POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Roman Kulikowski,
Marek Libura,
Leon Słomiński

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 21

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 1998

Roman KULIKOWSKI

Marek LIBURA

Leon SŁOMIŃSKI

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. Maria Podgórska
Doc. dr hab. Leszek S. Zaremba

Książka powstała w wyniku realizacji projektu badawczego finansowanego przez KOMITET BADAŃ NAUKOWYCH

ISBN 83-85847-09-X
ISSN 0208-8029

Część I.
Podejmowanie decyzji na podstawie modeli użyteczności

2. Decyzje z niekompletną wiedzą

Podejmowanie decyzji jest powszechnym i nieodłącznym atrybutem działalności człowieka. Decyzje mogą dotyczyć zwłaszcza dysponowania indywidualnymi zasobami czasu, pracy i kapitału. Musimy wybierać pomiędzy różnymi zajęciami: kupnem lub sprzedażą towarów i usług, podejmować ryzykowne działania, nabywać lub sprzedawać papiery wartościowe, ubezpieczać mienie itp. Niektóre z tych decyzji są proste i rutynowe, inne trudne lub bolesne. Niepewność, niewiedza lub wątpliwość, są to czynniki które mogą utrudniać podejmowanie konkretnych decyzji, a także - być źródłem możliwych konfliktów z otoczeniem.

Niepewność może wynikać z niekompletnej wiedzy „o stanie świata" lub też z braku wiedzy o nas samych, tj. przekonania o tym co jest dla nas dobre lub co nam przyniesie największą satysfakcję. Dla przykładu, trudność w podjęciu zamierzenia inwestycyjnego może wynikać z faktu, że nie wiemy jaka będzie przyszła koniunktura ekonomiczna, czyli - nie wiemy jaki będzie stan świata. Jednocześnie nie jesteśmy pewni czy zamierzony projekt nie będzie zbyt ryzykowny i czy ryzyko to nie przysporzy nam dodatkowych kłopotów, zmartwień, widma bankructwa itp. Inaczej mówiąc nie wiemy jaka jest lub będzie użyteczność i satysfakcja z rozważanego projektu. W przypadku porównywania alternatywnych projektów nie umiemy lub nie możemy jednoznacznie wyrazić swoich preferencji.

Teoria decyzji zajmuje się zarówno tym jak decyzje są oraz - jak powinny być podejmowane. W związku z tym można wyróżnić dwie klasy modeli opisujących procesy decyzyjne: modele deskryptywne oraz modele normatywne.

Modele deskryptywne starają się wyjaśnić jak są podejmowane decyzje i jakie czynniki odgrywają w procesie decyzyjnym najważniejszą rolę. Z tego względu modele te są przede wszystkim domeną badań psychologii.

Modele normatywne mają do czynienia z poszukiwaniem rozwiązań optymalnych przy założonej funkcji celu (użyteczności). Rozwiązania optymalne są sugerowane decydentowi jako racjonalne zasady postępowania. Rzecz jasna, decydent może kierować się rozwiązaniami optymalnymi jeśli uzna, że proponowana przez model normatywny użyteczność odpowiada jego rzeczywistym celom i zasadom postępowania. W przeciwnym przypadku decydent ani nie będzie identyfikował się z przypisywaną mu użytecznością, ani akceptował zasad postępowania sugerowanych przez model normatywny. Z powyższych względów przy konstruowaniu modeli normatywnych, a zwłaszcza przy wyborze modelu użyteczności, jest sprawą konieczną testowanie normatywnych rozwiązań optymalnych przy pomocy praktyki podejmowania decyzji. Brak korelacji pomiędzy rozwiązaniami postulowanymi przez model normatywny oraz tymi, jakie podejmuje większość decydentów, a w tym inwestorów giełdowych, menadżerów, analityków i doradców finansowych, może wskazywać na zbyt uproszczony lub nieadekwatny do rzeczywistości założony model użyteczności. Jest również sprawą ważną, by konstruktor modelu normatywnego respektował opinie psychologów, którzy konstruują modele deskryptywne.

Uwagi powyższe dotyczą również twórców komputerowych systemów wspomagających podejmowanie decyzji finansowych. Modele normatywne oparte na sformalizowanym, matematycznym opisie są bliższe i łatwiejsze do zrozumienia przez informatyków. Konstruując model wspomagający decyzje informatyk jest zatem skłonny do preferowania modeli normatywnych.

Stały postęp nauki będzie zapewne niwelował różnice pomiędzy modelami deskryptywnymi i normatywnymi. Dotyczyło to będzie zwłaszcza modeli użyteczności, które będą zrozumiałe i akceptowane przez decydentów od strony behawioralnej (deskryptywnej) jak i od strony reguł i zasad działania (tj. strony normatywnej).

W niniejszym podrozdziale omawiane będą podstawowe modele decyzyjne z niekompletną wiedzą. Będziemy w nim zwracać uwagę na adekwatność strony deskryptywnej i normatywnej tych modeli.

2.1. Zasady oczekiwanej wartości oraz oczekiwanej użyteczności

Zasada oczekiwanej wartości należy do najstarszych zasad podejmowania decyzji (prawdopodobnie XVIII-wieczni francuscy arystokraci przyczynili się do jej powstania kiedy szukali u swych nadwornych matematyków porad w sprawach hazardu).

Zgodnie z tą zasadą dla każdej alternatywy należy określić jej wartość oczekiwaną i wybrać tą alternatywę która posiada wartość największą.

Wartość oczekiwana $EV(G)$ loterii G w której występują wygrane x_i, $i=1,\dots,n$, z danymi prawdopodobieństwami p_i, wyraża się

$$EV(G)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i . \tag{1}$$

Jako przykład rozpatrzmy grę w orła i reszkę (orzeł wygrywa) za udział w której należy zapłacić c zł zaś wygrana jest x zł. Powstaje pytanie przy jakich wartościach c, x należy przystąpić do gry, tj. akceptować grę lub ją odrzucić?

Rozważany problem można przedstawić za pomocą poniższej tabeli, zawierającej wynik finansowy gry.

Tabela 2. Ilustracja gry w orła i reszkę

Alternatywa \ Rezultat	Orzeł	Reszka
Akceptacja	$x-c$	$-c$
Odrzucenie	0	0

Jeśli zaakceptujemy grę to w przypadku pojawienia się orła otrzymujemy wygraną $x-c$, zaś w przypadku reszki - tracimy $-c$. Przy odrzuceniu gry wygrane są równe zeru. Wartość oczekiwana akceptacji, oznaczonej A, $EV(A)=\frac{1}{2}(x-c)+\frac{1}{2}(-c)=\frac{x}{2}-c$. Wartość oczekiwana odrzucenia, oznaczonego O, $EV(O)=0$. Ponieważ przy $\frac{x}{2}>c$ mamy $EV(A)>EV(O)$, grę należy akceptować jeśli $c<\frac{x}{2}$. Jeśli będziemy grać w powyższą grę dostatecznie długo możemy być pewni oczekiwanej wygranej w wysokości $\frac{x}{2}-c$. Mówimy o grach G że są korzystne, niekorzystne i sprawiedliwe w zależności od tego czy ich wartość oczekiwana $EV(G)$ jest większa, mniejsza lub równa zeru. Dla $c<\frac{x}{2}$ $\left(c>\frac{x}{2}\right)$ gra jest dla nas korzystna (niekorzystna) zaś dla $c=\frac{x}{2}$ jest ona tylko sprawiedliwa.

Zgodnie z zasadą wartości oczekiwanej decydent winien akceptować wszystkie gry korzystne i odrzucać niekorzystne. Nie jest to jednak zasada którą ludzie zwykle stosują, lub też uważają iż trzeba tą zasadę stosować.

Obserwacje wskazują na fakt iż ludzie często akceptują gry niekorzystne, a więc takie, dla których wartość oczekiwana jest ujemna. Gdyby tak nie było wszystkie kasyna gry musiałyby zbankrutować. Podobnie, ludzie ubezpieczają mienie mimo iż zdają sobie sprawę, że przystępują do gry niekorzystnej z punktu widzenia zasady wartości oczekiwanej. Czują oni, że stosunkowo niewysoka składka ubezpieczeniowa, w porównaniu z wartością mienia, uwalnia ich od niebezpieczeństwa utraty tego mienia. Uważają, iż zasada oczekiwanej wartości funkcjonuje w zbyt długim (w stosunku do horyzontu planowania) okresie czasu, zaś możliwość utraty mienia (mimo iż jest rzadka) wiąże się z życiową katastrofą, której należy, nie licząc się z kosztami, unikać.

W podobny sposób hazardzista może czuć iż rzadka szansa osiągnięcia dużego sukcesu uzasadnia podjęcie próby i sprawdzenia swego szczęścia w niesprawiedliwej grze hazardowej.

Ludzie ci uważają, że ubezpieczenie, czy nawet hazard, jest racjonalną formą zachowania, której można bronić na gruncie normatywnym. Uważają, że model wartości oczekiwanej jest nieadekwatny zarówno z deskryptywnego jaki i normatywnego punktu widzenia.

