywnej w punkcie M. Punkt M wyznacza taką kompozycję akcji, która odpowiada efektywnemu portfelowi rynkowemu w sensie $\max_x \frac{R_M - R_F}{\sigma_M}$. Aby utworzyć taki portfel inwestor musiałby nabyć wszystkie akcje znajdujące się na rynku w proporcjach równych proporcjom rynkowym. Jednakże, badania statystyczne wykazują, iż portfel przeciętnego inwestora zawiera tylko kilka akcji (por. Levy i Sarnat (1994)). Fakt ten tłumaczy się nie tylko chęcią uniknięcia dużych opłat transakcyjnych przez inwestora. Przy $\beta > 0$ istnieje bowiem linia rozdzielająca $R_F bc$, przechodząca poniżej prostej $R_F MN$ oraz obszar (zakreskowany) $bMcb$ w którym znajduje się skończona liczba walorów akceptowanych przez inwestora.



Rys. 12. Ilustracja zasady akceptacji

Wśród tych walorów oprócz oddzielnych akcji mogą też znaleźć się „podportfele” złożone z kombinacji akcji, które posiadają niski poziom wzajemnej korelacji. Pozwala to obniżyć wypadkową wariancją podportfela, wynikającą z dobrodziejstw dywersyfikacji. Walorami, które korzystają z tych dobrodziejstw są też jednostki funduszy powierniczych (np. PIONEER na Giełdzie Warszawskiej). Zawierają one z reguły znaczną liczbę akcji i innych walorów.

Problem wykorzystania dobrodziejstw dywersyfikacji występuje też wtedy gdy inwestor posiada już pewien portfel o parametrach R_a, σ_a i rozważa nabycie dodatkowego waloru o parametrach R_b, σ_b oraz współczynnikiem korelacji z portfelem $\rho_{ab} = \rho$. Strategię taką można nazwać strategią sekwencyjną konstrukcji portfela. W zarządzaniu portfelem inwestor może też kierować się chęcią pozbycia się tych walorów, które nie spełniają już zasady akceptacji.

Jeśli inwestor kieruje się w swych decyzjach kryterium $\max_x (R_p - R_F) : \sigma_p$ to dla określenia optymalnych udziałów a i b w portfelu winien on rozwiązać równania (por. (4) z § 4.1):

$$R_a - R_F = Z_a \sigma_a^2 + Z_b \sigma_a \sigma_b \rho, \tag{10}$$

$$R_b - R_F = Z_a \sigma_a \sigma_b \rho + Z_b \sigma_b^2. \tag{11}$$

Podstawiając $Z_b = 0$ eliminujemy walor b z portfela. Wtedy

$$R_a - R_F = Z_a \sigma_a^2$$

$$R_b - R_F = Z_a \sigma_a \sigma_b \rho$$

Stąd

$$R_b - R_F = \frac{R_a - R_F}{\sigma_a} \sigma_b \rho,$$

lub

$$\frac{R_b - R_F}{\sigma_b} = \frac{R_a - R_F}{\sigma_a}\rho .$$

Jeśli zwiększymy R_b to spowoduje to, że $Z_b > 0$, czyli akcja b wejdzie do portfela oraz konsekwentnie:

$$\frac{R_b - R_F}{\sigma_b} > \frac{R_a - R_F}{\sigma_a}\rho .$$

Wprowadzając oznaczenie $\kappa_b = (R_b - R_F):\sigma_b$ oraz $\kappa_a = (R_a - R_F):\sigma_a$ widzimy, iż akceptacja waloru b do portfela a następuje gdy

$$\frac{\kappa_b}{\rho} \geq \kappa_a$$

zaś jego odrzucenie z portfela gdy

$$\frac{\kappa_b}{\rho} < \kappa_a$$

Podobnie odrzucenie a z portfela $a+b$ następuje gdy

$$\frac{\kappa_a}{\rho} < \kappa_b \quad \text{czyli} \quad \kappa_a < \rho\kappa_b .$$

Widać stąd, iż aby walor b mógł uczestniczyć we wspólnym portfelu z a musi zachodzić

$$\rho\kappa_b \leq \kappa_a \leq \frac{\kappa_b}{\rho} . \tag{12}$$

Załóżmy dla przykładu, że portfel inwestora charakteryzuje się parametrem $\kappa_a = 1$, zaś dwa walory b, b' parametrami

$$\kappa_b = 0{,}5, \quad \rho = 0{,}6;$$

$$\kappa_b' = 0{,}3, \quad \rho = 0{,}2.$$

Jak widać walor b winien być odrzucony, gdyż warunek (12):

$$\rho\kappa_b = 0{,}3 < \kappa_a \leq \frac{0{,}5}{0{,}6} = 0{,}833$$

nie jest spełniony.