Trudności wynikające z interpretacji gier hazardowych ilustruje także tzw. paradoks petersburski. Dotyczy on gry, w której moneta jest rzucana aż do pojawienia się orła. Hazardzista otrzymuje 2^n rubli jeśli orzeł pojawi się w n rzutach, co odpowiada prawdopodobieństwu $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Tak więc otrzymuje on 2 ruble z prawdopodobieństwem 1/2, 4 ruble z prawdopodobieństwem 1/4 itd. Wartość oczekiwana tej gry $EV = \sum_{n=1}^{n} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = N$, ze wzrostem N nie sumuje się do żadnej skończonej liczby. Oznacza to, że za udział w takiej grze hazardzista winien się zgodzić płacić każdą, dowolnie wielką kwotę. Przeczy jednak temu zachowanie się racjonalnie myślących decydentów.

Bernoulli dla uratowania zasady racjonalności w zachowaniu decydenta zasugerował następującą modyfikację problemu. Ludzie kierują się użytecznością pieniądza $u(x)$ przy czym użyteczność ta wzrasta wraz z x, lecz z malejącą stopą. Jako konkretną funkcję użyteczności Bernoulli zaproponował $\log_{10} n$. Wtedy zasada wartości oczekiwanej (EV) może być zastąpiona zasadą oczekiwanej użyteczności (EU); czyli

$$EU = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n \log_{10} 2^n .$$

Wartość powyższa jest w rozważanym przypadku zbieżna do skończonej granicy, która wyznacza oczekiwaną wartość gry.

Jeżeli koszt uczestnictwa w rozważanej grze będzie mniejszy od EU decydent będzie skłonny zaakceptować swój udział w tej grze.

Można zauważyć, że zaproponowana arbitralnie przez Bernoulliego logarytmiczna postać funkcji użyteczności umożliwia wytłumaczenie akceptacji gry przez decydenta, lecz nie daje odpowiedzi na pytanie: czy funkcja logarytmiczna jest jedyną możliwą funkcją użyteczności? Z formalnego punktu widzenia łatwo zauważyć, iż istnieje wiele funkcji $u(x)$, które zagwarantują zbieżność szeregu

$$EU = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(2^n), \quad \text{przy} \quad N \to \infty$$

a tym samym - akceptację gry przy kosztach uczestnictwa mniejszych od EU.

Powstaje też pytanie: jakie jest uzasadnienie, aby dla loterii w której mamy do czynienia z N rezultatami x_i pojawiającymi się z prawdopodobieństwami p_i, $i = 1,\dots,N$, odpowiednio, przyjmować w ogóle model użyteczności w postaci:

$$EU = \sum_{n=1}^{N} p_i u(x_i), \quad \sum_{i=1}^{N} p_i = 1, \tag{2}$$

gdzie $u(x_i)$ jest użytecznością i-tego rezultatu (wygranej), tj. funkcją ściśle wklęsłą typu $\log x$?

Rozpatrzone przykłady z obszaru gier hazardowych i ubezpieczeń wskazują, iż stosowanie zasady „max EV" nie może być uzasadnione jeżeli chcemy pozostać w zgodzie z danymi doświadczalnymi oraz, że należy tu poszukiwać raczej modelu użyteczności w klasie modeli opartych na zasadzie „max *EU* " typu (2). Zasada „max *EU* ", generalnie biorąc, posiada racjonalne uzasadnienie. Jest ona w zgodzie z omawianą w § 1.2 wklęsłością względem poziomu dochodu. Jeśli jest ona stosowana w sytuacji, gdy gra jest toczona wielokrotnie maksymalna oczekiwana użyteczność zapewni także największą użyteczność w długim horyzoncie planistycznym. Jednakże mimo tych racjonalnych przesłanek, zastosowanie zasady oczekiwanej użyteczności do sytuacji w których akceptacja ma charakter wybitnie indywidualny i subiektywny wymaga dodatkowego uzasadnienia. Uzasadnienia wymaga też niewątpliwie zastosowanie teorii oczekiwanej użyteczności do takich sytuacji w których rezultaty mają wymiar niemonetarny. Dotyczy to aspektów psychologicznych jak np. satysfakcja, radość z sukcesu lub obawa przed klęską, bankructwem itp.

Olbrzymi wpływ na nowoczesną teorię użyteczności miała praca von Neumanna i Morgensterna (1947) „*Theory of Games and Economic Behaviour*". Praca ta zawiera zbiór aksjomatów dotyczących preferencji pomiędzy loteriami. Podstawowy rezultat jest tu wyrażony przez twierdzenie, że jeśli preferencje decydenta spełniają proponowane aksjomaty, to jego zachowanie może być opisane (uzasadnione) przez maksymalizację oczekiwanej użyteczności (*EU*). Inaczej mówiąc, jeśli będziemy traktować aksjomaty jako maksymy racjonalnego zachowania decydenta, to stanowią one normatywne uzasadnienie dla zasady oczekiwanej użyteczności. Omawiane twierdzenie gwarantuje (w przypadku gdy aksjomaty są spełnione), że istnieje funkcja użyteczności $u(x_i)$, dla której zasada użyteczności loterii (*EU*) wyraża się wzorem (2).

Dowód omawianego twierdzenia jest dosyć trudny i dlatego będzie tu pominięty. Istnieją także uproszczone wersje dowodu (np. w książce Luce'a i Raiffy (1957)), wraz z omówieniem aksjomatyki.

Warto zauważyć, że znaczenie powyższego twierdzenia dla nowoczesnej teorii podejmowania decyzji w obliczu ryzyka polega nie tylko na uzasadnieniu zasady oczekiwanej użyteczności Bernoulliego. Uzasadnienie to nie polega na rozważaniach wielokrotnego powtarzania gry w długim horyzoncie planistycznym. W związku z czym twierdzenie odnosi się też do sytuacji wyborów i preferencji które mają charakter unikalny.

Wprowadzenie nurtu aksjomatycznego (zapoczątkowane przez von Neumanna i Morgensterna) do teorii podejmowania decyzji zaowocowało powstaniem teorii aksjomatycznych. Za szczególnie ważną teorię należy niewątpliwie uznać pracę Savage'a (1954). Wiąże się ona z krytycyzmem jaki napotkała teoria oczekiwanej użyteczności, a mianowicie – że traktuje ona wszystkie sytuacje, w których występuje ryzyko jako loterie ze znanymi z góry prawdopodobieństwami wygranych. Znajomość ta, czyli wiedza o prawdopodobieństwach wyników, jest w większości zastosowań niepełna. Dla przykładu, nie możemy z góry określić jakie będzie prawdopodobieństwo, że cena akcji lub obligacji przyjmie w dowolnym przyszłym momencie czasu daną wartość liczbową.

Powstaje pytanie czy można uogólnić teorię oczekiwanej użyteczności do sytuacji w których nie istnieje wiedza aprioryczna o numerycznych wartościach prawdopodobieństwa? Jak wykazał Savage (1954) takie uogólnienie jest możliwe w oparciu o sformułowany zbiór aksjomatów. Wprowadzając pojęcie „subiektywnego prawdopodobieństwa" Savage wykazał także twierdzenie o „subiektywnej oczekiwanej użyteczności" (*SEU*), które postuluje istnienie funkcji $u(x)$, zaś wzór (2) przyjmuje postać

$$SEU = \sum_{i=1}^{N} s_i u(x_i), \tag{3}$$

gdzie s_i = subiektywne prawdopodobieństwa, $\sum_{i=1}^{N} s_i = 1$.

Wprowadzenie subiektywnych prawdopodobieństw wskazuje na istniejący trend w teorii użyteczności. W modelu wartości oczekiwanych (EV) zarówno wartość jak i prawdopodobieństwo były zdefiniowane obiektywnie. W teorii EU obiektywne wartości (x_i) były zastąpione przez oczekiwane użyteczności. Wreszcie w teorii SEU dodatkowo prawdopodobieństwa obiektywne zastąpiono subiektywnymi.

2.2. Intuicja a zasada oczekiwanej użyteczności

Mimo podkreślanych w § 2.1 przesłanek racjonalności wiele osób pozostaje nieprzekonanych do zasady oczekiwanej użyteczności oraz aksjomatów na których ta zasada się opiera. Już w 1953 r. Allais (Allais, 1953) starał się wykazać, że intuicja decydenta prowadzi do akceptacji gier, które nie powinny być akceptowane, gdyby decydent stosował zasadę oczekiwanej użyteczności. W tym celu Allais rozważał dwie sytuacje, w każdej z których decydent winien akceptować jedną z dwóch loterii (o wartości wygranej wyrażonej w milionach US $ oraz danych prawdopodobieństwach):

Sytuacja I				Sytuacja II		
Należy wybrać pomiędzy				Należy wybrać pomiędzy		
L_1: $\frac{1}{2}$	z prawd.	1		L_3: $\frac{1}{2}$	z prawd.	0.11
				0	z prawd.	0.89
L_2: $2\frac{1}{2}$	z prawd.	0.1		L_4: $2\frac{1}{2}$	z prawd.	0.1
$\frac{1}{2}$	z prawd.	0.89		0	z prawd.	0.9
0	z prawd.	0.01				

Allais twierdzi, iż większość ludzi woli L_1 od L_2 gdyż małe prawdopodobieństwem utraty życiowej szansy stania się bogatym jest bardzo nieatrakcyjne. W sytuacji II ludzie ci wolą L_4 wobec L_3, gdyż duża różnica pomiędzy wypłatami dominuje tu nad małą różnicą pomiędzy szansami wygrania.

Oznacza to, że w sytuacji I: $U(L_1) > U(L_2)$ czyli

$$U\left(\frac{1}{2}\right) > 0.1U\left(2\frac{1}{2}\right) + 0.89U\left(\frac{1}{2}\right) + 0.01U(O)$$

lub

$$0.11U\left(\frac{1}{2}\right) > 0.1U\left(2\frac{1}{2}\right) + 0.01U(O) \qquad (1)$$

W sytuacji II mamy $U(L_4) > U(L_3)$, czyli

$$0.1\,U\left(2\frac{1}{2}\right) + 0.9\,U(O) > 0.11\,U\left(\frac{1}{2}\right) + 0.89\,U(O)$$

lub

$$0.1\,U\left(2\frac{1}{2}\right) + 0.01\,U(O) > 0.11\,U\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (2)$$

Nierówności (1), (2) przeczą sobie, co podważa zasadę oczekiwanej użyteczności.

Należy zauważyć, iż ludzie różnie reagują na wykazanie niekonsekwencji pomiędzy ich intuicją a teorią. Niektórzy z nich są bardziej przywiązani do swoich intuicyjnych preferencji i będą oni z reguły odrzucali teorię oczekiwanej użyteczności. Inni, którzy są przywiązani do teorii, starają się przeanalizować swoje preferencje w świetle aksjomatów i ewentualnie zmienić swoje decyzje oparte na intuicji.

Przykładem może być analiza retrospektywna przeprowadzona przez Savage'a (1954), który przyznaje iż preferował początkowo L_1 wobec L_2 oraz L_4 wobec L_3, gdy przedstawiono mu przykład Allais. Po głębszej analizie, opartej na realizacji loterii w postaci 100 ponumerowanych losów, zgodnie z Tabelą 3, Savage przyszedł do wniosku, że w sytuacji I, preferując L_1 wobec L_2 ($L_1 \succ L_2$) winien też preferować L_3 wobec L_4 ($L_3 \succ L_4$).

Wynika to stąd, że jeśli wylosuje on losy 12-100 (o wygranych z ostatniej kolumny Tabeli 3), to w każdej sytuacji, t.j. (L_1,L_2) lub (L_3,L_4), nie ma już znaczenia, którą loterię będzie akceptował. Należy zatem rozważać jedynie losy o numerach 1-11, a w tych sytuacjach problem akceptacji jest identyczny. Ograniczając analizę do losów 1-11 w obu sytuacjach problem ten polega na tym czy szansa 10:1 by wygrać 2 1/2 miliona jest preferowana wobec wygrania 1/2 miliona z pewnością. Jeśli ktoś uważa że $L_1 \succ L_2$ to winien on konsekwentnie uważać, że $L_3 \succ L_4$ (lub na odwrót).

Tabela 3. Interpretacja przykładu Allais

Loteria \ Numer losu	1	2 - 11	12 - 100
L_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
L_2	0	$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
L_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
L_4	0	$2\frac{1}{2}$	0

2.3. Kryteria oparte na oczekiwaniach i wariancjach

Zasada oczekiwanej użyteczności nie jest jedyną teorią przydatną do podejmowania decyzji w obliczu ryzyka. Już w początku stulecia proponowano, by decyzje te opierać na wartości oczekiwanej oraz wariancji, które charakteryzują zarówno gry jak i loterie.

Łatwo zauważyć, że loteria z dwiema wygranymi x i y, które otrzymywane są z prawdopodobieństwami p i $1-p$, posiada wartość oczekiwaną wygranej:

$$R = px + (1-p)y = y + p(x-y)$$

oraz wariancję

$$V = p[R-x]^2 + (1-p)[R-y]^2 = p(1-p)(x-y)^2 \tag{1}$$

Możemy zatem utworzyć funkcję celu typu

$$G(p) = R(p) + \lambda V(p), \tag{2}$$

gdzie λ jest pewną daną liczbą.

W modelu powyższym duża wartość $R(p)$ jest pożądana, zaś $V(p)$, zależnie od znaku λ – pożądana lub niepożądana. Mając do wyboru loterie o różnych p decydent zainteresowany jest wyborem takiego $p = \hat{p}$ które maksymalizuje $G(p)$. Wartość tę znajduje on z warunku $G'(p) = 0$, tj.

$$x - y - \lambda(2p-1)(x-y)^2 = 0.$$

Skąd

$$\hat{p} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{\lambda(x-y)}\right]. \tag{3}$$

Rozwiązanie to posiada sens fizyczny gdy $|\lambda(x-y)| \geq 1$. Parametr λ wyrażający względną wagę przypisywaną wariancji jest, rzecz jasna, czysto subiektywną cechą decydenta. Wynika stąd, że decydent może maksymalizować swoją funkcję celu $G(p)$, o danym λ, przez wybór loterii z $p = \hat{p}$.

Warto tu zauważyć, że optymalne rozwiązanie $\hat{p}$ należy do zbioru $S = \{p | 0 \leq p \leq 1\}$ i zależy od znaku λ. Na przykład gdy $\lambda > 0$ to $G''(p) = -2\lambda(x-y)^2 < 0$ i $\hat{p}$ należy do wnętrza S. Gdy zaś $\lambda \leq 0$ to maksimum $V(p)$ jest osiągalne na granicy S, t.j. dla $\hat{p} = 1$.

W wielu badaniach eksperymentalnych, przeprowadzonych przez psychologów (np. Edwardsa (1953), Coombsa i Pruitta (1960)) wykryto, że ludzie objawiają wyraźne preferencje co do prawdopodobieństwa (lub związanej z nim wariancji) w konkretnych grach hazardowych.

Preferencje te wynikają także z motywacji do osiągnięcia sukcesu lub uniknięcia porażki. Psychologiczna teoria motywacji, przedstawiona przez Atkinsona (1964), stara się wyjaśnić decyzje w sytuacjach, w których decydent traktuje obarczony ryzykiem wynik działalności jako uwarunkowany częściowo przez własne zdolności i umiejętności. Zgodnie z tą teorią zachowanie się w takich sytuacjach jest zdeterminowane przez motyw osiągnięcia sukcesu (M_s) i motyw unikania porażki (M_f) oraz subiektywne prawdopodobieństwo sukcesu (p_s). Satysfakcja z działania (S) wyraża się wzorem

$$S = p_s M_s I_s + (1 - p_s) M_f I_f ,$$

gdzie I_s, I_f są to bodźce (*incentives*) wywołujące motyw sukcesu i porażki. Atkinson przyjmuje, że $I_s = 1 - p_s$, $I_f = -p_s$, co oznacza iż wypadkowa motywacja wzrasta wraz z trudnością osiągnięcia sukcesu. Czym trudniejszy cel tym większa jest tu satysfakcja z jego osiągnięcia oraz - czym cel jest łatwiejszy tym większa jest dyssatysfakcja z porażki. Mamy więc

$$S = p_s(1 - p_s)(M_s - M_f) \qquad (4)$$

Wyrażenie to jest podobne do wariancji (1) i osiąga maksymalną wartość przy $M_s > M_f$ dla $p_s = 1/2$. W przypadku gdy $M_s < M_f$ satysfakcja S osiąga wartość maksymalną dla $p_s = 0$ lub $p_s = 1$.

Rozpatrzmy teraz sytuację w której decydent może wybierać poziom trudności w swej działalności, tj. wartość prawdopodobieństwa p_s, określający satysfakcję. Zgodnie ze wzorem (4), gdy motyw osiągnięcia sukcesu przeważa nad motywem uniknięcia porażki decydent winien wybrać poziom trudności odpowiadający $p_s = 1/2$. W przeciwnym przypadku jego wybór winien być: $p_s = 0$ lub $p_s = 1$.

Oczekiwania przewidywane przez powyższą teorię były badane eksperymentalnie przez Atkinsona i Litwina (1960) w grupie studentów. Każdy student mógł oddać 10 rzutów krążkiem, tak aby wpadł on na wystający kołek z odległości, którą sam wybierał pomiędzy 1 i 15 stóp. Eksperyment był dokonywany w sportowej atmosferze ze wszystkimi studentami dopingującymi zawodników. Motywacje do osiągnięcia sukcesu (lub uniknięcia porażki) były ustalone na podstawie o wskaźnika proporcjonalnego do odległości wybranej przez zawodnika.

Rezultaty tych eksperymentów potwierdziły oczekiwania, jakie wynikają z modelu (4). Zawodnicy charakteryzujący się silną potrzebą osiągnięcia sukcesu i brakiem obawy przegranej wybierali odległości pośrednie z przedziału (1, 15). Ci zaś, którzy obawiali się przegranej wybierali pozycje skrajne. Innymi słowy, pierwsi wybierali wysoką wariancję a drudzy woleli wariancję niską.

W ten sposób model Atkinsona wyjaśnia preferencje wariancyjne (czy też prawdopodobieństwowe), w odniesieniu do potrzeby (motywacji) osiągnięcia sukcesu lub uniknięcia przegranej. W modelu tym dużą rolę gra zatem postawa zawodnika (decydenta) kiedy ocenia on czy wynik działania zależy jedynie od szansy lub szczęścia czy też zależy on też od jego kwalifikacji i zdolności.