W przypadku waloru b' mamy odpowiednio

$$0{,}06 < \kappa_a < 1{,}5$$

czyli walor b' winien być akceptowany.

Z chwilą akceptacji do portfela a dodatkowego waloru b parametry R_{a+b}, σ_{a+b} można wyznaczyć, obliczając najpierw rozwiązania $\hat{Z}_a$, $\hat{Z}_b$ równań (10) (11), a następnie udziały: $\hat{x}_a = \hat{Z}_a:(\hat{Z}_a + \hat{Z}_b)$, $\hat{x}_b = 1 - \hat{x}_a$. Korzystając ze wzorów:

$$\hat{x}_a = \left[1 + \frac{\sigma_a}{\sigma_b}\frac{\kappa_b - \rho\kappa_a}{\kappa_a - \rho\kappa_b}\right]^{-1}$$

$$\sigma_{a+b}^2 = \sigma_a^2\hat{x}_a^2 + \sigma_b^2\hat{x}_b^2 + 2\hat{x}_a\hat{x}_b\sigma_a\sigma_b\rho,$$

$$R_{a+b} = R_a\hat{x}_a + R_b\hat{x}_b; \qquad \kappa_{a+b} = \frac{R_{a+b} - R_F}{\sigma_{a+b}}$$

obliczamy kolejno pozostałe parametry portfela.

Przykład

Inwestor posiada portfel a charakteryzujący się parametrami: $R_a = 0{,}2$; $\sigma_a = 0{,}15$; oraz (przy $R_F = 0{,}05$) $\kappa_a = 1$.

Rozważa on włączenie do swego portfela waloru b, który charakteryzuje się parametrami:

$$R_b = 0{,}14 \,,\ \sigma_b = 0{,}3 \,,\ \kappa_b = 0{,}3 \,,$$

oraz korelacją z a wyrażoną przez $\rho = 0{,}2$. Ponieważ $\kappa_b > \kappa_a$, walor b jest akceptowalny i jego udział we wspólnym portfelu $(a+b)$ wyraża się

$$\hat{x}_a = \left[1 + \frac{\sigma_a}{\sigma_b}\frac{\kappa_b - \rho\kappa_a}{\kappa_a - \rho\kappa_b}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{0{,}15}{0{,}3}\frac{0{,}3-0{,}2}{1-0{,}06}\right]^{-1} = 0{,}949$$

Mamy również $\hat{x}_b = 1 - 0{,}949 = 0{,}051$.

Możemy teraz obliczyć σ_{a+b} oraz R_{a+b}

$$V = \sigma_a^2\hat{x}_b^2 + \sigma_b^2\hat{x}_b^2 + 2\hat{x}_a\hat{x}_b\sigma_a\sigma_b\rho = 0{,}15^2 \cdot 0{,}949^2 + 0{,}3^2 \cdot 0{,}051^2$$
$$+ 2 \cdot 0{,}949 \cdot 0{,}051 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 =$$
$$= 0{,}0214, \sigma_{a+b} = \sqrt{V} = 0{,}146,$$

$$R_{a+b} = R_a\hat{x}_a + R_b\hat{x}_b = 0{,}197.$$

Widzimy iż parametr κ_{a+b} dla portfela $a+b$ wynosi $\kappa_{a+b} = \dfrac{0{,}147}{0{,}146} = 1{,}007.$