Zależność tego typu nie powinna być więc ignorowana. Dotyczy to zwłaszcza sfery finansowej i inwestycyjnej. Jeśli inwestor wierzy, iż jego osobiste zaangażowanie się w realizację projektu jest czynnikiem sprzyjającym osiągnięciu sukcesu, będzie on cenił ten projekt wyżej od projektów, w których nie jest bezpośrednio zaangażowany.

Model Atkinsona nadaje się zwłaszcza do wyjaśnienia postaw decydentów w sytuacjach, gdy należy wybrać poziom trudności działania z uwzględnieniem ryzyka, a więc np. wyboru obszarów działalności badawczej, innowacyjnej, produkcyjnej itp. Decydenci ambitni i przedsiębiorczy mogą tu wybierać obszary działalności o dużej wariancji natomiast decydenci, którzy boją się wzięcia odpowiedzialności za inwestycje lub inne ryzykowne projekty będą preferowali działania o niskiej wariancji. Mogą być również takie sytuacje, w których ten sam decydent będzie w jednych działaniach preferował niską wariancję, w innych zaś wariancję dużą.

2.4. Kryteria oparte na wartości oczekiwanej oraz przypadkach ekstremalnych

Warto zauważyć, iż w różnych sytuacjach życiowych ryzyko działalności jest postrzegane i oceniane w kategoriach wariancji lub też w kategoriach prawdopodobieństwa zaistnienia najgorszego, względnie najlepszego przypadku. Warto więc przeanalizować wzajemne relacje przy tak odmiennie sformułowanych kryteriach ocen ryzyka.

Analizę taką można przeprowadzić na przykładzie papierów wartościowych, typu akcji, których cena $P(t)$ w kolejnych okresach czasu t jest notowana na giełdzie papierów wartościowych. Na podstawie porównania cen w kolejnych okresach ($t-1$ i t) można także obliczyć stopę zwrotu, jaki uzyskuje inwestor, który kupił akcje w okresie $t-1$ oraz sprzedał w okresie t, tj.

$$R_t = \frac{P(t) - P(t-1)}{P(t-1)} \tag{1}$$

Operując danymi historycznymi z dostatecznie długiego okresu czasu $t \in [1,\ldots,N]$ można z kolei obliczyć wartość uśrednioną

$$\overline{R} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} R_t, \tag{2}$$

a także - odchylenie standardowe lub wariancję

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} [R_t - \overline{R}]^2 \tag{3}$$

W praktycznych zastosowaniach przyjmuje się zwykle iż R_t są to zmienne przypadkowe z rozkładem normalnym posiadające wartość oczekiwaną $E\{R_t\} = R$ i wariancję $V = E\{[R_t - R]^2\}$. Przyjmuje się też, iż dla dużych N

$$\overline{R} \cong R \quad \text{oraz} \quad \overline{\sigma}^2 \cong V .$$

Mając do czynienia z problemem oceny lub wyboru różnych akcji, które znajdują się na giełdzie, i które są scharakteryzowane przez dane liczby $\{R_i, \sigma_i\}$, $i = 1, \dots, n$, decydent musi przyjąć określone kryterium wyboru.

Czym większy będzie oczekiwany zwrot R przy danym σ tym, rzecz jasna, większa będzie wartość akcji. Jeśli chodzi o wariancję lub odchylenie standardowe σ sytuacja jest odwrotna. Czym σ jest większe przy ustalonym R tym większe są odchylenia R_t od wartości uśrednionej R, to zaś oznacza iż zwrot może (w najbardziej niekorzystnym przypadku) być znacznie poniżej wartości oczekiwanej. Jeśli inwestor zainwestował duże środki w kupno akcji, które pozwolą mu uzyskać zwrot znacznie niższy od wartości oczekiwanej, może to narazić go na bankructwo. Z tego względu przy inwestycjach w akcje pożądane jest by przy ustalonym R wartość σ była najniższa możliwa.

Wynika stąd, że kryterium wyceny wartości akcji Q może być przyjęte w postaci:

$$Q = R - \kappa_f \sigma , \tag{4}$$

gdzie liczba κ_f może być traktowana jako waga lub „cena" przypisana przez inwestora ryzyku wyrażonemu przez σ. Czym κ_f jest większe tym mniejsze jest Q i tym większa jest niechęć do nabywania akcji przez inwestora.

Powstaje pytanie w jaki sposób inwestor może określić numeryczną wartość κ_f? Do tego celu nadaje się np. zasada „ekwiwalentu pewności", która pozwala na porównanie rozważanej akcji z walorem pozbawionym ryzyka. Walorem takim może być, na przykład, obligacja Skarbu Państwa, która charakteryzuje się stosunkowo niedużym zwrotem R_F lecz za to posiada $\sigma = 0$.

Jeśli inwestor uznaje akcję o $R > R_F$ i $\sigma > 0$ za równoważną z obligacją, to:

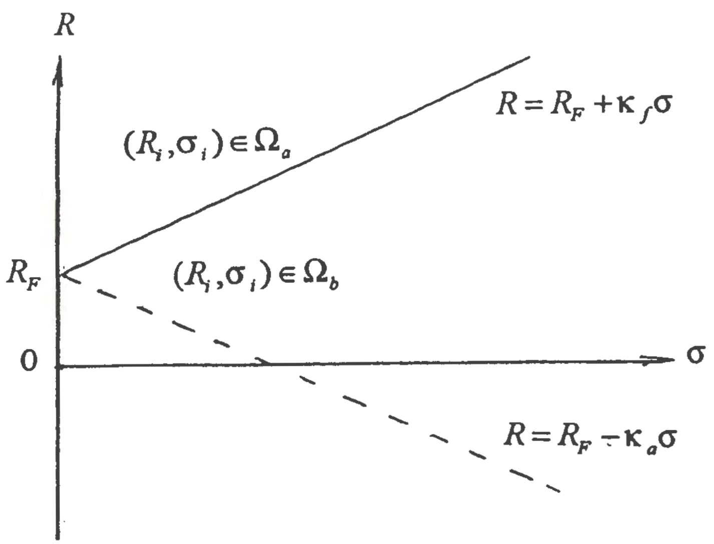
$$Q = R - \kappa_f \sigma = R_F . \tag{5}$$

Można z kolei określić z (5) wartość parametru κ_f :

$$\kappa_f = \frac{R - R_F}{\sigma}, \tag{6}$$

którą inwestor może traktować jako swoją (indywidualną) cenę ryzyka.

Jeśli, dla przykładu, inwestor uzna akcję o parametrach $R = 10\%$, $\sigma = 4\%$, za równoważną obligacji $R_F = 5\%$ oznacza to, iż w wycenie akcji stosuje on $\kappa_f = 1{,}25$.



Rys. 4. Linia rozdzielająca na płaszczyźnie (σ, R)

Warto też zauważyć, iż linia o równaniu:

$$R = R_F + \kappa_f \sigma, \tag{7}$$

dzieli półpłaszczyznę $\{R, \sigma \mid \sigma \geq 0\}$ na dwa obszary (Ω_a, Ω_b).

Dla dowolnej akcji o parametrach (R^*, σ^*) możemy znaleźć punkt leżący bądź to ponad linią (7), tj.

$$R^* > R_F + \kappa_f \sigma^* \quad \text{lub} \quad (R^*, \sigma^*) \in \Omega_a;$$

bądź też poniżej tej linii, tj.

$$R^* < R_F + \kappa_f \sigma^* \quad \text{lub} \quad (R^*, \sigma^*) \in \Omega_b$$

por. Rys. 4.

Można przyjąć, iż wszystkie akcje, dla których $(R_i, \sigma_i) \in \Omega_a$ (a także te, które leżą na linii rozdzielającej) inwestor będzie starał się włączyć do swego portfela, zaś te dla których $(R_i, \sigma_i) \in \Omega_b$ będzie on ignorował. Inaczej mówiąc inwestor dąży tu do maksymalizacji zwrotu nadzwyczajnego (*excess return*) R_e ponad zwrot akceptowalny $(R_F + \kappa \sigma)$, tj.

$$\max R_e = \max \{R - \kappa_f \sigma - R_F\} \tag{8}$$

Możemy teraz przystąpić do sformułowania kryterium wyceny akcji w oparciu o prawdopodobieństwo wystąpienia najgorszego przypadku. Ze znanych sformułowań (np. kryteria Roya, Kataoki, Telsera, por. Elton i Gruber (1995)) wybierzemy tu kryterium Telsera.

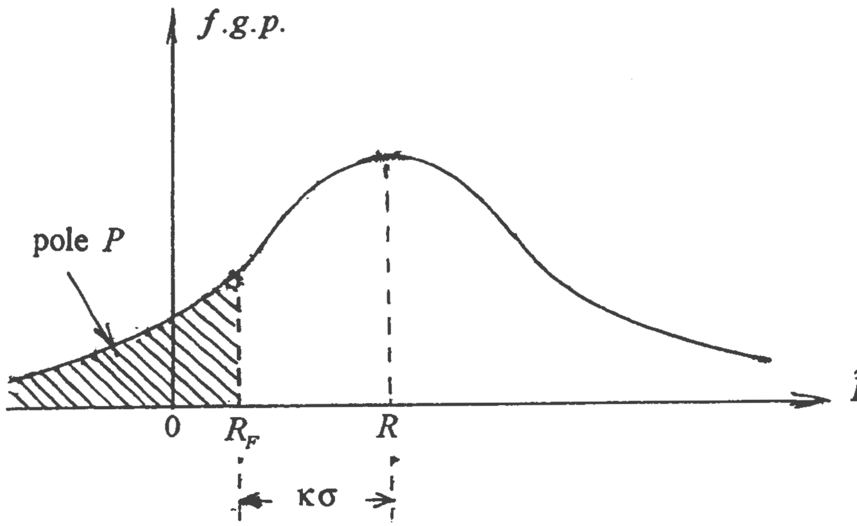
Zgodnie z tym kryterium inwestor winien maksymalizować oczekiwany zwrot R, przy warunku: prawdopodobieństwo iż zwrot będzie nie większy od danej liczby (R_F) jest równe danej liczbie p, tj.

$$\max R \tag{9}$$

przy warunku

$$\mathrm{Prob}(\tilde{R} \leq R_F) = p \tag{10}$$

Kryterium powyższe posiada prostą interpretację graficzną, którą dla rozkładu normalnego ilustruje Rys. 5. Na rysunku tym obszar zakreskowany pod wykresem funkcji gęstości prawdopodobieństwa posiada pole równe p (f.g.p.: funkcja gęstości prawdopodobieństwa).

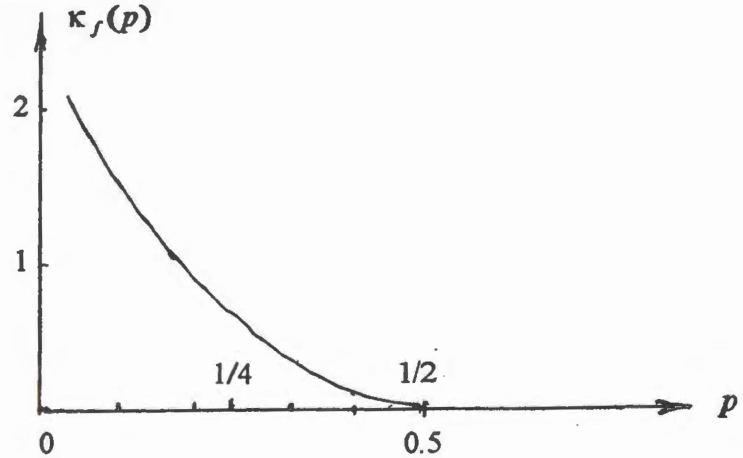


Rys. 5. Ilustracja kryterium Telser'a

Prawdopodobieństwo, że zmienna przypadkowa $\tilde{R}$ będzie mniejsza lub równa R_F wynosi p. Zgodnie z kryterium Telsera spośród wszystkich akcji, które spełnią warunek (10) należy wybrać tą, która gwarantuje największy oczekiwany zwrot R.

Z Rysunku 5 widać, iż kryterium najgorszego przypadku Telsera jest ściśle związane z kryterium opartym na pojęciu linii rozdzielającej (7), w którym inwestor określa nie wartość prawdopodobieństwa wystąpienia najgorszego przypadku p lecz raczej swoją cenę ryzyka κ_f. Rzecz jasna iż oba parametry, p i κ_f, są ze sobą ściśle powiązane. Dla rozkładu normalnego mamy bowiem znaną zależność:

$$p(\kappa_f) = \mathrm{Prob}\left\{\left|\tilde{R} - R\right| > \kappa_f\,\sigma\right\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\kappa_f}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = 1 - erf\left(\frac{\kappa_f}{\sqrt{2}}\right).$$



Rys. 6. Wykres funkcji $\kappa_f(p)$

Korzystając ze stabelaryzowanych wielkości funkcji $erf\left(\frac{\kappa_f}{\sqrt{2}}\right)$ można skonstruować wykres $\kappa_f(p)$, który ukazuje Rys. 6. Na podstawie tego wykresu inwestor może w prosty sposób przejść od kryterium najgorszego przypadku do bardziej wygodnego w rachunku kryterium (7). Jeśli, dla przykładu, inwestor uważa iż $p = 1/6$ (tj. najgorszy przypadek, kiedy $\tilde{R} \le R_F$ pojawia się raz na 6 okresów, jest dopuszczalny) to odpowiadająca $p = 1/6$ wartość $\kappa_f(1/6) \approx 1$ czyli winien on akceptować tylko te akcje dla których

$$R \ge R_F + \kappa_f\,\sigma = R_F + \sigma \tag{11}$$

Jeśli inwestor jest bardziej niechętny ryzyku i wybierze np. $p = 0{,}1$ to $\kappa_f(0{,}1) = 1{,}3$ oraz akceptacja akcji wymaga by

$$R \geq R_F + 1{,}3\,\sigma\,.$$

Pozostają jeszcze do wyjaśnienia decyzje w sytuacjach, w których oczekiwany zwrot R jest liczbą ujemną natomiast inwestor (mimo, że $\sigma > 0$) akceptuje te sytuacje.

Konkretnym przykładem jest udział inwestora w loteriach, gdzie oczekiwana wartość wygranej jest ujemna (inaczej loteria by zbankrutowała). Racjonalnym uzasadnieniem akceptacji loterii przez inwestora jest przekonanie iż „los (lub wariancja) jest po jego stronie". W tym przypadku duża wartość σ jest nie tyle czynnikiem odstraszającym co raczej - motywującym do udziału w loterii. W takim przypadku kryterium (8) można sformułować jako

$$\max R_e = \max\{R + \kappa_a\,\sigma - R_F\}$$

gdzie κ_a jest nie tyle ceną (kiedy inwestor płaci za ryzyko) co „premią za odwagę podjęcia ryzyka".

Konsekwentnie, kryterium (9) (10) można tu sformułować z uwzględnieniem prawdopodobieństwa najlepszego przypadku p, tj.

$$\max R \tag{12}$$

przy warunku

$$\mathrm{Prob}(\tilde{R} \geq R_A) = p_A, \quad R_A \geq R_F\,. \tag{13}$$

Na Rys. 4 przedstawiono (linią przerywaną) linię rozdzielającą o równaniu:

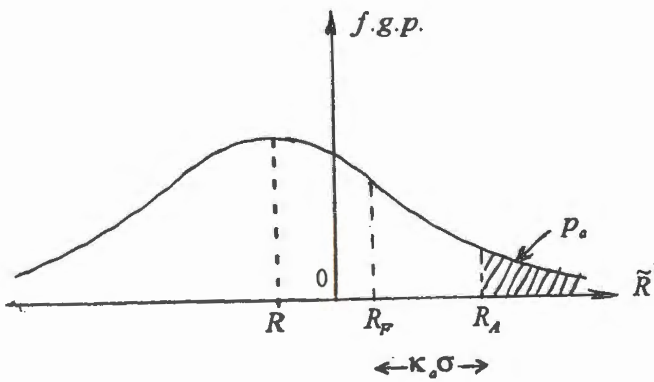
$$R = R_F - \kappa_a\,\sigma\,, \tag{14}$$

zaś na Rys. 7 interpretację graficzną kryteriów wyboru dla loterii o $R < 0$ oraz motywacji „prowariancyjnej" κ_a.

Z powyższej analizy sytuacji, w których może wystąpić zarówno niechęć do wariancji ($\kappa = \kappa_f$), jak i jej pożądanie ($\kappa = -\kappa_a$) wynika, iż uogólnionym kryterium wyboru w takich sytuacjach może być

$$\max\{R - \kappa\sigma - R_F\}, \tag{15}$$

gdzie „motywacja wypadkowa" $\kappa = \kappa_f - \kappa_a$.



Rys. 7. Interpretacja kryterium wyboru

Motywacja wypadkowa wynika tu więc z dwóch przeciwstawnych tendencji - obawy przed najgorszym przypadkiem oraz - chęci podjęcia ryzyka ze względu na dużą wartość zwrotu w przypadku najlepszym.

Różny sposób podejścia przez inwestora do problemu ryzyka, wyrażonego przez σ, ujawnia się też w przypadku niesymetrycznych funkcji rozkładu prawdopodobieństwa. Jeśli, dla przykładu, prawdopodobieństwo wystąpienia najgorszego przypadku jest nieduże, duże jest natomiast prawdopodobieństwo sukcesu, inwestor może ignorować tzw. „dolny ogon f.g.p" i koncentrować się na „ogonie górnym" funkcji rozkładu. W rezultacie będzie on operował, w swoim modelu motywacyjnym (oraz modelu akceptacji) parametrem $\kappa = -\kappa_a$.

W dalszych rozważaniach wykażemy, iż wprowadzony tu model akceptacji pozwoli lepiej opisać i zrozumieć postawy inwestora wobec ryzyka w sytuacjach, gdy wycenia on określone papiery i projekty inwestycyjne. Dotyczy to np. sytuacji w których inwestor przy wycenie akcji i obligacji oczekuje na wzrost (lub spadek) stopy procentowej. Dotyczy to też tzw. papierów pochodnych, np. akcji oraz opartej na tej akcji opcji typu „call". Można tu bowiem zaobserwować iż wzrost ryzyka (σ / R) zniechęca inwestora do zakupu akcji i jednocześnie - zachęca tego inwestora do zakupu opcji „call" - zjawisko, które nie zawsze jest dobrze zrozumiane.