Rozważania powyższe wskazują na konieczność uwzględniania, przy konstrukcji portfela w sposób sekwencyjny, nie tylko parametrów $\{R_i \sigma_i\}$ oddzielnych akcji lecz również - korelacji tych akcji z istniejącym portfelem. Czym korelacja ta będzie mniejsza, a nawet ujemna, tym walor staje się cenniejszy dla inwestora. Inaczej mówiąc inwestor dąży (przez ciągłą rekonstrukcję i wymianę akcji) do uzyskania portfela o maksymalnym współczynniku $\kappa_p = \dfrac{R_p - R_F}{\sigma_p}$, który jest co najmniej tak duży jak indywidualna cena ryzyka tego inwestora tj. $\kappa_p \geq \kappa_f$. Stąd też bierze się tendencja by do portfela włączać walory nisko i ujemnie skorelowane. Ponieważ akcje występujące na konkretnej giełdzie są zwykle skorelowane dodatnio (z ρ w granicach 0,4÷0,6) inwestorzy lokują często swoje kapitały na giełdach zagranicznych lub innych nisko skorelowanych rynkach (np. rynku obligacji, opcji, futures albo rynku nieruchomości, metali szlachetnych itp.). Na przeszkodzie optymalizacji takich portfeli stoi nie tylko brak informacji (o R_i, σ_i i ρ_i) lecz również - brak odpowiedniej metodologii konstruowania takich portfeli. Z powyższego względu w niniejszym opracowaniu starano się podejść do problematyki optymalizacji portfela w sposób możliwie szeroki, uwzględniając zarówno różne postawy inwestora wobec ryzyka jak i różnorodność walorów występujących w praktyce inwestycyjnej.

Na zakończenie rozważań dotyczących zasady akceptacji zauważmy, że przy $\beta = 0$ zwrot na akceptowanej akcji winien wynieść:

$$R_k = R_F + \kappa_f \sigma_k, \quad \forall k \tag{13}$$

Warto porównać powyższy model z modelem CAPM z § 3.1 (wzór (15))

$$R_k = R_F + \beta_k (R_M - R_F), \quad \forall k.$$

Oba modele wymagają by za ponoszone ryzyko systematyczne inwestor był wynagradzany pewną premią. Aby można było operować identycznie pojmowanym ryzykiem załóżmy, że portfel k jest w pełni zdywersyfikowany. W rezultacie miara ryzyka systematycznego to $\sigma_k = \beta_k \sigma_M$, gdzie σ_M jest miarą ryzyka rynkowego. Można wtedy przedstawić CAPM w postaci równoważnej

$$R_k = R_F + \frac{R_M - R_F}{\sigma_M}\sigma_k . \tag{14}$$

Porównując (13) z (14) widzimy, że cenie ryzyka w CAPM $\left(\frac{R_M - R_F}{\sigma_M}\right)$ odpowiada cena κ_f w modelu (13), który można nazwać IAPM (*individual asset pricing model*). Nazwa ta podkreśla fakt, iż wycena ryzyka w IAPM ma charakter indywidualny, natomiast w przypadku CAPM jest to uśredniona wycena zbiorowa wszystkich inwestorów działających na rynku.

Indywidualny inwestor może, rzecz jasna, zaakceptować wycenę walorów przez CAPM przyjmując $\kappa_f = (R_M - R_F):\sigma_M$. Może on też uważać, iż posiada własne uzasadnione argumenty lub informacje (niedostępne dla innych inwestorów), które powinien wykorzystać dla optymalizacji swojego portfela. Wtedy, rzecz jasna, $\kappa_f \neq \frac{R_M - R_F}{\sigma_M}$.

4.2.2. Zasada alokacji zasobów

W wyniku stosowania zasady akceptacji inwestor określa pewną liczbę (n) walorów o danych parametrach $\{R_i, \sigma_i\}$, które winny wejść do portfela inwestycyjnego. Każdy z tych walorów charakteryzuje się też ceną P_i, $i = 1,\dots,n$, na rynku inwestycyjnym. Problem, który stoi przed inwestorem polega na określeniu optymalnej liczby $x_i = \hat{x}_i$, $i = 1,\dots,n$, walorów, które należy nabyć na giełdzie tak, by uzyskać oczekiwany zwrot monetarny z portfela Z, a także - by osiągnąć maksymalną użyteczność z posiadanego portfela.

Załóżmy, że wypadkowa użyteczność jest sumą użyteczności odnoszących się do poszczególnych walorów, które określa wzór (2) z § 2.5, tj.

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} Y_i F\left(\frac{x_i}{A_i}\right), \tag{1}$$

gdzie:

$$Y_i = P_i R_i A_i\,,\ A_i = 1 - \kappa \frac{\sigma_i}{R_i}\,,\ i = 1,\dots,n\,,$$

$F(\cdot)$ = funkcja ściśle wklęsła.