Warto też zwrócić uwagę na to, że numeryczna wartość κ dla konkretnego inwestora nie musi być koniecznie stała. Jeśli, dla przykładu, inwestor ma do czynienia z pojedyńczymi, tanimi akcjami może on przyjąć $p = 1/6$ czyli $\kappa = 1$. Jeśli, natomiast, przedmiotem inwestycji jest drogi pakiet kilkuset akcji inwestor może uznać, iż należy zmniejszyć dopuszczalne prawdopodobieństwo wystąpienia najgorszego przypadku, czyli przyjąć $\kappa > 1$.

Wynika stąd, iż prosty model, w którym cenę ryzyka uzależnia się od stosunku nakładów (X) do zasobów majątkowych (W) inwestora, można wyrazić funkcją:

$$\kappa(y) = \kappa_0 \exp \lambda y, \quad y = \frac{X}{W}, \tag{16}$$

gdzie κ_0 = minimalna cena ryzyka (przy $y \approx 0$).

Parametr λ można wycenić z zależności

$$\lambda \approx \frac{\Delta \kappa}{\kappa} : \frac{\Delta y}{y},$$

gdzie $\frac{\Delta\kappa}{\kappa}$ jest przyrostem względnym kosztu ryzyka spowodowanym przyrostem względnym nakładów inwestycyjnych.

Zgodnie z rozwijaną dalej koncepcją inwestor chcący określić swoją postawę wobec ryzyka winnien odróżniać te elementy ryzyka, które mają charakter obiektywny (scharakteryzowany np. przez σ) od elementów subiektywnych (występujących np. w modelu (16)), które określają koszt ryzyka κ .

2.5. Dwuczynnikowa funkcja użyteczności

Jak wynika z przeprowadzonych do tej pory rozważań przy podejmowaniu decyzji z niekompletną wiedzą istnieją dwie podstawowe tendencje. Pierwsza opiera się na funkcji oczekiwanej użyteczności (typu EU lub SEU) druga zaś - na wartości oczekiwanej i wariancji. Obie tendencje posiadają swoje zalety i wady. Jak wynika z argumentów Allais funkcja EU nie w pełni odzwierciedla zachowanie decydenta kiedy staje on w obliczu wyboru wariantów o różniących się znacznie wartościach oczekiwanych oraz wariancjach. Z drugiej strony druga tendencja ignoruje fakt iż użyteczność zależy w sposób nieliniowy od poziomu dochodu (lub zwrotu).

Wydaje się iż racjonalne wyjście z powstających tu trudności może być osiągnięte przez taką konstrukcję funkcji użyteczności, która zapewnia uwzględnienie obu tendencji, a więc - przyjęcie koncepcji dwuczynnikowej funkcji użyteczności. Koncepcja taka była zapoczątkowana w pracy Kulikowskiego (1993) dla celów alokacji zasobów pracy (por. § 1.2). W następnych pracach (Kulikowski (1994, 1998a, b)) koncepcję tą rozwijano dla potrzeb alokacji kapitału w papiery wartościowe, czyli inwestycji z uwzględnieniem ryzyka. W niniejszej pracy koncepcja jest dalej rozwijana tak aby można ją było stosować do alokacji różnych form zasobów, a w tym - papierów wartościowych i inwestycji oraz kapitału ludzkiego.

Dwuczynnikową funkcję użyteczności Φ zapisujemy w postaci

$$\Phi(Zx, Y) \tag{1}$$

gdzie $Z = PR$ - oczekiwany dochód z waloru o cenie jednostkowej P zł, $Y = P(R - \kappa\sigma)$ - oczekiwany dochód z jednostki waloru w najgorszym $(\kappa = \kappa_f)$ lub najlepszym $(\kappa = -\kappa_a)$ przypadku czyli - w warunkach ekstremalnych, x - liczba walorów.

O funkcji Φ zakładamy, iż ze względu na x spełnia ona wymagania o których była mowa w § 1.2. Ponadto, ze względu na fakt iż oba czynniki (Z, Y) są wyrażone w jednostkach monetarnych, funkcja ta nie może generować dodatkowej użyteczności przez zamianę jednostek monetarnych (np. złotówek na grosze). Oznacza to wymaganie, by funkcja ta była funkcją jednorodną stopnia pierwszego (*constant returns to scale*), czyli by można ją było zapisać w formie

$$\Phi(Zx, Y) = YF\left(\frac{Zx}{Y}\right) = YF\left(\frac{x}{A}\right); \quad Y = PRA, \tag{2}$$

gdzie $A = \frac{Y}{Z} = 1 - \kappa\frac{\sigma}{R}$ będzie zwane współczynnikiem pewności. O funkcji $F(\cdot)$ zakładamy, że jest ona ściśle wklęsła, czyli $F'(\cdot) > 0, F''(\cdot) < 0$.

Czym mniejsza jest wartość $\kappa\frac{\sigma}{R}$ tym większej pewności uzyskania pożądanego rezultatu inwestor może oczekiwać od inwestycji. Dla inwestycji bez ryzyka ($\sigma = 0$) współczynnik pewności jest równy jedności.

Jak widać, konstrukcja funkcji użyteczności (2) uwzględnia dwie omawiane tendencje; nieliniową zależność użyteczności od nakładów (x), oraz - preferencje decydenta ze względu na wariancję (A).

W przypadku gdy znana jest jawna postać funkcji $F(\cdot)$ możemy wyznaczyć linię rozdzielającą. Linię rozdzielającą, podobnie jak w § 2.4 wyznaczymy z warunku iż zbiór walorów $\{W_i\}$ położony na linii rozdzielającej jest równoważny, w sensie kryterium (2), walorowi pozbawionemu ryzyka (W_F), co można zapisać $W_i \sim W_F$. Inaczej mówiąc chcemy by użyteczność jednostki $(x_i = 1)$ każdego waloru W_i, tj.

$$P_i R_i A_i F\left(\frac{1}{A_i}\right), \tag{3}$$

była równa użyteczności jednostki waloru bez ryzyka (W_F) o $A_F = 1$, tj.

$$P_F R_F F(1). \tag{4}$$

Porównując (3) z (4) oraz przyjmując $P_i = P_F$ mamy

$$R_i = R_F \frac{F(1)}{A_i F(1/A_i)}, \tag{5}$$

gdzie $A_i = 1 - \kappa_f \frac{\sigma_i}{R}$.

Warunek (5) ze względu na niepełną znajomość funkcji F nie jest wygodny przy operowaniu kryterium linii rozdzielającej. Możliwe są tu jednak różne aproksymacje funkcji Φ lub F.

Na uwagę zasługuje zwłaszcza funkcja potęgowa, o stałej skali zwrotu:

$$\Phi(Zx, Y) := (Zx)^{\beta} (Y)^{1-\beta}, \quad 0 < \beta < 1,$$

gdzie β jest daną liczbą. Funkcję tą możemy przedstawić w równoważnej postaci

$$\Phi(Zx, Y) = YA\left(\frac{x}{A}\right)^{\beta}, \quad A = 1 - \kappa_f \frac{\sigma}{R}, \quad Y = PRA.$$

Ponieważ stosunek względnych przyrostów użyteczności i pewności wynosi

$$\frac{d\Phi}{\Phi} : \frac{dA}{A} = 1 - \beta$$

więc współczynnik β posiada prostą interpretację psychologiczną. Jeśli decydent uważa, iż mały przyrost pewności waloru $\frac{\Delta A}{A} = 1\%$ powoduje przyrost użyteczności tego waloru o $\alpha\%$ to

$$\frac{d\Phi}{\Phi} : \frac{dA}{A} \approx \frac{\Delta\Phi}{\Phi} : \frac{\Delta A}{A} = \alpha ,$$

oraz $\beta = 1 - \alpha$.

Czym decydent jest bardziej wrażliwy na ryzyko (tj. przyrosty $\frac{\Delta A}{A}$) tym α jest większe, zaś β - mniejsze. W granicznym przypadku, tj. w przypadku decydenta o największej wrażliwości na przyrosty ryzyka współczynnik $\beta \approx 0$. Jest sprawą oczywistą, że współczynnik ten może zależeć od szeregu czynników indywidualnych decydenta, takich jak wiek, status materialny itp. W szczególności czym bogatszy jest decydent tym ma on większy parametr β oraz mniejszy α.

W celu skonstruowania linii rozdzielającej na płaszczyźnie $(R, \kappa\sigma)$, odpowiadającej konkretnej wartości parametru β, należy rozwiązać równanie (5), tj.

$$R = R_F\, A^{\beta-1} = R_F \left(1 - \kappa\frac{\sigma}{R}\right)^{\beta-1}, \qquad (6)$$

względem R. Dla przykładu, jeśli $\beta = 0{,}5$ równanie to przyjmuje postać

$$R^2 - \kappa\sigma R - R_F^2 = 0,$$

i posiada rozwiązanie ($R > 0$)

$$R = \frac{\kappa\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\kappa\sigma}{2}\right)^2 + R_F^2} \tag{7}$$

Wykres funkcji

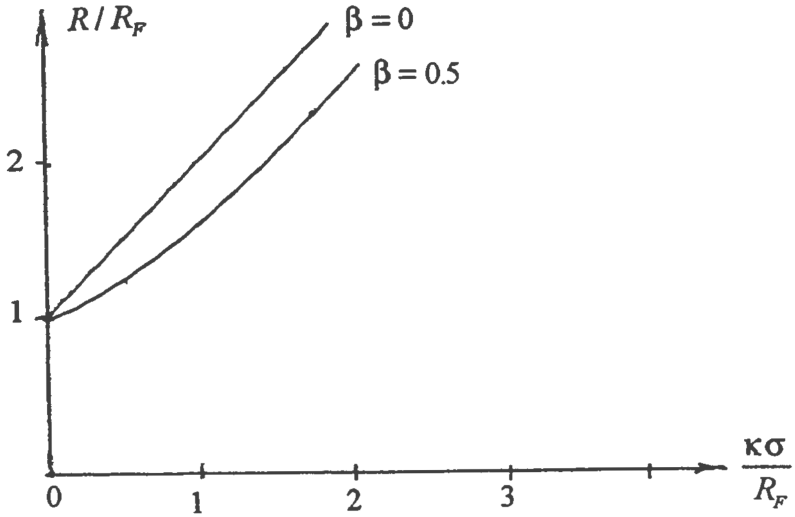
$$R / R_F = f\left(\frac{\kappa\sigma}{R_F}\right)$$

przedstawia Rys. 8.

Na rysunku tym podano też wykres linii rozdzielającej dla $\beta = 0$, tj.

$$R / R_F = 1 + \kappa\frac{\sigma}{R_F}$$

Można zauważyć, iż wraz ze wzrostem parametru β linia rozdzielająca przyjmuje postać wypukłą, która leży poniżej linii $\beta = 0$. Ze wzrostem σ linie o różnych β dążą do stycznych, które są równoległe do siebie oraz do linii z $\beta = 0$. Wynika stąd iż decydent, który posiada funkcję użyteczności z $\beta > \beta_0$, może preferować (akceptować) walory, które przez decydenta z $\beta = \beta_0$ były odrzucane, gdyż leżały poniżej jego linii rozdzielającej.



Rys. 8. Konstrukcja linii rozdzielającej

Skonstruowana w powyższy sposób linia rozdzielająca opiera się na modelu (6) z parametrem β, który jest indywidualną cechą decydenta, niełatwą do identyfikacji. Z powyższego względu wydaje się sprawą istotną poszukiwanie innych sposobów określenia linii rozdzielającej. Jednym z możliwych sposobów jest konstruowanie tej linii na podstawie określanego etapowo nachylenia $dR/d\sigma$. Różniczkując równanie

$$\varphi(\sigma, R) \stackrel{\Delta}{=} P\left[RAF\left(\frac{1}{A}\right) - R_F F(1)\right] = 0 \tag{8}$$

otrzymujemy

$$\varphi'_\sigma + \varphi'_R \frac{dR}{d\sigma} = 0,$$

lub

$$\frac{dR}{d\sigma} = -\frac{\varphi'_\sigma}{\varphi'_R}$$

Zastępując pochodne przyrostami skończonymi można napisać:

$$\frac{\Delta R}{\Delta \sigma} \approx -\frac{\Delta \varphi}{\Delta \sigma} : \frac{\Delta \varphi}{\Delta R}. \tag{9}$$

Jeśli ustalimy przyrosty użyteczności $\Delta\varphi$ i będziemy zmieniać $\Delta\sigma$ i ΔR w ten sposób by „trzymać się linii rozdzielającej", to z zależności (9) można wyliczyć nachylenia kolejnych stycznych do funkcji $R(\sigma)$. Procedura taka może przebiegać w sposób następujący:

W etapie początkowym rozważamy walor W_1, który posiada $R = R_F$ oraz $\sigma = \Delta\sigma$, gdzie $\Delta\sigma$ jest małą liczbą. Walorowi temu odpowiada $\varphi(\Delta\sigma, R_F) < \varphi(0, R_F)$ czyli $W_F \succ W_1$. Aby uzyskać walor $W_2 \sim W_F$ należy powiększyć zwrot o wartość ΔR_1, którą można obliczyć z zależności

$$\varphi(\Delta\sigma, R_F + \Delta R_1) = \varphi(0, R_F) = 0.$$

Zamiast obliczeń możemy tu także indagować decydenta, by powiedział jaki winien być przyrost ΔR_1 kompensujący $\Delta\sigma$.

Wartość

$$\kappa_1 = \frac{R_F + \Delta R_1 - R_F}{\Delta\sigma} = \frac{\Delta R_1}{\Delta\sigma}$$

jest tu miarą nachylenia stycznej do linii rozdzielającej w etapie początkowym.

W każdym kolejnym ν-tym etapie, gdzie mamy $\sigma = \sigma_\nu$, $R = R_\nu$ oraz $W_\nu \sim W_F$, powtarzamy powyższą procedurę, tj. powiększamy σ_ν o $\Delta\sigma$ (przez co obniżamy φ_ν), a następnie zwiększamy R_ν o ΔR_ν tak by $W_{\nu+1} \sim W_F$.

Wypukłość linii rozdzielającej powoduje (poza przypadkiem $\beta = 0$) iż nachylenie stycznej $dR/d\sigma$ rośnie ze wzrostem σ_ν. Oznacza to, że decydent unikający ryzyka na kolejnych etapach procesu (ze stałą wartością $\Delta\sigma$) będzie wybierał coraz większe przyrosty ΔR_v aby utrzymać się na krzywej indyferencji, jaką jest linia rozdzielająca (por. Rys. 8).

Opierając się na pojęciu linii rozdzielającej można porównywać różne walory pomiędzy sobą, a w tym i walor bezryzykowy.

W niektórych przypadkach praktycznych określenie numerycznej wartości β może okazać się trudne lub niewykonalne. Można wtedy posłużyć się linią rozdzielającą z $\beta = 0$.

Ponieważ, zgodnie z (6)

$$R_i(\beta) = R_F A_i^{\beta-1},$$

mamy

$$R_i(\beta) \leq \max_{0\leq\beta\leq1} R_i(\beta) = R_i(0) = R_F A_i^{-1},$$

więc linię

$$R_i A_i - R_F = R_i - R_F - \kappa_f \sigma_i = 0$$

można traktować jako kryterium akceptacji walorów przez najbardziej wrażliwego (na przyrosty ryzyka) decydenta.

Szczególnie ciekawe wydaje się porównanie walorów z przykładu podanego przez Allais, który omawiano już w § 2.2. Przykład ten dotyczył dwóch sytuacji (I, II) w których decydent winien dokonać wyboru pomiędzy jedną z dwóch loterii, tj. pomiędzy L_1 i L_2 w sytuacji I oraz pomiędzy L_3 i L_4 w sytuacji II.

Aby zastosować model wyboru oparty na kryterium z linią rozdzielającą musimy obliczyć wartości oczekiwane R_i oraz wariancje σ_i^2 dla kolejnych loterii L_i, $i = 1,\dots,4$.

W przypadku L_1 mamy:

$$R_1 = R_F = 0{,}5, \quad \sigma_1 = 0$$

W przypadku L_2 mamy:

$$R_2 = 0{,}1 \cdot 2{,}5 + 0{,}89 \cdot 0{,}5 + 0{,}01 \cdot 0 = 0{,}695$$

$$\sigma_2^2 = 0{,}1[R_2 - 2{,}5]^2 + 0{,}89[R_2 - 0{,}5]^2 + 0{,}01[R_2 - 0] = 0{,}364; \quad \sigma_2 = 0{,}604$$

W podobny sposób znajdujemy:

$$R_3 = 0{,}11 \cdot 0{,}5 = 0{,}055$$

$$\sigma_3^2 = 0{,}11[R_3 - 0{,}5]^2 + 0{,}89[R_3 - 0]^2 = 0{,}0245; \quad \sigma_3 = 0{,}157$$

oraz

$$R_4 = 2{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}25$$

$$\sigma_4^2 = 0{,}1[R_4 - 2{,}5]^2 + 0{,}9[R_4 - 0]^2 = 0{,}563; \quad \sigma_4 = 0{,}750$$

Możemy teraz zbadać, oddzielnie w sytuacji I oraz II, czy zachodzi $L_1 \succ L_2$ oraz $L_3 \succ L_4$, czy też na odwrót.

Przyjmiemy jako kryterium preferencji położenie punktów charakteryzujących loterie względem linii rozdzielającej

$$R_i = R_F + \kappa_f \sigma_i,$$

czyli - wartości jakie przyjmuje zwrot nadzwyczajny

$$R_{ei} = R_i - (R_F + \kappa_f \sigma_i) \quad \text{dla} \quad i = 1,2,3,4$$

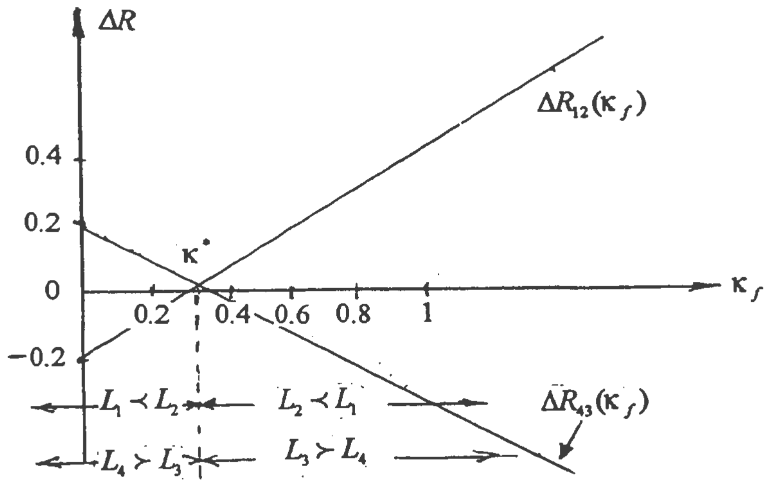
oraz danej wartości κ_f.