Liczby x_i winny być nieujemne, oraz spełniać warunek:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i R_i x_i = Z \tag{2}$$

Zauważmy także, że Y_i są to liczby dodatnie. Jak wynika z zasady akceptacji (por. np. (9)) mamy

$$R_i A_i \ge R_F > 0, \quad \forall i\,,$$

Warunek ten nie wyklucza sytuacji, w których, na przykład, zwroty R_i oraz liczby A_i są liczbami ujemnymi. W takich sytuacjach $Y_i > 0$, $\forall i$, zaś funkcje $Y_i F\left(\frac{x_i}{A_i}\right)$ pozostają w dalszym ciągu ściśle wklęsłymi.

Przypadki gdy $Y_i < 0$, tj. gdy R_i oraz A_i posiadają różne znaki powodują, że $Y_i F\left(\frac{x_i}{A_i}\right)$ stają się funkcjami wypukłymi, zaś $\Phi(x)$-funkcjonałem wypukłym. Jednakże takie przypadki nie są interesujące dla inwestora, który unika ryzyka i stosuje przy doborze do swego portfela omawianą w § 4.2.1 zasadę akceptacji.

Wynika stąd, iż w interesujących nas zagadnieniach $\Phi(x)$ jest funkcjonałem ściśle wklęsłym na zbiorze wypukłym.

$$\Omega = \left\{ x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} P_i R_i x_i = Z,\ x_i \geq 0,\ P_i R_i > 0,\ i = 1,\ldots,n \right\}.$$

Istnieje zatem jednoznaczna strategia: $x = \hat{x} \in \Omega$, taka że

$$\Phi(\hat{x}) = \max_{x \in \Omega} \Phi(x). \tag{3}$$

Aby wyznaczyć tę strategię rozważmy najpierw przypadek, w którym ignoruje się warunki $x_i \geq 0$, $\forall i$. Jest to typowy problem na maksimum warunkowe z ograniczeniem $\sum_{i=1}^{n} P_i R_i x_i = Z$, oraz lagranżianem:

$$\Psi(x,\lambda) = \Phi(x) + \lambda\left(Z - \sum_{i=1}^{n} P_i R_i x_i \right)$$

Warunki konieczne optymalności wymagają by:

$$\Psi_{x_i} = \frac{Y_i}{A_i} F'\left(\frac{x_i}{A_i}\right) - \lambda P_i R_i = P_i R_i \left[F'\left(\frac{x_i}{A_i}\right) - \lambda \right] = 0 \tag{4}$$

$$\Psi'_\lambda = Z - \sum P_i R_i \hat{x}_i = 0 \tag{5}$$

Można zauważyć iż strategia

$$\hat{x}_i = A_i \frac{Z}{Y}, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} P_i R_i A_i, \quad \forall i. \tag{6}$$

spełnia warunki (4) (5). Rzeczywiście, gdy dobierzemy λ tak by $\lambda = F'\left(\frac{Z}{Y}\right)$

$$\Psi'_{x_i=\hat{x}_i} = P_i R_i \left[F'\left(\frac{Z}{Y}\right) - \lambda \right] = 0\,,$$

$$\Psi'_{\lambda} = Z - \frac{Z}{Y} \sum_{i=1}^{n} P_i R_i A_i = 0\,.$$

Dla wykazania optymalności strategii (6) należy jeszcze sprawdzić warunki optymalności (Kuhna-Tuckera) w punktach $x_i = 0, \forall i$.

Warunki te w rozważanym tu prostym przypadku redukują się do żądania by dla $x_i = 0, \forall i$,

$$\Phi'_{x_i} = \frac{Y_i}{A_i} F'\left(\frac{x_i}{A_i}\right)\bigg|_{x_i=0} = P_i R_i F'(0) > 0, \quad \forall i\,.$$

Ponieważ z założenia funkcja $F'(0) > 0$, to przy $R_i > 0$, $\forall i$, warunki omawiane są spełnione.

Mnożąc obie strony (6) przez P_i oraz sumując uzyskujemy całkowite nakłady kapitałowe

$$X = \sum_{i=1}^{n} P_i \hat{x}_i = \frac{Z}{Y} \sum_{i=1}^{n} P_i A_i\,.$$

Zatem $\frac{Z}{Y} = \frac{X}{P}$, gdzie $P = \sum_{i=1}^{n} P_i A_i$, zaś udział (u_i) nakładów $P_i \hat{x}_i \overset{\Delta}{=} X_i$, w całości nakładów X, wynosi:

$$u_i = \frac{X_i}{X} = \frac{P_i A_i}{P}, \quad \sum_{i=1}^{n} u_i = 1\,. \tag{7}$$

Możemy także obliczyć optymalną użyteczność portfela

$$\Phi(\hat{x}) = \sum Y_i F\left(\frac{Z}{Y}\right) = YF\left(\frac{Z}{Y}\right) = YF\left(\frac{X}{P}\right) \tag{8}$$

Jak widać, użyteczność ta wyrażona jest przez iloczyn oczekiwanego zwrotu najgorszego przypadku Y oraz liczbę $F\left(\frac{X}{P}\right)$, charakterystyczną dla indywidualnego inwestora. Funkcja $\Phi(\hat{x})$ przyjmuje wartości w jednostkach monetarnych.