Następnie określamy przyrosty zwrotów nadzwyczajnych w sytuacji I:

$$\Delta R_{12} = R_{e1} - R_{e2} = R_1 - R_2 - \kappa_f(\sigma_1 - \sigma_2)$$

$$= 0{,}5 - 0{,}695 - \kappa_f (0 - 0{,}604)$$

$$= -0{,}195 + 0{,}609\kappa_f \tag{10}$$



Rys. 9. Zwroty nadzwyczajne dla problemu Allais

oraz w sytuacji II:

$$\Delta R_{43} = R_4 - R_3 - \kappa_f (\sigma_4 - \sigma_3)$$

$$= 0{,}195 - 0{,}593\kappa_f \tag{11}$$

Wykresy linii $\Delta R_{12} = -0.195 + 0.609\kappa_f$ i $\Delta R_{43} = 0.195 - 0.593\kappa_f$ podano na Rys. 9.

Z rysunku tego wynika iż:

$$\Delta R_{12} < 0 \;\; (L_1 \prec L_2) \quad \text{dla} \quad \kappa_f < \kappa^* = \frac{0.195}{0.609} = 0.32$$

$$\Delta R_{12} > 0 \ (L_1 \succ L_2) \quad \text{dla} \quad \kappa_f > \kappa^*$$

oraz

$$\Delta R_{43} > 0 \ (L_4 \succ L_3) \quad \text{dla} \quad \kappa_f < \kappa_f^*$$

$$\Delta R_{43} < 0 \ (L_3 \succ L_4) \quad \text{dla} \quad \kappa_f > \kappa_f^*$$

Wynika stąd również iż decydenci z $\kappa_f < \kappa^*$ winni preferować L_2 od L_1 $(L_2 \succ L_1)$ oraz L_4 od L_3 $(L_4 \succ L_3)$ - czyli przeciwnie niż Allais. Decydenci o dużej motywacji antywariancyjnej $(\kappa_f > \kappa^*)$ winni też preferować przeciwnie niż Allais, tj. $L_1 \succ L_2$ oraz $L_3 \succ L_4$. Wnioski powyższe potwierdzają analizę przeprowadzoną przez Savage'a, o której wspomniano w § 2.2.

Rozpatrzony przykład wskazuje na fakt, iż przy wyborze modelu użyteczności w postaci jednoczynnikowej (tj. nie uwzględniającym aspektów psychologicznych decydenta) decyzje sugerowane przez model mogą być sprzeczne z intuicją decydenta. Stąd też bierze się zapewne krytyka modelu oczekiwanej użyteczności ze strony Allais i innych. Jeśli przyjmiemy iż ludzie charakteryzują się nie tylko malejącą marginalną użytecznością ze względu na zwrot z inwestycji Zx, lecz również - indywidualna postawą wobec ryzyka, tj. parametrem $A = 1 - \kappa_f \sigma / R$, wtedy staje się sprawą jasną iż należy poszukiwać modelu użyteczności w klasie modeli dwuczynnikowych.

Rozważania niniejszego rozdziału można zreasumować w sposób następujący.

Zaproponowano, dla potrzeb wspomagania decyzji obarczonych ryzykiem, dwuczynnikową funkcję użyteczności. Czynnik pierwszy (Zx) wyraża oczekiwany zwrot z zainwestowanego kapitału, drugi - zwrot graniczny (Y), oddzielający obszar zwrotów gorszych od lepszych. Czym większy jest stosunek $A = Y/Z$ tych zwrotów tym pewniejszą wydaje się inwestycja w oczach inwestora. Inaczej mówiąc zakłada się iż analizując określony walor inwestor interesuje się przede wszystkim oczekiwanym zwrotem (R) oraz pewnym atrybutem tego zwrotu, jakim jest współczynnik pewności (A). W ramach takiego modelu popularne w żargonie inwestorów wyrażenia: „To jest dobry interes lecz niezbyt pewny” lub - „Akcja ta daje niewielki zysk lecz jest to zysk dosyć pewny” stają się zrozumiałe, gdyż ocena zysku lub „interesu” z inwestycji dokonuje się w terminach dwuczynnikowej funkcji użyteczności. Przedstawiony tu model użyteczności zmierza do uściślenia percepcji korzyści (zwrotu) i ryzyka (pewności) przez inwestorów. Wychodzimy bowiem z założenia, że inwestor zaakceptuje system wspomagający decyzje jeśli będzie on postrzegany jako (swego rodzaju) wykwalifikowany doradca, który operuje zrozumiałymi i prostymi pojęciami.

Omawiany model pozwala również uwzględnić indywidualne (subiektywne) cechy inwestora, wyrażone przez parametry κ i β, a także parametry zewnętrzne (obiektywne), takie jak σ i R, które występują we współczynniku $A = 1 - \kappa\, \sigma / R$. Inaczej mówiąc, współczynnik pewności wyraża w formie syntetycznej zarówno przekonanie o obiektywnych szansach inwestora, jak i o jego subiektywnych zdolnościach, wiedzy i doświadczeniu, gwarantujących pomyślną realizację inwestycji.

W przypadku, gdy mamy do czynienia z inwestycjami pozbawionymi ryzyka $A = 1$ i dwuczynnikowa funkcja użyteczności redukuje się do klasycznej funkcji użyteczności stosowanej szeroko w naukach ekonomicznych. Dwuczynnikowy model pozwala tu opisać zachowanie decydenta o ustalonych preferencjach ekonomicznych (konsumpcyjnych), wyrażonych przez β, oraz - zmiennych postawach wobec ryzyka (np. $\kappa_f > 0$ lub $\kappa_a < 0$).

Proponowany model decyzyjny inwestora, który opisuje dwuczynnikowa funkcja użyteczności ma przede wszystkim na celu lepsze opisanie zachowania się inwestora wobec ryzyka. Funkcja jednoczynnikowa, jak to wynika z argumentacji Allais'a niezbyt nadaje się do tego celu. Zalety dwuczynnikowej funkcji użyteczności mogą sugerować celowość zwiększenia wymiarowości, tj. zastosowania n-czynnikowej ($n > 2$) funkcji użyteczności. Można by tu na przykład uwzględnić wyższe momenty funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla oczekiwanych zwrotów.

Z drugiej strony operowanie złożonymi funkcjami użyteczności skomplikowałoby jeszcze bardziej i tak już trudny problem identyfikacji subiektywnych parametrów użyteczności inwestora i zwiększyłoby dystans jako dzieli teorię i praktykę inwestowania. Z powyższych względów ograniczamy się tu do względnie skromnego modelu z dwuczynnikową funkcją użyteczności (2).

Funkcja ta nie tylko daje lepszą interpretację zachowania się decydenta w obliczu różnych form ryzyka. Jak zobaczymy w następnych punktach niniejszej pracy umożliwia ona rozwiązywanie problemów optymalizacji portfela, z szeroką gamą walorów, w stosunkowo prosty sposób rachunkowy.

3. Modele równowagi rynku kapitałowego

W § 2 zajmowaliśmy się problemem wyceny lub wyboru obarczonych ryzykiem walorów przez indywidualnego decydenta. Wybór w takich sytuacjach jest możliwy jeśli decydent może określić swoje indywidualne kryterium wyboru lub funkcję użyteczności. Opierając się na tym kryterium konstruuje on linię rozdzielającą w płaszczyźnie parametrów (σ, R).

Przyjmując iż mamy do czynienia ze zbiorem decydentów, którzy działają na rynku kapitałowym, pozostaje do wyjaśnienia problem: w jaki sposób odbywa się wycena zbiorowa poszczególnych walorów, tj. jak ustala się równowaga oraz ceny tych walorów?

Wspomaganie decyzji inwestycyjn

Roman Kulikowski,
Marek Libura,
Leon Słomiński

W książce omawiane są zagadnienia z obszaru analizy finansowej i teorii portfela inwestycyjnego z wykorzystaniem komputerowej metodologii wspomagającej podejmowanie decyzji.
Książka może być przedmiotem zainteresowania zarówno decydentów, podejmujących decyzje finansowe, jak i inwestorów giełdowych i doradców finansowych oraz studentów i doktorantów.
Monografia pozwoli głębiej i pełniej zrozumieć złożoną problematykę finansów i inwestycji, z uwzględnieniem różnych form ryzyka i podejmować w działalności praktycznej decyzje optymalne.
Rozważane są zasady konstruowania modeli matematycznych opisujących rynki kapitałowe – kształtowanie się cen oraz oczekiwanych zwrotów nakładów inwestycyjnych – jak również modeli działalności inwestora w postaci tzw. funkcji użyteczności.

ISBN 83-85847-09-X

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 37-35-78 w. 241 e-mail: kotuszew@ibspan.waw.pl