Wprowadzając oznaczenie $A = Y / Z$ (gdzie A można traktować jako wyraz zaufania (pewności) do portfela optymalnego) można wyrazić (8) w postaci równoważnej

$$\Phi(\hat{x}) = ZAF\left(\frac{1}{A}\right), \quad A = \frac{1}{Z}\sum_{i=1}^{n} P_i R_i A_i = \frac{1}{X}\sum_{i=1}^{n} P_i A_i . \tag{9}$$

Uwzględniając typową postać funkcji $\varphi(A) = AF\left(\frac{1}{A}\right)$ (np. $\varphi(A) = const\ A^{1-\beta}$, $0 < \beta < 1$) widać, że $\Phi(A)$ jest funkcją ściśle wklęsłą zaufania (A), która osiąga maksimum dla $A = 1$, tj. $\sum P_i R_i A_i = Z$.

A zatem, użyteczność optymalnego portfela jest proporcjonalna do iloczynu oczekiwanego zwrotu (Z) przez ściśle wklęsłą funkcję $\varphi(A)$ zaufania do tego portfela (A). Taka interpretacja użyteczności pozwala (naszym zdaniem) lepiej zrozumieć dążenie inwestora do posiadania portfela, który charakteryzuje się nie tylko dużym oczekiwanym zwrotem (Z), lecz również - jego dążenie do posiadania takiego portfela, który może być darzony dużym zaufaniem, zbliżonym do $A = 1$.

Warto też zauważyć, iż wyznaczone strategie (6) (7) nie zależą od analitycznej postaci funkcji F inwestora. Cechy indywidualne tego inwestora przejawiają się tu wyłącznie przez $A_i(\kappa_f)$.

Możemy także sformułować uzyskany rezultat (7) w postaci następującej zasady alokacyjnej.

Zasada alokacji zasobów

Optymalny udział u_i kapitału zainwestowanego w walor o współczynniku pewności A_i winien być proporcjonalny do iloczynu współczynnika pewności A_i i ceny waloru P_i. Jak widać mimo pozornej złożoności funkcji użyteczności (1), zasada optymalnej alokacji zasobów zainwestowanego kapitału, gwarantująca maksymalną użyteczność, jest bardzo prosta.

Obie zasady (akceptacji i alokacji) pozwalają na proste i efektywne konstruowanie i zarządzanie portfelami o dużej złożoności.

Jako przykład rozpatrzymy zadanie akceptacji i alokacji kapitału X przy $\kappa_f = 1{,}2$, dla 4 walorów o parametrach:

1. $R_1 = 5\%$, $\sigma_1 = 0$, 2. $R_2 = 10\%$, $\sigma_2 = 4\%$
3. $R_3 = 12\%$, $\sigma_3 = 5\%$, 4. $R_4 = 18\%$, $\sigma_4 = 14\%$

oraz cenach: P_1, $P_2 = 1{,}3\,P_1$, $P_3 = 0{,}9\,P_1$, $P_4 = 0{,}8\,P_1$.

Znajdujemy przede wszystkim współczynniki pewności:

$$A_1 = 1 - 1{,}2\frac{0}{5} = 1, \quad A_2 = 1 - 1{,}2\frac{4}{10} = 0{,}52, \quad A_3 = 0{,}5, \quad A_4 = 0{,}067$$

Stosując zasadę akceptacji ($R_i A_i \geq R_F$) widzimy że:

$$\text{dla waloru Nr 1 mamy } A_1 R_1 = 0{,}05 = 0{,}05,$$

$$\text{dla waloru Nr 2 mamy } A_2 R_2 = 0{,}052 > 0{,}05,$$

$$\text{dla waloru Nr 3 mamy } A_3 R_3 = 0{,}06 > 0{,}05,$$

$$\text{dla waloru Nr 4 mamy } A_4 R_4 = 0{,}012 < 0{,}05.$$

Wynika stąd, że walory Nr 1, 2, 3 winny być akceptowane, zaś Nr 4 - odrzucony.

Stosując zasadę alokacji zasobów (7) otrzymujemy następującą strategię podziału nakładów u_i na poszczególne walory:

$$u_1 = \frac{P_1 A_1}{P_1 A_1 + P_2 A_2 + P_3 A_3} = \frac{1}{1 + 1{,}3 + 0{,}52 + 0{,}8 \cdot 0{,}5} = 0{,}482,$$

$$u_2 = \frac{0{,}676}{2{,}076} = 0{,}325,$$

$$u_3 = 0{,}193.$$

Optymalne liczby walorów, które należy zakupić wynoszą

$$\hat{x}_i = X_i / P_i$$

czyli

$$\hat{x}_1 = \frac{0{,}482}{P_1} X, \quad \hat{x}_2 = \frac{0{,}325}{P_2} X, \quad \hat{x}_3 = \frac{0{,}193}{P_3} X.$$

Można zauważyć, że przy dużych nakładach X w stosunku do ceny walorów P_i, odchylenie liczby rzeczywiście zakupionych walorów od $\hat{x}_i$ (wynikające z niepodzielności tych walorów) jest stosunkowo niewielkie. W przypadku przeciwnym, tj. gdy inwestor dysponuje niewielkim kapitałem X lub sprzedaż odbywa się w dużych jednostkach (np. pakietach akcji lub obligacji) problem optymalizacji ciągłej zamienia się w bardziej złożony problem optymalizacji dyskretnej, o której będzie mowa w części II niniejszej pracy.

Dla efektywnego stosowania obu zasad (w przypadku optymalizacji ciągłej) konieczna jest umiejętność obliczania parametrów $\{R_i, \sigma_i, A_i\}$ dla różnego typu walorów. Dokładniej omówimy tę problematykę w dalszych punktach niniejszej części pracy.

Wypada również zauważyć, iż w rozważanym powyżej, prostym modelu alokacji nakładów inwestycyjnych, przyjęto, że inwestor inwestuje dany kapitał X jednocześnie we wszystkie n walory ignorując korelacje, jakie mogą występować pomiędzy poszczególnymi walorami, a także - walory, które inwestor mógł nabyć w okresie wcześniejszym. Wydaje się więc, że bardziej zbliżony do praktyki jest model w którym inwestor posiada pewien portfel początkowy, który nazwiemy podstawowym. W skład tego portfela, oprócz papierów wartościowych mogą wchodzić także nieruchomości, dzieła sztuki, biżuteria itp.

W określonych etapach czasu inwestor dysponuje nadwyżkami kapitału X^*, które gotów jest zainwestować w inwestycje przynoszące zwrot większy od R_F, lecz obarczony ryzykiem. Oznacza to iż w konkretnym etapie inwestor porównuje występujące na rynku kapitałowym walory, które charakteryzują dodatnie współczynniki

$$\kappa_i = \frac{R_i - R_F}{\sigma_i} > 0, \quad i = n$$

ze swoim portfelem podstawowym, scharakteryzowanym przez

$$\kappa_0 = \frac{R_0 - R_F}{\sigma_0} > 0,$$

Inwestor stara się wybrać optymalną liczbę tych walorów, w ramach posiadanych środków X^*, uwzględniając wzajemne korelacje ρ_i, $i = 1,\dots,n$, jakie istnieją pomiędzy każdym i-tym walorem oraz portfelem podstawowym. Walory nabyte w danym etapie uzupełniają portfel podstawowy przy przejściu do etapu następnego.

Jak wykazano w § 4.2.1, im bardziej wartość κ_i / ρ_i przewyższa κ_0 tym wyższa jest wartość (pewność) tego waloru w oczach inwestora oraz jego chęć włączenia (akceptacji) i-tego waloru do portfela podstawowego. Wynika stąd możliwość przypisania omawianym walorom (w konkretnych wariantach modelu sekwencyjnego) współczynników pewności, które oznaczymy A_i^*, $\forall_i$. Konkretny, prosty przykład takiego modelu otrzymamy przyjmując

$$A_0^* = 1 - \frac{\kappa_f}{\kappa_0}, \tag{10}$$

$$A_i^* = 1 - \frac{\kappa_f}{\kappa_i}\rho_i, \quad i = 1,\dots,n, \tag{11}$$

gdzie κ_f jest to (por. § 2.4) indywidualna cena ryzyka inwestora. W wyrażeniach (10), (11) zakładamy, że $\kappa_0 \geq \kappa_f$ (gdy $\kappa_0 = \kappa_f$ to $A_0^* = 0$). Inny wariant modelu otrzymamy przyjmując

$$A_i^* = 1 - \kappa_f(\kappa_i - \rho_i\kappa_0)^{-1}.$$

Łatwo zauważyć, że wartość współczynnika A_i^* jest tym większa im większy jest parametr κ_i dla i-tego waloru oraz im mniejszy jest współczynnik korelacji tego waloru (ρ_i) z portfelem podstawowym.

Porównując współczynnik (11) ze stosowanym współczynnikiem $A_i = 1 - \kappa_f \frac{\sigma_i}{R_i}$ można zauważyć iż A_i^* otrzymujemy z A_i przez zastąpienie wartości R_i przez $R_i - R_F$ oraz σ_i przez $\sigma_i\rho_i$ $\forall_i$. Wynika stąd możliwość przeniesienia podstawowych wzorów, wyprowadzonych dla modelu inwestycji jednoczesnych, na model sekwencyjny. I tak ze wzoru (6), obowiązującego dla modelu inwestycji jednoczesnych, otrzymujemy optymalne strategie $\hat{x}_i^*$, $\forall_i$, dla modelu sekwencyjnego:

$$\hat{x}_i^* = A_i^* \frac{Z^*}{Y^*}, \quad i = 1,2,\dots,n, \tag{12}$$

gdzie $Y^* = \sum_{i=1}^{n} P_i(R_i - R_F)A_i^*$,

Z^* - dana nadwyżka inwestowanego kapitału (ponad wartość bez ryzyka) tj.

$$Z^* = \sum_{i=1}^{n} P_i(R_i - R_F)x_i^* .$$

W podobny sposób ze wzoru (7) możemy określić optymalne udziały nakładów u_i^*, $\forall_i$; w modelu sekwencyjnym

$$u_i^* = A_i^* P_i / P \quad \text{gdzie} \quad P = \sum_{i=1}^{n} P_i A_i^* \tag{13}$$

Łatwo zauważyć, iż strategie (12), (13) preferują te walory, które posiadają duże κ_i oraz niskie korelacje (ρ_i) z portfelem podstawowym.

Stosując model sekwencyjny inwestor musi określić na każdym etapie zarówno wartości κ_i, $\forall i$ jak i nowe korelacje ρ_i, wynikające ze zmian w portfelu podstawowym. Do portfela tego mogą być bowiem włączone zarówno nowe walory jak również - eliminowane walory stare, które utraciły swoją efektywność, wyrażoną przez parametr κ. (Jak widzieliśmy w § 4.2.1, określony walor b winien być eliminowany z portfela podstawowego gdy $\kappa_b < \kappa_0 \rho_b$).

Innym możliwym sposobem uwzględnienia korelacji walorów przy budowie portfela jest wykorzystanie współczynników β_k z modelu CAPM. Jak wynika ze wzoru (18) z § 3.1 wariancję σ_k^2 można wyrazić jako sumę ryzyka systematycznego $\beta_k^2 \sigma_M^2$, która zależy od korelacji zwrotów z akcji i zwrotów z rynku (o wariancji σ_M^2) oraz - ryzyka niesystematycznego (σ_{ek}^2). Zatem $A_k = 1 - \kappa \dfrac{\sigma_k}{R_k}$, gdzie $\sigma_k = \{\beta_k^2 \sigma_M^2 + \sigma_{ek}^2\}^{\frac{1}{2}}$, i te akcje które charakteryzują się małą korelacją, tj. małym β_k, będą również posiadały duże współczynniki pewności A_k. Łatwo zauważyć, że sposób ten nie pozwala uwzględnić efektu dywersyfikacji przy ujemnych korelacjach $(\beta_k < 0)$. W sytuacji takiej można jednak skorzystać ze znanego sposobu dekompozycji (zalecanego np. przez Levy'ego i Sarnata (1994)), gdzie

$$\sigma_k = \sigma_{ek} + \beta_k \sigma_M .$$

Przy takiej dekompozycji σ_k maleje przy ujemnych korelacjach, zaś współczynnik A_k odpowiednio rośnie.

Wypada także zauważyć, iż wysuwanym nieraz argumentem przeciwko dwuczynnikowej funkcji użyteczności (1) jest fakt, że porównujemy tu wartości $Z_i x_i$ z $Y_i = A_i Z_i$; $\forall i$; zamiast bardziej naturalnego porównywania $Z_i x_i$ z $Y_i x_i$; $\forall i$.

Konsekwentnie należałoby wtedy przyjąć

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i F\left(\frac{1}{A_i}\right), \tag{14}$$

co wydaje się atrakcyjne, jako że sprowadza problem optymalizacyjny do programowania liniowego. Rzeczywiście, przy aproksymacji $Y_i F\left(\frac{1}{A_i}\right) = cA_i^{1-\beta}$, problem wyznaczenia strategii $x \overset{\Delta}{=} \hat{x}$, takiej że

$$\max_{x \in \Omega} \Phi(x) = \Phi(\hat{x}), \tag{15}$$

$$\Omega = \left\{ x_i \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1,\ x_i \geq 0,\ \forall i \right\}$$

jest typowym problemem programowania liniowego.

Jednakże w modelu liniowym (14) (15) zatracona jest podstawowa zaleta dwuczynnikowej użyteczności, jaka jest nieliniowość (ścisła wklęsłość) $\Phi(x)$ ze względu na wzrost dochodu inwestora (x). W modelu tym musimy ponadto określić parametry subiektywne (κ, β) funkcji użyteczności inwestora.

Na zakończenie niniejszego punktu warto zwrócić uwagę na fakt, iż przy wszystkich swoich zaletach addytywny model funkcji użyteczności (postulowany przez (4)) ogranicza zakres zastosowań zasady alokacji. Chodzi tu np. o przypadki w których występuje efekt tzw. synergii przy wspólnej realizacji projektów inwestycyjnych. Z powyższych względów zasadę alokacji wypada stosować głównie w tych przypadkach, gdy efekty synergetyczne są pomijalne lub są one niemożliwe do wyceny.

5. Wycena wartości firmy

Wartość firmy na rynku kapitałowym - to jej wartość w ocenach rzeczywistych lub potencjalnych właścicieli akcji, a więc - wartość akcji tej firmy. Przy znacznej liczbie nabywców i sprzedających ceny akcji kształtują się według ogólnych zasad popytu i podaży. Powstaje przy tym często sytuacja w której cena akcji nie odzwierciedla, w sposób miarodajny, rzeczywistej wartości firmy. Biorą się stąd tendencje by wyceniać firmy oraz z kolei akcje w sposób niezależny od wyceny rynkowej. Taka wycena zwana jest nieraz analizą fundamentalną. Jeżeli inwestor, w wyniku przeprowadzenia analizy fundamentalnej uzna iż cena rynkowa rozważanej akcji jest zaniżona, będzie on skłonny do nabycia tej akcji (lub jej sprzedaży w przypadku przeciwnym).

Na funkcjonowanie rynku kapitałowego duży wpływ ma dostęp do informacji dotyczącej zarówno bieżącej kondycji finansowej firmy jak również - jej planów i perspektyw rozwojowych. W badaniach teoretycznych założenie, iż cała informacja o firmie znajduje swoje odbicie w cenach akcji zwane jest hipotezą rynku efektywnego lub skutecznego (*efficient market hypothesis*). Na rynku takim inwestor wykorzystujący całą dostępną informację nie może liczyć na uzyskanie nadzwyczajnych (w porównaniu z innymi) zwrotów z nabytych akcji.

Wspomaganie decyzji inwestycyjn

Roman Kulikowski,
Marek Libura,
Leon Słomiński

W książce omawiane są zagadnienia z obszaru analizy finansowej i teorii portfela inwestycyjnego z wykorzystaniem komputerowej metodologii wspomagającej podejmowanie decyzji.
Książka może być przedmiotem zainteresowania zarówno decydentów, podejmujących decyzje finansowe, jak i inwestorów giełdowych i doradców finansowych oraz studentów i doktorantów.
Monografia pozwoli głębiej i pełniej zrozumieć złożoną problematykę finansów i inwestycji, z uwzględnieniem różnych form ryzyka i podejmować w działalności praktycznej decyzje optymalne.
Rozważane są zasady konstruowania modeli matematycznych opisujących rynki kapitałowe – kształtowanie się cen oraz oczekiwanych zwrotów nakładów inwestycyjnych – jak również modeli działalności inwestora w postaci tzw. funkcji użyteczności.

ISBN 83-85847-09-X

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 37-35-78 w. 241 e-mail: kotuszew@ibspan.waw.pl